ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 20 № 2 2014

УДК 512.542.5

О ГЛАВНЫХ ФАКТОРАХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ МАКСИМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП ГРУППЫ ${}^2E_6(q^2)$ [1]

В. В. Кораблева

Для конечной простой группы скрученного лиева типа ${}^2E_6$ уточняется описание главных факторов параболической максимальной подгруппы, входящих в ее унипотентный радикал. Результаты представлены в виде теоремы, в которой для каждой параболической максимальной подгруппы группы ${}^2E_6(q^2)$ даются фрагменты главных рядов, входящие в унипотентный радикал этой параболической подгруппы. Приводится таблица, в которой указываются порождающие элементы и порядки соответствующих главных факторов.

Ключевые слова: конечная группа лиева типа, параболическая подгруппа, главный фактор.

Keywords: finite group of Lie type, parabolic subgroup, chief factor.

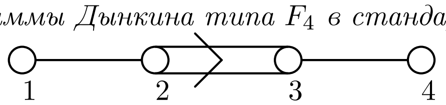
Введение

Одной из фундаментальных задач теории групп является изучение подгруппового строения данной группы. Группы лиева типа составляют основной массив конечных простых групп. Изучение унипотентных подгрупп группы лиева типа является ключом в понимании ее строения и свойств. В предыдущей работе автора [1] было получено уточненное описание главных факторов параболических максимальных подгрупп, входящих в унипотентный радикал, для всех групп нормального лиева типа, за исключением специальных групп (определение ниже). В данной работе продолжаются исследования в этом направлении и рассматривается скрученная группа ${}^2E_6(q^2)$.

Пусть G — группа Шевалле над полем K характеристики p и $P = UL$ — параболическая подгруппа в G, где U — унипотентный радикал и L — дополнение Леви в P. Будем говорить, что группа G *специальная*, если $p = 2$ для групп типа B_l, C_l, F_4 и $p \leqslant 3$ для групп типа G_2. Из результатов работы [2] следует, что для неспециальных групп G факторы нижнего центрального ряда группы U являются вполне приводимыми KL-модулями и разложимы в прямое произведение главных факторов группы P. Число этих факторов не зависит от поля K, а зависит только от лиева типа группы G.

В настоящей работе автором для конечной простой группы ${}^2E_6(q^2)$ уточняется описание главных факторов каждой ее параболической максимальной подгруппы, входящих в унипотентный радикал. Эти главные факторы являются неприводимыми $GF(q)L$-модулями или $GF(q^2)L$-модулями. Доказана следующая

Теорема. *Пусть $G = {}^2E_6(q^2)$ – конечная простая скрученная группа лиева типа и P_k — параболическая максимальная подгруппа группы G, полученная удалением k-ой вершины диаграммы Дынкина типа F_4 в стандартном упорядочении вершин*



.

Тогда выполнены следующие утверждения.

(1) *Фрагмент главного ряда группы P_k, входящий в ее унипотентный радикал U, имеет вид*

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 13–01–00469) и Лаборатории квантовой топологии Челябинского госуниверситета (грант правительства РФ № 14.Z50.31.0020)

(a) $U = U_1 > U_2 > 1$ *при* $k = 1$ *и* $k = 4$,

(b) $U = U_1 > U_2 > U_3 > 1$ *при* $k = 2$,

(c) $U = U_1 > U_2 > U_3 > U_4 > 1$ *при* $k = 3$.

(2) *Порядки главных факторов соответствующих главных рядов содержатся в следующем списке*:

(a) $\mid U_1/U_2 \mid = q^{20}$, $\mid U_2 \mid = q$ *при* $k = 1$;

(b) $\mid U_1/U_2 \mid = q^{18}$, $\mid U_2/U_3 \mid = q^9$, $\mid U_3 \mid = q^2$ *при* $k = 2$;

(c) $\mid U_1/U_2 \mid = q^{12}$, $\mid U_2/U_3 \mid = q^{12}$, $\mid U_3/U_4 \mid = q^4$, $\mid U_4 \mid = q^3$ *при* $k = 3$;

(d) $\mid U_1/U_2 \mid = q^{16}$, $\mid U_2 \mid = q^8$ *при* $k = 4$.

Полезные следствия из доказательства этой теоремы составляют содержание двух таблиц, которые приведены в конце работы.

1. Обозначения и вспомогательные результаты

Обозначения и терминология, связанные с теорией представлений групп, алгебраическими группами и конечными группами лиева типа, в основном стандартны, их можно найти в [3–7].

Зафиксируем поле K и присоединенную группу Шевалле $G = G(K)$. Пусть Φ — система корней группы G, π — множество простых корней и Φ^+ — соответствующее множество положительных корней в Φ. Известно, что $G = \langle x_\gamma(t) \mid t \in K, \gamma \in \Phi\rangle$ и корневая подгруппа $X_\gamma = \{x_\gamma(t) \mid t \in K\}$, соответствующая корню $\gamma \in \Phi$, изоморфна аддитивной группе поля K. Для любого подмножества простых корней J из π обозначим через Φ_J множество корней из Φ, натянутых на J, и положим $\Phi_J^+ = \Phi^+ \cap \Phi_J$. Зафиксируем параболическую подгруппу $P = P_J$, соответствующую подмножеству J из π. Тогда P — стандартная параболическая подгруппа в G, соответствующая системе корней Φ_J. Известно разложение Леви подгруппы P: $P = UL$, где $U = \langle X_\gamma \mid \gamma \in \Phi^+ \setminus \Phi_J^+\rangle$ — унипотентный радикал, L — дополнение Леви в P. Известно, что $U = \prod X_\gamma$, где произведение берется в некотором фиксированном порядке по всем корням $\gamma \in \Phi^+ \setminus \Phi_J^+$. Обозначим j-й член нижнего центрального ряда группы U через $U^{(j)}$, где $j \geqslant 1$ и $U = U^{(1)}$.

