

УДК 515.162

**ТРЕХМЕРНЫЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ С КАСПАМИ  
СЛОЖНОСТИ 10, ИМЕЮЩИЕ МАКСИМАЛЬНЫЙ ОБЪЕМ<sup>1</sup>****А. Ю. Веснин, В. В. Таркаев, Е. А. Фоминых**

В работе приводится полный список трехмерных ориентируемых гиперболических многообразий с каспами, полученных склеиванием не более десяти правильных идеальных гиперболических тетраэдров. Список является исчерпывающим, однако, для некоторых пар многообразий с одним, двумя и тремя каспами вопрос об их негомеоморфности по-прежнему остается открытым.

Ключевые слова: гиперболические многообразия с каспами, сложность многообразий.

A. Yu. Vesnin, V. V. Tarkaev, E. A. Fominykh. Three-dimensional hyperbolic manifolds with cusps of complexity 10 having maximal volume.

We give a complete list of three-dimensional orientable hyperbolic manifolds with cusps obtained by gluing together at most ten regular ideal hyperbolic tetrahedra. Although the list is exhaustive, the question of nonhomeomorphism remains open for some pairs of manifolds with one, two, and three cusps.

Keywords: hyperbolic manifolds with cusps, complexity of manifolds.

**1. Введение**

Классификация трехмерных многообразий является ключевой проблемой трехмерной топологии. В последние годы активно развивается подход к этой проблеме, основанный на теории сложности многообразий [1, 2]. *Сложность* компактного трехмерного многообразия равна  $k$ , если оно имеет почти простой спайн с  $k$  истинными вершинами и не имеет почти простых спайнов с меньшим числом истинных вершин. Задача вычисления сложности трехмерных многообразий является весьма трудной. К настоящему времени получены таблицы всех замкнутых ориентируемых неприводимых многообразий сложности не более 13 (таких многообразий более 103 000) [1]; всех гиперболических многообразий с геодезическим краем сложности не более 4 (5192 многообразий) [3]; всех гиперболических многообразий с каспами сложности не более 8 (21919 многообразий) [4, 5]. Напомним, что для трехмерных гиперболических многообразий с каспами сложность определяется как число тетраэдров в минимальной идеальной триангуляции многообразия. Найдены точные значения сложности для нескольких бесконечных семейств многообразий из следующих классов: линзовых пространств и их накрытий [6, 7]; гиперболических многообразий с геодезическим краем [8–10]; гиперболических многообразий, расслоенных над окружностью со слоем проколотый тор [11].

Появление в начале 1990-х программного обеспечения для работы с узлами, зацеплениями и трехмерными многообразиями сделало возможным перечисление трехмерных многообразий с каспами по числу идеальных тетраэдров в их минимальной триангуляции. Прежде всего, речь идет о компьютерной программе SnapPea [12]. С ее помощью в 1989 г. был составлен список многообразий с каспами, для построения которых достаточно пяти идеальных тетраэдров [13]. В 1999 г. был составлен список многообразий с каспами, для построения которых достаточно семи идеальных тетраэдров [4]. В 2010 г. был составлен список многообразий с каспами, для построения которых достаточно восьми идеальных тетраэдров [5]. Поскольку к

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 13-01-00513 (Веснин) и 14-01-00441 (Таркаев, Фоминых), Лаборатории квантовой топологии Челябинского госуниверситета (грант правительства РФ № 14.Z50.31.0020), программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-1015.2014.1.).

настоящему времени речь идет о десятках тысяч табулированных многообразий, эти списки не застрахованы от неточностей, связанных с распознаванием многообразий. Совсем недавно в [14] было замечено, что список из [4] содержит два одинаковых неориентируемых многообразия с каспами. Они имеют обозначения  $x101$  и  $x103$ , и каждое строится из шести идеальных тетраэдров.

В настоящей работе приводится полный список ориентируемых гиперболических многообразий с каспами, полученных склеиванием не более десяти правильных идеальных гиперболических тетраэдров, то есть имеющих сложность не более десяти. В разд. 2 мы напоминаем основные факты о трехмерных гиперболических многообразиях с каспами и свойства объемов тетраэдров в трехмерном гиперболическом пространстве. В разд. 3 приведены кодировки и инварианты многообразий сложности не более девяти. А именно, теорема 1 содержит список многообразий сложности не более восьми. Список получен независимо от работ [4, 5] и согласован с ними. Кодировка единственного существующего многообразия сложности девять приведена в теореме 2. Результаты этого раздела и идеи доказательств были анонсированы в [15]. В разд. 4 приводятся кодировки и инварианты многообразий сложности десять (теорема 3). При этом, удалось улучшить некоторые оценки из [15]. Список приведенных многообразий является исчерпывающим. Однако, для некоторых пар многообразий сложности десять с одним, двумя и тремя каспами вопрос об их негомеоморфности по-прежнему остается открытым. В разд. 5 обсуждаются некоторые нерешенные проблемы, связанные с построением многообразий с заданным числом каспов. В заключение, в разд. 6, для удобства читателя дается подробное, с разбором примера, объяснение *обезвоженного* описания триангуляции, введенного в [4], которое используется на протяжении всей статьи.

## 2. Гиперболические многообразия с каспами

В данной работе предметом исследования являются трехмерные гиперболические многообразия с каспами. Класс таких многообразий представляет интерес и в контексте теории узлов, поскольку примерами таких многообразий являются дополнения к узлам и зацеплениям в трехмерной сфере.

Пусть  $M$  — связное трехмерное гиперболическое многообразие, полученное склеиванием конечного множества  $\mathcal{P}$  попарно непересекающихся правильных идеальных тетраэдров из гиперболического пространства  $\mathbb{H}^3$ . Напомним, что у правильного идеального тетраэдра все двугранные углы равны  $\pi/3$  и все его вершины являются бесконечно удаленными. Пусть  $\mathcal{S}$  — множество граней тетраэдров из  $\mathcal{P}$  и склеивание осуществляется спариванием  $\Phi$  вдоль граней  $\mathcal{S}$ , реализуемым изометриями  $\mathbb{H}^3$ . Спаривание  $\Phi$  продолжается до спаривания идеальных вершин тетраэдров, что порождает разбиение всех идеальных вершин тетраэдров из  $\mathcal{P}$  на классы эквивалентных. Для идеальной вершины  $v$  обозначим через  $[v]$  соответствующий класс эквивалентности. Класс эквивалентных идеальных вершин называется *каспом* многообразия  $M$ .

Пусть  $v$  — идеальная вершина тетраэдра  $P_v$ , принадлежащего  $\mathcal{P}$ . Выберем в точке  $v$  орисферу  $\Sigma_v$ , которая пересекается только с теми гранями из  $\mathcal{S}$ , которые инцидентны  $v$ . Линком вершины  $v$  называется множество  $L(v) = P_v \cap \Sigma_v$ . Отметим, что  $L(v)$  является компактным евклидовым треугольником на орисфере  $\Sigma_v$ . Спаривание  $\Phi$  индуцирует склеивание треугольников  $\{L(u) : u \in [v]\}$  вдоль их сторон преобразованиями подобия. Обозначим результат такого склеивания через  $L[v]$ . Поверхность  $L[v]$  называется *линком* каспа  $[v]$  гиперболического многообразия  $M$ . Если каждая изометрия из  $\Phi$  сохраняет ориентацию, то  $L[v]$  является тором. Гиперболическое многообразие  $M$  является полным если и только если для каждого его каспа  $[v]$  линк  $L[v]$  является полным (см. [16]).

