Рабочая программа дисциплины (модуля)*

Вариационное исчисление и оптимальное управление

Направление подготовки (специальность)

01.03.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль)

Прикладная математика и искусственный интеллект

Присваиваемая квалификация (степень)

бакалавр

Форма обучения

очная

Год набора 2026

*Рабочая программа дисциплины (модуля) адаптирована для инклюзивного обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья

Челябинск 2026 г.

Содержание

1. ЦЕЛИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Цель освоения учебной дисциплины «Вариационное исчисление и оптимальное управление» состоит в приобретении студентами теоретических знаний и практических умений и навыков по бесконечномерной оптимизации, использовании их для решения прикладных задач. К задачам дисциплины относятся: ознакомление студентов с базовыми понятиями вариационного исчисления и оптимального управления; овладение аналитическими и численными методами решения математических задач на экстремум функционалов.

Результаты обучения по дисциплине направлены на достижение индикаторов:

ОПК-1.1. Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук.

ОПК-1.2. Демонстрирует умения решать типовые задачи, формулируемые в рамках математических и (или) естественных наук.

ОПК-1.3. Имеет навыки использования основных понятий, теорем, законов математики и (или) естественных наук для решения задач профессиональной деятельности.

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОПОП

Цикл (раздел) ОПОП:	Б1.О.19

2.1 Требования к предварительной подготовке обучающегося:

Математический анализ:

Знает основные правила планирования времени при самоорганизации внеаудиторной самостоятельной работы, предусмотренной рабочей программой учебной дисциплины, базовые понятия математического анализа, применяемые в математических науках, прикладной математике и информатике. Умеет применять классические методы математического анализа в решении задач прикладной математики и информатики.

Дифференциальные уравнения:

Знает различные типы дифференциальных уравнений и способы их решения. Имеет практический опыт решения дифференциальных уравнений в математических моделях различных прикладных задач.

Алгебра:

Знает теоретические и практические основы алгебры. Умеет использовать различные алгебраические объекты и структуры в задачах профессиональной деятельности.

Геометрия:

Знает основные геометрические объекты, их свойства, геометрические методы анализа и решения прикладных задач. Умеет применять геометрические методы для анализа и решения прикладных задач. Имеет практический опыт использования разных систем координат и их баз с целью оптимизации решения как задач фундаментальной математики, так и прикладных задач.

Алгебра

Математический анализ

Дифференциальные уравнения

Методы оптимизации

Функциональный анализ

2.2 Дисциплины и практики, для которых освоение данной дисциплины (модуля) необходимо как предшествующее:

Выполнение и защита выпускной квалификационной работы

3. КОМПЕТЕНЦИИ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

ОПК-1: Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности

Знать:

Для достижения ОПК 1.1: знать определения, теоремы, подходы к решению задач вариационного исчисления и оптимального управления

Уметь:

Для достижения ОПК 1.2: уметь применять методы вариационного исчисления и оптимального управления при решении конкретных задач, рассматриваемых в рамках дисциплины

Владеть:
Для достижения ОПК 1.3: владеть навыками практического использования основных понятий и методов вариационного исчисления и оптимального управления

В результате освоения дисциплины обучающийся должен

3.1	**Знать:**
3.1.1	примеры задач вариационного исчисления, необходимые условия слабого экстремума, основную лемму вариационного исчисления, уравнение Эйлера, правило множителей Лагранжа, принцип максимума Понтрягина
3.2	**Уметь:**
3.2.1	решать простейшую задачу вариационного исчисления, задачу Больца, вариационную задачу с подвижной границей, задачи со старшими производными, изопериметрические задачи, задачу Лагранжа, задачу оптимального управления
3.3	**Владеть:**
3.3.1	практического использования математического инструментария, базовых понятий и методов вариационного исчисления

4. ОБЪЕМ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Общая трудоемкость	**3 ЗЕТ**
Часов по учебному плану : 108 в том числе : аудиторные занятия : 66 самостоятельная работа : 41,8 : контактная работа: 66,2 ИКР: 0,2	Виды контроля в семестрах: зачеты 7

5. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Код занятия	Наименование разделов и тем /вид занятия/	Семестр / Курс	Часов	Литература
	Раздел 1. Основные понятия вариационного исчисления и простейшая задача вариационного исчисления			
1.1	Обобщения простейшей задачи вариационного исчисления. Задачи вариационного исчисления со старшими производными. Уравнение Эйлера- Пуассона. Необходимое условие слабого экстремума для случая векторной искомой функции. Система уравнений Эйлера. /Лек/	7	2	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Э1 Э2
1.2	Простейшая задача классического вариационного исчисления. Пример простейшей задачи вариационного исчисления (задача о брахистохроне). Постановка задачи. Вывод уравнения Эйлера с помощью основной леммы вариационного исчисления. Вывод уравнения Эйлера с помощью леммы Дюбуа-Реймона. Векторный случай. Интегралы уравнения Эйлера. Примеры. /Лек/	7	2	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Э1 Э2
1.3	Основные понятия вариационного исчисления. Понятие нормы. Нахождение вариации функционала /Пр/	7	4	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Э1 Э2
1.4	Простейшая задача вариационного исчисления /Пр/	7	4	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Э1 Э2
1.5	Обобщения простейшей задачи вариационного исчисления /Пр/	7	4	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Э1 Э2
1.6	Подготовка к лабораторным работам /Ср/	7	4	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Э1 Э2

1.7	Решение дифференциальных уравнений в системе MAXIMA /Лаб/	7	2	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Э1 Э2
1.8	Поиск решения простейшей задачи вариационного исчисления в системе Maxima /Лаб/	7	2	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Э1 Э2
	Раздел 2. Задачи вариационного исчисления с подвижной границей			
2.1	Задача Больца. Условия трансверсальности. /Лек/	7	2	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Э1 Э2
2.2	Задачи вариационного исчисления с подвижной границей /Пр/	7	4	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Э1 Э2
2.3	Подготовка к контрольной работе /Ср/	7	8	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Э1 Э2
2.4	Контрольная работа №1 /Пр/	7	2	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Э1 Э2
2.5	Подготовка к лабораторным работам /Ср/	7	6	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Э1 Э2
2.6	Нахождение экстремали в задаче со свободной границей в системе MAXIMA /Лаб/	7	2	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Э1 Э2
2.7	Нахождение экстремали в Больца в системе MAXIMA /Лаб/	7	2	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Э1 Э2
	Раздел 3. Изопериметрическая задача. Задача Лагранжа			
3.1	Изопериметрическая задача. Постановка задачи. Необходимое условие экстремума. Пример. Задача Дидоны. /Лек/	7	2	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Э1 Э2
3.2	Задача Лагранжа. Постановка задачи. Необходимое условие экстремума. Теорема Эйлера - Лагранжа. Примеры. /Лек/	7	4	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Э1 Э2
3.3	Правило множителей Лагранжа /Пр/	7	4	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Э1 Э2
3.4	Изопериметрическая задача /Пр/	7	2	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Э1 Э2
3.5	Задача Лагранжа /Пр/	7	4	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Э1 Э2
3.6	Поиск решения изопериметрической задачи в системе MAXIMA /Лаб/	7	2	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Э1 Э2
3.7	Подготовка к лабораторным работам /Ср/	7	4,5	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Э1 Э2
	Раздел 4. Задача оптимального управления			
4.1	Задачи оптимального управления. Принцип максимума Понтрягина в общем случае. Постановка задачи. Формулировка теоремы. Пример. Формулировка и доказательство принципа максимума Понтрягина для задачи со свободным концом. /Лек/	7	4	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Э1 Э2

4.2	Задача оптимального управления /Пр/	7	4	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Э1 Э2
4.3	Подготовка к контрольной работе /Ср/	7	8	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Э1 Э2
4.4	Контрольная работа №2 /Пр/	7	2	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Э1 Э2
	Раздел 5. Численные методы для решения задач вариационного исчисления			
5.1	Подготовка к лабораторным работам /Ср/	7	6	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Э1 Э2
5.2	Метод начальных параметров для решения задач вариационного исчисления в системе MAXIMA /Лаб/	7	2	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Э1 Э2
5.3	Метод Ритца для решения задач вариационного исчисления в системе Maxima /Лаб/	7	4	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Э1 Э2
	Раздел 6. Иная контактная работа			
6.1	Индивидуальные консультации, Текущий контроль /ИКР/	7	0,2	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Э1 Э2
	Раздел 7. Зачёт			
7.1	Подготовка к зачету /Ср/	7	5,3	

6. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

6.1. Перечень видов оценочных средств

Лабораторная работа 1
Лабораторная работа 2
Лабораторная работа 3
Лабораторная работа 4
Лабораторная работа 5
Лабораторная работа 6
Лабораторная работа 7
Контрольная работа 1
Контрольная работа 2
Активная познавательная деятельность
Зачет

6.2. Типовые контрольные задания и иные материалы для текущей аттестации

Типовые задания для лабораторных и контрольных работ:
см. приложение.

6.3. Типовые контрольные вопросы и задания для промежуточной аттестации

Вопросы к зачёту:
см. приложение

6.4. Критерии оценивания

Лабораторные работы 1 - 7:
Получена программа реализации решения задачи, программа работает корректно - 3 балла.
Получена программа реализации решения задачи, программа работает корректно, студент может пояснить порядок получения результатов, расчетов и графиков - 5 баллов.
Получена программа реализации решения задачи, программа работает корректно; студент может пояснить порядок получения результатов, расчетов и графиков; результаты работы и выводы оформлены в соответствии с указаниями - 6 баллов.
В остальных случаях баллы не начисляются.

Контрольная работа 1:
Контрольная работа состоит из 4 заданий, за каждое из которых студент может получить от 0 до 2 баллов:
2 балла - задача решена верно, получен правильный ответ;
1 балл - задача, в целом, решена верно, но имеются незначительные ошибки;
0 баллов - в остальных случаях.

Контрольная работа 2:
Контрольная работа состоит из 3 заданий, за каждое из которых студент может получить от 0 до 2 баллов:
2 балла - задача решена верно, получен правильный ответ;
1 балл - задача, в целом, решена верно, но имеются незначительные ошибки;
0 баллов - в остальных случаях.