Для любого $\gamma \in \Phi^+$ запишем $\gamma = \gamma_J + \gamma_{J'}$, где $\gamma_J = \sum\limits_{r\in J} c_r r$ и $\gamma_{J'} = \sum\limits_{r\in\pi\setminus J} d_r r$ $(0 \leqslant c_r, d_r \in \mathbb{Z})$. Число $ht(\gamma) = \sum\limits_{r\in J} c_r + \sum\limits_{r\in\pi\setminus J} d_r$ называется *высотой* корня γ. Следуя [2], число $level(\gamma) = \sum\limits_{r\in\pi\setminus J} d_r$ назовем *уровнем* корня γ, а величину $shape(\gamma) = \gamma_{J'}$ — *шейпом* корня γ. Для любого $j \geqslant 1$ положим $U_j = \langle X_\gamma \mid \gamma \in \Phi^+, level(\gamma) \geqslant j\rangle$.

Из коммутаторной формулы Шевалле следует, что каждая подгруппа U_j является нормальной в P, а фактор группа U_j/U_{j+1} изоморфна $\prod X_\gamma$, где произведение берется в некотором фиксированном порядке по всем положительным корням γ, для которых $level(\gamma) = j$. Для всех корней $\gamma \in \Phi^+ \setminus \Phi_J^+$, у которых $level(\gamma) = j$ и $shape(\gamma) = S$, положим

$$V_S = \Bigg(\prod_{\substack{shape(\gamma) = S,\\ level(\gamma) = j}} X_\gamma\Bigg) U_{j+1}/U_{j+1} \text{ и запишем } U_j/U_{j+1} = \prod V_S,$$

где S пробегает множество различных шейпов корней уровня j из $\Phi^+ \setminus \Phi_J^+$.

Для любого $j \geqslant 1$ группа L действует сопряжениями на фактор группе U_j/U_{j+1}. Если $\gamma \in \Phi^+ \setminus \Phi_J$ и $level(\gamma) = j$, то положим $cx_\gamma(t)U_{j+1} = x_\gamma(ct)U_{j+1}$ для элементов $c, t \in K$. Таким образом, фактор группа U_j/U_{j+1} становится KL-модулем. С помощью коммутаторной формулы Шевалле легко получается следующая лемма.

Лемма 1. (1) *Векторное пространство V_S над полем K изоморфно внешней прямой сумме корневых подгрупп X_γ для которых $shape(\gamma) = S$.*

(2) *V_S нормализуется группой L и является KL-подмодулем модуля U_j/U_{j+1}.*

Если A и B — нормальные подгруппы группы P, B — подгруппа A и фактор группа A/B — минимальная нормальная подгруппа в P/B, то A/B называется *главным фактором* группы P.

Лемма 2 [2, теорема 2]. *Пусть $G = G(K)$ — неспециальная группа Шевалле над полем K, подгруппы $P = UL$, U_j, $U^{(j)}$ и V_S для $j \geqslant 1$ такие, как определены выше. Тогда выполнены следующие утверждения.*

(1) *$U_j = U^{(j)}$ для любого $j \geqslant 1$.*

(2) *Если $|K| > 5$, S и S' — различные шейпы, то V_S и $V_{S'}$ являются неэквивалентными KL-модулями.*

(3) *Для каждого $j \geqslant 1$ модуль U_j/U_{j+1} изоморфен прямой сумме неприводимых модулей V_S, где сумма берется в произвольном порядке по всем различным шейпам S корней уровня j из $\Phi^+ \setminus \Phi^+_J$. В частности, U_j/U_{j+1} вполне приводимый KL-модуль.*

(4) *V_S является главным фактором группы P для любого шейпа S.*

Группы лиева типа имеют полезную интерпретацию в виде подгрупп линейных алгебраических групп. Пусть $\overline{G} = G(\overline{GF(p)})$, где $\overline{GF(p)}$ — алгебраическое замыкание конечного поля простого порядка p. Рассмотрим $\overline{G}$ как алгебраическую группу присоединенного типа и пусть она неспециальна. Автоморфизм поля $\overline{GF(p)}$ может быть задан как отображение $x \mapsto x^{p^a}$ для $x \in \overline{GF(p)}$ и подходящего натурального a. Положим $q = p^a$ и обозначим соответствующий полевой автоморфизм группы $\overline{G}$ через q. Обозначим через σ эндоморфизм группы $\overline{G}$ с конечным централизатором $\overline{G}_\sigma = \{g \in \overline{G} \mid g^\sigma = g\}$ (образ элемента g при отображении σ обозначаем через g^σ). Известно (см. [8]), что $\sigma = q\tau$, где τ — графовый автоморфизм группы $\overline{G}$ (возможно тривиальный). Пусть $G = O^{p'}(\overline{G}_\sigma)$ — подгруппа из $\overline{G}_\sigma$, порожденная всеми ее p-элементами. Тогда G является конечной группой лиева типа. В случае, когда автоморфизм τ является тривиальным, группа G называется *нескрученной* или *расщепленной*. В остальных случаях группа G называется *скрученной*.

