

|   |   |               |
|---|---|---------------|
| <p>Документ подписан простой электронной подписью<br/>         Информация о владельце:<br/>         ФИО: Гаскаев Сергей Валерьевич<br/>         Должность: Ректор<br/>         Дата подписания: 15.06.2026 12:25:16<br/>         Уникальный программный ключ:<br/>         04c19ed8bf098f3b6cb73484b9a8788b432373</p> | <p>МИНОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИИ<br/>         Федеральное государственное бюджетное<br/>         образовательное учреждение высшего образования<br/>         «Челябинский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ЧелГУ»)</p> | <p>стр. 1</p> |
|---|---|---------------|

Фонд оценочных средств  
 для промежуточной аттестации  
 по дисциплине (модулю)  
**Уравнения в частных производных первого порядка**

Направление подготовки (специальность)  
**01.04.01 «Математика»**

Направленность (профиль)  
**«Уравнения с дробными производными»**

Присваиваемая квалификация  
**Магистр**

Форма обучения  
**Очная**

Челябинск, 2026 г.



## Содержание

|   |   |
|---|---|
| 1. Паспорт фонда оценочных средств .....  | 3 |
| 2. Перечень формируемых компетенций .....   | 4 |
| 3. Содержание оценочных средств по дисциплине .....                                 | 5 |
| 3.1. Виды оценочных средств .....   | 5 |
| 3.2. Содержание оценочных средств .....   | 6 |
| 4. Порядок проведения и критерии оценивания промежуточной аттестации .....          | 8 |
| 4.1. Порядок проведения промежуточной аттестации .....                              | 8 |
| 4.2. Критерии оценивания промежуточной аттестации по видам оценочных средств .....  | 8 |
| 4.3. Результаты промежуточной аттестации и уровни сформированности компетенций..... | 9 |



## 1. Паспорт фонда оценочных средств

Направление подготовки: 01.04.01 Математика.

Направленность: Уравнения с дробными производными.

Дисциплина: Уравнения в частных производных первого порядка.

Семестры: 2.

Форма промежуточной аттестации: экзамен.

Балльно-рейтинговая система оценки знаний студента по дисциплине выстраивается на основе балловой оценки различных форм деятельности студентов.



## 2. Перечень формируемых компетенций

Изучение дисциплины «Уравнения в частных производных первого порядка» направлено на формирование компетенций, приведённых в таблице 1.

Таблица 1. Результаты обучения по дисциплине.

| Код и наименование компетенций согласно ФГОС (ОПОП ВО)  | Индикаторы достижения компетенции согласно ОПОП ВО   | Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине  |
|---|--|--|
| 1   | 2  | 3  |
| <b>ПК-1</b> Способен проводить научно-исследовательскую работу в области дифференциальных уравнений | <b>ПК-1.1.</b> Демонстрирует знание основных теоретических положений и методов в области проводимых научных исследований.<br><b>ПК-1.2.</b> Демонстрирует умения сбора и анализа информации по тематике проводимых исследований.<br><b>ПК-1.3.</b> Имеет практический опыт установления новых фактов и закономерностей в области научных исследований. | <b>Знать:</b> <ul style="list-style-type: none"><li>• основные теоретические положения и методы в области уравнений в частных производных первого порядка.</li></ul> <b>Уметь:</b> <ul style="list-style-type: none"><li>• собирать и анализировать информацию по тематике уравнений в частных производных первого порядка, включая их прикладные аспекты.</li></ul> <b>Владеть:</b> <ul style="list-style-type: none"><li>• навыками применения методов уравнений в частных производных первого порядка для установления и анализа моделей, описывающих различные процессы и явления.</li></ul> |



### 3. Содержание оценочных средств по дисциплине

#### 3.1. Виды оценочных средств

Таблица 2. Виды оценочных средств.

