

Документ подписан простой электронной подписью  
Информация о владельце:  
ФИО: Таскаев Сергей Валерьевич  
Должность: Ректор  
Дата подписания: 15.06.2026 12:21:19  
Уникальный программный ключ:  
04c19ed8bf98f3b6cb77a486b9a8788b8322377



МИНОБРАЗОВАНИЯ России  
Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Челябинский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ЧелГУ»)  
Факультет математический  
Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине  
Дифференциальные уравнения,  
по направлению подготовки 02.03.01 Математика и компьютерные науки  
направленности (профилю) Математические и компьютерные методы в фундаментальных и  
прикладных исследованиях ФГБОУ ВО «ЧелГУ».

Версия документа - 1	стр. 1 из 33	Первый экземпляр _____	КОПИЯ № _____
----------------------	--------------	------------------------	---------------

**Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации  
по дисциплине (модулю)  
Дифференциальные уравнения**

Направление подготовки (специальность)  
02.03.01 Математика и компьютерные науки


Направленность (профиль)  
Математические и компьютерные методы в фундаментальных и прикладных  
исследованиях

Присваиваемая квалификация  
Бакалавр

Форма обучения  
очная


Год набора 2026

Челябинск, 2026 г.

	МИНОБРНАУКИ России Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Челябинский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ЧелГУ») Факультет математический		
Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине Дифференциальные уравнения, по направлению подготовки 02.03.01 Математика и компьютерные науки направленности (профилю) Математические и компьютерные методы в фундаментальных и прикладных исследованиях ФГБОУ ВО «ЧелГУ».			
Версия документа - 1	стр. 2 из 33	Первый экземпляр _____	КОПИЯ № _____

## Содержание

1. Паспорт фонда оценочных средств
2. Перечень формируемых компетенций
  - 2.1. Компетенции, закреплённые за дисциплиной
3. Содержание оценочных средств по дисциплине
  - 3.1. Виды оценочных средств
  - 3.2. Содержание оценочных средств
4. Порядок проведения и критерии оценивания промежуточной аттестации
  - 4.1. Порядок проведения промежуточной аттестации
  - 4.2. Критерии оценивания промежуточной аттестации по видам оценочных средств
  - 4.3. Результаты промежуточной аттестации и уровни сформированности компетенций.

	МИНОБРНАУКИ России Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Челябинский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ЧелГУ») Факультет математический		
	Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине Дифференциальные уравнения, по направлению подготовки 02.03.01 Математика и компьютерные науки направленности (профилю) Математические и компьютерные методы в фундаментальных и прикладных исследованиях ФГБОУ ВО «ЧелГУ».		
Версия документа - 1	стр. 3 из 33	Первый экземпляр _____	КОПИЯ № _____

## 1. Паспорт фонда оценочных средств

Направление подготовки (специальности) 02.03.01 Математика и компьютерные науки

Направленность (профиль) Математические и компьютерные методы в фундаментальных и прикладных исследованиях

Дисциплина *Дифференциальные уравнения*

Семестры изучения *3, 4 семестры*

Форма промежуточной аттестации *3 семестр – экзамен, 4 семестр – экзамен.*

Использование балльно-рейтинговой системы для оценивания результатов.

## 2. Перечень формируемых компетенций

### 2.1. Компетенции, закреплённые за дисциплиной

Изучение дисциплины Б1.О.10 *Дифференциальные уравнения* направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции согласно ФГОС	Индикаторы достижения компетенций согласно ОПОП ВО	Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине
1	2	3
<b>ОПК-1</b> Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности	ОПК-1.3. Имеет навыки использования основных понятий, теорем, законов математики и (или) естественных наук для решения задач профессиональной деятельности.	Знает: различные типы дифференциальных уравнений и способы их решения. Имеет практический опыт: решения дифференциальных уравнений в математических моделях различных прикладных задач.



МИНОБРНАУКИ России  
Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Челябинский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ЧелГУ»)  
Факультет математический

Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине  
Дифференциальные уравнения,  
по направлению подготовки 02.03.01 Математика и компьютерные науки  
направленности (профилю) Математические и компьютерные методы в фундаментальных и  
прикладных исследованиях ФГБОУ ВО «ЧелГУ».