Активная познавательная деятельность:
На каждой лекции студент может получить 1 балл:
- студент правильно отвечает на вопросы по изучаемому материалу - 1 балл.
В противном случае баллы не начисляются.
На практических занятиях №1-8 и №10-15 студент может получить по 2 балла:
-студент задает вопросы по изучаемому материалу или решает задачу у доски- 1 балл;
-студент правильно отвечает на вопросы по изучаемому материалу - 1 балл.
В противном случае баллы не начисляются

Зачет:
Контрольное мероприятие промежуточной аттестации проводится во время зачета в форме ответа на билет, который содержит 2 теоретических вопроса. Продолжительность зачета – 60 минут. Максимальный балл за ответ на теоретический вопрос 4 балла.
4 балла - ответ структурирован, приведен анализ положений существующих теорий по вопросу билета, студент логично и доказательно раскрывает проблему, предложенную в билете, ответ не содержит фактических ошибок и характеризуется глубиной, полнотой;
2 балла - ответ имеет достаточный содержательный уровень, однако отличается слабой структурированностью, раскрыто содержание билета, имеются неточности при ответе;
1 балл - ответ имеет фрагментарный характер, отличается поверхностностью и малой содержательностью, имеются неточности; материал в основном излагается, но допущены фактические
ошибки;
0 баллов - допускаются существенные фактические ошибки при ответе или ответ отсутствует.

На зачете происходит оценивание учебной деятельности обучающихся по дисциплине на основе полученных оценок за контрольно-рейтинговые мероприятия текущего контроля. Студент может повысить свой рейтинг, пройдя контрольное мероприятие промежуточной аттестации. Студент выбирает случайный билет, содержащий два теоретических вопроса. Студенту предоставляется не более 60 минут на подготовку ответа. По истечении этого времени студент отвечает преподавателю вопросы билета. Фиксация результатов учебной деятельности по дисциплине проводится в день зачета при личном присутствии студента.
Максимальная сумма баллов за текущий контроль и зачет в сумме составляет 100 баллов:
0-60 баллов незачтено;
61-100 - зачтено.

7. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

7.1. Рекомендуемая литература

7.1.1. Основная литература

	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год	Ресурс
Л1.1	Никитина С. А., Ухоботов В. И.	Основы вариационного исчисления и оптимального управления: учебное пособие (https://library.csu.ru/rbooks2/view2? code=local/007730/nikitinasa)	Челябинск : Издательство Челябинского государственног о университета, 2016	ЭБС

	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год	Ресурс
Л1.2	Абдрахманов В. Г., Рабчук А. В.	Элементы вариационного исчисления и оптимального управления. Теория, задачи, индивидуальные задания (https://e.lanbook.com/book/211535)	Санкт- Петербург : Лань, 2022	ЭБС
Л1.3	Киселев В.Ю.	Вариационное исчисление и теория оптимального управления: учебное пособие (https://znanium.com/catalog/document?id=432974)	Вологда : Инфра-Инженерия, 2023	ЭБС

7.1.2. Дополнительная литература

	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год	Ресурс
Л2.1	Гюнтер Н. М.	Курс вариационного исчисления (https://e.lanbook.com/book/210236)	Санкт- Петербург : Лань, 2022	ЭБС

7.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет"

Э1	КиберЛенинка - научная электронная библиотека (журналы) http://cyberleninka.ru
Э2	Единое окно доступа к информационным ресурсам [Электронный ресурс] : сайт / ФГАУ ГНИИ ИТТ «Информика». – Москва, 2005 – . – URL: http://window.edu.ru/

7.3 Перечень информационных технологий

7.3.1 Программное обеспечение

Maxima

LMS Moodle

7.3.2 Профессиональные базы данных и информационно-справочные системы

1. Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU (https://elibrary.ru/defaultx.asp?) eLIBRARY.RU : научная электронная библиотека : сайт. – Москва, 2000 – . – URL: https://elibrary.ru. – Режим доступа: для зарегистрир. пользователей. – Текст : электронный.

2. Реферативная база по математике MathSciNet (https://mathscinet.ams.org/mathscinet/) Mathematical Reviews (MR) : реферативная база данных / American Mathematical Society. – URL: http://www.ams.org/mathscinet/. – Яз. рус., англ. – Режим доступа: для зарегистрир. пользователей ЧелГУ. – Текст : электронный.

8. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Для реализации дисциплины используются учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, практических занятий, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, компьютерные классы для проведения лабораторных работ, а также помещения для самостоятельной работы.

Учебные аудитории укомплектованы специализированной мебелью (подразумевается наличие стандартных рабочих (посадочных) мест) и техническими средствами обучения (переносное и / или стационарное мультимедийное оборудование: экран, ноутбук, проектор).

Для проведения занятий лекционного типа предлагаются наборы демонстрационного оборудования и учебно- наглядных пособий (мультимедийные презентации по отдельным темам, рисунки, таблицы, схемы и т.д).

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с подключением к сети "Интернет" и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду университета

9. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Учебным планом предусмотрена самостоятельная работа студентов. Самостоятельная работа проводится с целью углубления знаний по дисциплине и предусматривает:

• проработку теоретического материала по учебникам или конспекту лекций с обязательным разбором приведенных примеров;
• подготовку к практическим занятиям;
• подготовку к лабораторным занятиям;
• подготовку к контрольным работам;
• подготовку к сдаче зачета.

При планировании времени на самостоятельную работу студентам необходимого предусмотреть регулярное повторение пройденного материала. Теоретический материал, законспектированный на лекциях, необходимо дополнять сведениями из литературных источников, представленных в рабочей программе.

Студент обязан в полном объёме использовать время самостоятельной работы, предусмотренное настоящей рабочей

программой, для изучения соответствующих разделов дисциплины, и своевременно обращаться к преподавателю в случае возникновения затруднений при выполнении самостоятельной работы.
В случае применения при изучении дисциплины электронного обучения, дистанционных образовательных технологий общение обучающихся и преподавателя осуществляется в режиме реального или отложенного времени, при этом используются возможности системы дистанционного обучения Moodle и электронная почта.
Большую часть времени обучающиеся самостоятельно работают с учебно-методическими материалами. Студенты имеют возможность консультироваться с преподавателем по всем вопросам, возникающим в ходе самостоятельной работы, посредством электронной почты, сообщений системы дистанционного обучения Moodle.
Доступ обучающегося к учебным ресурсам в режиме отложенного времени, самостоятельной работы осуществляется через сеть Интернет в удобном для него месте, времени и темпе.

При обучении лиц с ограниченными возможностями здоровья электронное обучение, дистанционные образовательные технологии предусматривают возможность приема-передачи информации в доступных для них формах.
Реализация дисциплины с применением электронного обучения, дистанционных образовательных технологий (далее – ЭО, ДОТ) осуществляется на основании «Положения о реализации основных и дополнительных образовательных программ с применением электронного обучения и дистанционных образовательных технологий в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Челябинский государственный университет», «Положения о порядке зачета обучающимся по основным профессиональным образовательным программам высшего образования в ФГБОУ ВО «ЧелГУ» результатов освоения в организациях, осуществляющих образовательную деятельность, учебных предметов, курсов, дисциплин (модулей), практик, дополнительных образовательных программ» посредством электронной информационно-образовательной среды ФГБОУ ВО «ЧелГУ». В исключительных случаях (форс-мажор и т.п.) при реализации образовательной деятельности с применением ЭО, ДОТ могут применять компоненты, не входящие в перечень электронной информационно- образовательной среды.

10. СПЕЦИАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ ОБУЧАЮЩИМИСЯ С ИНВАЛИДНОСТЬЮ И ОГРАНИЧЕННЫМИ ВОЗМОЖНОСТЯМИ ЗДОРОВЬЯ

Освоение дисциплины инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья осуществляется с использованием специальных технических средств и информационных технологий, предоставляемых Ресурсным учебно-методическим центром по обучению инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья ЧелГУ по запросу обучающегося (мобильные специальные технические средства для лиц с нарушениями зрения и с нарушением слуха, ассистивные информационные технологии).
При необходимости для обучающихся с нарушениями зрения на рабочих местах для проведения практических или лабораторных занятий устанавливается специальное программное обеспечение (программа речевой навигации, речевые синтезаторы, экранные лупы).
В учебные аудитории обеспечивается беспрепятственный доступ для обучающихся с инвалидностью и с ограниченными возможностями здоровья. В каждой аудитории, где обучаются инвалиды и лица с ограниченными возможностями здоровья, предусматривается соответствующее количество мест для обучающихся с учетом нарушений их здоровья.
Для освоения дисциплины инвалидам и лицам с ограниченными возможностями здоровья предоставляется доступ к печатным источникам, имеющимся в научной библиотеке ЧелГУ, с помощью специальных технических средств; доступ с помощью специальных технических и программных средств к электронным источникам, представленным в форме электронного документа в фонде научной библиотеки ЧелГУ или электронно-библиотечных системах.
Учебно-методические материалы для обучающихся из числа инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья предоставляются в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и особенностям восприятия информации.
Для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья освоение дисциплины может быть частично или полностью осуществлено с использованием дистанционных образовательных технологий.
При проведении промежуточной аттестации по дисциплине обучающимся с инвалидностью и с ограниченными возможностями здоровья обеспечивается по их заявлению предоставление в доступной форме в зависимости от их индивидуальных особенностей инструкции о порядке проведения промежуточной аттестации, оценочных средств и возможности ответов на задания (письменно на бумаге, набор ответов на компьютере, письменно шрифтом Брайля, с использованием услуг ассистента, устно).
При проведении процедуры оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья предусматривается использование предоставленных ЧелГУ или собственных технических средств, необходимых им в связи с их индивидуальными особенностями. При необходимости инвалидам и лицам с ограниченными возможностями здоровья предоставляется дополнительное время для подготовки ответа на задания, процедура оценивания результатов обучения по дисциплине может проводиться в несколько этапов.

Лабораторная работа 1. Решение дифференциальных уравнений

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимую переменную x, искомую функцию $y = y(x)$ и ее производные $y'(x)$, ... $y^{(n)}(x)$, т.е. уравнение вида $F(x, y(x), y'(x), \ldots , y^{(n)}(x)) = 0$, где F – заданная функция.

Если искомая функция $y = y(x)$ является функцией одной переменной, то дифференциальное уравнение называется обыкновенным.