Далее будем различать обозначения подгрупп и элементов алгебраических групп, их отмечаем чертой сверху, а соответствующие им объекты конечных групп пишем без черты. В группе $\overline{G}$ выбираем σ-инвариантную параболическую подгруппу $\overline{P} = \overline{U}\ \overline{L}$, где $\overline{U}$ — унипотентный радикал и $\overline{L}$ — дополнение Леви в $\overline{P}$. Тогда $P = G \cap \overline{P}_\sigma$ является параболической подгруппой в группе G с унипотентным радикалом $U = \overline{U}_\sigma$ и дополнением Леви $L = G \cap \overline{L}_\sigma$. Положим $L_0 = O^{p'}(L)$. Если группа G нескрученная, то типы системы корней групп G и $\overline{G}$ совпадают. Заметим, что σ действует на каждой подгруппе $\overline{U}_j$ $(j \geqslant 1)$ и переставляет слагаемые $\overline{V}_S$ в фактор группе $\overline{U}_j/\overline{U}_{j+1}$. При доказательстве нашей теоремы существенно используются следующие две леммы.

Лемма 3 [2, леммы 5,6]. (1) *$(\overline{U}_j/\overline{U}_{j+1})_\sigma = (\overline{U}_j)_\sigma \overline{U}_{j+1}/\overline{U}_{j+1}$ для всех $j \geqslant 1$. В частности, фактор-модули $(\overline{U}_j)_\sigma/(\overline{U}_{j+1})_\sigma$ и $(\overline{U}_j/\overline{U}_{j+1})_\sigma$ являются L-изоморфными.*

(2) *Если группа $\overline{G}$ неспециальная, то $(\overline{U}^{(j)})_\sigma = (\overline{U}_\sigma)^{(j)}$ для каждого $j \geqslant 1$.*

Лемма 4 [2, лемма 7]. *Пусть группа $\overline{G}$ неспециальная и S – фиксированный шейп корней из $\Phi^+ \setminus \Phi^+_J$. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) *Если* $\overline{V}_S^\sigma = \overline{V}_S$, *то* $(\overline{V}_S)_\sigma$ *является абсолютно неприводимым* $GF(q)L_0$*-модулем.*

(2) *Если* $\overline{V}_S^\sigma \neq \overline{V}_S$ *и* $\mid \tau \mid = 2$, *то* $(\overline{V}_S \oplus \overline{V}_S^\sigma)_\sigma$ *является абсолютно неприводимым* $GF(q^2)L_0$*-модулем.*

Пусть корни шейпа S имеют уровень j. Если $\overline{V}_S^\sigma \neq \overline{V}_S$ и $\mid \tau \mid = 2$, то $\overline{V}_S^{\sigma^2} = \overline{V}_S$ и σ^2 индуцирует $GF(q^2)$-линейое преобразование пространства U_j/U_{j+1}. Аддитивная группа $(\overline{V}_S \oplus \overline{V}_S^\sigma)_\sigma$ порождается элементами вида $\overline{x}_\gamma(t)\overline{U}_{j+1} + \overline{x}_{\gamma^\rho}(t^q)\overline{U}_{j+1}$, где t пробегает поле $GF(q^2)$ и ρ — биекция системы корней Φ, соответствующая графовому автоморфизму τ. Для элементов $\gamma \in \Phi^+ \setminus \Phi_J$ уровня j и для $c, t \in GF(q^2)$ положим

$$c(\overline{x}_\gamma(t)\overline{U}_{j+1} + \overline{x}_{\gamma^\rho}(t^q)\overline{U}_{j+1}) = \overline{x}_\gamma(ct)\overline{U}_{j+1} + \overline{x}_{\gamma^\rho}(c^q t^q)\overline{U}_{j+1}.$$

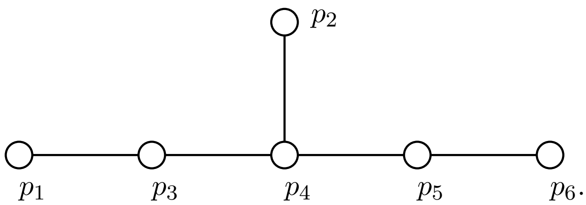
Таким образом, группа $(\overline{V}_S \oplus \overline{V}_S^\sigma)_\sigma \cong (\overline{V}_S)_{\sigma^2}$ становится $GF(q^2)L$-модулем.

Как частный случай теоремы 3 из [2] получается следующая лемма.

Лемма 5. *Пусть* $G = {}^2E_6(q^2)$ *– конечная скрученная группа лиева типа, соответствующая эндоморфизму* $q\tau$ *простой алгебраической группы типа* E_6, $P = UL$ *— параболическая подгруппа в* G *с унипотентным радикалом* U *и дополнением Леви* L *в* P. *Тогда факторы нижнего центрального ряда группы* U *являются прямыми суммами главных факторов группы* P, *каждый из которых есть* $GF(q)L$*-модуль или* $GF(q^2)L$*-модуль.*

2. Доказательство теоремы

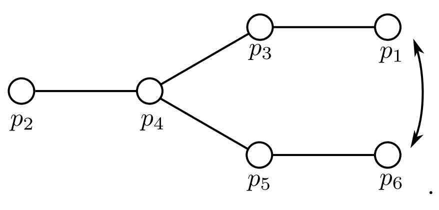
Рассмотрим систему корней Φ типа E_6. Пусть p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6 — ее простые корни, а диаграмма Дынкина имеет вид