Версия документа - 1

стр. 4 из 33

Первый экземпляр \_\_\_\_\_

КОПИЯ № \_\_\_\_\_

### 3. Содержание оценочных средств по дисциплине

#### 3.1 Виды оценочных средств

Код, наименование компетенции согласно ФГОС	Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине	Контролируемые темы/разделы	Семестр	Номер задания	Наименование оценочного средства
<b>ОПК-1</b> Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности	Знать простейшие типы дифференциальных уравнений Уметь решать простейшие дифференциальные уравнения, Иметь опыт использования логического мышления, методов доказательств математических утверждений; иметь навыки решения и исследования дифференциальных уравнений и систем в математических и физических приложениях; владеть умением пользоваться необходимой литературой.	Раздел 1. Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка, разрешенные относительно производной	3	1,2, 6-9, 19	1. Контрольная работа №1 2. Проверка домашних заданий по разделу 1 6. Тест за 3 семестр 7. Проверка конспекта лекций за 3 семестр 8. Вопросы к экзамену за 3 семестр 9. Билеты для проведения экзамена в 3 семестре 19. АПД
	Знать основные формулы общего и частного решения линейных систем и уравнений с постоянными коэффициентами, определения и свойства матричной экспоненты; Уметь решать линейные уравнения и системы с постоянными коэффициентами, применять матричную экспоненту к решению систем линейных уравнений с постоянными коэффициентами Иметь опыт использования логического мышления, методов доказательств математических утверждений; иметь навыки решения и	Раздел 2. Линейные уравнения и системы. Раздел 3. Теоремы существования и единственности решения задач Коши.	3	3-9,19	3. Контрольная работа №2 4. Проверка домашних заданий по разделу 2, занятия 8-12 5. Проверка домашних заданий по разделу 2, занятия 14-16 6. Тест за 3 семестр 7. Проверка конспекта лекций за 3 семестр 8. Вопросы к экзамену за 3 семестр 9. Билеты для проведения



МИНОБРНАУКИ России  
Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Челябинский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ЧелГУ»)  
Факультет математический

Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине  
Дифференциальные уравнения,  
по направлению подготовки 02.03.01 Математика и компьютерные науки  
направленности (профилю) Математические и компьютерные методы в фундаментальных и  
прикладных исследованиях ФГБОУ ВО «ЧелГУ».

Версия документа - 1

стр. 5 из 33

Первый экземпляр \_\_\_\_\_

КОПИЯ № \_\_\_\_\_

	исследования дифференциальных уравнений и систем в математических и физических приложениях; владеть умением пользоваться необходимой литературой.				экзамена в 3 семестр 19. АПД
	Знать методы понижения порядка дифференциальных уравнений; условия существования и единственности решения задачи Коши для нормальных систем дифференциальных уравнений и для уравнения $n$ -го порядка в нормальном виде; понятия особого решения. Уметь применять методы понижения порядка; исследовать задачу Коши. Находить особые решения уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной. Иметь опыт использования логического мышления, методов доказательств математических утверждений; иметь навыки решения и исследования дифференциальных уравнений и систем в математических и физических приложениях; владеть умением пользоваться необходимой литературой.	Раздел 3. Теоремы существования и единственности решения задач Коши. Раздел 4. Уравнения, неразрешенные относительно производной. Раздел 5. Уравнения, допускающие понижение порядка.	4	10,11,15-19	10. Контрольная работа №3 11. Проверка домашних заданий по разделам 3-5 15. Тест за 4 семестр 16. Проверка конспекта лекций за 4 семестр 17. Вопросы к экзамену за 4 семестр 18. Билеты для проведения экзамена в 4 семестре 19. АПД
	Знать характер зависимости решений от начальных условий, классификацию положений равновесия линейных автономных систем второго порядка; основные определения и положения теории устойчивости.	Раздел 6. Непродолжаемые решения. Раздел 7. Непрерывная зависимость решения от начальных условий и правой части уравнения.	4	12-19	12. Контрольная работа №4 13. Проверка домашних заданий по разделам 7-9 14. Проверка домашних заданий по



МИНОБРНАУКИ России  
Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Челябинский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ЧелГУ»)  
Факультет математический

Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине  
Дифференциальные уравнения,  
по направлению подготовки 02.03.01 Математика и компьютерные науки  
направленности (профилю) Математические и компьютерные методы в фундаментальных и  
прикладных исследованиях ФГБОУ ВО «ЧелГУ».