Порядком дифференциального уравнения называется наивысший порядок входящих в него производных. Решением дифференциального уравнения n-го порядка на интервале $[a, b]$ называется функция $y = y(x)$, определенная на $[a, b]$ вместе со своими производными до n-го порядка включительно, и такая, что подстановка функции $y = y(x)$ в дифференциальное уравнение превращает последнее в тождество для всех x из $[a, b]$.

Решение дифференциальных уравнений может быть получено в аналитическом или численном виде. Под аналитическим решением понимают такие решения, в которых неизвестная функция выражена (явно или неявно) через независимые переменные и параметры в виде формул, бесконечных рядов или интегралов. Под численным решением понимают решения разностного уравнения (или систем разностных уравнений), которое было получено после дискретизации исходного дифференциального уравнения.

Одной из программ, позволяющей находить решение дифференциальных уравнений, как в численном, так и в аналитическом виде является свободно распространяемая система компьютерной математики Maxima.

1. Общие сведения о работе в программе Maxima

1) Для вычисления содержимого ячейки ввода необходимо нажать комбинацию клавиш Ctrl+Enter.

2) Инициализация переменных производится с помощью двоеточия «:». Например,

```
a:1;
expr: x^2+sin(x);
```

3) В системе Maxima предусмотрена возможность ввода сразу нескольких команд в одной ячейке ввода. Для этого команды отделяются друг от друга символом « ; ».

Для обозначения конца ввода команды вместо « ; » можно использовать знак « $ ». Это бывает удобно в том случае, когда не надо выводить результата вычисления на экран (результат при этом все равно будет вычисляться).

4) Значения имен переменных сохраняются на протяжении всей работы с документом. Поэтому, если необходимо снять определение с переменной, то это можно сделать с помощью функции **kill**(name), где name – имя удаляемого выражения, переменной или ячейки. Точно так же можно очистить всю память и освободить все имена, введя команду **kill**(all).

2. Функция desolve

Функция **desolve (eqn, y(x))** — ищет частные решения линейных дифференциальных уравнений. Аргументы функции: **eqn** – дифференциальное уравнение, которое может содержать **x** – независимую переменную, **y(x)** – искомую функцию, **diff(y(x),x)**, **diff(y(x),x,2)**,…,**diff(y(x),x,n)** – производные функции y(x). Если не заданы значения функции и ее производных в нуле, то в найденном решении они отображаются в виде y(0) и

$\frac{d}{dx}y(x)|_{x=0}, \frac{d^2}{dx^2}y(x)|_{x=0}, \ldots, \frac{d^n}{dx^n}y(x)|_{x=0}$, соответственно. Если же начальные условия в x=0 известны, то они могут быть определены до вызова функции **desolve** с помощью функции atvalue:

atvalue(expr, x=0, value),

где **expr** – это y(x) или значение k-той производной diff(y(x),x,k), где $k \leq n$; **x** – независимая переменная; **value** – начальное значение expr (т.е. значение функции или ее k-той производной в нуле).

Пример 1. Найти решение задачи Коши $y' = \cos x$, $y(0) = 4$.

Решение. Зададим уравнение и обозначим его eqn:

```
eqn: diff(y(x),x)=cos(x)$
```

Определим начальное условие

```
atvalue(y(x), x=0, 4)$
```

Воспользуемся функцией desolve

```
desolve(eqn, y(x));
```

y(x) = sin(x) + 4.

Пример 2. Найти решение задачи Коши $y'' = 1$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

Решение. Действуем аналогично примеру 1, но дополнительно к этому задаем начальное значение производной искомой функции:

```
eqn: diff(y(x),x,2)=1$
atvalue(y(x), x=0, 1)$
atvalue(diff(y(x),x), x=0, 2)$
desolve(eqn, y(x));
```

$$y(x) = \frac{x^2}{2} + 2x + 1.$$

Для того, чтобы найти частное решение системы n (n>1) линейных дифференциальных уравнений первого и/или второго порядков, необходимо передать функции **desolve** в качестве аргументов список из n дифференциальных уравнений и n искомых функций, соответственно:

desolve ([eqn_1, ..., eqn_n], [y_1 (x), y_2 (x), ..., y_n (x)]);

Пример 3. Найти решение задачи Коши $\begin{cases} y' = z \\ z' = \sin x \end{cases}$, $y(0) = 1$, $z(0) = 2$.

Решение. Зададим уравнения и обозначим их eqn1 и eqn2

```
eqn1: diff(y(x),x)=z(x)$
eqn2: diff(z(x),x)=sin(x)$
```

Определим начальные условия

```
atvalue(y(x),x=0,1)$
atvalue(z(x),x=0,2)$
```

Воспользуемся функцией desolve

```
desolve([eqn1,eqn2],[y(x),z(x)]);
```

[y(x)= -sin(x)+3x+1, z(x)=3-cos(x)].

3. Функция ode2

Функция **ode2(eqn, dvar, ivar)** — предназначена для решения обыкновенных линейных дифференциальных уравнений первого и второго порядка. Решение ищется в общем виде. Аргументы функции: **eqn** – дифференциальное уравнение, **dvar** – зависимая переменная, **ivar** – независимая переменная. Данная функция может вернуть решение в явном или неявном виде.

В списке параметров этой функции зависимая переменная указывается явно, поэтому обозначение вида $y(x)$ не обязательно. Функция и переменная могут обозначаться одиночными буквами, например, y и x. Однако в этом случае перед производной необходимо ставить апостроф (т.е. **'diff(y,x)**), чтобы получить не вычисляемую форму выражения (noun form). Иначе выражение **diff(y,x)** обнулится (т.к. y является константой относительно x).

По умолчанию произвольная константа в общем решении уравнения первого порядка обозначается как %c. В общем решении уравнения второго порядка константы обозначаются как %k1 и %k2.

Для поиска частных решений на основе общих решений, полученных с помощью функции ode2, существуют три функции: **ic1**, **ic2**, **bc2**. Функции **ic1**, **ic2** служат для решения задачи Коши, т.е. задачи с начальными условиями. Функция **bc2** служит для решения краевой задачи, т.е. задачи, где значения искомой функции заданы на концах некого отрезка.

Замечание. Функции **ic1** и **ic2** не поддерживают работу с общими решениями, где явно указана зависимость y(x).

1. Функция **ic1(solution, xval, yval)** — предназначена для поиска частного решения дифференциального уравнения первого порядка с начальным условием. Аргументы функции: **solution** – общее решение уравнения, найденное с помощью функции ode2, **xval** – начальное значение независимой переменной в форме x = x0, **yval** – начальное значение зависимой переменной в форме y = y0.

Пример 4. Найти общее решение дифференциального уравнения $y' = x^2 + x$ и найти его частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 0$.

Решение. Найдем общее решение и обозначим его sol:

```
sol: ode2('diff(y,x)=x^2+x,y,x);
```

$$y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \%c\,.$$

Затем с помощью функции ic1 найдем частное решение, удовлетворяющее условию $y(1) = 0$:

```
ic1(sol,x=1,y=0);
```

$$y = \frac{-5 + 3x^2 + 2x^3}{6}\,.$$

2. Функция **ic2(solution, xval, yval, dval)** — предназначена для поиска частного решения дифференциального уравнения второго порядка с начальными условиями. Аргументы функции: **solution** - общее решение уравнения, найденное с помощью функции ode2, **xval** — начальное значение независимой переменной в форме x = x0, **yval** — начальное значение зависимой переменной в форме y = y0, **dval** — начальное значение для производной зависимой переменной в форме 'diff(y, x) = dy0 .

Пример 5. Найти общее решение дифференциального уравнения $y''-7y'+6y=0$ и найти его частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(0)=1,\ y'(0)=3$.

Решение. Зададим уравнение и обозначим его eqn

eqn: 'diff(y,x,2)-7*'diff(y,x)+6*y=0;

$$\frac{d^2}{dx^2}y-7\left(\frac{d}{dx}y\right)+6y=0.$$

Затем найдем общее решение и обозначим его sol:

sol: ode2(eqn,y,x);

$$y=\%k1*\%e^{6x}+\%k2*\%e^{x}.$$

Воспользуемся функцией ic2:

ic2(sol, x=0, y=1, 'diff(y,x)=3);

$$y=\frac{2*\%e^{6x}}{5}+\frac{3*\%e^{x}}{5}.$$

3. Функция **bc2(solution, xval1, yval1, xval2, yval2)** — предназначена для нахождения решения краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка. Аргументы функции: **solution** — общее решение уравнения, найденное с помощью функции ode2; **xval1** — значение независимой переменной на левой границе в форме x=x1, **yval1** — значение зависимой переменной соответствующее x1 в форме y=y1; **xval2**, **yval2** – граничное условие на правой границе, которое задается в той же форме, что и граничное условие на левой границе.

Пример 6. Найти решение краевой задачи $y''-7y'+6y=0,\ y(0)=1,\ y(2)=5$.

Решение. Найдем общее решение sol как это сделано в примере 5. Затем воспользуемся функцией bc2 для решения краевой задачи:

bc2(sol, x=0, y=1, x=2, y=5);

$$y=\frac{(\%e^{12}-5)*\%e^{x}}{(\%e^{12}-\%e^{2})}-\frac{(\%e^{2}-5)*\%e^{6x}}{(\%e^{12}-\%e^{2})}.$$

Замечание. Покажем, как будет выглядеть решение краевой задачи из примера 6 в случае, если явно указать зависимость y(x):

```
eqn: diff(y(x),x,2)-7*diff(y(x),x)+6*y(x)=0;
sol: ode2(eqn,y(x),x);
bc2(sol, x=0, y(0)=1, x=2, y(2)=5);
```

4. Построение графиков с помощью функции plot2d

Для построения графиков на плоскости можно воспользоваться функцией **plot2d** со следующим набором аргументов:

plot2d(expr, [x, x_min, x_max]),

expr функция, график которой нужно построить; **x** — переменная, от которой зависит выражение expr; **x_min** и **x_max** задают отрезок оси X для построения графика, участок по оси Y выбирается автоматически, исходя из минимального и максимального значений функции на отрезке [x_min, x_max].

Чтобы построить в одном графическом окне одновременно n графиков (n>1), функции plot2d вместо одного выражения следует передать в качестве аргумента список из n выражений:

plot2d([expr_1, expr_2,…,expr_n], [x, min, max]).

