

УДК 515

ЭЛЕМЕНТАРНОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ВЛОЖИМОСТИ КЛАССИЧЕСКИХ КОС В ВИРТУАЛЬНЫЕ КОСЫ

© 2016 г. В. О. Мантуров

Представлено академиком РАН В.А. Васильевым 03.11.2015 г.
Поступило 05.04.2016 г.

Цель настоящего сообщения — доказательство того, что естественное отображение классических кос в виртуальные косы является вложением. Это доказательство не использует каких-либо полных инвариантов классических кос, оно основано на проекции с (крашенных) виртуальных кос на классические косы (она аналогична проекции из [6]); эта проекция является тождественным отображением на множестве классических кос. Она корректно определена не только для группы (крашенных) виртуальных кос, но и для фактор-группы группы (крашенных) виртуальных кос по так называемому движению виртуализации. Идея этой проекции тесно связана с понятием четности и с группами G_n^k , введенными автором в [3].

DOI: 10.7868/S0869565216230067

Виртуальные косы являются естественным обобщением классических кос. Классические косы образуют подгруппу группы виртуальных кос: если две классические косы равны (эквивалентны) как элементы группы виртуальных кос, то они равны (эквивалентны) как классические косы. Впервые это было доказано в [2]. В настоящей работе мы даем элементарное доказательство более сильного утверждения: мы доказываем, что композиция отображения из группы классических (крашенных) кос в группу виртуальных (крашенных) кос с проекцией на некоторую естественную фактор-группу группы виртуальных кос является вложением.

Без ограничения общности мы будем работать только с крашеными косами (классическими и виртуальными).

Фиксируем натуральное число n . Будем рассматривать следующие системы знаков: для каждой пары i, j различных целых чисел из $\{1, 2, \dots, n\}$ имеется знак $S(i, j) \equiv s_{ij} \in \{\pm 1\}$, причем $s_{ij} = -s_{ji}$. Скажем, что система знаков реализуема, если имеется набор различных целых чисел $N_j, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, для которых $s_{ij} = \text{sign}(N_j - N_i)$.

Определение 1. Пусть S — система знаков. Скажем, что два различных индекса

$i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ являются соседними, если для каждого $k \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{i, j\}$ имеет место $s_{ik} = s_{jk}$.

Определим группу крашенных виртуальных кос PB_n согласно работе [1] как группу, имеющую следующее копредставление:

Образующими группы являются

$$a_{ij}, \quad 1 \leq i \neq j \leq n.$$

Соотношения в группе суть

$$a_{ij}a_{ik}a_{jk} = a_{jk}a_{ik}a_{ij}, \quad i, j, k \text{ различные};$$

$$a_{ij}a_{kl} = a_{kl}a_{ij}, \quad i, j, k, l \text{ различные}.$$

Соотношения первого вида соответствуют третьим классическим движениям Рейдемейстера, а соотношения второго вида — дальней коммутативности группы виртуальных кос. Далее мы будем называть слова из букв a_{ij} словами-косами или просто словами. Определим число закрученности как $+1$ для всех образующих $w(a_{ij}) = +1$ и как -1 для букв, обратных к ним: $w(a_{ij}^{-1}) = -1$.

Группа, описанная выше, изоморфна группе крашенных виртуальных кос (см. [1]).

Введем следующую важную фактор-группу группы крашенных виртуальных кос:

$$\tilde{P}B_n = PB_n / \langle a_{ij} = a_{ji}, 1 \leq i \neq j \leq n \rangle;$$

определим группу G_n^2 как фактор-группу группы $\tilde{P}B_n$ по соотношениям $a_{ij}^2 = 1$, см. [3].

Пусть дана слово-коса β . Мы можем ее представить диаграммой косы следующим образом.

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана
Челябинский государственный университет
E-mail: vomanturov@yandex.ru

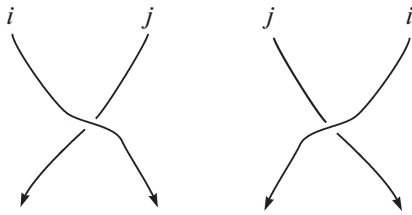


Рис. 1. Перекресток, соответствующий a_{ij} (слева); перекресток, соответствующий a_{ij}^{-1} (справа).