| Код, наименование компетенции согласно ФГОС  | Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине  | Контролируемые темы/разделы                                | Семестр | Номер задания | Наименование оценочного средства             |
|--|--|--|---------|---------------|--|
| ПК-1 Способен проводить научно-исследовательскую работу в области дифференциальных уравнений | <b>1.1 Знать:</b><br>основные теоретические положения и методы в области уравнений в частных производных первого порядка.                            | – Основные понятия и теоремы                               | 2       | 1-5           | Задание открытого типа с развернутым ответом |
|  | <b>1.2 Уметь:</b><br>собирать и анализировать информацию по тематике уравнений в частных производных первого порядка, включая их прикладные аспекты. | – Квазилинейные уравнения<br>– Специальные методы и задачи | 2       | 6-10          | Задание открытого типа с развернутым ответом |
|  | <b>1.3 Владеть:</b><br>навыками применения методов уравнений в частных производных первого порядка для установления и анализа моделей,               | Приложения и обобщения                                     | 2       | 11-15         | Задание открытого типа с развернутым ответом |



|  |   |  |  |  |  |
|--|---|--|--|--|--|
|  | описывающих различные процессы и явления. |  |  |  |  |
|--|---|--|--|--|--|

Типовые задания, критерии и показатели оценивания в рамках текущего контроля представлены в рабочей программе дисциплины (модуля). Полные комплекты оценочных средств и контрольно-измерительных материалов хранятся на кафедре.

### 3.2. Содержание оценочных средств

Темы докладов:

1. Геометрическая интерпретация решений уравнений в частных производных первого порядка
2. Сравнительный анализ метода характеристик и метода интегрирующего множителя для решения квазилинейных уравнений
3. Связь между уравнениями Гамильтона-Якоби и уравнениями классической механики
4. Теоремы существования и единственности решений уравнений в частных производных первого порядка
5. Особые решения и их роль в теории уравнений первого порядка
6. Применение уравнений первого порядка для моделирования процессов переноса вещества и энергии
7. Моделирование распространения волн с помощью уравнений в частных производных первого порядка
8. Применение метода характеристик в гидродинамике для решения уравнений газовой динамики
9. Использование уравнений Гамильтона-Якоби в теории оптимального управления
10. Уравнения первого порядка в геометрической оптике
11. Применение уравнений первого порядка в финансовой математике
12. Моделирование дорожного движения с помощью уравнений в частных производных первого порядка
13. Преобразование Лежандра и его применение в теории уравнений в частных производных первого порядка
14. Численные методы решения уравнений первого порядка (например, метод конечных разностей, метод конечных элементов)
15. Современные исследования в области уравнений в частных производных первого порядка

Вопросы к экзамену

Вопросы для экзамена:

Раздел 1: Введение и основные понятия

1. Дайте определение уравнений в частных производных первого порядка. Приведите примеры линейных, квазилинейных и нелинейных уравнений.
2. Что такое решение уравнения в частных производных первого порядка? Дайте геометрическую интерпретацию решения.
3. Сформулируйте определение характеристических кривых для линейного однородного уравнения первого порядка.



4. Опишите метод характеристик для решения линейных однородных уравнений первого порядка.

5. Как применяется метод характеристик для решения линейных неоднородных уравнений первого порядка?

#### Раздел 2: Квазилинейные уравнения

6. Опишите метод характеристик для решения квазилинейных уравнений первого порядка. В чем отличие от линейных уравнений?

7. Как строится характеристическая система для квазилинейного уравнения? Что такое интегралы характеристической системы?

8. Объясните, как решаются квазилинейные уравнения в случае, когда они разрешимы относительно одной из производных.

9. Приведите примеры физических задач, которые описываются квазилинейными уравнениями первого порядка.

10. Что такое особые решения квазилинейных уравнений? Какова их геометрическая интерпретация?

11. Что такое разрывы в решениях квазилинейных уравнений?

#### Раздел 3: Специальные методы и задачи

12. Опишите метод интегрирующего множителя для решения уравнений в частных производных первого порядка. Когда он применяется?

13. Расскажите про преобразования Лежандра и их применение для решения УЧП первого порядка.

14. Что такое уравнение Гамильтона-Якоби? Как оно связано с уравнениями классической механики?