Существует также функция **wxplot2d** (с тем же самым списком параметров), которая в отличие от функции **plot2d**, открывающей отдельное графическое окно с графиком функции, вставляет график внутрь рабочей области документа.

Пример 7. Построить график функции $y(x) = \sin x$ на отрезке $[0, \pi]$.

Решение. plot2d(sin(x),[x,0,%pi],[xlabel,"x"],[ylabel,"y(x)"]);

Замечание. Для того, чтобы построить график решения дифференциального уравнения (см. предыдущие примеры) необходимо воспользоваться функцией **rhs**(…), которая вернет часть выражения, стоящую справа от знака равенства. Например,

expr: y=x^2;

$$y = x^2$$

rhs(expr);

$$x^2$$

Пример 8. Построить графики решений $y(x)$ и $z(x)$ из примера 3 на отрезке $[0,3]$.

Решение. Прежде всего, запишем решение системы в переменную **sol**:

sol: desolve([eqn1,eqn2],[y(x),z(x)]);

Далее

plot2d([rhs(sol[1]),rhs(sol[2])],[x,0,3]);

5. Задания

Для своего варианта найти решения задач Коши **a)**, **b)** и краевой задачи **c)**. Построить графики решений для **a)** (на отрезке $[0,3]$), для **b)** (на отрезке $[x_0, x_0+3]$, где x_0 – начальное значение x) и **c)** (на отрезке $[x_1, x_2]$, где x_1, x_2 – граничные значения x).

Вариант 1.

a). $\begin{cases} y' = z \\ z' = 3z - 2y \end{cases}, \quad y(0) = 1, \quad z(0) = 0.$

b). $y'' - y = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 0.$

c). $y'' - 3y' + 4y = \cos^2 x, \quad y(1) = 1, \quad y(3) = 3.$

Вариант 2.

a). $\begin{cases} y' = z \\ z' = 3z - 2y - e^{-x} \end{cases}, \quad y(0) = 2, \quad z(0) = 3.$

b). $y'' - y = x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

c). $y'' - 3y' + 4y = x^2, \quad y(1) = 1, \quad y(5) = -1.$

Вариант 3.

a). $\begin{cases} y' = z \\ z' = 3z - 2y + e^{-x} \end{cases}, \quad y(0) = 0, \quad z(0) = 1.$

b). $y'' - y = e^x, \quad y(-1) = 2, \quad y'(-1) = 1.$

c). $y'' - 3y' + 4y = \cos x, \quad y(-1) = 2, \quad y(2) = -1.$

Вариант 4.

a). $\begin{cases} y' = z \\ z' = 3z - 2y + x \end{cases}, \quad y(0) = 0, \quad z(0) = -1.$

b). $y'' - y = e^{-x}, \quad y(2) = 0, \quad y'(2) = 2.$

c). $y'' - 3y' + 4y = \sin x, \quad y(0) = -1, \quad y(5) = 2.$

Вариант 5.

a). $\begin{cases} y' = z \\ z' = 3z - 2y + x^2 \end{cases}, \quad y(0) = 1, \quad z(0) = -1.$

b). $y'' - y = x^2, \quad y(-1) = -2 \quad y'(-1) = 2.$

c). $y'' - 3y' + 4y = 0, \quad y(-3) = 1, \quad y(2) = 3.$

Вариант 6.

a). $\begin{cases} y' = z \\ z' = 3z - 4y \end{cases}, \quad y(0) = 1, \quad z(0) = 3.$

b). $y'' + y = 0, \quad y(1) = -1, \quad y'(1) = -2.$

c). $y'' - 3y' + 2y = x^2, \quad y(-1) = -1, \quad y(1) = 1.$

Вариант 7.

a). $\begin{cases} y' = z \\ z' = 3z - 4y + \sin x \end{cases}, \quad y(0) = -1, \quad z(0) = 2.$

b). $y'' + y = \sin x, \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 1.$

c). $y'' - 3y' + 2y = x, \quad y(1) = -2, \quad y(3) = 0.$

Вариант 8.

a). $\begin{cases} y' = z \\ z' = 3z - 4y + \cos x \end{cases}, \quad y(0) = 0, \quad z(0) = 1.$

b). $y'' + y = \cos x, \quad y(-1) = 2 \quad y'(-1) = 1.$

c). $y'' - 3y' + 2y = e^{-x}, \quad y(-1) = 1, \quad y(1) = -1.$

Вариант 9.

a). $\begin{cases} y' = z \\ z' = 3z - 4y + x^2 \end{cases}, \quad y(0) = 0, \quad z(0) = -1.$

b). $y'' + y = x^2, \quad y(2) = 0, \quad y'(2) = 2.$

c). $y'' - 3y' + 2y = e^{x}, \quad y(0) = -3, \quad y(2) = -2.$

Вариант 10.

a). $\begin{cases} y' = z \\ z' = 3z - 4y + \cos^2 x \end{cases}, \quad y(0) = 1, \quad z(0) = -1.$

b). $y'' + y = \sin^2 x, \quad y(-1) = -2, \quad y'(-1) = 2.$

c). $y''-3y'+2y=0, \quad y(-2)=3, \quad y(1)=0.$

Вариант 11.

a). $\begin{cases} y'=z \\ z'=y \end{cases}, \quad y(0)=1, \quad z(0)=0.$

b). $y''-3y'+2y=0, \quad y(1)=1, \quad y'(1)=0.$

c). $y''+y=\sin^2 x, \quad y(-1)=0, \quad y(1)=-1.$

Вариант 12.

a). $\begin{cases} y'=z \\ z'=y+x \end{cases}, \quad y(0)=-2, \quad z(0)=1.$

b). $y''-3y'+2y=e^x, \quad y(0)=0, \quad y'(0)=1.$

c). $y''+y=x^2, \quad y(-1)=2, \quad y(4)=-1.$

Вариант 13.

a). $\begin{cases} y'=z \\ z'=y+e^x \end{cases}, \quad y(0)=0, \quad z(0)=1.$

b). $y''-3y'+2y=e^{-x}, \quad y(-1)=2, \quad y'(-1)=1.$

c). $y''+y=\cos x, \quad y(-4)=1 \quad y(0)=0.$

Вариант 14.

a). $\begin{cases} y'=z \\ z'=y+e^{-x} \end{cases}, \quad y(0)=0, \quad z(0)=-1.$

b). $y''-3y'+2y=x, \quad y(2)=0, \quad y'(2)=2.$

c). $y''+y=\sin x, \quad y(-3)=0 \quad y(2)=2.$

Вариант 15.

a). $\begin{cases} y'=z \\ z'=y+x^2 \end{cases}, \quad y(0)=1, \quad z(0)=-1.$

b). $y''-3y'+2y=x^2, \quad y(-1)=-2, \quad y'(-1)=2.$

c). $y''+y=0, \quad y(-1)=1, \quad y(1)=-2.$

Вариант 16.

a). $\begin{cases} y'=z \\ z'=-y \end{cases}, \quad y(0)=1, \quad z(0)=0.$

b). $y''-3y'+4y=0, \quad y(1)=1, \quad y'(1)=0.$

c). $y''-y=x^2, \quad y(1)=1, \quad y(3)=3.$

Вариант 17.

a). $\begin{cases} y' = z \\ z' = -y + \sin x \end{cases}$, $y(0) = 3 \quad z(0) = 1.$

b). $y'' - 3y' + 4y = \sin x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

c). $y'' - y = e^{-x}, \quad y(1) = 1, \quad y(5) = -1.$

Вариант 18.

a). $\begin{cases} y' = z \\ z' = -y + \cos x \end{cases}$, $y(0) = 1 \quad z(0) = 3.$

b). $y'' - 3y' + 4y = \cos x, \quad y(-1) = 2, \quad y'(-1) = 1.$

c). $y'' - y = e^{x}, \quad y(-1) = 2, \quad y(2) = -1.$

Вариант 19.

a). $\begin{cases} y' = z \\ z' = -y + x^2 \end{cases}$, $y(0) = 2, \quad z(0) = -1.$

b). $y'' - 3y' + 4y = x^2, \quad y(2) = 0, \quad y'(2) = 2.$

c). $y'' - y = x \quad y(0) = -1, \quad y(5) = 2.$

Вариант 20.

a). $\begin{cases} y' = z \\ z' = -y + \sin^2 x \end{cases}$, $y(0) = 1, \quad z(0) = -1.$

b). $y'' - 3y' + 4y = \cos^2 x, \quad y(-1) = -2, \quad y'(-1) = 2.$

c). $y'' - y = 0, \quad y(-3) = 1, \quad y(2) = 3.$

Литература

[1] Губина Т. Н., Андропова Е.В. Решение дифференциальных уравнений в системе компьютерной математики Maxima: учебное пособие. – Елец: ЕГУ им. И.А. Бунина, 2009. – 99 с.

Лабораторная работа 2. Простейшая задача вариационного исчисления

Рассматривается задача исследования на экстремум функционала

$$J(y)=\int_{x_1}^{x_2} F(x,y,y')\,dx \to \text{extr} \tag{2.1}$$

с заданными граничными условиями:

$$y(x_1)=y_1, \quad y(x_2)=y_2, \tag{2.2}$$

где **интегрант** $F(x,y,y')$ – непрерывная функция трёх переменных и дифференцируемая функция двух своих последних аргументов.

1. Необходимое условие экстремума функционала: уравнение Эйлера

Как известно из курса вариационного исчисления, функция, на которой достигается экстремум в задаче (2.1), (2.2), должна удовлетворять дифференциальному уравнению (**уравнению Эйлера**)

$$F_y-\frac{dF_{y'}}{dx}=0\,.$$

Обратное неверно: на произвольном решении уравнения Эйлера экстремум функционала может и не достигаться.

Любое решение уравнения Эйлера называется **экстремалью**. Решение уравнения Эйлера, удовлетворяющее условиям (2.2), называется **допустимой экстремалью**.

Так как уравнение Эйлера дополняется не начальными, а граничными условиями, то теорема Коши о существовании и единственности решения дифференциального уравнения здесь неприменима. Иными словами, допустимая экстремаль не обязательно существует, а если существует, то не обязательно единственна.

Алгоритм решения в Maxima.