Напомним [16], что каждый идеальный тетраэдр определяется, с точностью до изометрии пространства  $\mathbb{H}^3$ , своими двугранными углами. Более того, его противоположные двугранные углы равны и сумма любых трех двугранных углов инцидентных одной и той же идеальной вершине, равна  $\pi$ . Таким образом, каждый идеальный тетраэдр определяется тремя двугран-

ными углами  $\alpha, \beta, \gamma$ , где  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ . Объем такого тетраэдра  $T(\alpha, \beta, \gamma)$  выражается формулой

$$\text{vol } T(\alpha, \beta, \gamma) = \Lambda(\alpha) + \Lambda(\beta) + \Lambda(\gamma),$$

где  $\Lambda(\theta)$  — функция Лобачевского, которая определяется следующим образом:

$$\Lambda(\theta) = - \int_0^\theta \ln |2 \sin x| dx.$$

Среди всех тетраэдров в  $\mathbb{H}^3$  максимальный объем имеет правильный идеальный тетраэдр  $T(\pi/3, \pi/3, \pi/3)$ . Его объем равен

$$v_3 := \text{vol}(T(\pi/3, \pi/3, \pi/3)) = 3\Lambda(\pi/3) = 1.0149426 \dots$$

Таким образом, если многообразие получено склеиванием  $k$  правильных идеальных тетраэдров, то его объем равен  $kv_3$ , и является максимальным среди всех многообразий заданной сложности.

Обозначим через  $MVT^k$  множество всех трехмерных ориентируемых гиперболических многообразий с  $k$  каспами, полученных склейками  $T$  правильных идеальных гиперболических тетраэдров. Пусть  $|MVT^k|$  — мощность множества  $MVT^k$ . Если оно не пусто, то его элементы будем обозначать  $MVT_n^k$ , где  $n = 1, \dots, |MVT^k|$ .

### 3. Многообразия сложности не более 9

Перечисление трехмерных гиперболических многообразий, строящихся из идеальных тетраэдров, является важной задачей, способствующей пониманию структуры множества трехмерных многообразий и направленной на решение проблемы классификации многообразий. Перечисления проводились несколькими исследовательскими группами на основе оригинальных разработанных компьютерных программ. Наиболее известными являются результаты работы [4], где перечислены все 4,815 многообразий, получаемые из семи идеальных тетраэдров, и работы [5], где перечислены все 12,846 многообразий, получаемые из восьми идеальных тетраэдров.

Нас интересуют многообразия, имеющие максимальный объем среди многообразий заданной сложности, то есть те многообразия, которые склеиваются из заданного числа правильных идеальных тетраэдров. Полный список таких многообразий до сложности, не превышающей восьми, приведен в следующей теореме. Идея ее доказательства была представлена в [15]. Здесь мы приведем более подробное доказательство.

**Теорема 1** [15]. *Существует ровно 29 ориентируемых гиперболических 3-многообразий с каспами, получаемых склеиванием не более чем восьми правильных идеальных гиперболических тетраэдров: 17 из них имеют один касп, а 12 — два каспа. Кодировки этих многообразий приведены в табл. 2 и 4, соответственно.*

**Доказательство.** Доказательство теоремы является конструктивным. Для каждого  $T = 1, \dots, 8$  перечисляются все 4-регулярные графы с  $T$  вершинами. Для указанных значений  $T$  число таких графов равно 1, 2, 4, 10, 28, 97, 359 и 1635, соответственно. Пусть  $G$  — один из построенных графов, имеющий  $T$  вершин, а  $\mathcal{P}$  — множество из  $T$  правильных идеальных тетраэдров. Установим взаимно-однозначное соответствие между вершинами графа  $G$  и элементами множества  $\mathcal{P}$ . Рёбра графа индуцируют разбиение граней из множества  $\mathcal{S}$  на пары. Все грани из  $\mathcal{S}$  являются правильными идеальными гиперболическими треугольниками. Для каждой пары граней существуют шесть способов их склеивания с помощью гиперболических изометрий. Пусть  $\Phi$  — спаривание всех граней из множества  $\mathcal{S}$ . Оно индуцирует разбиение

Т а б л и ц а 1

Число тетраэдров	2	3	4	5	6	7	8	всего
Число триангуляций	2	0	2	1	6	0	6	17

Т а б л и ц а 2

## Многообразия с одним каспом

Имя	Кодировка	$H_1$	$TV_3$	$TV_4$	Обозначения из [4]
$MV2_1^1$	cabbbbaei	$\mathbb{Z}$			$M2_1$
$MV2_2^1$	cabbbbapt	$\mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}$			$M2_2$
$MV4_1^1$	ebdbcdddaqhpt	$\mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}$			$M4_{51}$
$MV4_2^1$	ebdbcdddaqhie	$\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}$			$M4_{52}$
$MV5_1^1$	fapaadcceebfobfw	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}$			$M5_{223}$
$MV6_1^1$	gfdabbcdfeffaqqhqqh	$\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}$			$M6_{908}$
$MV6_2^1$	gfdabbcdfeffaqqhqaax	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{10} \oplus \mathbb{Z}$			$M6_{910}$
$MV6_3^1$	gbpaaddefeffoffhoxh	$\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}$			$M6_{909}$
$MV6_4^1$	gdhaabefffeehpilpet	$\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}$			$M6_{911}$
$MV6_5^1$	gbpaabcfdfefohfxhf	$\mathbb{Z}_{20} \oplus \mathbb{Z}$			$M6_{912}$
$MV6_6^1$	gbpaabefedffffhofxh	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}$			$M6_{913}$
$MV8_1^1$	ifdbfbcdefghhhaqqhqaalu	$\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_{15} \oplus \mathbb{Z}$			—
$MV8_2^1$	ifdbfbcdefghhhaqqhqaadm	$\mathbb{Z}_7 \oplus \mathbb{Z}_7 \oplus \mathbb{Z}$			—
$MV8_3^1$	ibpadcdefghhghkgsplecgn	$\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}$	2	4	—
$MV8_4^1$	idhbbeeegfghhghqplqaaqdt	$\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}$	2	2	—
$MV8_5^1$	ibpafbdefghhghknwalinow	$\mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}$	2	1	—
$MV8_6^1$	ibpafcfeffghhkhqvmgmokk	$\mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}$	2	3	—

ребер тетраэдров из множества  $\mathcal{P}$  на классы эквивалентности. Двугранный угол при каждом ребре равен  $\pi/3$ . Таким образом спаривание  $\Phi$  приводит к гиперболическому многообразию с каспами тогда и только тогда, когда каждый класс эквивалентности содержит ровно шесть ребер.