15. Как решается уравнение Гамильтона-Якоби с помощью метода характеристик? Что такое полный интеграл?

16. Сформулируйте задачу Коши для уравнения в частных производных первого порядка.

17. Какие условия обеспечивают существование и единственность решения задачи Коши?

#### Раздел 4: Приложения и обобщения

18. Приведите примеры применения уравнений в частных производных первого порядка в геометрии и оптике.

19. Как уравнения первого порядка могут использоваться в задачах управления?

20. Сравните различные методы решения уравнений в частных производных первого порядка. Какие у них преимущества и недостатки?

21. Опишите, как строится математическая модель для описания процесса, который может быть представлен уравнением в частных производных первого порядка.



#### 4. Порядок проведения и критерии оценивания промежуточной аттестации

##### 4.1. Порядок проведения промежуточной аттестации

На экзамене выдается 2 вопроса из списка вопросов по темам практических занятий. Продолжительность экзамена – 90 минут. За каждое выполненное задание билета студент может получить от 1 до 3 баллов. Если задание выполнено правильно, то оно оценивается 3 баллами. Если задание выполнено с ошибками, то баллы снижаются в зависимости от количества допущенных ошибок. Если допущена одна ошибка, то задание оценивается 2 баллами, допущены две ошибки – 1 балл. Если допущено более двух ошибок в задании или студент не выполнил какое-либо задание из билета, то за него он получает 0 баллов. Максимальное количество баллов за экзамен – 6.

##### 4.2. Критерии оценивания промежуточной аттестации по видам оценочных средств

| Высокий уровень освоения проверяемых компетенций  | Средний уровень освоения проверяемых компетенций   | Базовый уровень освоения проверяемых компетенций   | Низкий уровень освоения проверяемых компетенций  |
|---|--|--|--|
| 6 баллов  | 5 баллов   | 4 балла  | 0 – 3 балла  |
| Обучающийся последовательно, грамотно и логически стройно излагает материал; владеет основными математическими методами и алгоритмами решения задач; умеет строить математические модели, увязывать теорию с практикой, показывает умение применять знания. | Обучающийся грамотно и по существу излагает материал; владеет основными математическими методами; не допускает существенных ошибок, но испытывает затруднения в выводах и доказательствах; умеет применять основные положения и формулы для решения задач. | Обучающийся имеет знания только основного материала, но не умеет делать выводов и доказательств; допускает ошибки, приводит недостаточно правильные формулировки; с трудом увязывает основные положения с практикой. | Обучающийся не знает основополагающих вопросов изучаемого курса или значительной части программного материала; допускает ошибки, обнаруживает неумение их исправлять; не может увязать теорию с практикой. |

Описание показателей и критериев оценивания компетенций для доклада:

В семестре 2 доклада. На доклад отводится 15-20 минут в конце пары (каждую пару 1 доклад). Каждый студент готовит доклад по одной из предложенных тем. Максимальное количество баллов за доклады - 20.

Оценка "зачтено" выставляется за 12-20 баллов, "не зачтено" - менее 12 баллов.

Полнота доклада оценивается по следующим критериям:

1. Полнота изложения теоретического материала
2. Достаточное количество примеров к теоретическому материалу
3. Приведены примеры к определениям и теоремам



4. Приведены контрпримеры, демонстрирующие при каких условиях не применимы теоремы.

#### 4.3. Результаты промежуточной аттестации и уровни сформированности компетенций

При подведении итогов учитываются результаты текущей аттестации. Полученные за текущую аттестацию баллы суммируются с баллами, полученными за каждый этап при прохождении промежуточной аттестации:

- Оценка "Не удовлетворительно" выставляется за 13 и менее баллов;
- Оценка "Удовлетворительно" выставляется за 14-17 баллов (уровень 1);
- Оценка "Хорошо" выставляется за 18-21 баллов (уровень 2);
- Оценка "Отлично" выставляется за 22-26 баллов (уровень 3).

Особенности проведения процедуры оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья обозначены в рабочей программе дисциплины (модуля).