Обозначив через $c_1c_2c_3c_4c_5c_6$ произвольный корень $\sum_{i=1}^6 c_i p_i$ из Φ ($c_i \in \mathbb{Z}$), получим множество положительных корней Φ^+, состоящее из элементов

$$100000, 010000, 001000, 000100, 000010, 000001, 101000, 010100, 001100, 000110, 000011, 101100,$$
$$011100, 010110, 001110, 000111, 111100, 101110, 011110, 010111, 001111, 111110, 101111, 011210,$$
$$011111, 111210, 111111, 011211, 112210, 111211, 011221, 112211, 111221, 112221, 112321, 122321.$$

Существует отображение ρ системы на себя, индуцированное следующей симметрией ее диаграммы Дынкина



Обозначим образ корня $\gamma \in \Phi$ при этом отображении через γ^ρ и образ подмножества корней A из Φ — через A^ρ. Любая ρ-орбита множества Φ^+ имеет вид $\{\gamma\}$ или $\{\gamma, \gamma^\rho\}$, так как $\rho^2 = 1$. Укажем эти орбиты:

$$\{010000\}, \{000100\}, \{010100\}, \{001110\}, \{011110\}, \{101111\}, \{011210\}, \{111111\}, \{111211\},$$
$$\{112221\}, \{112321\}, \{122321\}, \{100000, 000001\}, \{001000, 000010\}, \{101000, 000011\},$$
$$\{001100, 000110\}, \{101100, 000111\}, \{011100, 010110\}, \{111100, 010111\}, \{101110, 001111\},$$
$$\{111110, 011111\}, \{111210, 011211\}, \{112210, 011221\}, \{111221, 112211\}.$$

Далее зафиксируем некоторые обозначения. В конечной группе $E_6(q^2)$ рассмотрим две подгруппы. Первая состоит из элементов $x_\alpha(t)$, где $t \in GF(q)$ и α образует одноэлементную ρ-орбиты множества Φ^+, а вторая — из элементов $x_\beta(t)x_{\beta^\rho}(t^q)$, где $t \in GF(q^2)$ и β является представителем двухэлементной ρ-орбиты множества Φ^+. Первую всегда будем обозначать через X_α, а вторую — через X_β, причем будем записывать эти подгруппы аддитивно, таким образом, $X_\alpha = \{x_\alpha(t) \mid t \in GF(q)\}$ и $X_\beta = \{x_\beta(t) + x_{\beta^\rho}(t^q) \mid t \in GF(q^2)\}$. Корневые подгруппы алгебраической группы $\overline{G} = E_6(\overline{GF(p)})$ всегда обозначаем далее через $\overline{X}_\gamma$ для $\gamma \in \Phi$.

Рассмотрим четыре σ-инвариантные параболические подгруппы $\overline{P}_{J_i}$ в группе $\overline{G}$, соответствующие следующим четырем подсистемам простых корней: $J_1 = \{p_1, p_3, p_4, p_5, p_6\}$, $J_2 = \{p_1, p_2, p_3, p_5, p_6\}$, $J_3 = \{p_1, p_2, p_4, p_6\}$ и $J_4 = \{p_2, p_3, p_4, p_5\}$.

Для J_1 множество $\Phi^+ \setminus \Phi^+_{J_1}$ состоит из корней 010000, 010100, 011100, 010110, 111100, 011110, 010111, 111110, 011210, 011111, 111210, 111111, 011211, 112210, 111211, 011221, 112211, 111221, 112221, 112321, 122321. Корень $122321 \in \Phi^+ \setminus \Phi^+_{J_1}$ имеет шейп, равный $2p_2$, а остальные корни из $\Phi^+ \setminus \Phi^+_{J_1}$ — равный p_2. Нижний центральный ряд группы $\overline{U}$ имеет вид $\overline{U} = \overline{U}_1 > \overline{U}_2 > 1$ и $\overline{U}_1 = \prod \overline{X}_\gamma$, где произведение берется в некотором фиксированном порядке по всем корням $\gamma \in \Phi^+ \setminus \Phi^+_{J_1}$, а $\overline{U}_2 = \overline{X}_{122321}$. Представим множество корней $\Phi^+ \setminus \Phi^+_{J_1}$ в виде объединения трех непересекающихся подмножеств $A_1 = \{010000, 010100, 011110, 011210, 111111, 111211, 112221, 112321, 122321\}$, $B_1 = \{011100, 111100, 111110, 111210, 112210, 112211\}$, $B_1^\rho = \{010110, 010111, 011111, 011211, 011221, 111221\}$. Множества A_1 и $B_1 \cup B_1^\rho$ являются объединениями одноэлементных и двухэлементных ρ-орбит корней $\Phi^+ \setminus \Phi^+_{J_1}$ соответственно. Имеем

$$U = (\overline{U})_\sigma = \langle x_\alpha(t), x_\beta(s)x_{\beta^\rho}(s^q) \mid \alpha \in A_1, \beta \in B_1, t \in GF(q), s \in GF(q^2)\rangle \cong \oplus_{\alpha\in A_1} X_\alpha \oplus_{\beta \in B_1} X_\beta.$$