Для случая многообразий с одним каспом с точностью до переобозначений было получено 17 триангуляций многообразий. А именно, число триангуляций в зависимости от числа тетраэдров представлено в табл. 1. Соответствующие кодировки приведены в табл. 2. В таблице используется кодировка триангуляций, введенная в работе [4], где она была названа *обезвоженным* описанием. Для удобства читателя мы приводим пример использования обезвоженного описания триангуляции в разд. 6.

Далее следует проверить, что все построенные многообразия различны. Это проверка была осуществлена в три шага. Во первых, напомним, что в приведенных в первом столбце обозначениях  $MVT_n^k$  число  $T$  показывает из какого числа правильных идеальных тетраэдров склеено многообразие. Как мы уже упоминали, объем многообразия  $MVT_n^k$  равен  $v_3 \cdot T$ . Таким образом, если у двух многообразий значения  $T$  в обозначениях различны, значит и многообразия различны. Второй шаг заключается в сравнении первых групп гомологий построенных многообразий. Эти группы указаны в соответствующем столбце таблицы. После этого шага остается вопрос о гомеоморфности для двух пар многообразий:  $MV8_3^1$  и  $MV8_4^1$  для которых первые группы гомологий равны  $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}$ , а также  $MV8_5^1$  и  $MV8_6^1$  для которых первые группы гомологий равны  $\mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}$ . Третий шаг заключался в сравнении для указанных многообразий их инвариантов Тураева — Виро  $TV_3$  и  $TV_4$ . Как видно из табл. 2, указанные многообразия имеют разные значения инварианта  $TV_4$ . Таким образом, все приведенные в табл. 2 многообразия попарно различны. Утверждение теоремы для случая одного каспа установлено.

Т а б л и ц а 3

Число тетраэдров	2	3	4	5	6	7	8	всего
Число триангуляций	0	0	2	1	1	1	8	13

Т а б л и ц а 4

**Многообразия с двумя каспами**

Имя	Кодировка	$H_1$	$TV_3$	$TV_4$	$TV_5$	$TV_6$
$MV4_1^2$	ebdbbdddemlqp	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	2	3	$-6\varepsilon + 14$	5
$MV4_2^2$	ebdbcdddddddx	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	2	3	$-6\varepsilon + 14$	6
$MV5_1^2$	fapaadcceeebfnbk	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$				
$MV6_1^2$	gdhaabfefefelplll	$\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$				
$MV7_1^2$	hbpabbcfggfegfkadihgo	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$				
$MV8_1^2$	idhbfffeghehhmememxmx ihpaagfhfhgfgheeeexxxx	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	2	3	$-18\varepsilon + 40$	14
$MV8_2^2$	idhbffeffgehhhhxxxihie	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	2	4	$-16\varepsilon + 34$	
$MV8_3^2$	idhbbeefgfhhhmplhmdatm	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	2	4	$-18\varepsilon + 40$	
$MV8_4^2$	idhbbeefgfhhhpplxpxl	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	2	3	$-26\varepsilon + 48$	
$MV8_5^2$	idhbbeefgfhhhmplximume	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	2	3	$-18\varepsilon + 40$	13
$MV8_6^2$	idhbfffeghehhqpqppeeti	$\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$				
$MV8_7^2$	idhbbeeffgfhhhpplxpllx	$\mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$				

Т а б л и ц а 5

**Соответствие обозначений**

Имя из табл. 4	Обозначение из [4]
$MV4_1^2$	$M4_3^2$
$MV4_2^2$	$M4_4^2$
$MV5_1^2$	$M5_{11}^2$
$MV6_1^2$	$M6_{48}^2$
$MV7_1^2$	$M7_{162}^2$

Отметим, что в случаях трех и семи правильных идеальных тетраэдров ориентируемых многообразий с одним каспом не существует. Для случаев не более шести тетраэдров построенные многообразия идентифицированы с многообразиями из работы [4], что указано в последнем столбце табл. 2.

Для случая многообразий с двумя каспами с точностью до переобозначений было получено 12 триангуляций ориентируемых многообразий. А именно, число триангуляций в зависимости от числа тетраэдров представлено в табл. 3. Соответствующие кодировки приведены в первом столбце табл. 4. Далее следует проверить, все ли приведенные 13 кодировок задают различные многообразия. Эта проверка была осуществлена в четыре шага. Во-первых, было установлено, что две кодировки, приведенные в строке для многообразия  $MV8_1^2$  задают одно и то же многообразие. В самом деле, перебирая триангуляции многообразия  $S^3 \setminus 10_{138}^2$  было установлено, что обе указанные триангуляции возникают в этом списке. Тем самым, два их 13 построенных многообразий совпадают. Осталось проверить, все ли из оставшихся 12 многообразий различны. В качестве второго шага наших рассуждений напомним, что если два многообразия построены из различного числа правильных идеальных тетраэдров, то они различны. Третий шаг состоит в вычислении первых групп гомологий многообразий. Они приведены в соответствующем столбце табл. 4. После этого шага остаются открытыми вопросы о гомеоморфности многооб-

разий  $MV4_1^2$  и  $MV4_2^2$ , и о гомеоморфности многообразий  $MV8_1^2, MV8_2^2, MV8_3^2, MV8_4^2, MV8_5^2$ . Получить ответы на эти вопросы удалось с помощью вычисления для этих многообразий инвариантов Тураева — Виро порядков 3, 4, 5 и 6. Соответствующие значения для интересующих нас многообразий приведены в табл. 4, где  $\varepsilon = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ . Таким образом, число различных многообразий с двумя каспами построенных из не более восьми правильных идеальных тетраэдров равно 12. Доказательство теоремы завершено.  $\square$

В табл. 5 для многообразий с двумя каспами, построенных из не более чем семи правильных идеальных тетраэдров приведено соответствие обозначений из табл. 4 и из работы [4].

Некоторые многообразия из табл. 2 и 4 являются дополнениями к узлам и зацеплениям. А именно,  $MV2_1^1 = S^3 \setminus 4_1$ ,  $MV4_2^2 = S^3 \setminus 6_2^2$ ,  $MV8_1^2 = S^3 \setminus 10_{138}^2$ . Соответствующие узлы и зацепления приведены на рисунке 1. Кроме того,  $MV4_1^2 = S^3 \setminus \mathcal{B}$  для двухкомпонентного зацепления  $\mathcal{B}$  указанного на рисунке 2. Отметим, что оценки сложности для замкнутых многообразий, полученных хирургиями на узле восьмерка  $4_1$ , были получены в [17], а для замкнутых гиперболических многообразий, циклически накрывающих  $S^3$  разветвленно над  $4_1$  — в [18]. Двухкомпонентное зацепление  $10_{138}^2$  обладает интересными свойствами в контексте изучения трехмерных ориентируемых гиперболических многообразий малого объема [19].