1. Составить уравнение Эйлера, т.е. вычислить все входящие в него производные и записать их в одном выражении, приравняв к нулю « = 0 ».

2. Найти общее решение получившегося дифференциального уравнения (см. функцию **ode2** из лабораторной работы 1).

3. Найти частное решение, удовлетворяющее граничным условиям (2.2) (см. функцию **bc2** из лабораторной работы 1).

Замечание о том, как составить уравнение Эйлера.

Прежде всего, заметим, что полная производная $\frac{dF_{y'}}{dx}$, входящая в уравнение Эйлера, вычисляется по формуле

$$\frac{dF_{y'}}{dx}=\frac{\partial F_{y'}}{\partial x}+\frac{\partial F_{y'}}{\partial y}y'+\frac{\partial F_{y'}}{\partial y'}y''\,.$$

На этапе формирования уравнения, чтобы не загромождать запись, можно ввести обозначение, записав производную **'diff(y,x)** в отдельную переменную, например,

Dy:'diff(y,x);

Тогда вычисление $F_{y'}$ запишется как

diff(F, Dy);

2. Частный случай: интеграл импульса

Если интегрант $F = F(x, y')$ не зависит явно от *y*, то имеет место *интеграл импульса*

$$F_{y'} = const. \tag{2.3}$$

Алгоритм решения в Maxima.

1. Составить интеграл импульса. Выражение необходимо завершить « = %k », где %k – имя произвольной константы const из (2.3) (вообще, константе из (2.3) можно дать любое имя, которое бы начиналось с символа « % » и не совпадало бы с именами системных констант).

2. Найти общее решение получившегося дифференциального уравнения.

3. Найти частное решение, с помощью граничных условий (2.2) определив константы %c и %k.

Пример поиска частного решения.

Пусть имеется общее решение некоторого дифференциального уравнения, записанное в переменную sol:

sol: y=%k*x+%c $

Требуется найти частное решение, удовлетворяющее граничным условиям $y(0)=1,\ y(2)=3$.

Решение. Создадим переменные, в которые запишем граничные условия:

x1: 0$
y1: 1$
x2: 2$
y2: 3$

Подставим граничные условия слева и справа в общее решение, чтобы получить систему линейных уравнения относительно неизвестных %k и %c.

linEq1: subst([x=x1,y=y1],sol);

linEq2: subst([x=x2,y=y2],sol);

1=%c

3=2*%k+%c

Затем с помощью функции **solve** решим систему уравнений и запишем результат в переменную con:

con: solve([linEq1, linEq2], [%k,%c]);

[[%k=1,%c=1]]

Подставив (с помощью функции **subst)** значения вычисленных констант в общее решение, получим частное решение:

subst(con,sol);

y=x+1

3. Задание

Для функционалов **a)**, **b)** найти допустимые экстремали и построить их графики. Допустимую экстремаль функционала **b)** найти с помощью интеграла импульса.

Вариант 1.

a). $J(y)=\int_{-1}^{1}\left(y'^2+4y^2-8xy+2x^2\right)dx;\quad y(-1)=3;\quad y(1)=1;$

b). $J(y)=\int_{0}^{2}\left(y'^2-4y'e^{2x}+\sin^2 x\right)dx;\quad y(0)=1;\quad y(2)=-2;$

Вариант 2.

a). $J(y)=\int_{-1}^{1}\left(y'^2-4y^2+2xy-x^2\right)dx;\quad y(-1)=2;\quad y(1)=4;$

b). $J(y)=\int_{0}^{2}\left(y'^2-4y'\sin 2x-x^2\right)dx;\quad y(0)=1;\quad y(2)=-1;$

Вариант 3.

a). $J(y)=\int_{-1}^{1}\left(y'^2+4y^2+4x^2y+x\cos x\right)dx;\quad y(-1)=2;\quad y(1)=0.5;$

b). $J(y)=\int_{0}^{2}\left(y'^2-4y'\cos 2x+5\sin 3x\right)dx;\quad y(0)=2;\quad y(2)=-3;$

Вариант 4.

a). $J(y)=\int_{0}^{2}\left(y'^2+9y^2+2xy-x\sin x\right)dx;\quad y(0)=1;\quad y(2)=2;$

b). $J(y)=\int_{1}^{3}\left(y'^2-\frac{4y'}{x}+x\sin x\right)dx;\quad y(1)=1;\quad y(3)=-2;$

Вариант 5.

a). $J(y)=\int_{-2}^{0}\left(y'^2-4y^2+2y+xe^{2x}\right)dx;\quad y(-2)=0;\quad y(0)=1;$

b). $J(y)=\int_{-1}^{1}\left(y'^2-2y'e^{x}+\cos x\right)dx;\quad y(-1)=2;\quad y(1)=3;$

Вариант 6.

a). $J(y)=\int_{0}^{1}\left(y'^2-9y^2+2y\sin x-x^2e^{x}\right)dx;\quad y(0)=1;\quad y(1)=-1;$

b). $J(y)=\int_{-1}^{1}\left(y'^2-\frac{2y'}{1+x^2}+e^{2x}\right)dx;\quad y(-1)=0;\quad y(1)=3;$

Вариант 7.

a). $J(y)=\int_{-1}^{1}\left(y'^2+4y^2+6ye^x+2x\cos x\right)dx;\quad y(-1)=1;\quad y(1)=3;$

b). $J(y)=\int_{-1}^{1}\left(y'^2+4y'e^x\cos x-\sin x\right)dx;\quad y(-1)=1;\quad y(1)=2;$

Вариант 8.

a). $J(y)=\int_{-1}^{1}\left(y'^2+y^2+4ye^x-x\sin x\right)dx;\quad y(-1)=1;\quad y(1)=3;$

b). $J(y)=\int_{1}^{3}\left(y'^2-y'\ln x+2x\right)dx;\quad y(1)=2;\quad y(3)=-1;$

Вариант 9.

a). $J(y)=\int_{-1}^{1}\left(y'^2+4y^2+8ye^{2x}+3x^2\right)dx;\quad y(-1)=1;\quad y(1)=3;$

b). $J(y)=\int_{-1}^{1}\left(y'+y'^2\cos^2 x-\sin^2 x\right)dx;\quad y(-1)=1;\quad y(1)=-2;$

Вариант 10.

a). $J(y)=\int_{0}^{2}\left(2y'^2+2y^2+y\cos x-5x\right)dx;\quad y(0)=2;\quad y(2)=2;$

b). $J(y)=\int_{1}^{3}\left(y'+y'^2\sin^2 x+e^{2x}\right)dx;\quad y(1)=-1;\quad y(3)=4;$

Вариант 11.

a). $J(y)=\int_{0}^{2}\left(2y'^2+2y^2+xy\sin x+6xe^x\right)dx;\quad y(0)=1;\quad y(2)=2;$

b). $J(y)=\int_{0}^{2}\left(y'+y'^2e^x-\sin x\right)dx;\quad y(0)=2;\quad y(2)=-1;$

Вариант 12.

a). $J(y)=\int_{0}^{2}\left(2y'^2-2y^2+y\sin 2x-x^2\sin x\right)dx;\quad y(0)=-1;\quad y(2)=4;$

b). $J(y)=\int_{0.5}^{1.5}(y'+2xy'^2-\cos 2x)dx;\quad y(0.5)=1;\quad y(1.5)=2;$

Вариант 13.

a). $J(y)=\int_{0}^{2}\left(2y'^2-2y^2+y\cos x+xe^{2x}\right)dx;\quad y(0)=1;\quad y(2)=2;$

b). $J(y)=\int_{1}^{2}\left(y'+xy'^2-x^2y'\right)dx;\quad y(1)=2;\quad y(2)=-1;$

Вариант 14.

a). $J(y)=\int_{1}^{2}\left(2y'^2-2y^2+ye^{2x}\sin 3x-x\sin x\right)dx;\quad y(1)=2;\quad y(2)=3;$

b). $J(y)=\int_{-1}^{1}\left(y'+e^xy'^2-xy'\right)dx;\quad y(-1)=0;\quad y(3)=2;$

Вариант 15.

a). $J(y)=\int_{-1}^{1}\left(2y'^2+2y^2+ye^x+4xe^{2x}\right)dx;\quad y(-1)=1;\quad y(1)=2;$

b). $J(y)=\int_{-1}^{1}\left(y'+y'^2\sec^2 x+xy'\right)dx;\quad y(-1)=-1;\quad y(1)=0;$

Вариант 16.

a). $J(y)=\int_{-1}^{1}\left(2y'^2+2y^2+3ye^x\cos x-5x^2e^{2x}\right)dx;\quad y(-1)=2;\quad y(1)=1;$

b). $J(y)=\int_{0}^{2}\left(y'+y'^2+x^2y'^2\right)dx;\quad y(0)=1;\quad y(2)=-2;$

Вариант 17.

a). $J(y)=\int_{-1}^{1}\left(2y'^2+2y^2+ye^{2x}+4\sin x\right)dx;\quad y(-1)=4;\quad y(1)=3;$

b). $J(y)=\int_{-0.5}^{0.5}\left(y'+y'^2\cos 2x-\sin 2x\right)dx;\quad y(-0.5)=1;\quad y(0.5)=0.5;$

Вариант 18.

a). $J(y)=\int_{-1}^{1}\left(2y'^2+2y^2+3ye^{2x}\sin x-5\cos x\right)dx;\quad y(-1)=3;\quad y(1)=4;$

b). $J(y)=\int_{-1}^{1}\left(y'+y'^2e^{2x}-2xy'\right)dx;\quad y(-1)=2;\quad y(1)=1;$

Вариант 19.

a). $J(y)=\int_{0}^{2}\left(y'^2+4y^2+6ye^{2x}\cos x-x^2\right)dx;\quad y(0)=1;\quad y(2)=3;$

b). $J(y)=\int_{0.5}^{1.5}\left((2-6x)y'+y'^2\cos^2 x\right)dx;\quad y(0.5)=-1;\quad y(1.5)=-2;$

Вариант 20.

a). $J(y)=\int_{0}^{2}\left(y'^2+4y^2+4ye^x\sin x+x^2\sin x\right)dx;\quad y(0)=2;\quad y(2)=3;$

b). $J(y)=\int_{0}^{2}\left(y'^2-\frac{2y'}{\sqrt{1+x^2}}+\sin 3x\right)dx;\quad y(0)=-1;\quad y(2)=3;$

Литература

[1] Васильева А. Б., Медведев Г.Н., Тихонов Н.А., Уразгильдина Т.А. Дифференциальные и интегральные уравнения. Вариационное исчисление. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 432 с.