Так как $\overline{V}^\sigma_{p_2} = (\overline{U}_1/\overline{U}_2)^\sigma = \overline{V}_{p_2}$ и $\overline{V}^\sigma_{2p_2} = (\overline{U}_2)^\sigma = \overline{V}_{2p_2}$, то по лемме 4 модули $(\overline{V}_{p_2})_\sigma$ и $(\overline{V}_{2p_2})_\sigma$ являются абсолютно неприводимыми $GF(q)L_0$-модулями. Воспользовавшись леммой 3, найдем их строение. Получаем $(\overline{V}_{p_2})_\sigma = (\overline{U}_1/\overline{U}_2)_\sigma \cong (\overline{U}_1)_\sigma/(\overline{U}_2)_\sigma \cong \oplus_{\alpha \in A_1\setminus\{122321\}} X_\alpha \oplus_{\beta\in B_1} X_\beta$, $(\overline{V}_{2p_2})_\sigma = (\overline{U}_2)_\sigma \cong (\overline{U}_2)_\sigma = (\overline{X}_{122321})_\sigma = X_{122321} = \{x_{122321}(t) \mid t \in GF(q)\}$.

Для J_2 множество $\Phi^+ \setminus \Phi^+_{J_2}$ состоит из корней 000100,010100, 001100, 000110, 101100, 011100, 010110, 001110, 000111, 111100, 101110, 011110,010111,001111, 111110, 101111, 011210, 011111, 111210, 111111, 011211, 112210, 111211, 011221, 112211, 111221, 112221, 112321, 122321. Укажем шейпы корней из этого множества. Корни 112321, 122321 имеют шейп, равный $3p_4$, и неподвижны при действии ρ, корни 011210, 111210, 011211, 112210, 111211, 011221, 112211, 111221, 112221 — равный $2p_4$, а остальные корни из $\Phi^+ \setminus \Phi^+_{J_2}$ — равный p_4. Нижний центральный ряд группы $\overline{U}$ имеет вид $\overline{U} = \overline{U}_1 > \overline{U}_2 > \overline{U}_3 > 1$. Так как $(\overline{V}_{p_4})^\sigma = (\overline{U}_1/\overline{U}_2)^\sigma = \overline{V}_{p_4}$, $(\overline{V}_{2p_4})^\sigma = (\overline{U}_2/\overline{U}_3)^\sigma = \overline{V}_{2p_4}$, $\overline{V}^\sigma_{3p_4} = (\overline{U}_3)^\sigma = \overline{V}_{3p_4}$, то по лемме 4 модули $(\overline{V}_{p_4})_\sigma$, $(\overline{V}_{2p_4})_\sigma$ и $(\overline{V}_{3p_4})_\sigma$ являются абсолютно неприводимыми $GF(q)L_0$-модулями. Лемма 3 уточняет их строение. Получаем $(\overline{V}_{p_4})_\sigma \cong (\overline{U}_1)_\sigma/(\overline{U}_2)_\sigma \cong \oplus_{\alpha\in C_2} X_\alpha \oplus_{\beta\in D_2} X_\beta$, где $C_2 = \{000100, 010100, 001110, 011110, 101111, 111111\}$ и $D_2 = \{001100, 101100, 011100, 111100, 101110, 111110\}$. Аналогично $(\overline{V}_{2p_4})_\sigma = (\overline{U}_2/\overline{U}_3)_\sigma \cong (\overline{U}_2)_\sigma/(\overline{U}_3)_\sigma \cong \oplus_{\alpha\in A_2} X_\alpha \oplus_{\beta\in B_2} X_\beta$, где $A_2 = \{011210, 111211, 112221\}$ и $B_2 = \{111210, 112210, 112211\}$, а $(\overline{V}_{3p_4})_\sigma = (\overline{U}_3)_\sigma \cong (\overline{U}_3)_\sigma \cong X_{112321} \oplus X_{122321}$, где $X_{112321} = \{x_{112321}(t) \mid t \in GF(q)\}$ и $X_{122321} = \{x_{122321}(t) \mid t \in GF(q)\}$.