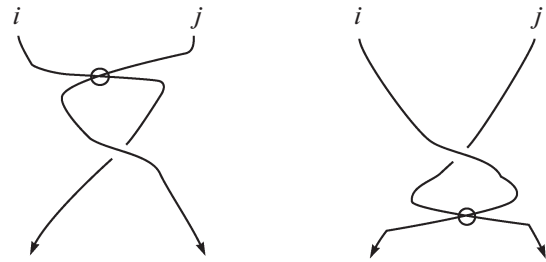


Рис. 2. Виртуализация.

Пусть β представляет собой произведение букв $\beta_1 \dots \beta_k$. Тогда диаграмма косы состоит из n нитей на плоскости, каждая из которых соединяет верхнюю точку $(l, 1)$ с нижней точкой $(l, 0)$ при $l = 1, 2, \dots, n$.

Естественное отображение o из группы крашенных классических кос в группу \tilde{PB}_n определяется следующим образом. Пусть дана диаграмма b крашенной классической косы из n нитей; занумеруем нити диаграммы b натуральными числами от 1 до n согласно координате их концов. Отметим, что в отличие от копредставления Артина эта нумерация нитей – глобальная. Начнем “читать” классические перекрестки диаграммы b сверху вниз. Пусть в некотором перекрестке дуга прохода подходит к перекрестку справа сверху, обозначим номер нити прохода через j , номер нити перехода – через i , сопоставим этому перекрестку образующую a_{ij} . Если нить, образующая прохода, подходит сверху слева, то мы обозначим номер нити прохода через j , а номер нити перехода – через i и сопоставим этому перекрестку образующую a_{ij}^{-1} (см. рис. 1).

Приведенное выше описание можно понимать как описание группы крашенных виртуальных кос их плоскими диаграммами: мы просто игнорируем виртуальные перекрестки.

Для каждого классического перекрестка мы запишем образующую a_{ij} . Отметим, что виртуальным перекресткам не соответствуют образующие; мы получили слово из букв a_{ij} и a_{ij}^{-1} ; обозначим это слово через $o(b)$; подробнее см. [1].

Скажем, что две слова-косы эквивалентны посредством виртуализации, если одну из них можно преобразовать в другую посредством последовательности преобразований $a_{ij} \rightarrow a_{ji}$.

Геометрическая интерпретация движения виртуализации показана на рис. 2.

Заметим, что $o(b)$ зависит лишь от комбинаторной структуры в классических перекрестках. Скажем, что две диаграммы виртуальных кос b, b'

эквивалентны посредством объезда (или просто равны), если два слова $o(b)$ и $o(b')$ совпадают. Далее мы не будем различать равные виртуальные диаграммы, в частности, будем говорить, что диаграмма b является классической, если существует классическая диаграмма b' , эквивалентная диаграмме b посредством объезда.

Заметим, что при применении виртуализации к перекрестку мы не меняем число закрученности этого перекрестка, но дуга перехода превращается в дугу прохода и наоборот.

По определению диаграммы, эквивалентные посредством виртуализации, задают один и тот же элемент группы \tilde{PB}_n .

Целью настоящей работы является доказательство следующей теоремы.

Т е о р е м а 1. *Отображение o задает вложение группы классических крашенных кос из n нитей в группу \tilde{PB}_n .*

Определим сначала действие группы G_n^2 на системе знаков S (что задаст действие групп PB_n и \tilde{PB}_n на ней) согласно следующему правилу: образующая a_{ij} меняет знаки $S(i, j) \equiv s_{ij}$ и $S(j, i) \equiv s_{ji}$ и оставляет неизменными остальные знаки.

Фиксируем систему знаков B , соответствующую набору чисел $1, 2, \dots, n$, по правилу: $s_{ij} = +1$, если и только если $j > i$.