Версия документа - 1

стр. 6 из 33

Первый экземпляр \_\_\_\_\_

КОПИЯ № \_\_\_\_\_

	Уметь строить фазовые портреты линейных автономных систем второго порядка, находить производную по параметру и начальному условию, исследовать устойчивость решения системы дифференциальных уравнений. Иметь опыт использования логического мышления, методов доказательств математических утверждений; иметь навыки решения и исследования дифференциальных уравнений и систем в математических и физических приложениях; владеть умением пользоваться необходимой литературой.	Раздел 8. Дифференцируемость решения по параметру. Раздел 9. Автономные системы дифференциальных уравнений и их фазовые пространства. Раздел 10. Первые интегралы. Раздел 11. Теория устойчивости. Раздел 12. Уравнения в частных производных первого порядка.		разделам 10-12 15. Тест за 4 семестр 16. Проверка конспекта лекций за 4 семестр 17. Вопросы к экзамену за 4 семестр 18. Билеты для проведения экзамена в 4 семестре 19. АПД
--	---	--	--	--

### 3.2 Содержание оценочных средств

Оценочные средства представляют собой:

- типовые контрольные работы, проводимые в течение 3,4 семестров (№ заданий: 1,3,10,12);
- проверка домашних заданий по всем разделам (№ заданий: 2,4,5,11,13,14);
- тестирование по всем разделам дисциплины: <http://moodle.uio.csu.ru/course/view.php?id=1103>, проводится в конце 3 и 4 семестров (№ заданий: 6,15);
- проверка конспектов лекций (№ заданий: 7,16);
- вопросы к экзамену (№ заданий: 8,17);
- экзаменационные билеты, каждый из которых содержит 3 практических задачи и 2 теоретических вопроса из списка вопросов к экзамену (№ заданий: 9,18);
- АПД на практических занятиях (№ задания: 19).

Контрольная работа №1 (Уравнения первого порядка, разрешенные относительно производной):



**Контрольная работа № 1**

**Вариант 1**

1.  $y' = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}$ ,  $y(1) = 1$ .
2.  $y' = 2 \left( \frac{y+2}{x+y-1} \right)^2$ .
3.  $(x+y)y' = 1$ ,  $y(-1) = 0$ .
4.  $xy' + y = \ln x + 1$ .
5.  $(x^2 - 3y^2)dx + 2xydy = 0$ .
6.  $xyy' - x^2\sqrt{y^2+1} = (x+1)(y^2+1)$ .

**Контрольная работа № 1**

**Вариант 5**

1.  $xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $y(1) = 1$ .
2.  $3x^2y^2y' = y^3(x+y^3)$ .
3.  $xy' + y(x \operatorname{tg} x + 1) = \sec x$ .
4.  $y' - xy = -y^3e^{-x^2}$ .
5.  $y \cos x dx + \sin x dy = \cos 2x dx$ ,  $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ .
6.  $y' = (3x - y + 2)^2 - 1$ .

**Контрольная работа №2 (Линейные уравнения и системы с постоянными коэффициентами):**

**Контрольная работа № 2**

**Вариант 1**

1. Построить линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами (возможно более низкого порядка), имеющее данные частные решения:  $y_1 = xe^x$ ,  $y_2 = xe^{-x}$ .