Рассмотрим $J_3=\{p_1,p_2,p_4,p_6\}$. Представим множество $\Phi^+\setminus\Phi^+_{J_3}$ в в виде объединения непересекающихся подмножеств следующим образом : $\Phi^+\setminus\Phi^+_{J_3}=A_3\cup A_3^\rho\cup B_3\cup C_3\cup C_3^\rho\cup D_3$. Корни из множеств $A_3=\{001000,101000,001100,101100,011100,111100\}$, $A_3^\rho=\{000010{,}000110{,}000011{,}010110,\ 000111,\ 010111\}$, $B_3=\{001110,\ 101110,\ 011110,\ 001111,\ 111110,\ 101111,\ 011210,\ 011111,\ 111210,\ 111111,\ 011211,\ 111211\}$, $C_3=\{112210,\ 112211\}$, $C_3^\rho=\{011221,111221\}$, $D_3=\{112221,112321,122321\}$ имеют шейпы, равные p_3,p_5, p_3+p_5,$2p_3+p_5$, p_3+2p_5,$2p_3+2p_5$ соответственно, причем $B_3^\rho=B_3$ и $D_3^\rho=D_3$. Отметим, что $\overline{V}_{p_5}=\overline{V}^\sigma_{p_3}\neq\overline{V}_{p_3},\overline{V}_{p_3}=\overline{V}^\sigma_{p_5}\neq\overline{V}_{p_5},\overline{V}^\sigma_{p_3+p_5}=\overline{V}_{p_3+p_5},\overline{V}_{p_3+2p_5}=\overline{V}^\sigma_{2p_3+p_5}\neq\overline{V}_{2p_3+p_5},\overline{V}_{2p_3+p_5}=\overline{V}^\sigma_{p_3+2p_5}\neq\overline{V}_{p_3+2p_5},\overline{V}^\sigma_{2p_3+2p_5}=\overline{V}_{2p_3+2p_5}$ и нижний центральный ряд группы $\overline{U}$ имеет вид $\overline{U}=\overline{U}_1>\overline{U}_2>\overline{U}_3>\overline{U}_4>1$. По лемме 2 имеем $\overline{U}_1/\overline{U}_2=\overline{V}_{p_3}\oplus\overline{V}_{p_5}$, $\overline{U}_2/\overline{U}_3=\overline{V}_{p_3+p_5}$, $\overline{U}_3/\overline{U}_4=\overline{V}_{2p_3+p_5}\oplus\overline{V}_{p_3+2p_5}$, $\overline{U}_4=\overline{V}_{2p_3+2p_5}$. Теперь, используя леммы 3 и 4, получаем $(\overline{U}_1/\overline{U}_2)_\sigma\cong(\overline{U}_1)_\sigma/(\overline{U}_2)_\sigma\cong(\overline{V}_{p_3}\oplus\overline{V}_{p_5})_\sigma\cong\oplus_{\beta\in A_3}X_\beta$, $(\overline{U}_2/U_3)_\sigma=(\overline{V}_{p_3+p_5})_\sigma\cong\oplus_{\alpha\in B_3^1}X_\alpha\oplus_{\beta\in B_3^2}X_\beta$, $(\overline{U}_3/\overline{U}_4)_\sigma\cong(\overline{U}_3)_\sigma/(\overline{U}_4)_\sigma\cong(\overline{V}_{p_3+2p_5}\oplus\overline{V}_{2p_3+p_5})_\sigma\cong\oplus_{\beta\in C_3}X_\beta$, $(\overline{U}_4)_\sigma=(\overline{V}_{2p_3+2p_5})_\sigma\cong\oplus_{\alpha\in D_3}X_\alpha$, где $B_3^1=\{001110,\ 011110,\ 011210,\ 101111,\ 111111,\ 111211\}$ и $B_3^2=\{101110,\ 111110,\ 111210\}$.

Рассмотрим $J_4=\{p_2,p_3,p_4,p_5\}$. Представим множество $\Phi^+\setminus\Phi^+_{J_4}$ в виде объединения непересекающихся подмножеств следующим образом : $\Phi^+\setminus\Phi^+_{J_4}=A_4\cup A_4^\rho\cup B_4$, где корни из множества $A_4=\{100000,101000,101100,111100,101110,111110,111210,112210\}$ имеют шейп, равный p_1, корни из $A_4^\rho=\{000001,000011,000111,010111,001111,011111,011211,011221\}$ — равный p_6, а корни из $B_4=\{101111,111111,111211,112211,111221,112221,112321,122321\}$ — равный p_1+p_6. Отметим, что $\overline{V}_{p_6}=\overline{V}^\sigma_{p_1}\neq\overline{V}_{p_1},\overline{V}_{p_1}=\overline{V}^\sigma_{p_6}\neq\overline{V}_{p_6},\overline{V}^\sigma_{p_1+p_6}=\overline{V}_{p_1+p_6}$ и нижний центральный ряд группы $\overline{U}$ имеет вид $\overline{U}=\overline{U}_1>\overline{U}_2>1$. По лемме 2 имеем $\overline{U}_1/\overline{U}_2=\overline{V}_{p_1}\oplus\overline{V}_{p_6}\cong\oplus_{level(\gamma)=1}\overline{X}_\gamma$ и $\overline{U}_2=\overline{V}_{p_1+p_6}\cong\oplus_{shape(\gamma)=p_1+p_6}\overline{X}_\gamma$. Теперь, используя леммы 3 и 4, получаем $(\overline{U}_1)_\sigma/(\overline{U}_2)_\sigma\cong(\overline{U}_1/\overline{U}_2)_\sigma=(\overline{V}_{p_1}\oplus\overline{V}_{p_6})_\sigma\cong\oplus_{\beta\in A_4}X_\beta$, $(\overline{U}_2)_\sigma=(\overline{V}_{p_1+p_6})_\sigma\cong X_{112211}\oplus_{\alpha\in B_4\setminus\{112211,111221\}}X_\alpha$, где $X_{112211}=\{x_{112211}(t)+x_{111221}(t^q)\mid t\in GF(q^2)\}$.

Занесем полученные результаты в таблицу. Второй и третий столбцы таблицы содержат корни для подгрупп вида X_α и X_β соответственно, являющихся прямыми слагаемыми неприводимого модуля, указанного в первом столбце.