Пусть элемент группы PB_n задан словом $\beta = \beta_1 \beta_2 \dots \beta_l$ (здесь каждая буква β_l – это a_{ij} или a_{ij}^{-1} при некоторых i, j). Это слово будет действовать на системе знаков B справа. Более точно, мы рассмотрим системы знаков $S_0 = B, S_1 = \beta_1 B, S_2 = \beta_2 \beta_1 B, S_3 = \beta_3 \beta_2 \beta_1 B, \dots$ Каждый классический перекресток (буква) относится ровно к двум индексам. Фиксируем $j \in \{1, 2, \dots, l\}$. Пусть $\bar{\beta} = \beta_1 \dots \beta_{j-1}$. Скажем, что классический перекресток β_j в слове β является хорошим, если индексы этого перекрестка являются соседними в слове $\bar{\beta} B$ (см. определение 1). Ясно, что эти два индекса останутся соседними и в слове $\beta_j \bar{\beta} B$, получаемом после действия β_j .

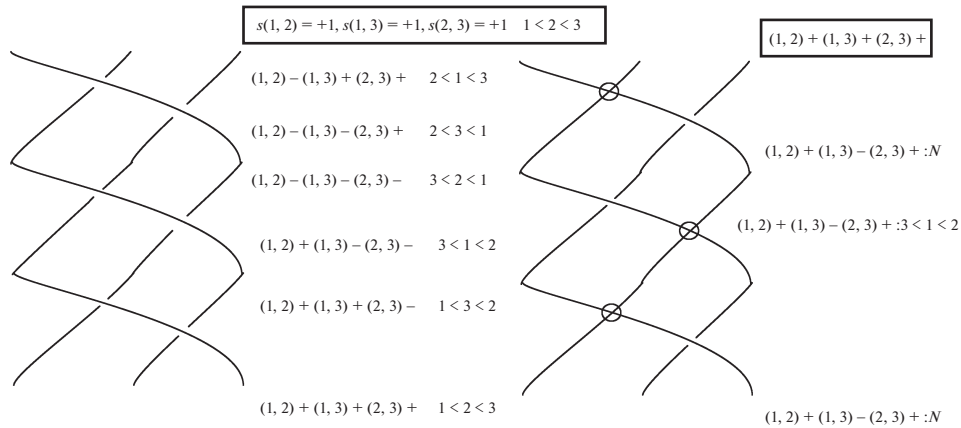


Рис. 3. Коса, действующая на множестве знаков.

Это действие изображено на рис. 3. В левой части рисунка изображено действие классической (реализуемой) косы, а в правой части изображено действие виртуальной косы; в левой части мы приводим реализацию шаг за шагом (на p -м шаге $s_{ij} \equiv s(i, j) \equiv S_p(i, j)$), в правой части набор знаков $s(1, 2) = +1, s(1, 3) = -1, s(2, 3) = +1$ не является реализуемым.

Идея доказательства основной теоремы состоит в том, что свойство “хорошести” тесно связано с понятием “слабой четности”, используемом в теории виртуальных узлов [4]. Классические косы аналогичны “четным объектам”, при этом если два “четных” объекта эквивалентны, то они эквивалентны в классе “четных” (см. [5]).

Более точно, имеют место следующие леммы.

Л е м м а 1. Пусть β – слово-коса, содержащая соседние буквы a_{ij} и a_{ij}^{-1} . Тогда либо оба соответствующих перекрестка являются хорошими, либо оба не являются хорошими.

Напомним, что вставка (или удаление) подряд идущих букв a_{ij}, a_{ij}^{-1} в том или ином порядке отвечает второму классическому движению Рейдемейстера.

Л е м м а 2. Если слово-коса β допускает применение третьего движения Рейдемейстера, так что три соседние буквы $\beta_m \beta_{m+1} \beta_{m+2}$ преобразуются в $\beta'_{m+2} \beta'_{m+1} \beta'_m$, то для $j = m, m + 1, m + 2$ либо оба перекрестка, отвечающие β_j, β'_j , являются хорошими, либо оба не являются хорошими.