2. Решить линейное неоднородное уравнение с неоднородностью в виде квазимногочлена:

$$y'' + 5y' + 6y = e^{-x} + e^{-2x}.$$

3. Решить линейное неоднородное уравнение, используя метод вариации постоянной:

$$y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x.$$

4. Решить линейную однородную систему  $\dot{x} = Ax$ :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{1,2,3} = 2.$$

5. Найти экспоненту от матрицы  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

**Контрольная работа № 2**

**Вариант 3**

1. Построить линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами (возможно более низкого порядка), имеющее данные частные решения:  $y_1 = x^2e^x$ ,  $y_2 = xe^x$ .

2. Решить линейное неоднородное уравнение с неоднородностью в виде квазимногочлена:

$$y^{IV} - 81y = 27e^{-3x}.$$

3. Решить линейное неоднородное уравнение, используя метод вариации постоянной:

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{\sqrt{4-x^2}}.$$

4. Решить линейную однородную систему  $\dot{x} = Ax$ :

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -6 & -2 \\ 18 & -12 & -3 \\ 18 & -9 & -6 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{1,2,3} = -3.$$

5. Найти экспоненту от матрицы  $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ .

**Контрольная работа №3 (Теоремы существования, уравнения неразрешенные относительно производной и уравнения, допускающие понижение порядка):**



**Контрольная работа № 3**

*Вариант 1*

1. Для задачи Коши  $\dot{x} = t^3/x$ ,  $x(0) = 1$  указать какой-нибудь отрезок, на котором существует решение с данными начальными условиями.
2. Построить последовательные приближения  $y_0, y_1, y_2$  к решению данной задачи:  $y' = y^2 - x$ ,  $y(0) = 1$ .
3. При каких порядках  $n$  уравнение  $y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$  с непрерывно дифференцируемой функцией  $f$  может иметь среди своих решений две функции:  $y_1 = 2x$ ,  $y_2 = 2x + x^3$ .
4. Выделить особые решения (если они есть):  $y'^2 x = 2y'^3 - 1$ .
5. Решить задачу Коши:  $yy''' + 3y'y'' = 0$ ,  $y(0) = -1$ ,  $y'(0) = -\sqrt{2}$ ,  $y''(0) = 1$ .

**Контрольная работа № 3**

*Вариант 4*

1. Для задачи Коши  $\dot{x} = t^7/x^2$ ,  $x(0) = 1/7$  указать какой-нибудь отрезок, на котором существует решение с данными начальными условиями.
2. Построить последовательные приближения  $y_0, y_1, y_2$  к решению данной задачи:  $y' = y^3 + x^2$ ,  $y(0) = 0$ .
3. При каких начальных условиях существует единственное решение системы:  
$$\frac{dx}{dt} = y^3 + \sqrt[4]{t-1}, \quad y \frac{dy}{dt} = \sqrt[3]{x}.$$
4. Выделить особые решения (если они есть):  $y = xy' - 3y'^3$ .
5. Решить задачу Коши:  $(y')^2 - yy'' = (y/x)^2$ ,  $y(1) = -1$ ,  $y'(1) = 0$ .

**Контрольная работа №4 (Дифференцируемость по параметру, фазовые портреты, первые интегралы, уравнения в ЧП, устойчивость):**

**Контрольная работа № 4**

*Вариант 1*


1. Для задачи  $\dot{x} = \varepsilon \sqrt{\ln x} + xt$ ,  $x(0) = 1 - \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$  найти производную  $\left. \frac{\partial x(t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}$ .
2. Решить задачу Коши:  
$$\sqrt{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \sqrt{y} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}, \quad z|_{x=1} = -\sqrt{y}.$$
3. Исследовать в зависимости от параметра  $a$  устойчивость положения равновесия  $(0, 0)$  системы:  
$$\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = 4y - ax. \end{cases}$$
4. Для системы из задания 3. при  $a = 2$  начертить фазовые траектории.
5. Найти все положения равновесия, исследовать их на устойчивость, найти первый интеграл консервативной системы:  
$$\ddot{x} = 4x^3 - 2x.$$
6. Исследовать устойчивость нулевого решения уравнения:  
$$y^{IV} + 2y''' + 4y'' + 3y' + 2y = 0$$