**Теорема 2.** [15] *Существует ровно одно трехмерное ориентируемое гиперболическое многообразие с каспами, которое получается склеиванием девяти правильных идеальных гиперболических тетраэдров. Обозначим это многообразие  $MV9_1^1$ . Оно задается кодировкой*

$$jbpahaadeigghihigbftenjnfj,$$

*имеет 1 касп и  $H_1(MV9_1^1) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}$ .*

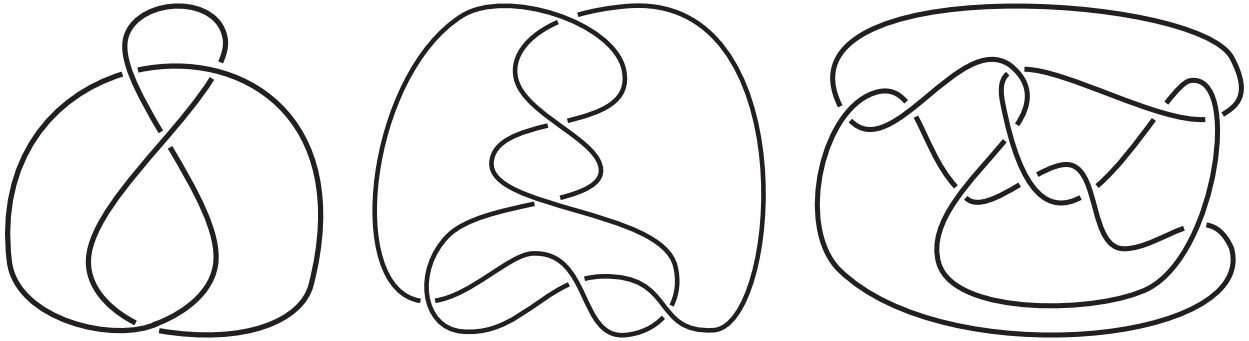


Рис. 1. Узел  $4_1$ , зацепления  $6_2^2$  и  $10_{138}^2$ .

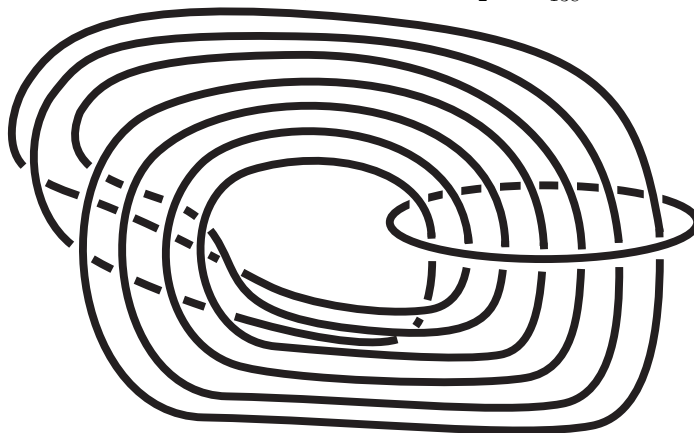


Рис. 2. Зацепление  $\mathcal{B}$ .

**Доказательство.** Аналогично доказательству теоремы 1, перечислим все 4-валентные графы с 9 вершинами. Их число равно 8296. Компьютерный перебор показывает, что с точностью до переобозначений триангуляций и их эквивалентности существует ровно одно ориентируемое многообразие. Его обезвоженное описание приведено в формулировке теоремы. Непосредственные вычисления первой группы гомологий многообразий дают указанный результат.  $\square$

#### 4. Многообразия сложности 10

Следующая теорема описывает случай склеивания ориентируемых гиперболических многообразий с каспами из ровно десяти правильных идеальных тетраэдров.

**Теорема 3.** *Любое ориентируемое гиперболическое 3-многообразие, полученное склеиванием десяти правильных идеальных тетраэдров имеет не более пяти каспов. При этом, справедливы следующие оценки и точные равенства для числа таких многообразий:*

1.  $11 \leq |MV10^1| \leq 15$ ;
2.  $15 \leq |MV10^2| \leq 20$ ;
3.  $9 \leq |MV10^3| \leq 15$ ;
4.  $|MV10^4| = 3$ , при этом,  $MV10_1^4 = S^3 \setminus L8a21$ ,  $MV10_2^4 = S^3 \setminus L10n101$  и  $MV10_3^4 = S^3 \setminus L12_1^4$ ;
5.  $|MV10^5| = 1$ , при этом,  $MV10_1^5 = S^3 \setminus L10n113$ ;

**Доказательство.** Аналогично доказательству предыдущих теорем, перечислим все 4-регулярные графы с 10 вершинами. Их число равно 48432. Как и раньше, с каждым графом связываем триангуляцию и затем выбираем те триангуляции, которые приводят к ориентируемым многообразиям. Все триангуляции удобно разбить на 5 случаев в зависимости от числа каспов в построенных многообразиях.

1. **Случай** многообразий с 1 каспом. Число триангуляций, задающих многообразия с одним каспом, равно 15. Сравнение первых групп гомологий, приведенных в табл. 6, показывает, что среди 15 многообразий имеется по крайней мере 10 различных. Для дальнейшего сравнения многообразий были вычислены инварианты Тураева — Виро до порядка 12 для многообразий с совпадающими группами гомологий. Значения инвариантов  $TV_3$ ,  $TV_4$  и  $TV_5$  приведены в таблице, где  $\varepsilon = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ . Инвариант  $TV_5$  позволил различить многообразия  $MV10_7^1$  и  $MV10_8^1$ . Однако другие многообразия с помощью инвариантов Тураева — Виро порядка не более 12 различить не удалось. В итоге мы можем утверждать, что среди 15 указанных в табл. 6 многообразий не менее 11 негомеоморфных. Вопрос о гомеоморфности для многообразий с одинаковыми группами гомологий и инвариантами Тураева — Виро остается открытым.

2. **Случай** многообразий с 2 каспами. Число триангуляций, задающих ориентируемые многообразия с 2 каспами, равно 20 (см. табл. 7). Сравнение первых групп гомологий показывает, что среди этих многообразий по крайней мере 8 различных. Для многообразий с совпадающими группами гомологий были вычислены инварианты Тураева — Виро до порядка 12. Значения инвариантов  $TV_3$ ,  $TV_4$ ,  $TV_5$  и  $TV_6$  приведены в соответствующих столбцах таблицы. Отсюда видно, что из 20 многообразий, приведенных в табл. 7, по меньшей мере 15 различных. Вычисление инвариантов  $TV_7, \dots, TV_{12}$  не позволило улучшить эту оценку. Вопрос о гомеоморфности многообразий из табл. 7, имеющих одинаковые группы гомологий и инварианты Тураева — Виро, остается открытым.