Таблица 1

$G=O^{p'}((E_6(\overline{GF(p)}))_\sigma)$		
$(\overline{V}_S)_\sigma\cong\oplus_{\alpha,\beta}X_\alpha\oplus X_\beta$	$X_\alpha=\{x_\alpha(t)\mid t\in GF(q)\}$	$X_\beta=\{x_\beta(t)+x_{\beta^\rho}(t^q)\mid t\in GF(q^2)\}$
$(\overline{V}_{p_2})_\sigma$	010000, 010100, 011110, 011210, 111111, 111211, 112221, 112321	011100, 111100, 111110, 111210, 112210, 112211
$(\overline{V}_{2p_2})_\sigma$	122321	$---$
$(\overline{V}_{p_4})_\sigma$	000100, 010100, 001110, 011110, 101111, 111111	001100, 101100, 011100, 111100, 101110, 111110
$(\overline{V}_{2p_4})_\sigma$	011210, 111211, 112221	111210, 112210, 112211
$(\overline{V}_{3p_4})_\sigma$	112321, 122321	$---$
$(\overline{V}_{p_3}\oplus\overline{V}_{p_5})_\sigma$	$---$	001000, 101000, 001100, 101100, 011100, 111100
$(\overline{V}_{p_3+p_5})_\sigma$	001110, 011110, 011210, 101111, 111111, 111211	101110, 111110, 111210
$(\overline{V}_{p_3+2p_5}\oplus\overline{V}_{2p_3+p_5})_\sigma$	$---$	112210, 112211
$(\overline{V}_{2p_3+2p_5})_\sigma$	112221, 112321, 122321	$---$
$(\overline{V}_{p_1}\oplus\overline{V}_{p_6})_\sigma$	$---$	100000, 101000, 101100, 111100, 101110, 111110, 111210, 112210
$(\overline{V}_{p_1+p_6})_\sigma$	101111, 111111, 111211, 112221, 112321, 122321	112211

Система корней Φ типа E_6 разбивается на сорок восемь классов вида $\{r\}$ или $\{r, r^\rho\}$, где $r \in \Phi$, образующих систему корней $\tilde{\Phi}$ типа F_4. Обозначим эти классы (корни) в $\tilde{\Phi}$ через $\alpha_1\tilde{p_1} + \alpha_2\tilde{p_2} + \alpha_3\tilde{p_3} + \alpha_4\tilde{p_4}$ в соответствии с обозначениями системы корней типа F_4. Выпишем множество $\tilde{\Phi}^+$ классов, соответствующих положительным корням:

$\tilde{p_1} = \{p_2\}, \tilde{p_2} = \{p_4\}, \tilde{p_3} = \{p_3, p_5\}, \tilde{p_4} = \{p_1, p_6\}, \tilde{p_1} + \tilde{p_2} = \{p_2 + p_4\}, \tilde{p_2} + \tilde{p_3} = \{p_3 + p_4, p_4 + p_5\},$
$\tilde{p_3} + \tilde{p_4} = \{p_1 + p_3, p_5 + p_6\}, \tilde{p_1} + \tilde{p_2} + \tilde{p_3} = \{p_2 + p_3 + p_4, p_2 + p_4 + p_5\}, \tilde{p_2} + 2\tilde{p_3} = \{p_3 + p_4 + p_5\},$
$\tilde{p_2} + \tilde{p_3} + \tilde{p_4} = \{p_1 + p_3 + p_4, p_4 + p_5 + p_6\}, \tilde{p_1} + \tilde{p_2} + 2\tilde{p_3} = \{p_2 + p_3 + p_4 + p_5\},$
$\tilde{p_1} + \tilde{p_2} + \tilde{p_3} + \tilde{p_4} = \{p_1 + p_2 + p_3 + p_4, p_2 + p_4 + p_5 + p_6\}, \tilde{p_1} + 2\tilde{p_2} + 2\tilde{p_3} = \{p_2 + p_3 + 2p_4 + p_5\},$
$\tilde{p_2} + 2\tilde{p_3} + \tilde{p_4} = \{p_1 + p_3 + p_4 + p_5, p_3 + p_4 + p_5 + p_6\}, \tilde{p_2} + 2\tilde{p_3} + 2\tilde{p_4} = \{p_1 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6\},$
$\tilde{p_1} + \tilde{p_2} + 2\tilde{p_3} + \tilde{p_4} = \{p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5, p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6\},$
$\tilde{p_1} + 2\tilde{p_2} + 2\tilde{p_3} + \tilde{p_4} = \{p_1 + p_2 + p_3 + 2p_4 + p_5, p_2 + p_3 + 2p_4 + p_5 + p_6\},$
$\tilde{p_1} + \tilde{p_2} + 2\tilde{p_3} + 2\tilde{p_4} = \{p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6\},$
$\tilde{p_1} + 2\tilde{p_2} + 3\tilde{p_3} + \tilde{p_4} = \{p_1 + p_2 + 2p_3 + 2p_4 + p_5, p_2 + p_3 + 2p_4 + 2p_5 + p_6\},$
$\tilde{p_1} + 2\tilde{p_2} + 2\tilde{p_3} + 2\tilde{p_4} = \{p_1 + p_2 + p_3 + 2p_4 + p_5 + p_6\},$
$\tilde{p_1} + 2\tilde{p_2} + 3\tilde{p_3} + 2\tilde{p_4} = \{p_1 + p_2 + 2p_3 + 2p_4 + p_5 + p_6, p_1 + p_2 + p_3 + 2p_4 + 2p_5 + p_6\},$
$\tilde{p_1} + 2\tilde{p_2} + 4\tilde{p_3} + 2\tilde{p_4} = \{p_1 + p_2 + 2p_3 + 2p_4 + 2p_5 + p_6\},$
$\tilde{p_1} + 3\tilde{p_2} + 4\tilde{p_3} + 2\tilde{p_4} = \{p_1 + p_2 + 2p_3 + 3p_4 + 2p_5 + p_6\},$
$2\tilde{p_1} + 3\tilde{p_2} + 4\tilde{p_3} + 2\tilde{p_4} = \{p_1 + 2p_2 + 2p_3 + 3p_4 + 2p_5 + p_6\}.$