Более того, среди трех перекрестков $\beta_m, \beta_{m+1}, \beta_{m+2}$ число хороших перекрестков равно 0, 1 или 3.

Доказательство. Пусть $\beta = \bar{\beta} \beta_m \beta_{m+1} \beta_{m+2} \bar{\beta}$. Обозначим номера нитей для перекрестков $\beta_m, \beta_{m+1}, \beta_{m+2}$ через $(i, j), (i, k), (j, k)$ соответственно. Предположим, что перекресток, отвечающий β_m ,

хороший; это значит, что нити (i, j) являются соседними после действия $\bar{\beta}$ на множестве знаков V . Когда мы рассматриваем перекресток β'_m , косы $\beta' = \bar{\beta} \beta'_{m+2} \beta'_{m+1} \beta'_m$, нити, соответствующие этому перекрестку, также являются соседними, поскольку действие произведения $\beta'_{m+2} \cdot \beta'_{m+1}$ меняет знаки $(j, k), (k, j), (i, k), (k, i)$ и не меняет другие знаки.

Доказательство того, что перекрестки $\beta_{m+1}, \beta'_{m+1}$ являются одновременно хорошими, а также доказательство того, что $\beta_{m+2}, \beta'_{m+2}$ являются одновременно хорошими, проводится аналогично.

Покажем теперь, что если два из трех перекрестков, соответствующих $\beta_m, \beta_{m+1}, \beta_{m+2}$, являются хорошими, то и третий является хорошим. Мы рассмотрим только один случай, остальные случаи рассматриваются аналогично.

Пусть теперь перед тремя перекрестками, участвующими в третьем движении Рейдемейстера, имеется p перекрестков. Напомним, что через S_p мы обозначили систему знаков после действия $\bar{\beta}$ на V справа. Пусть оба перекрестка β_m и β_{m+1} хорошие. Обозначим через S'_p систему знаков после действия $\bar{\beta} \beta_m$. Тогда индексы $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ являются соседними в S_p , а индексы i, k являются соседними в S'_p . Это значит, что в S'_p индекс i соседствует как с j , так и с k . В частности, это значит, что для каждого $l \neq i, j, k$: $S'_p(j, l) = S'_p(i, l) = S'_p(k, l)$. Таким образом, после действия β_{m+1} j и k становятся соседними, откуда следует, что перекресток β_{m+2} – хороший.

Из определения мы получаем следующую лемму.

Л е м м а 3. Если хороший перекресток некоторой диаграммы не участвует в некотором движе-

нии Рейдемейстера, то этот перекресток остается хорошим после применения этого движения.

Определим теперь слово $d(\beta)$ как слово, получаемое из β удалением букв, не являющихся хорошими. Из приведенных выше лемм вытекает

Лемма 4. Если β, β' равны как элементы группы PB_n , то слова $d(\beta), d(\beta')$ равны как элементы PB_n .

Если β, β' равны как элементы группы $\tilde{P}B_n$, то $d(\beta), d(\beta')$ равны как элементы группы $\tilde{P}B_n$.

Доказательство. Действительно, нужно проверить, что лемма выполняется в случае, когда β' получается из β применением одного из соотношений. Для второго движения Рейдемейстера мы используем леммы 1, 3. Для третьего движения Рейдемейстера мы используем леммы 2, 3. Наконец, если β' получается из β применением соотношения дальней коммутативности $\beta = a_{ij}a_{kl} \rightarrow a_{kl}a_{ij} = \beta'$ (все i, j, k, l различны), то достаточно заметить, что $d(\beta)$ либо совпадает с $d(\beta')$, либо отличается от $d(\beta)$ тем же соотношением $a_{ij}a_{kl} \rightarrow a_{kl}a_{ij}$.

Из явной проверки вытекает следующая

Лемма 5. Пусть β — слово-коса, представляющая крашеную виртуальную косу, причем β тривиально действует на системах знаков. Если все буквы в β хорошие, то β эквивалентна некоторой классической крашеной косе посредством виртуализации.