Уровни сформированности компетенций определяется следующим образом

1. Высокий уровень сформированности компетенций соответствует оценке отлично:
  - предполагает формирование компетенций на высоком уровне, готовность к самостоятельной профессиональной деятельности: формируются навыки устанавливать связи между различными понятиями и с другими областями математики, навыки доказывать теоремы, навыки систематизации данных, необходимых для приложения полученных знаний в различных областях.
  - студент способен дать полное представление об основных понятиях уравнений в частных производных, использовать математический язык, способен решать задачи и упражнения, используя определения, теоремы и технические приёмы, формулировать собственные выводы.
2. Средний уровень соответствует оценке хорошо:
  - предполагает формирование компетенций на более высоком уровне: формируется комплексное знание связи между различными понятиями и с другими областями математики, навыки доказывать теоремы;
  - студент способен использовать математический язык, способен решать задачи и упражнения, используя определения, теоремы и технические приёмы.
  - студент способен давать развернутые ответы на теоретические вопросы дисциплины на уровне не ниже оценки «удовлетворительно».
3. Базовый уровень соответствует оценке удовлетворительно:
  - предполагает формирование компетенций на начальном уровне: знание основных понятий и теорем уравнений в частных производных, необходимых для решения задач в профессиональной деятельности;
  - студент способен решать базовые задачи. Количество правильных ответов – не менее 50%.
4. Низкий уровень соответствует оценке неудовлетворительно.



Evaluation Fund  
for interim certification  
on course (module)  
**First Order Partial Differential Equations**

Master's Program  
**01.04.01 «Mathematics»**

Direction  
**«Fractional Differential Equations»**

Degree  
**Master’s**

Mode of study  
**Full-time**

Chelyabinsk, 2026



## Table of Contents

|   |   |
|---|---|
| 1. Passport of the assessment fund .....  | 3 |
| 2. List of competencies to be formed .....  | 4 |
| 3. Content of assessment tools for the course .....                                   | 5 |
| 3.1. Types of assessment tools .....  | 5 |
| 3.2. Content of assessment tools .....  | 6 |
| 4. Procedure for conducting and criteria for evaluation of interim certification..... | 8 |
| 4.1. Procedure for interim certification.....   | 8 |
| 4.2. Assessment criteria for interim certification by types of assessment tools ..... | 8 |
| 4.3. Results of interim attestation and levels of competencies formed.....            | 9 |



## 1. Passport of the assessment fund

Master’s program: 01.04.01 Mathematics.

Direction: Fractional Differential Equations.

Course: First Order Partial Differential Equations.

Semesters: 2.

The form of the interim assessment: exam.

The point-rating system for assessing a student's knowledge in a course is based on a point assessment of various forms of student activity.



## 2. List of competencies to be formed

The study of the course "First Order Partial Differential Equations" is aimed at the formation of competences given in Table 1.

Table 1. Learning outcomes of the course.

| Code and name of competencies according to FSBE (BPEP HE)                          | Indicators of competence achievement according to BPEP HE   | List of planned learning outcomes of the course  |
|--|---|--|
| 1  | 2   | 3  |
| <b>PC-1</b> Able to carry out research work in the field of differential equations | PC-1.1 Demonstrates knowledge of the basic theoretical principles and methods in the field of scientific research.<br>PC-1.2. Demonstrates the ability to collect and analyze information on the subject of ongoing research.<br>PC-1.3. Has practical experience in establishing new facts and patterns in the field of scientific research. | Know:<br><ul style="list-style-type: none"> <li>basic theoretical principles and methods in the field of partial differential equations of the first order.</li> </ul> Be able to:<br><ul style="list-style-type: none"> <li>collect and analyze information on the subject of first-order partial differential equations, including their applied aspects.</li> </ul> Possess:<br><ul style="list-style-type: none"> <li>skills in applying methods of partial differential equations of the first order to establish and analyze models describing various processes and phenomena.</li> </ul> |



### 3. Content of assessment tools for the course

#### 3.1. Types of assessment tools

Table 2. Types of assessment tools.