3. **Случай** многообразий с 3 каспами. Число триангуляций, задающих ориентируемые многообразия с 3 каспами, равно 16 (см. табл. 8). Прежде всего отметим, что при помощи компьютерного перебора удалось показать, что две из приведенных в таблице триангуляций

## Кодировки и инварианты многообразий сложности 10 с 1 каспом

Имя	Кодировка	$H_1$	$TV_3$	$TV_4$	$TV_5$
$MV10_1^1$	kdhdadaefghijjiiimplielhete	$\mathbb{Z}$			
$MV10_2^1$	kgpemaadefghiihjjjkuimpcmoxu	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	2	4	$-20\varepsilon + 40$
$MV10_3^1$	kgpemaadefghihjijbbuimpngmxu	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	2	4	$-20\varepsilon + 40$
$MV10_4^1$	kgpemaadefghihjijjkuimpngmxu	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	2	4	$-20\varepsilon + 40$
$MV10_5^1$	kdhdfaabfefhijjijlpqdaixlpqt	$\mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}$			
$MV10_6^1$	кспараaeddhgjihjjgagrjbnjo	$\mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}$			
$MV10_7^1$	кbpelaacdefghijjgknelcbouff	$\mathbb{Z}_{16} \oplus \mathbb{Z}$	2	4	$-4\varepsilon + 12$
$MV10_8^1$	kdhdadaabefgeijjiihdmtulphaxi	$\mathbb{Z}_{16} \oplus \mathbb{Z}$	2	4	$-16\varepsilon + 32$
$MV10_9^1$	кспclaaecdeighjijgngkkgottgq	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}$	0	$-4\varepsilon + 6$	0
$MV10_{10}^1$	кспclaaecdeghijjgngkvfvetvh	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}$	0	$-4\varepsilon + 6$	0
$MV10_{11}^1$	кhpababhgifhifgjjjeiataxdeimt	$\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	2	4	$-20\varepsilon + 40$
$MV10_{12}^1$	kdhdgaabfeffijjijhluimqxmmuh	$\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	2	4	$-20\varepsilon + 40$
$MV10_{13}^1$	kdhdfaadeegfjijjdemudtllppp	$\mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}$			
$MV10_{14}^1$	кfdffabbccdefghijjjaqhhaaqhpt	$\mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_{25} \oplus \mathbb{Z}$			
$MV10_{15}^1$	кfdffabbccdefghijjjaqhhaaqhie	$\mathbb{Z}_{11} \oplus \mathbb{Z}_{11} \oplus \mathbb{Z}$			

Т а б л и ц а 7

## Кодировки и инварианты многообразий сложности 10 с 2 каспами

Имя	Кодировка	$H_1$	$TV_3$	$TV_4$	$TV_5$	$TV_6$
$MV10_1^2$	kdhdadaabffghijjijlpqiumlhxu	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	2	4	$-22\varepsilon + 40$	
$MV10_2^2$	kdhdfaabeffeijjijhxxxhphxlxi	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	2	4	$-38\varepsilon + 70$	
$MV10_3^2$	kdhdadaabefgfjijjhlutmetihxm	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	4	12	$-20\varepsilon + 52$	
$MV10_4^2$	kgpemaadefghihjijjkuimpjmnxu	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	4	12	$-44\varepsilon + 92$	43
$MV10_5^2$	kdhdgaabfeffijjijhluimhxmluh	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	4	12	$-44\varepsilon + 92$	43
$MV10_6^2$	кdpegaadgehfhijjgispdpgdndd	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	4	12	$-44\varepsilon + 92$	43
$MV10_7^2$	kgpemaadefghiihjjbbuimpcmoxu	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	4	12	$-44\varepsilon + 92$	43
$MV10_8^2$	кспblaaecdeghijjgngksswlxcp	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	4	12	$-12\varepsilon + 56$	69
$MV10_9^2$	кспblaaecdeighjijgngkbbjujxe	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	4	12	$-12\varepsilon + 56$	69
$MV10_{10}^2$	kdhdgaabfeffijjijhluimpmpuh	$\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	2	4	$-30\varepsilon + 60$	
$MV10_{11}^2$	kdhdgaabfeffijjijhluimdxmxuh	$\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	2	4	$-20\varepsilon + 40$	
$MV10_{12}^2$	кhpababghhfiifgjjqlxtaadeqqt	$\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	2	4	$-22\varepsilon + 46$	21
$MV10_{13}^2$	kdhdadaadffegijjiiicedlaletae	$\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	2	4	$-22\varepsilon + 46$	21
$MV10_{14}^2$	kgpemaadefghiihjjbbuimpbmbxu	$\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	4	8	$-56\varepsilon + 108$	43
$MV10_{15}^2$	кспffaadefghiihjjblbedtdgdxl	$\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	4	8	$-56\varepsilon + 108$	43
$MV10_{16}^2$	кhpababghhfiifgjjqeutamdeqpt	$\mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$				
$MV10_{17}^2$	кhpababghfghifhjjjijutmueiddep	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus 2\mathbb{Z}$	8	24		
$MV10_{18}^2$	кbpelaaecfgifhjjjnbdxxtgdxnt	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus 2\mathbb{Z}$	8	28	$-16\varepsilon + 88$	111
$MV10_{19}^2$	кbpelaaecfgifhjjjnbdpptwqghd	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus 2\mathbb{Z}$	8	28	$-16\varepsilon + 88$	109
$MV10_{20}^2$	кdpemaadgefihijjkinumpdbdq	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus 2\mathbb{Z}$				

задают одно и то же многообразие  $MV10_1^3$  — дополнение в  $S^3$  к трехкомпонентному зацеплению  $L8a20$  (см. рис. 3). Таким образом, число различных многообразий не превосходит 15. Вычисление первых групп гомологий показывает, что в табл. 8 по крайней мере 3 различных многообразия. Также, с помощью компьютерной программы Recognizer установлено, что  $MV10_2^3 = S^3 \setminus L10n88$  и  $MV10_3^3 = S^3 \setminus L11n354$  (см. рис. 3). Для всех многообразий из табли-



**Кодировки и инварианты многообразий сложности 10 с 3 каспами**

имя	кодировка	$H_1$	$TV_3$	$TV_4$	$TV_5$
$MV10^3_1$	kdhdgaabfeffjijijixuimixmiuh kdhddaacefegijjjiddltptthux	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	4	16	$-96\varepsilon + 188$
$MV10^3_2$	khpababgfifhghijjdtltmxmliit	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	4	16	$-52\varepsilon + 116$
$MV10^3_3$	kdhdgaabfeffjijijhluimixmiuh	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	4	12	$-64\varepsilon + 132$
$MV10^3_4$	kdhddaabfefgjijijlpllpptldxd	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	4	12	$-76\varepsilon + 148$
$MV10^3_5$	khpababgfifhghijjddultmxeliit	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	4	16	$-40\varepsilon + 100$
$MV10^3_6$	kblbhaabdeefhjijjukkukbkhkbbk	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	8	32	$-32\varepsilon + 136$
$MV10^3_7$	kblbhaabdeefhijjukkukbxbkxbk	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	8	32	$-32\varepsilon + 136$
$MV10^3_8$	kcpblaaecdeighjijjgngkngkxx	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	8	32	$-32\varepsilon + 136$
$MV10^3_9$	kcpblaaecdegijhijjgngkwchvxrh	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	8	32	$-32\varepsilon + 136$
$MV10^3_{10}$	kblbhaacedefjhhijjtkxgekhtb	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	8	24	$-128\varepsilon + 264$
$MV10^3_{11}$	kcpemaadefghihjijbbuimpkmsxu	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	8	24	$-128\varepsilon + 264$
$MV10^3_{12}$	kdhddaadffefijjjeedixdiqtuq	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	8	32	$-96\varepsilon + 248$
$MV10^3_{13}$	khpababgfifhghijjjiuptmdeldit	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	8	32	$-96\varepsilon + 248$
$MV10^3_{14}$	kdhddaacefegijijjddaammddipxl	$\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	4	12	$-44\varepsilon + 112$
$MV10^3_{15}$	khpababghifhifgjijqiatmldeiqt	$\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	4	12	$-44\varepsilon + 112$