**Контрольная работа № 4**

*Вариант 3*

1. Для задачи  $\dot{x} = \varepsilon + 2x^2t$ ,  $x(0) = 1 + \varepsilon$  найти производную  $\left. \frac{\partial x(t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}$ .
2. Решить задачу Коши:  
$$x \frac{\partial z}{\partial x} + z \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad z|_{x=1} = -y.$$
3. Исследовать в зависимости от параметра  $a$  устойчивость положения равновесия  $(0, 0)$  системы:  
$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y \\ \dot{y} = 3x + ay. \end{cases}$$
4. Для системы из задания 3. при  $a = -9/2$  начертить фазовые траектории.
5. Найти все положения равновесия, исследовать их на устойчивость, найти первый интеграл консервативной системы:  
$$\ddot{x} = -1 - \sin x.$$
6. Исследовать устойчивость нулевого решения уравнения:  
$$y^{IV} + 2y''' + 6y'' + 5y' + 6y = 0$$

Примерный перечень домашних заданий из [Филиппов, А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям [Текст] / А. Ф. Филиппов. —

 <p>МИНОБРНАУКИ России Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Челябинский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ЧелГУ») Факультет математический</p>			
<p>Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине Дифференциальные уравнения, по направлению подготовки 02.03.01 Математика и компьютерные науки направленности (профилю) Математические и компьютерные методы в фундаментальных и прикладных исследованиях ФГБОУ ВО «ЧелГУ».</p>			
Версия документа - 1	стр. 9 из 33	Первый экземпляр _____	КОПИЯ № _____

Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, 2000. — 176 с.] по темам и занятиям

№ занятия	№ раздела	Наименование или краткое содержание практического занятия, семинара и № ДЗ
1	1	Уравнения с разделяющимися переменными. Задача Коши. №: 52,53,57,63,65
2-3	1	Однородные уравнения и сводящиеся к ним. Квазиоднородные уравнения. №: 102,107,109,115,122,123,125,128
3-4	1	Линейные уравнения 1-го порядка. Уравнения Бернулли. №: 138,149,166,153,156,159
5	1	Уравнения Риккати. Уравнения в полных дифференциалах. №: 169,171,191,194,195
6	1	Интегрирующий множитель. Метод выделений и замен. №: 197,208,210,211,213,215,219
8	2	Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами. Квазимногочлены. №: 512,518,531,537,541,546,585
9	2	Метод вариации постоянных. Задача Коши. Уравнения с комплексными коэффициентами. №: 577,579,580,585,603,605
10	2	Линейные однородные системы с постоянными коэффициентами. Случай действительных собственных значений. №: 799,800,795,806,810
11	2	Линейные однородные системы с постоянными коэффициентами: случай комплексных собственных значений. Линейные неоднородные системы с постоянными коэффициентами: квазимногочлены. №: 790,802,832,838,845
12	2	Линейные неоднородные системы с постоянными ко-



МИНОБРНАУКИ России  
Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Челябинский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ЧелГУ»)  
Факультет математический

Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине  
Дифференциальные уравнения,  
по направлению подготовки 02.03.01 Математика и компьютерные науки  
направленности (профилю) Математические и компьютерные методы в фундаментальных и  
прикладных исследованиях ФГБОУ ВО «ЧелГУ».

Версия документа - 1

стр. 10 из 33

Первый экземпляр \_\_\_\_\_

КОПИЯ № \_\_\_\_\_

		ээффициентами: метод вариации постоянных. Экспонента от матрицы. №: 848,849,853,869,870,871,875
14	2	Линейная зависимость. Определитель Вронского. Составление линейных уравнений с непрерывными коэффициентами по фундаментальной системе решений. Теорема существования и единственности. №:644,645,649,650,653,668,673,676,678
15	2	Решение линейных однородных уравнений с непрерывными коэффициентами. Поиск частного решения. Формула Лиувилля. №: 683 ,690,696,701,705
16	2	Метод вариации постоянных для неоднородных линейных уравнений. Элементы качественной теории линейных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами. № 703,707,712,718,722,727,730,732
1-2	3	Теоремы существования и единственности решения задач Коши. №:221(б,в),222(б,г),223(г),225(а,в,д),228(а,в,д), 232,234
2-3	4	Уравнения неразрешенные относительно производной. Особые решения. Метод введения параметра. Уравнения Лагранжа и Клеро. №:249,251,257,259,263,272,279,284,290,296
4-5	5	Уравнения, допускающие понижение порядка. №:424,430,433,441,459,461,463,467,470,504,505
7	7	Оценка точности приближенного решения. №: 1058,1061,1062
7-8	8	Производная решения по параметру. Производная решения по начальному условию. Метод малого параметра. №: 1065,1067,1069,1070,1074,1078
9-10	9	Фазовые портреты линейных систем. Положения равновесия нелинейных систем.