| Code and name of competencies according to FSBE (BPEP HE)                   | List of planned learning outcomes for the discipline  | Controlled Topics/ Sections                               | Semester | Task number | Name of the assessment tool                |
|---|---|---|----------|-------------|--|
| PC-1 Able to carry out research work in the field of differential equations | <b>1.1 Know:</b> basic theoretical principles and methods in the field of partial differential equations of the first order.  | – Basic concepts and theorems                             | 2        | 1-5         | Open-ended question with a detailed answer |
|   | <b>1.2 Be able to:</b> collect and analyze information on the subject of first-order partial differential equations, including their applied aspects.                           | – Quasi - linear equations<br>– Special methods and tasks | 2        | 6-10        | Open-ended question with a detailed answer |
|   | <b>1.3 Possess:</b> skills in applying methods of partial differential equations of the first order to establish and analyze models describing various processes and phenomena. | Applications and generalizations                          | 2        | 11-15       | Open-ended question with a detailed answer |

Standard tasks, criteria and assessment indicators within the framework of the ongoing control are presented in the work program of the course (module). Complete sets of assessment tools and control and measuring materials are stored at the department.



### 3.2. Content of assessment tools

Topics of the reports:

1. Geometric interpretation of solutions of partial differential equations of the first order
2. Comparative analysis of the characteristics method and the integrating multiplier method for solving quasi-linear equations
3. The relationship between the Hamilton-Jacobi equations and the equations of classical mechanics
4. Existence and uniqueness theorems for solutions of partial differential equations of the first order
5. Special solutions and their role in the theory of first-order equations
6. Application of first-order equations for modeling the processes of matter and energy transfer
7. Simulation of wave propagation using first-order partial differential equations
8. Application of the method of characteristics in hydrodynamics for solving equations of gas dynamics
9. The use of Hamilton-Jacobi equations in optimal control theory
10. First-order equations in geometric optics
11. Application of first-order equations in financial mathematics
12. Traffic modeling using first-order partial differential equations
13. Legendre transformation and its application in the theory of partial differential equations of the first order
14. Numerical methods for solving first-order equations (for example, the finite difference method, the finite element method)
15. Modern research in the field of partial differential equations of the first order

Exam Questions:

Section 1: Introduction and Basic Concepts

1. Define partial differential equations of the first order. Give examples of linear, quasi-linear, and nonlinear equations.
2. What is the solution of a partial differential equation of the first order? Give a geometric interpretation of the solution.
3. Formulate a definition of characteristic curves for a linear homogeneous equation of the first order.
4. Describe a method of characteristics for solving linear homogeneous equations of the first order.
5. How is the method of characteristics used to solve linear inhomogeneous equations of the first order?

Section 2: Quasi-linear equations

6. Describe a method of characteristics for solving first-order quasi-linear equations. What is the difference from linear equations?
7. How is a characteristic system constructed for a quasi-linear equation? What are the integrals of a characteristic system?
8. Explain how quasi-linear equations are solved when they are solvable with respect to one of the derivatives.
9. Give examples of physical problems that are described by first-order quasi-linear equations.
10. What are special solutions of quasi-linear equations? What is their geometric interpretation?
11. What are discontinuities in solutions of quasi-linear equations?

Section 3: Special methods and tasks

12. Describe the integrating multiplier method for solving partial differential equations of the first order. When is it applied?
13. Tell us about Legendre transformations and their application to solving first-order NPV.



14. What is the Hamilton-Jacobi equation? How is it related to the equations of classical mechanics?
15. How is the Hamilton-Jacobi equation solved using the method of characteristics? What is a complete integral?
16. Formulate the Cauchy problem for a partial differential equation of the first order.
17. What conditions ensure the existence and uniqueness of a solution to the Cauchy problem?

#### Section 4: Applications and generalizations

18. Give examples of the application of partial differential equations of the first order in geometry and optics.
19. How can first-order equations be used in control problems?
20. Compare different methods for solving partial differential equations of the first order. What are their advantages and disadvantages?
21. Describe how a mathematical model is constructed to describe a process that can be represented by a first-order partial differential equation.