Если r корень из Φ, то для классов $C = \{r\}$ первого вида соответствующая корневая подгруппа $X_C^1 = \{x_C(t) = x_r(t) \mid t = t^q, t \in GF(q^2)\}$ имеет порядок q, а для классов $C = \{r, r^\rho\}$ второго вида корневая подгруппа $X_C^1 = \{x_C(t) = x_r(t)x_{r^\rho}(t^q) \mid t \in GF(q^2)\}$ имеет порядок q^2. Для составления второй таблицы введем дополнительные обозначения. В скрученной группе ${}^2E_6(q^2)$ подгруппы первого вида будем обозначать через X_λ^1, где $\lambda \in \widetilde{\Phi}$ является одноэлементным классом, а подгруппы второго вида будем обозначать через X_μ^1, где $\mu \in \widetilde{\Phi}$ является двухэлементным классом. Таким образом, в этих обозначениях $X_\lambda^1 = \{x_\alpha(t) \mid t \in GF(q)\}$ для $\lambda = \{\alpha\}$, а $X_\mu^1 = \{x_\beta(t)x_{\beta^\rho}(t^q) \mid t \in GF(q^2)\}$ для $\mu = \{\beta, \beta^\rho\}$. Корень $\alpha_1\tilde{p_1} + \alpha_2\tilde{p_2} + \alpha_3\tilde{p_3} + \alpha_4\tilde{p_4} \in \widetilde{\Phi}$ обозначим для краткости через $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$. Таблица 1 примет другой вид. В первом столбце новой таблицы укажем главные факторы $V_S = V_{j\tilde{p}_k}$, входящие в унипотентный радикал каждой параболической максимальной подгруппы P_k скрученной группы лиева типа ${}^2E_6(q^2)$. Напомним, что по лемме 1 модуль V_S изоморфен (в аддитивной записи) прямой сумме корневых подгрупп, которые выписываются во втором и третьем столбцах таблицы. Корневые подгруппы параметризуются корнями из системы корней типа F_4, причем подгруппы второго столбца имеют порядок, равный q, а подгруппы из третьего столбца — равный q^2. Теперь порядки главных факторов легко вычисляются, запишем показатели m их степени q в четвертый столбец.

Таблица 2

$G = {}^2E_6(q^2), V_S \cong \prod_\lambda X_\lambda^1 \prod_\mu X_\mu^1, \mid V_S \mid = q^m$			
V_S	$\lambda : X_\lambda^1 = \{x_\alpha(t) \mid t \in GF(q)\}$	$\mu : X_\mu^1 = \{x_\beta(t)x_{\beta^\rho}(t^q) \mid t \in GF(q^2)\}$	m
$V_{\tilde{p}_1}$	$1000, 1100, 1120, 1220, 1122, 1222, 1242, 1342$	$1110, 1111, 1121, 1221, 1231, 1232$	20
$V_{2\tilde{p}_1}$	2342	$- - -$	1
$V_{\tilde{p}_2}$	$0100, 1100, 0120, 1120, 0122, 1122$	$0110, 0111, 1110, 1111, 0121, 1121$	18
$V_{2\tilde{p}_2}$	$1220, 1222, 1242$	$1221, 1231, 1232$	9
$V_{3\tilde{p}_2}$	$1342, 2342$	$- - -$	2
$V_{\tilde{p}_3}$	$- - -$	$0010, 0011, 0110, 0111, 1110, 1111$	12
$V_{2\tilde{p}_3}$	$0120, 1120, 1220, 0122, 1122, 1222$	$0121, 1121, 1221$	12

$G = {}^2E_6(q^2)$(продолжение)			
$V_{3\widetilde{p}_3}$	$---$	$1231, 1232$	4
$V_{4\widetilde{p}_3}$	$1242, 1342, 2342$	$---$	3
$V_{\widetilde{p}_4}$	$---$	$0001, 0011, 0111, 1111, 0121, 1121,$ $1221, 1231$	16
$V_{2\widetilde{p}_4}$	$0122, 1122, 1222, 1242, 1342, 2342$	1232	8

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Кораблева В.В.** О главных факторах параболических максимальных подгрупп конечных простых групп нормального лиева типа // Алгебра и комбинаторика: тез. докл. Междунар. конф. Екатеринбург, 2013. С. 84–85.
2. **Azad H., Barry M., Seitz G.** On the structure of parabolic subgroup // Com. in Algebra. 1990. Vol. 18, no. 2. P. 551–562.
3. **Бурбаки Н.** Группы и алгебры Ли, гл. VII-VIII. М.: Мир, 1978. 342 с.
4. **Carter R.W.** Simple groups of Lie type. London: John Wiley and Sons, 1972. 332 p.
5. **Carter R.W.** Finite groups of Lie type, conjugacy classes and complex characters. London: John Wiley and Sons, 1993. 544 p.
6. **Humphreys J.** Modular representation of finite groups of Lie type. Cambridge: Cambridge University Press, 2006. 233 p.
7. **Кэртис Ч., Райнер И.** Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. М.: Наука,1969. 668 с.
8. **Steinberg R.** Endomorphisms of algebraic groups. // Mem. Amer. Math. Soc., 1968. Vol. 80. P. 1–108.

Кораблева Вера Владимировна
д-р физ.-мат. наук, Лаборатория квантовой топологии,
Челябинский государственный университет,
ул. Братьев Кашириных 129, Челябинск, 454001, Россия
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН
Екатеринбург e-mail: vvk@csu.ru

Поступила 13.03.2014