Доказательство. Система знаков V по определению реализуема. Пусть $\beta = \beta_1 \dots \beta_m$. По построению все системы S_0, S_1, \dots, S_m реализуемы.

Это значит, что мы можем построить слово β' , эквивалентное слову β посредством виртуализации, шаг за шагом. На каждом шаге мы будем иметь диаграмму без виртуальных перекрестков; таким образом, результирующая коса будет классической. Построив классическую косу, эквивалентную посредством виртуализации косе $\beta_1 \dots \beta_j$, мы добавляем следующий перекресток, соответствующий β_{j+1} . Мы знаем, каким нитям он отвечает, мы знаем его число закрученности. Таким образом, на каждом шаге мы имеем слово-косу, эквивалентную посредством виртуализации косе $\beta_1 \beta_2 \dots \beta_k$. В конце мы получим слово-косу, эквивалентную β посредством виртуализации, причем все нижние концы нитей расположены в порядке возрастания, так как β действует тривиально на множестве знаков.

Отметим, что отображение d не является идемпотентом: $d^2 \neq d$. Итерировав отображение d , мы получаем действие d^{stab} , переводящее косы из $\tilde{P}B_n$ в крашеные косы, которые эквивалентны классическим косам посредством виртуализаций.

Пусть теперь $\beta = \beta_1 \rightarrow \dots \rightarrow \beta_k = \beta'$ — последовательность слов-кос из $\tilde{P}B_n$, в которой любые два соседние слова связаны соотношением из $\tilde{P}B_n$. По определению эти косы тривиально действуют на множестве перестановок. Рассмотрим последовательность $\beta = d^{\text{stab}}(\beta) = d^{\text{stab}}(\beta_1) \rightarrow \dots \rightarrow d^{\text{stab}}(\beta_k) = \beta'$. Каждые две соседних слова-косы $d^{\text{stab}}(\beta_i)$ и $d^{\text{stab}}(\beta_{i+1})$ либо совпадают, либо связаны соотношением из $\tilde{P}B_n$. Пусть $\tilde{\beta}_j$ — классическая слово-коса, эквивалентная посредством виртуализации слову-косе $d^{\text{stab}}(\beta_j)$ при $j = 1, 2, \dots, k$. Мы видим, что $\tilde{\beta}_i$ и $\tilde{\beta}_{i+1}$ либо совпадают, либо связаны тем же движением, что и $d^{\text{stab}}(\beta_i), d^{\text{stab}}(\beta_{i+1})$. Поскольку все $\tilde{\beta}_j$ классические, мы получаем последовательность классических движений Рейдемейстера от β к β' .

Этим завершается доказательство основной теоремы.

Автор благодарен В.А. Васильеву, А.И. Гудро, И.М. Никонову, В.Г. Бардакову и Д.П. Ильютку за полезные замечания.

Настоящая работа поддержана лабораторией квантовой топологии Челябинского государственного университета (грант Правительства РФ 14.Z50.31.0020) и грантами РФФИ 13-01-00830, 14-01-91161, 14-01-31288.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bardakov V.G.* The Virtual and Universal Braids // *Fundam. Math.* 2004. V. 184. P. 1–18.
2. *Fenn R. Rimanyi R., Rourke C.* The Braid-Permutation Group // *Topology.* 1997. V. 36. № 1. P. 123–135.
3. *Manturov V.O.* Non-Reidemeister Knot Theory and Its Applications in Dynamical Systems, Geometry, and Topology. <http://arxiv.org/abs/1501.05208>
4. *Ильютко Д.П., Мантуров В.О., Никонов И.М.* Четность в теории узлов и граф-зацепления // *Совр. математика. Фундам. направления.* 2011. Т. 41. С. 3–163.
5. *Мантуров В.О.* Четность в теории узлов // *Мат. сб.* 2010. Т. 201. № 5. С. 65–110.
6. *Manturov V.O.* Parity and Projection from Virtual Knots to Classical Knots // *J. Knot Theory Ramifications.* 2013. V. 29. № 9. 1350044.