цы были вычислены инварианты Тураева — Виро до порядка 12. Значения инвариантов  $TV_3$ ,  $TV_4$ ,  $TV_5$  и  $TV_6$  приведены в соответствующих столбцах таблицы. Отсюда видно, что из 20 многообразий, приведенных в табл. 7, по меньшей мере 15 различных. Вычисление инвариантов  $TV_7, \dots, TV_{12}$  не позволило улучшить эту оценку. Вопрос о гомеоморфности многообразий из табл. 8, имеющих одинаковые группы гомологий и инварианты Тураева — Виро, остается открытым.

4. С л у ч а й многообразий с 4 каспами. Число триангуляций, задающих ориентированные многообразия с 4 каспами, равно 4. Кодировки этих триангуляций приведены в табл. 9.

С помощью компьютерной программы Recognizer установлено, что две указанные кодировки задают одно и то же многообразие  $MV10^4_2 = S^3 \setminus L10n101$ . Две оставшиеся кодировки также задают дополнения к 4-компонентным зацеплениям:  $MV10^4_1 = S^3 \setminus L8a21$  и  $MV10^4_3 = S^3 \setminus L12^4_1$  (см. рис. 4).

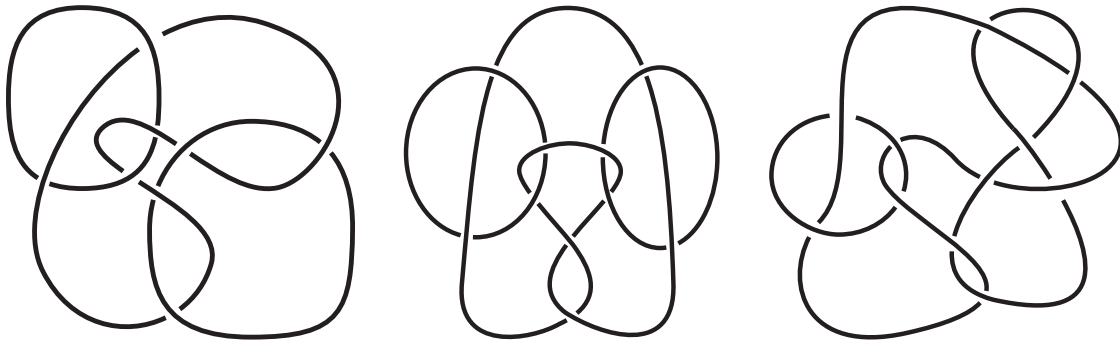
5. С л у ч а й многообразий с 5 каспами. Число триангуляций, задающих ориентированные многообразия с 5 каспами, оказалось равно 2. Соответствующие кодировки имеют вид:

$$kjpceabffgghhijjlpemdituxlp \quad \text{и} \quad kppaaabghifhifgjijuiutmideuix$$

Непосредственные вычисления с помощью компьютерной программы Recognizer показали, что обе триангуляции возникают как триангуляции одного и того же многообразия, являющегося дополнением к 5-компонентному зацеплению  $L10n113$ , приведенному на рис. 5. Введем обозначение  $MV10^5_1 = S^3 \setminus L10n113$ . Отметим, что  $H_1(MV10^5_1) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ .

Последний рассмотренный случай завершает доказательство теоремы. □

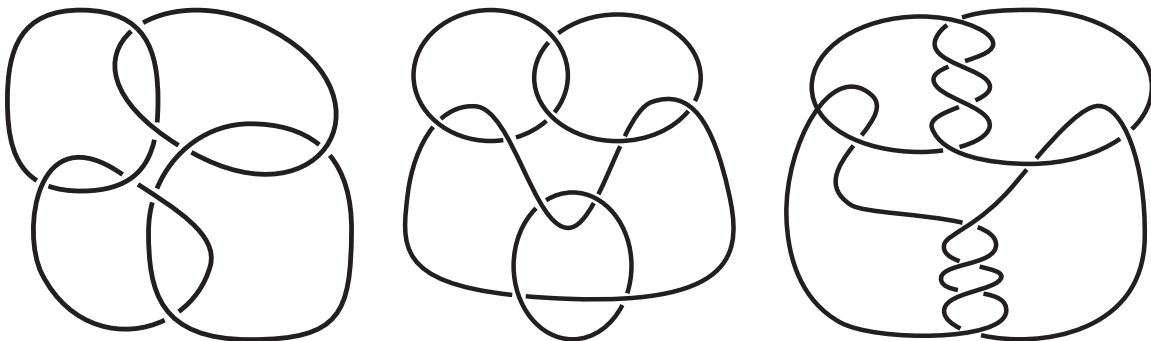
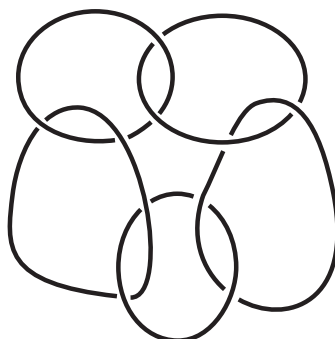
Авторы признательны М.А. Овчинникову, который при обсуждении представленных в этом разделе таблиц обратил наше внимание на то, что многообразия  $MV10^4_2$  и  $MV10^5_1$  являются дополнениями к зацеплениям.

Рис. 3. Зацепления  $L8a20$ ,  $L10n88$  и  $L11n354$ .

Т а б л и ц а 9

## Кодировки и инварианты многообразий сложности 10 с 4 каспами

Имя	Кодировка	$H_1$	$TV_3$	$TV_4$
$MV10_1^4$	kdhdgaabfeffijjixuimpmpuh	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	8	32
$MV10_2^4$	khpababghifhgfjjdiltmxdliit kdhddaadffefiijjjeedixdixtux	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	8	40
$MV10_3^4$	khpababghhfggfjjjixixdxix	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	8	36

Рис. 4. Зацепления  $L8a21$ ,  $L10n101$  и  $L12_1^4$ .Рис. 5. Зацепление  $L10n113$ .

### 5. Минимальное число тетраэдров для многообразия с заданным числом каспов

Следуя [20] обозначим через  $\sigma(k)$  минимальное число идеальных гиперболических тетраэдров, необходимых для построения связного трехмерного гиперболического многообразия конечного объема с  $k$  каспами (ориентируемого или неориентируемого). Пусть  $\sigma_{\text{ор}}(k)$  — аналогичное число для случая, когда мы ограничиваемся только ориентируемыми многообразиями.