#### 4. Procedure for conducting and criteria for evaluation of interim certification

##### 4.1. Procedure for interim certification

On the exam, 2 questions are given from the list of questions on the topics of practical exercises. The exam duration is 90 minutes. For each completed ticket assignment, a student can receive from 1 to 3 points. If the task is completed correctly, it is rated with 3 points. If the task is completed with errors, the points decrease depending on the number of mistakes made. If one mistake is made, the building is rated with 2 points, and two mistakes are made with 1 point. If more than two mistakes are made in the assignment or the student has not completed any task from the ticket, then he receives 0 points for it. The maximum number of points per exam is 6.

##### 4.2. Assessment criteria for interim certification by types of assessment tools

| High level of mastery of the tested competencies   | Average level of mastering the tested competencies   | Basic level of mastering the competencies being tested  | Low level of mastery of the tested competencies  |
|--|--|---|--|
| 6 points   | 5 points   | 4 points  | 0 – 3 points   |
| The student consistently, competently and logically presents the material; possesses basic mathematical methods and algorithms for solving problems; is able to build mathematical models, link theory and practice, shows the ability to apply knowledge. | The student presents the material competently and substantially; knows the basic mathematical methods; does not make significant errors, but has difficulties in conclusions and proofs; is able to apply the basic provisions and formulas to solve problems. | The student has knowledge only of the basic material, but is not able to draw conclusions and evidence; makes mistakes, provides insufficiently correct formulations; has difficulty linking the main provisions with practice. | The student does not know the fundamental issues of the course or a significant part of the program material, makes mistakes, reveals the inability to correct them, can not link theory and practice. |

Description of indicators and criteria for assessing competencies for the report:

There are 2 reports per semester. The report is given 15-20 minutes at the end of the pair (1 report for each pair). Each student prepares a report on one of the proposed topics. The maximum number of points for reports is 20.

The score "credited" is given for 12-20 points, "not credited" - less than 12 points.

The completeness of the report is assessed according to the following criteria:

1. Completeness of the presentation of the theoretical material
2. A sufficient number of examples for the theoretical material
3. Examples of definitions and theorems are given.
4. Counterexamples are given to demonstrate under what conditions the theorems are not applicable..



### 4.3. Results of interim attestation and levels of competencies formed

The results of the current assessment are taken into account when summarizing the results. The points received for the current certification are summed up with the points received for each stage during the intermediate certification.:

The rating "unsatisfactory" is given for 13 or less points.;

The "Satisfactory" rating is given for 14-17 points (level 1);

The "Good" rating is given for 18-21 points (level 2);

An Excellent score is given for 22-26 points (level 3).

The specifics of the procedure for assessing the learning outcomes of people with disabilities and people with disabilities are outlined in the work program of the course (module).

The levels of competence formation are defined as follows

1. A high level of competence formation corresponds to an excellent assessment:

- involves the formation of competencies at a high level, readiness for independent professional activity: skills are formed to establish connections between different concepts and with other areas of mathematics, skills to prove theorems, skills to systematize data necessary for the application of acquired knowledge in various fields.

- the student is able to give a complete understanding of the basic concepts of partial differential equations, use mathematical language, is able to solve problems and exercises using definitions, theorems and techniques, and formulate their own conclusions.

2. The average level corresponds to the assessment of good:

- involves the formation of competencies at a higher level: a comprehensive knowledge of the relationship between various concepts and other areas of mathematics is formed, skills to prove theorems;

- the student is able to use mathematical language, is able to solve problems and exercises using definitions, theorems and techniques.

- the student is able to give detailed answers to the theoretical questions of the course at a level not lower than the grade "satisfactory".

3. The basic level corresponds to the grade satisfactory:

- involves the formation of competencies at the initial level: knowledge of the basic concepts and theorems of partial differential equations necessary to solve problems in professional activity;

- the student is able to solve basic tasks. The number of correct answers is at least 50%.

4. A low level corresponds to an unsatisfactory assessment