Лабораторная работа 3. Нахождение экстремали в задаче со свободной границей. Естественное граничное условие.

Рассматривается задача исследования на экстремум функционала

$$J(y) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\,dx \to \text{extr} \qquad (3.1)$$

с заданным граничным условием на левой границе

$$y(x_1) = y_1. \qquad (3.2)$$

На правой границе – в точке x_2 значение функции может быть произвольным, то есть экстремум функционала (3.1) ищется в классе функций с закрепленным левым концом и свободным правым.

1. Необходимое условие экстремума в задаче со свободной границей

Функция, на которой в таких задачах достигается экстремум, должна удовлетворять уравнению Эйлера

$$F_y - \frac{dF_{y'}}{dx} = 0,$$

условию (3.2) и

$$F_{y'}(x_2) = 0 \qquad (3.3)$$

Условие (3.3) называется *естественным*. Его смысл следующий: если из всех экстремалей, удовлетворяющих заданному граничному условию слева и различным граничным условиям справа, выбрать функцию, доставляющую экстремум функционалу, то эта функция будет удовлетворять естественному граничному условию (3.3) на правом конце.

2. Решение задачи в Maxima

Алгоритм решения.

1. Составить уравнение Эйлера (см. лабораторную работу 2).
2. Найти общее решение получившегося дифференциального уравнения (см. лабораторную работу 1).
3. Найти частное решение, удовлетворяющее условиям (3.2) и (3.3).

Замечание о поиске частного решения в задаче со свободной правой границей.

Для того, что определить константы %k1 и %k2 из общего решения, воспользуемся условиями (3.2) и (3.3).

Подставив в общее решение (с помощью функции **subst**) $x = x_1$ и $y = y_1$, получим первое уравнение относительно %k1 и %k2.

В производную $F_{y'}$ за место y подставим общее решение, а за место y' производную общего решения. Затем в получившееся выражение подставим $x = x_2$. Заключим выражение « $= 0$ » (см. формулу (3.3)). Это будет вторым уравнением относительно %k1 и %k2.

Пример того, как нарисовать несколько графиков в одном графическом окне.

Построить графики функций $y = \sin(x)$ и $y = \cos(x)$ на отрезке $[0, \pi]$.

Решение. `plot2d([sin(x), cos(x)],[x,0,%pi],[xlabel,"x"],[ylabel,"y(x)"]);`

3. Задание

Для своего варианта из лабораторной работы 2 (задача **а)**) найти экстремаль, предполагая, что граничные условия на правой границе не заданы. Сравнить полученную экстремаль с экстремалью из лабораторной работы 2 (задача **а)**), построив их графики.

Литература

[1] Кузнецов Ю.А., Семенов А.В. Избранные главы вариационного исчисления. Электронное учебно-методическое пособие. Нижний Новгород, 2012. – 69 с.

[2] Ожегова А.В., Насибуллина Р.Г. Вариационное исчисление. Задачи, алгоритмы, примеры. Казань, 2013. – 40 с.

Лабораторная работа 4. Задача Больца. Условия трансверсальности.

Рассматривается задача исследования на экстремум функционала

$$J(y) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\,dx + \psi(y(x_1), y(x_2)) \to \text{extr}, \tag{4.1}$$

где *интегрант* $F(x, y, y')$ – непрерывная функция трёх переменных и дифференцируемая функция двух своих последних аргументов, *терминант* $\psi(y(x_1), y(x_2))$ – дифференцируемая по каждому аргументу функция. Задача (4.1) называется *задачей Больца*.

1. Необходимое условие экстремума в задаче Больца

Функция, на которой достигается экстремум в задаче Больца, должна удовлетворять уравнению Эйлера

$$F_y - \frac{dF_{y'}}{dx} = 0$$

и условиям

$$F_{y'}(x_1) = \psi_{y(x_1)}, \tag{4.2}$$

$$F_{y'}(x_2) = -\psi_{y(x_2)}. \tag{4.3}$$

Условия (4.2), (4.3) называются *условиями трансверсальности*. Их смысл следующий: если из всех экстремалей выбрать функцию, доставляющую экстремум функционалу (4.1), то эта функция будет удовлетворять условиям трансверсальности (4.2) и (4.3).

2. Решение задачи в Maxima

Алгоритм решения.

1. Составить уравнение Эйлера (см. лабораторную работу 2).
2. Найти общее решение получившегося дифференциального уравнения (см. лабораторную работу 1).
3. Найти частное решение, удовлетворяющее условиям трансверсальности (4.2) и (4.3).

Замечание об условиях трансверсальности.

Левые части условий трансверсальности ($F_{y'}(x_1)$ и $F_{y'}(x_2)$) вычисляются по аналогии с лабораторной работой 3.

Для того чтобы вычислить выражение $\psi_{y(x_1)}$ в правой части (4.2) (для $\psi_{y(x_2)}$ в правой части (4.3) алгоритм аналогичен) необходимо сделать следующее.

1. Найти производную функции $\psi(y(x_1), y(x_2))$ по $y(x_1)$ в предположении, что $y(x_1)$ – независимая переменная. Например, пусть $\psi(y(x_1), y(x_2)) = y^2(x_1) + y(x_1)y(x_2) + y^2(x_2)$, тогда $\psi_{y(x_1)} = 2y(x_1) + y(x_2)$.
2. В две отдельные переменные Maxima записать общее решение уравнения Эйлера с $x = x_1$ и с $x = x_2$, соответственно.
3. Переменные из пункта 2 подставить в выражение $\psi_{y(x_1)}$ из пункта 1 вместо $y(x_1)$ и $y(x_2)$, соответственно.

Пример использования опций color и legend функции plot2d.

Построить графики функций $y = \sin(x)$ и $y = \cos(x)$ на отрезке $[0, \pi]$.

Решение.

```
plot2d([sin(x), cos(x)], [x,0,%pi], [xlabel,"x"], [ylabel,"y(x)"], [color, red, green], [legend, "y(x)=sin(x)", "y(x)=cos(x)"]);
```

3. Задание

Для своего варианта найти допустимую экстремаль (т.е. решение уравнения Эйлера, удовлетворяющее условиям трансверсальности) в задаче Больца. Сравнить полученную экстремаль с экстремалями из лабораторных работ 2 (задача **а)**) и 3, построив их графики.

Вариант 1.

$$J(y)=\int_{-1}^{1}(y'^2+4y^2-8xy+2x^2)dx+4y^2(-1)+2y(-1)+2y^2(1)-y(1).$$

Вариант 2.

$$J(y)=\int_{-1}^{1}(y'^2-4y^2+2xy-x^2)dx+y^2(-1)+y(-1).$$

Вариант 3.

$$J(y)=\int_{-1}^{1}\; y'^2+4y^2+4x^2y+x\cos x\;\; dx+y^2(1)+y(1).$$

Вариант 4.

$$J(y)=\int_{0}^{2}(y'^2+9y^2+2xy-x\sin x)dx+y^2(0)-y^2(2).$$

Вариант 5.

$$J(y)=\int_{-2}^{0}(y'^2-4y^2+2y+xe^{2x})dx+y^2(-2)+y^2(0).$$

Вариант 6.

$$J(y)=\int_{0}^{1}(y'^2-9y^2+2y\sin x-x^2e^x)dx+y^2(0)+y(0)y(1)+y^2(1).$$

Вариант 7.

$$J(y)=\int_{-1}^{1}(y'^2+4y^2+6ye^x+2x\cos x)dx+y^2(-1)-y(-1)y(1)+y^2(1).$$

Вариант 8.

$$J(y)=\int_{-1}^{1}(y'^2+y^2+4ye^x-x\sin x)dx+y^2(-1)+2y(-1)y(1).$$

Вариант 9.

$$J(y)=\int_{-1}^{1}(y'^2+4y^2+8ye^{2x}+3x^2)dx+2y(-1)y(1)+y^2(1).$$

Вариант 10.

$$J(y)=\int_{0}^{2}(2y'^2+2y^2+y\cos x-5x)dx+2y^2(0)-y(0)y(2)-y^2(2)-5y(2).$$

Вариант 11.

$$J(y)=\int_{0}^{2}(2y'^2+2y^2+xy\sin x+6xe^x)dx+y(0)+y(0)y(2)-y^2(2).$$

Вариант 12.

$$J(y)=\int_{0}^{2}(2y'^2-2y^2+y\sin 2x-x^2\sin x)dx+y^2(0)+y(0)y(2)-3y(2).$$

Вариант 13.

$$J(y)=\int_{0}^{2}(2y'^2-2y^2+y\cos x+xe^{2x})dx+y^2(0)-2y(0)+y^2(2).$$

Вариант 14.

$$J(y)=\int_{1}^{2}(2y'^2-2y^2+ye^{2x}\sin 3x-x\sin x)dx+y(1)y(2)+y(1)+y(2).$$

Вариант 15.

$$J(y)=\int_{-1}^{1}(2y'^2+2y^2+ye^x+4xe^{2x})dx+2y^2(-1)-y(-1)y(1)+3y^2(1)+2y(1).$$

Вариант 16.

$$J(y)=\int_{-1}^{1}(2y'^2+2y^2+3ye^x\cos x-5x^2e^{2x})dx+y(-1)y(1)-y(-1)-y(1).$$

Вариант 17.

$$J(y)=\int_{-1}^{1}(2y'^2+2y^2+ye^{2x}+4\sin x)dx+y^2(-1)-4y(-1)+3y(-1)y(1).$$

Вариант 18.

$$J(y)=\int_{-1}^{1}(2y'^2+2y^2+3ye^{2x}\sin x-5\cos x)dx-y^2(-1)+4y(-1)+3y^2(1).$$

Вариант 19.

$$J(y)=\int_{0}^{2}(y'^2+4y^2+6ye^{2x}\cos x-x^2)dx+3y^2(0)+2y(0)-y^2(2).$$

Вариант 20.

$$J(y)=\int_{0}^{2}(y'^2+4y^2+4ye^x\sin x+x^2\sin x)dx+y^2(0)-2y(2)+y^2(2).$$

Литература

[1] Ожегова А.В., Насибуллина Р.Г. Вариационное исчисление. Задачи, алгоритмы, примеры. Казань, 2013. – 40 с.