Введем величину  $\sigma_{\text{рег}}(k)$  — минимальное число правильных идеальных гиперболических тетраэдров, необходимых для построения связного ориентируемого гиперболического многообразия с  $k$  каспами. Сведем результаты для  $\sigma(k)$  и  $\sigma_{\text{ор}}(k)$  из [20] и результаты теорем 1–3 в табл. 10.

Т а б л и ц а 10

$k$	1	2	3	4	5
$\sigma(k)$	1	2	4	6	10
$\sigma_{\text{ор}}(k)$	2	4	6	8	10
$\sigma_{\text{рег}}(k)$	2	4	10	10	10

В [20] высказана гипотеза о том, что  $\sigma_{\text{ор}}(6) = 16$ . Там же показано, что для любого положительного  $k$  выполнено  $\sigma_{\text{ор}} \geq 2k$ , и для  $k \geq 2$  выполнено  $\sigma_{\text{ор}}(k) \leq 4(k - 1)$ .

Проведенные нами численные эксперименты позволяют выдвинуть гипотезу о том, что  $\sigma_{\text{рег}}(6) = 16$ . Кроме того, представляет интерес следующая проблема.

**П р о б л е м а.** Найти верхнюю оценку на  $\sigma_{\text{рег}}(k)$  для достаточно больших  $k$ .

### 6. Обезвоженные описания многообразий

Опишем процедуру восстановления триангуляции многообразия по ее обезвоженному описанию (кодировке). Каждая кодировка  $W$  представляет собой строку букв английского алфавита. Первая буква строки задает количество тетраэдров в триангуляции по правилу: буква  $b$  означает 1 тетраэдр,  $c$  означает 2,  $d$  означает 3 и так далее.

Пусть кодировка  $W$  задает триангуляцию из  $N$  тетраэдров. Занумеруем тетраэдры числами от 0 до  $N - 1$ . Вершины каждого тетраэдра занумеруем числами от 0 до 3. Тогда каждая из  $4N$  граней тетраэдров однозначно определяется упорядоченной парой чисел: номером тетраэдра и номером противоположной вершины. Эту пару чисел мы будем называть номером грани.

Далее мы последовательно одна за другой осуществим  $2N$  склеек граней. При каждой склейке первая грань выбирается так: среди всех граней, которые еще не участвовали в склейках, мы выбираем грань, имеющую наименьший номер (в лексикографическом смысле).

Для выбора второй грани, участвующей в склейке, разобьем оставшуюся часть кодировки  $W$  (т.е. кодировку  $W$  с удаленной первой буквой) на три строки. Первые  $2 \left\lfloor \frac{N+3}{4} \right\rfloor$  буквы образуют строку  $W_1$ , следующие  $N + 1$  буквы образуют строку  $W_2$ , и последние  $N + 1$  буквы образуют строку  $W_3$ .

Тетраэдры, грани которых уже участвовали в склейках, будем называть *старыми*, а остальные тетраэдры — *новыми*. Строка  $W_1$ , состоящая из букв от  $a$  до  $p$ , определяет какому тетраэдру (старому или новому) принадлежит вторая грань. Делается это так. Берем первые две буквы строки  $W_1$  и заменяем их числами  $X$  и  $Y$  по правилу: букву  $a$  заменяем числом 0, букв  $b$  заменяем числом 1, ..., букву  $p$  заменяем числом 15. Десятичное число  $16X + Y$  переводим в двоичную запись  $\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_8$ . Читая запись  $\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_8$  справа налево, мы узнаем необходимую информацию про первые 8 склеек граней: 0 означает, что вторая грань принадлежит старому тетраэдру, а 1 — новому. Если  $N > 4$ , то берем следующие две буквы строки  $W_1$  и проделываем аналогичные действия. В результате получаем информацию про следующие восемь склеек граней и так далее.

Т а б л и ц а 11

Описание склеек граней триангуляции многообразия  $MV10_1^5$ 

Номер склейки	Первая грань	Вторая грань	Гомеоморфизм
1	(0, 0)	(1, 0)	тождество
2	(0, 1)	(2, 1)	тождество
3	(0, 2)	(3, 2)	тождество
4	(0, 3)	(4, 3)	тождество
5	(1, 1)	(5, 1)	тождество
6	(1, 2)	(5, 3)	310 → 120
7	(1, 3)	(5, 2)	210 → 130
8	(2, 0)	(6, 0)	тождество
9	(2, 2)	(6, 3)	310 → 012
10	(2, 3)	(6, 2)	210 → 013
11	(3, 0)	(7, 0)	тождество
12	(3, 1)	(7, 3)	320 → 021
13	(3, 3)	(7, 1)	210 → 203
14	(4, 0)	(8, 0)	тождество
15	(4, 1)	(8, 2)	320 → 301
16	(4, 2)	(8, 1)	310 → 302
17	(5, 0)	(9, 0)	тождество
18	(6, 1)	(9, 1)	320 → 320
19	(7, 2)	(9, 3)	310 → 120
20	(8, 3)	(9, 2)	210 → 130

Если вторая грань должна принадлежать одному из новых тетраэдров, то выбирается новый тетраэдр с наименьшим номером. При этом вторая грань выбирается в нем так, чтобы она противолежала вершине с тем же номером, что и первая грань, участвующая в склейке. Поскольку обе грани содержат вершины с одинаковыми номерами, то первая грань склеивается со второй гранью *по тождеству*, т.е. по гомеоморфизму, сохраняющему номера вершин.

Пусть вторая грань принадлежит старому тетраэдру  $T$ . Из всех  $2N$  склеек граней тетраэдров таких склеек будет ровно  $N + 1$ . Пусть  $i$ ,  $1 \leq i \leq N + 1$ , — номер текущей склейки. Тогда  $i$ -я буква строки  $W_2$ , читаемая слева направо, задает номер тетраэдра  $T$  по правилу: буква  $a$  задает номер 0, буква  $b$  — номер 1 и т.д. Нам осталось выбрать вторую грань среди граней тетраэдра  $T$  и указать гомеоморфизм склейки первой грани со второй гранью.

Рассмотрим все 24 перестановки четырех цифр 0, 1, 2, 3 и упорядочим их лексикографически. Сопоставим каждой букве от  $a$  до  $x$  перестановку по правилу: букве  $a$  сопоставим перестановку 0123, букве  $b$  — перестановку 0132, ..., и букве  $x$  — перестановку 3210. Пусть  $i$ -я буква строки  $W_3$ , читаемая слева направо, определяет перестановку  $ABCD$ . Эта перестановка задает биективное отображение  $\xi$  вершин тетраэдра, содержащего первую грань, на вершины тетраэдра  $T$  по правилу:  $\xi(3) = A$ ,  $\xi(2) = B$ ,  $\xi(1) = C$  и  $\xi(0) = D$ . Пусть первая грань противоположна вершине с номером  $j$ . Тогда вторая грань выбирается в тетраэдре  $T$  так, чтобы она была противоположной вершине с номером  $\xi(j)$ . При этом ограничение отображения  $\xi$  на множество  $\{0, 1, 2, 3\} \setminus \{j\}$  продолжается до гомеоморфизма склейки первой грани со второй гранью.

**Пример.** Рассмотрим первую из двух описанных выше триангуляций многообразия  $MV10_1^5$ , заданную кодировкой  $W = kjpceabffgghhijjlpemdituxlp$ . Первая буква  $k$  кодировки  $W$  означает, что триангуляция состоит из  $N = 10$  тетраэдров. Следующие  $2 \left\lfloor \frac{N+3}{4} \right\rfloor = 6$  буквы образуют строку  $W_1 = jrpceab$ . Первая пара букв  $jp$  строки  $W_1$  порождает число

$16 * 9 + 15 = 159$ , записываемое в бинарном виде как 10011111. Вторая пара букв *se* строки  $W_1$  порождает число  $16 * 2 + 4 = 36$ , записываемое в бинарном виде как 00100100. Наконец, третья пара букв *ab* строки  $W_1$  порождает число  $16 * 0 + 1 = 1$ , записываемое в бинарном виде как 00000001. Это означает, что в склейках с 1 по 5, 8, 11, 14 и 15 вторые грани принадлежат новым тетраэдрам, а в остальных — старым. Завершая предварительную часть выпишем строки  $W_2$  и  $W_3$ :  $W_2 = ffgghhijjj$ ,  $W_3 = lpemdituxlp$ .

Итак, в первых пяти склейках граней вторые грани принадлежат новым тетраэдрам. Поэтому грань (0, 0) склеивается с гранью (1, 0) по тождеству. Далее по тождеству склеиваются: грань (0, 1) с гранью (2, 1), грань (0, 2) с гранью (3, 2), грань (0, 3) с гранью (4, 3), и грань (1, 1) с гранью (5, 1).

Опишем шестую склейку, в которой впервые грань старого тетраэдра склеивается с гранью старого тетраэдра. В качестве первой грани мы должны взять грань (1, 2). Первая буква *f* строки  $W_2$  говорит нам, что вторая грань должна лежать в тетраэдре номер 5. Первая буква *l* строки  $W_3$  определяет перестановку 1320. Это означает, что вторая грань имеет номер  $(5, \xi(2)) = (5, 3)$ , а вершины 3, 1, 0 первой грани склеиваются с вершинами 1, 2, 0 второй грани, соответственно (для краткости будем писать  $310 \rightarrow 120$ ).

Далее продолжаем аналогичным образом до тех пор, пока не совершим двадцать склеек граней. Эти склейки записаны в табл. 11.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Matveev S.** Algorithmic topology and classification of 3-manifolds. 2nd ed. Berlin: Springer, 2007. 492 p. (Algorithms and Computation in Mathematics; vol. 9.)
2. **Веснин А.Ю., Матвеев С.В., Фоминых Е.А.** Сложность трехмерных многообразий: точные значения и оценки // Сиб. электр. мат. изв. 2011. Т. 8. С. 341–364.
3. **Frigerio R., Martelli B., Petronio C.** Small hyperbolic 3-manifolds with geodesic boundary // Experimental Math. 2004. Vol. 13, no. 2. P. 171–184.
4. **Callahan P., Hildebrand M., Weeks J.** A census of cusped hyperbolic 3-manifolds. With microfiche supplement // Math. Comp. 1999. Vol. 68, no. 225. P. 321–332.
5. Morwen Thistlethwaite's homepage [site]: Cusped hyperbolic manifolds with 8 tetrahedra. URL: <http://www.math.utk.edu/~morwen/8tet/> (дата обращения: 11.03.2014).
6. **Jaco W., Rubinstein H., Tillmann S.** Minimal triangulations for an infinite family of lens spaces // J. Topology. 2009. Vol. 2, no. 1. P. 157–180.
7. **Jaco W., Rubinstein H., Tillmann S.** Coverings and minimal triangulations of 3-manifolds // Algebr. Geom. Topol. 2011. Vol. 11, no. 3. P. 1257–1265.
8. **Веснин А.Ю., Фоминых Е.А.** Точные значения сложности многообразий Паолоуци — Циммермана // Докл. РАН. 2011. Т. 439, № 6. С. 727–729.
9. **Веснин А.Ю., Фоминых Е.А.** О сложности трехмерных гиперболических многообразий с геодезическим краем // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 4. С. 781–793.
10. **Frigerio R., Martelli B., Petronio C.** Complexity and Heegaard genus of an infinite class of compact 3-manifolds // Pacific J. Math. 2003. Vol. 210, no. 2. P. 283–297.
11. **Anisov S.** Exact values of complexity for an infinite number of 3-manifolds // Moscow Math. J. 2005. Vol. 5, no. 2. P. 305–310.
12. Jeff Weeks' Topology and Geometry Software [site]: SnapPea. URL: <http://geometrygames.org/SnapPea/> (дата обращения: 11.03.2014).
13. **Hildebrand M.V., Weeks J.R.** A computer generated census of cusped hyperbolic 3-manifolds // Computers and mathematics: papers from the conference held at the Massachusetts Institute of Technology / eds. Erich Kaltofen, Stephen M. Watt. (Cambridge, 1989). New York: Springer-Verlag, 1989. P. 53–59.
14. **Burton B.A.** A duplicate pair in the SnapPea census. Preprint arXiv:1311.7615. URL: <http://arxiv.org/pdf/1311.7615v2.pdf> (дата обращения 11.03.2014).
15. **Веснин А.Ю., Таркаев В.В., Фоминых Е.А.** О сложности трехмерных гиперболических многообразий с каспами // Докл. РАН. 2014. Т. 456, № 1. С. 11–14.
16. **Ratcliffe J.** Foundations of hyperbolic manifolds. 2nd ed. New York: Springer, 2006. 779 p. (Graduate Texts in Mathematics; vol. 149.)

17. **Фоминых Е.А.** Хирургии Дена на узле восьмерка: верхняя оценка сложности // Сиб. мат. жур. 2011. Т. 52, № 3. С. 680–689.
18. **Matveev S., Petronio C., Vesnin A.** Two-sided asymptotic bounds for the complexity of some closed hyperbolic three-manifolds // J. Aust. Math. Soc. 2009. Vol. 86, no. 2. P. 205–219.
19. **Mednykh A., Vesnin A.** Covering properties of small volume hyperbolic 3-manifolds // J. Knot Theory Ramifications. 1998, Vol. 7, no. 3. P. 381–392.
20. **Adams C., Sherman W.** Minimum ideal triangulations of hyperbolic 3-manifolds // Discrete Comput. Geom. 1991. Vol. 6, no. 2. P. 135–153.

Веснин Андрей Юрьевич

д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН

зав. лабораторией

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

Омский государственный технический университет

e-mail: vesnini@math.nsc.ru

Поступила 12.03.2014

Таркаев Владимир Викторович

канд. физ.-мат. наук

старший науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

Челябинский государственный университет

e-mail: trk@csu.ru

Фоминых Евгений Анатольевич

канд. физ.-мат. наук

старший науч. сотрудник

Челябинский государственный университет

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

e-mail: fominykh@csu.ru