Лабораторная работа 5. Изопериметрическая задача.

Изопериметрической задачей в *узком смысле слова* называется задача нахождения экстремума функционала

$$J(y)=\int_{x_1}^{x_2} F(x,y,y')\,dx \to \text{extr} \tag{5.1}$$

при граничных условиях

$$y(x_1)=y_1, \quad y(x_2)=y_2 \tag{5.2}$$

и при дополнительном ограничении-равенстве на длину кривой, соединяющей точки (x_1, y_1), (x_2, y_2):

$$\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+y'^2}\,dx=\text{const}.$$

Изопериметрическая задача в *широком смысле слова* – это задача исследования на экстремум функционала (5.1) с граничными условиями (5.2) и с ограничениями-равенствами в виде интегралов

$$J_k(y)=\int_{x_1}^{x_2} F_k(x,y,y')\,dx = l_k=\text{const}; \quad k=\overline{1,n}. \tag{5.3}$$

Ограничения (5.3) называются **условиями изопериметричности**.

Для нахождения экстремали в задаче (5.1)–(5.3) применим метод неопределенных множителей Лагранжа. Составим вспомогательный функционал (**функционал Лагранжа**)

$$L(y)=\int_{x_1}^{x_2}\left(F(x,y,y')+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k F_k(x,y,y')\right)dx$$

и для этого функционала найдем экстремаль как решение уравнения Эйлера. Неизвестные произвольные константы общего решения уравнения Эйлера K_1, K_2 и неопределенные множители Лагранжа λ_k находятся из граничных условий (5.2) и условий изопериметричности (5.3).

1. Решение задачи в Maxima

Алгоритм решения.

1. Составить уравнение Эйлера для функционала Лагранжа, т.е. составить уравнение Эйлера для модифицированного интегранта $F(x,y,y')+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k F_k(x,y,y')$. Например, в случае одного условия изопериметричности это можно записать так F+%lambda*F1, где F – интегрант исходного функционала, F1 – подынтегральное выражение условия изопериметричности, %lambda – множитель Лагранжа.

2. Найти общее решение получившегося дифференциального уравнения (см. лабораторную работу 1).

3. Найти частное решение, удовлетворяющее условиям (5.2) и условиям изопериметричности (5.3).

Замечание о поиске частного решения в изопериметрической задаче.

Предположим, что в рассматриваемой задаче только одно условие изопериметричности, и множитель Лагранжа обозначен как %lambda. Для того, чтобы определить константы %k1, %k2 и %lambda, содержащиеся в общем решении, воспользуемся условиями (5.2) и (5.3).

Подставив в общее решение (с помощью функции **subst**) $x = x_1$ и $y = y_1$, получим первое уравнение относительно %k1, %k2 и %lambda. Подставив в общее решение $x = x_2$ и $y = y_2$, получим второе уравнение относительно %k1, %k2 и %lambda.

Третье уравнение относительно %k1, %k2 и %lambda можно получить следующим образом. Подставим общее решение и его производную в подынтегральное выражение условия изопериметричности. Проинтегрируем результат подстановки на отрезке $[x_1, x_2]$ с помощью функции **integrate** и приравняем результат константе из правой части условия изопериметричности (5.3). Например, это можно записать так integrate(F1, x, x1, x2)=l, где l – переменная, в которую записано значение константы из правой части условия изопериметричности.

Далее, составив систему из трех уравнений, решим ее и определим значения неизвестных %k1, %k2 и %lambda.

2. Задание

Для своего варианта из лабораторной работы 2 (задача **a)**) найти экстремаль, учитывая заданное условие изопериметричности. Сравнить полученную экстремаль с экстремалью из лабораторной работы 2 (задача **a)**), построив их графики.

Вариант 1. $\int_{x_1}^{x_2} y dx = 1$. **Вариант 2.** $\int_{x_1}^{x_2} y dx = 4$. **Вариант 3.** $\int_{x_1}^{x_2} y dx = 0.5$.

Вариант 4. $\int_{x_1}^{x_2} y dx = 2$. **Вариант 5.** $\int_{x_1}^{x_2} y dx = -1$. **Вариант 6.** $\int_{x_1}^{x_2} y dx = 1.5$.

Вариант 7. $\int_{x_1}^{x_2} y dx = 3$. **Вариант 8.** $\int_{x_1}^{x_2} y dx = -3$. **Вариант 9.** $\int_{x_1}^{x_2} y dx = 2$.

Вариант 10. $\int_{x_1}^{x_2} y dx = -2$. **Вариант 11.** $\int_{x_1}^{x_2} y dx = 2.5$. **Вариант 12.** $\int_{x_1}^{x_2} y dx = 6$.

Вариант 13. $\int_{x_1}^{x_2} y dx = 4$. **Вариант 14.** $\int_{x_1}^{x_2} y dx = -4$. **Вариант 15.** $\int_{x_1}^{x_2} y dx = 0$.

Вариант 16. $\int_{x_1}^{x_2} (x+y) dx = 4$. **Вариант 17.** $\int_{x_1}^{x_2} y dx = 6$. **Вариант 18.** $\int_{x_1}^{x_2} (x^2+y) dx = 4$.

Вариант 19. $\int_{x_1}^{x_2} (x^2+y) dx = 5$. **Вариант 20.** $\int_{x_1}^{x_2} (\sin x+y) dx = 5$.

Лабораторная работа 6. Метод начальных параметров решения простейшей задачи вариационного исчисления.

Поиск экстремали в простейшей задаче вариационного исчисления

$$J(y)=\int_{x_1}^{x_2} F(x,y,y')\,dx \to \mathrm{extr},\quad y(x_1)=y_1,\quad y(x_2)=y_2$$

сводится к решению дифференциального уравнения второго порядка (уравнения Эйлера), дополненного краевыми условиями. Суть метода начальных параметров заключается в подмене краевой задачи задачей с начальными условиями (задачей Коши). Для решения задачи Коши существует множество приближенных методов, не использующих символьные вычисления. Эти методы могут быть реализованы в различных прикладных программах и с помощью различных языков программирования, которые, кроме арифметических операций, поддерживают также вызов элементарных математических функций.

1. Сведение дифференциального уравнения второго порядка к системе дифференциальных уравнений первого порядка

Отметим, что для всех вариантов заданий из лабораторной работы 2 (задание **а)**) уравнение Эйлера может быть сведено к виду дифференциального уравнения второго порядка, разрешенного явно относительно второй производной,

$$y''=f(x,y,y'). \tag{6.1}$$

С помощью замены переменных

$$v_1=y,\qquad v_2=y'$$

дифференциальное уравнение (6.1) примет вид системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} v_1'=v_2, \\ v_2'=f(x,v_1,v_2). \end{cases}$$

Если, кроме значения функции $y(x_1)=v_1(x_1)$, определить значение производной $y'(x_1)=v_2(x_1)$, то полученную задачу Коши, как будет показано далее, можно решить приближенно.

2. Приближенное решение задачи Коши методом Рунге-Кутты

Основная идея методов приближенного решения задачи Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y),\quad y(x_0)=y_0 \tag{6.2}$$

состоит в следующем: производится разбиение отрезка решения задачи с заданным шагом, производная неизвестной функции заменяется разностной производной, затем значения приближенного решения последовательно от начального условия вычисляются в узлах разбиения.

Воспользуемся в данной лабораторной работе одним из таких методов, а, именно, методом Рунге-Кутты четвертого порядка точности

$$y_{i+1}=y_i+\Delta y_i;\quad \Delta y_i=h\frac{(k_1+2k_2+2k_3+k_4)}{6},\ \text{где}\ i=0,1,\ldots,$$

$$k_1=f(x_i,y_i);\quad k_2=f\left(x_i+\frac{h}{2},y_i+\frac{h}{2}k_1\right);\ k_3=f\left(x_i+\frac{h}{2},y_i+\frac{h}{2}k_2\right);\quad k_4=f\left(x_i+h,y_i+hk_3\right),$$

который реализован в системе Maxima в виде функции

rk ([ODE1, ..., ODEn], [y1, ..., yn], [init1, ..., initn], domain),

где **ODE1, ..., ODEn** – компоненты правой части системы (6.2); **y1, ..., yn** – зависимые переменные; **init1, ..., initn** – начальные условия, соответствующие зависимым переменным; **domain** – список из четырех элементов **[x,x1,x2,h]**, в котором **x** – независимая переменная, **x1** и **x2** – левая и правая граница области решения, **h** – шаг разбиения.

Пример.

Решить задачу Коши $y''=y'+y+x$, $y(0)=1$, $y'(0)=2$ методом Рунге-Кутты четвертого порядка.

Решение. С помощью замены переменных приведем заданное дифференциальное уравнение к системе уравнений первого порядка

$$\begin{cases} v_2' = v_2, \\ v_2' = v_2 + v_1 + x \end{cases}$$

и воспользуемся функцией rk(…):

```
x1: 0;  y1: 1;  dy1: 2; /* начальные условия */

h: 0.1; /* шаг разбиения */

x2: 3; /* некоторая правая граница области решения */

rk([v2, v2+v1+x],[v1,v2],[y1, dy1],[x, x1, x2, h]);
```

3. Переход от краевой задачи к задаче Коши

Если система дифференциальных уравнений (6.2) **линейная** (даже с переменными коэффициентами), то вектор решений в любой точке $y(x_2)$ также будет **линейно** зависеть от начальных условий (см. формулу Коши для решения линейной неоднородной системы дифференциальных уравнений):

$$y(x_2) = Ay(x_1) + b,$$

где A – матрица n на n, b – n-мерный вектор. Для исходного дифференциального уравнения (6.1), если оно является линейным, это означает выполнение равенства

$$y(x_2) = a\, y'(x_1) + b, \quad a, b \in R,$$

т.е. решение на правом конце отрезка (при фиксированном $y(x_1)$) линейно зависит от производной на левом конце отрезка, и искомое значение производной может быть вычислено как

$$y'(x_1) = \frac{y(x_2) - b}{a}. \tag{6.3}$$

Однако значения коэффициентов a и b неизвестны и подлежат определению. Определим их следующим образом. Сначала возьмем $y(x_1) = y_1$ и, положив $y'(x_1) = 0$, построим решение по методу Рунге-Кутты до x_2 и получим, что $b = y^0(x_2)$, где $y^0(x)$ – решение соответствующее начальным условиям $y(x_1) = y_1$, $y'(x_1) = 0$. Затем, положив $y'(x_1) = 1$, опять построим решение по методу Рунге-Кутты до x_2 и получим, что $a + b = y^1(x_2)$, где $y^1(x)$ – решение соответствующее начальным условиям $y(x_1) = y_1$, $y'(x_1) = 1$. Решая систему линейных уравнений

$$\begin{cases} b = y^0(x_2), \\ a + b = y^1(x_2), \end{cases}$$

найдем искомые коэффициенты a и b. С помощью формулы (6.3) определим недостающее начальное условие.

4. Построение дискретного и непрерывного графика в одном графическом окне

Результатом вычислений по методу Рунге-Кутты является список точек, по которому строится ломаная (приближенное решение). Для того чтобы сравнить приближенное решение с точным решением (из лабораторной работы 2) необходимо построить их графики.

Приведем пример того, как это можно сделать. Построим график функции $y = \sin(x)$ и график табличной функции (фактически списка точек)

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
y	1	0.5	0	0.5	1	0.5	0

на отрезке $[0,3]$:

```
list: [[0,1], [0.5, 0.5], [1,0], [1.5, 0.5], [2,1], [2.5,0.5], [3,0]];
func: sin(x);
plot2d ([[discrete, list], func], [x, 0, 3], [xlabel,"x"],[ylabel,"y"]);
```

Замечание к примеру.

Функция rk(…) для заданий из данной лабораторной работы возвращает список, каждым элементом которого является список из трех элементов [x, y, y']. Для того чтобы сформировать список, состоящий из пар [x, y], можно воспользоваться следующей конструкцией

```
makelist ([p[1],p[2]], p, sol_rk);
```

где sol_rk – решение, полученное с помощью функции rk(…).

5. Задание

Для своего варианта из лабораторной работы 2 (задача **а)**) с помощью метода начальных параметров найти экстремаль. Сравнить полученное приближенное решение с экстремалью из лабораторной работы 2 (задача **а)**), построив их графики.

Лабораторная работа 7. Метод Ритца решения простейшей задачи вариационного исчисления.

В методе Ритца решение вариационной задачи

$$J(y)=\int_{x_1}^{x_2} F(x,y,y')\,dx \to \text{extr}, \quad y(x_1)=y_1, \quad y(x_2)=y_2$$

ищется в виде линейной комбинации известных, заданных заранее функций – $\phi_0(x), \phi_1(x), \ldots, \phi_n(x)$ (они называются **базисными**):

$$y(x)=\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \phi_k(x).$$

После подстановки такой линейной комбинации в функционал его можно рассматривать как функцию неизвестных коэффициентов комбинации – $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$, т.е. $J(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Коэффициенты подбираются так, чтобы функционал принимал экстремальное значение. Таким образом, вариационная задача сводится к задаче исследования на экстремум функции многих переменных.

Линейная комбинация базисных функций должна удовлетворять граничным условиям при любых значениях коэффициентов. Если граничные условия однородные (нулевые), то и базисные функции должны удовлетворять однородным граничным условиям. Если же граничные условия неоднородные, то можно применить следующий прием. Будем искать решение в виде линейной комбинации базисных функций, удовлетворяющих однородным граничным условиям, но прибавим к этой комбинации какую-либо функцию $\phi_0(x)$, удовлетворяющую заданным граничным условиям:

$$y(x)=\phi_0(x)+\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \phi_k(x); \quad \phi_0(x_1)=y_1, \quad \phi_0(x_2)=y_2; \quad \phi_i(x_1)=\phi_i(x_2)=0, \quad i=\overline{1,n}. \tag{7.1}$$

Коэффициент при функции $\phi_0(x)$ не варьируется и предполагается всегда равным 1. Таким образом, полученная линейная комбинация при любых значениях варьируемых параметров $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ будет удовлетворять заданным граничным условиям.

1. Решение задачи в Maxima

Алгоритм решения.

1. Задав базисные функции $\phi_0(x), \phi_1(x), \ldots, \phi_n(x)$, составить $y(x)$ вида (7.1) и найти $y'(x)$. Коэффициенты $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ на данном шаге являются неизвестными и подлежат определению.

2. Подставить получившиеся в пункте 1 выражения $y(x)$ и $y'(x)$ в интегрант F. Проинтегрировать результат подстановки на отрезке $[x_1, x_2]$ с помощью функции **integrate**, например, так integrate(F, x, x1, x2).

3. Найти набор коэффициентов $\alpha_1^0, \ldots, \alpha_n^0$, удовлетворяющий необходимому условию экстремума для получившейся в пункте 2 функции многих переменных $J(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Как известно из курса математического анализа, это можно сделать следующим образом. Надо найти градиент функции $J(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и приравнять его нулевому вектору. Решением получившейся системы уравнений и будет $\alpha_1^0, \ldots, \alpha_n^0$.

2. Пример базисных функций

Примером базисных функций для метода Ритца могут служить линейная функция $\phi_0(x)$, соединяющая точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2), и набор тригонометрических функций $\phi_i(x), i=\overline{1,n}$, удовлетворяющих однородным граничным условиям:

$$\phi_0(x)=y_1+\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1), \quad \phi_1(x)=\sin\pi\frac{x-x_1}{x_2-x_1}, \quad \phi_2(x)=\sin 2\pi\frac{x-x_1}{x_2-x_1}, \quad \ldots, \quad \phi_n(x)=\sin n\pi\frac{x-x_1}{x_2-x_1}.$$

Чтобы задать множество однородных базисных функций в Maxima, можно воспользоваться оператором цикла **for**:

for i:1 **thru** n **do (**expr1**,** expr2**, …) .**

Следует отметить, что выражения внутри цикла разделяются запятыми, а не символами «;» или «$».

Константы, на которые следует умножать базисные функции, могут быть созданы в цикле с помощью функции конкатенации (например, **concat**(a,i)) и помещены в список для того, чтобы затем быть использованными при вычислении градиента функции *J*.

3. Задание

Для своего варианта из лабораторной работы 2 (задача **а)**) с помощью метода Ритца найти экстремаль, подобрав базисные функции так, чтобы они давали лучшее приближение к точному решению. Сравнить полученное приближенное решение с экстремалью из лабораторной работы 2 (задача **а)**), построив их графики.

Вариационное исчисление и оптимальное управление

Контрольная работа №1

Вариант 1

1) Решить простейшую задачу вариационного исчисления:

$$\int\limits_1^2 \dot{x}^2 dt \to extr; \quad x(1) = 0,\ x(2) = 1$$

2) Решить задачу Больца:

$$\int\limits_0^1 (\dot{x}^2 + 3x) dt + x^2(0) \to extr$$

3) Найти экстремали в задаче с подвижными концами:

$$\int\limits_0^1 (\dot{x}^2 + 2\dot{x} + x) dt \to extr;\ x(1) = 2$$

4) Найти решение задачи со старшими производными:

$$\int\limits_0^1 \ddot{x}^2 dt \to extr; \quad x(0) = 1,\ x(1) = 1,\ \dot{x}(0) = 1,\ \dot{x}(1) = 1$$

Вариационное исчисление и оптимальное управление

Контрольная работа №2

Вариант 1

1) Найти решение изопериметрической задачи:

$$\int\limits_{-1}^{1} \dot{x}^2 dt \to extr; \quad \int\limits_{-1}^{1} x dt = 1,\ x(-1) = 0,\ x(1) = 1$$

2) Найти допустимую экстремаль в задаче Лагранжа и показать, что она доставляет абсолютный минимум:

$$\int\limits_{0}^{1} \dot{x}^2 dt \to extr; \quad \int\limits_{0}^{1} x dt = 0,\ x(1) = 1$$

3) Решить задачу оптимального управления:

$$\int\limits_{0}^{4} (\dot{x}^2 + x) dt \to extr; \quad |\dot{x}| \le 1,\ x(0) = 0$$

Тип контроля: промежуточная аттестация

Контрольное мероприятие: зачет

1. Примеры задач вариационного исчисления.
2. Определение функционала. Сильный и слабый экстремумы функционала.
3. Определение вариации функционала. Необходимое условие экстремума функционала.
4. Простейшая задача вариационного исчисления. Необходимое условие слабого экстремума в простейшей задаче вариационного исчисления Основная лемма вариационного исчисления. Уравнение Эйлера.
5. Интегрирование уравнения Эйлера.
6. Задачи вариационного исчисления со старшими производными. Уравнение Эйлера-Пуассона.
7. Необходимое условие слабого экстремума для случая векторной искомой функции. Система уравнений Эйлера.
8. Задачи вариационного исчисления с подвижной границей. Условия трансверсальности.
9. Задача Больца. Условия трансверсальности.
10. Правило множителей Лагранжа в гладкой конечномерной задаче на условный экстремум.
11. Правило множителей Лагранжа в гладких бесконечномерных задачах на условный экстремум.
12. Изопериметрическая задача. Постановка задачи. Необходимые условия слабого локального минимума.
13. Постановка задачи Лагранжа. Управляемый, допустимый и оптимальный процессы. Необходимые условия слабого локального минимума в задаче Лагранжа.
14. Постановка задачи оптимального управления. Примеры задач оптимального управления. Определение локально оптимального процесса в сильном смысле. Формулировка принципа максимума Л.С Понтрягина.

01.03.02, Прикладная математика и искусственный интеллект, Прикладная математика и информатика, Вариационное исчисление и оптимальное управление, 2026, очная

Рабочая программа дисциплины (модуля) одобрена и рекомендована:

Проректор по учебной работе	утверждено 27.02.26	А.А. Саламатов

Ученым советом математического факультета

Протокол заседания № 8 от 19.02.2026

Председатель Ученого совета математического факультета	согласовано	А. С. Скорынин

Заседанием кафедры теории управления и оптимизации

Протокол заседания № от

Заведующий кафедрой	согласовано	И. В. Изместьев
Автор (составитель)		Г. П. Кужим

Структура рабочей программы соответствует приказу ректора ФГБОУ ВО «ЧелГУ» от «13» апреля 2021 г. № 274-1