МИНОБРНАУКИ России  
Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Челябинский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ЧелГУ»)  
Факультет математический

Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине  
Дифференциальные уравнения,  
по направлению подготовки 02.03.01 Математика и компьютерные науки  
направленности (профилю) Математические и компьютерные методы в фундаментальных и  
прикладных исследованиях ФГБОУ ВО «ЧелГУ».

Версия документа - 1

стр. 11 из 33

Первый экземпляр \_\_\_\_\_

КОПИЯ № \_\_\_\_\_

		№:964-966,968,970,971,976,978,980,998,988,991
11	9	Консервативные системы с одной степенью свободы. №: 1003,1007,1008,1010
12	10	Первые интегралы. №:1148,1150,1155,1160,1162
13-14	11	Устойчивость по Ляпунову, определение. Исследование на устойчивость по первому приближению. Функция Ляпунова. №:881(в),891,893,895,897,904,907,909,914,922,923,925,927
15	12	Уравнения в частных производных первого порядка. №:1170,1172,1178,1190,1194,1214

Примеры тестовых заданий:

### Тест 3 семестр

Правильные ответы:

№ вопроса	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Правильный ответ	2,3	2	3	3	2	2	4	1	3	3

**ЗАДАНИЕ N 1 (выберите несколько вариантов ответа)**

Среди записанных ниже дифференциальных уравнений уравнениями первого порядка **не являются** ...

**ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:**

1)  $(x + y^2)dy + (2xy + x^2)dx = 0$

3)  $y' + 2xy''' = 3y$

2)  $y'' + 2y' - 3y = \sin x$

4)  $y'^3 + 2xy = y^2$

**ЗАДАНИЕ N 2 (выберите один вариант ответа)**

Дифференциальное уравнение  $y' - x(y^2 + 1) = 0$  является ...

**ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:**

1) однородным

3) линейным уравнением относительно функции  $y(x)$  и ее производных



2) уравнением с разделяющимися  
переменными

4) уравнением Бернулли

**ЗАДАНИЕ N 3 (выберите один вариант ответа)**

Общее решение дифференциального уравнения  $y'(1 + x^2) = xy$  может быть  
записано в виде ...

**ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:**

1)  $y = C \cdot (1 + x^2)$

3)  $y^2 = C \cdot (1 + x^2)$

2)  $y^2 = C \cdot \sqrt{1 + x^2}$

4)  $y^2 \cdot (1 + x^2) = C$

**ЗАДАНИЕ N 4 (выберите один вариант ответа)**

С помощью замены неизвестной функции  $y(x) = x \cdot z(x)$  уравнение  
 $(x^2 + y^2)y' = 2xy$  сводится к следующему уравнению с разделяющимися  
переменными относительно функции  $z(x)$ : ...

**ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:**

1)  $xz'(z^2 + 1) = z^3 - z$

3)  $xz'(z^2 + 1) = z - z^3$

2)  $xz'(z + 1) = z - z^3$

4)  $xz'(z^2 + 1) = z^2 - z$

**ЗАДАНИЕ N 5 (выберите один вариант ответа)**

С помощью замены неизвестной функции  $y(x) = x \cdot z(x)$  однородное  
уравнение  $(x + 2y)dx = xdy$  сводится к следующему уравнению с  
разделяющимися переменными ...

**ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:**

1)  $(1 + 2z)dx = xdz$

3)  $(1 + z)dx = dz$

2)  $(1 + z)dx = xdz$

4)  $(1 + x)dx = zdz$

**ЗАДАНИЕ N 6 (выберите один вариант ответа)**

Среди указанных ниже функций интегрирующим множителем для  
дифференциального уравнения  $2xy \ln y dx + (x^2 + y^2)dy = 0$  является ...

**ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:**



1)  $\mu(x, y) = \frac{1}{y^2}$

3)  $\mu(x, y) = y$

2)  $\mu(x, y) = \frac{1}{y}$

4)  $\mu(x, y) = \frac{1}{x}$

**ЗАДАНИЕ N 7 (выберите один вариант ответа)**

Применяя метод вариации постоянной, общее решение линейного уравнения  $y' = y \cos x + \sin x$  следует искать в виде ...

**ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:**

1)  $y = C(x) \cdot \cos x$

3)  $y = C(x) \cdot e^{\cos x}$

2)  $y = C(x) \cdot e^{-\sin x}$

4)  $y = C(x) \cdot e^{\sin x}$

**ЗАДАНИЕ N 8 (выберите один вариант ответа)**

Уравнение Бернулли  $y' - 2xy = x^2 y^2$  приводится к линейному относительно функции  $z(x)$  и ее производной путем замены ...

**ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:**

1)  $z(x) = \frac{1}{y(x)}$

3)  $z(x) = \frac{1}{y^2(x)}$

2)  $z(x) = y^2(x)$

4)  $z(x) = x^2 \cdot y^2(x)$

**ЗАДАНИЕ N 9 (выберите один вариант ответа)**

Задача Коши для уравнения четвертого порядка  $y^{(IV)}(x) - y(x) = 0$  может быть поставлена заданием ...

**ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:**

1)  $y(0) = y_0$

3)

$y(0) = y_0, y'(0) = y_1, y''(0) = y_2, y'''(0) = y_3$

2)

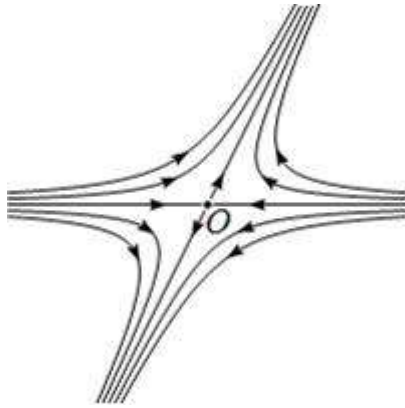
$y'(0) = y_1, y''(0) = y_2, y'''(0) = y_3$

4)

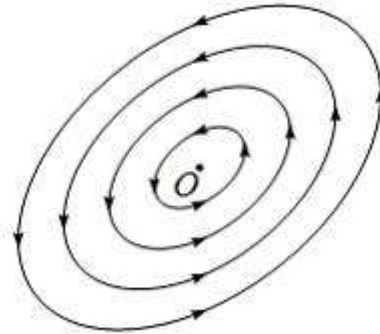
$y(0) = y_0, y'(0) = y_1, y''(1) = y_2, y'''(1) = y_3$







2)



4)

**ЗАДАНИЕ N 4 (выберите один вариант ответа)**

Положение равновесия покоя  $x_1 = x_2 = 0$  системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \\ \dot{x}_2 = 2x_2 \end{cases}$$

является ...

**ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:**

1) неустойчивым узлом

3) устойчивым фокусом

2) центром

4) устойчивым узлом

**ЗАДАНИЕ N 5 (выберите один вариант ответа)**

Характеристиками уравнения

$$\frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

является семейство кривых ..., где  $C$  – произвольная постоянная.

**ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:**

1)  $x + \frac{y^2}{2} = C$

3)  $y - \frac{x^2}{2} = C$

2)  $y + \frac{x^2}{2} = C$

4)  $x - \frac{y^2}{2} = C$

**ЗАДАНИЕ N 6 (выберите один вариант ответа)**

Система для характеристик квазилинейного уравнения



$$e^z \frac{\partial z}{\partial x} + e^x \frac{\partial z}{\partial y} = e^{x+z}$$

имеет вид ...

**ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:**

1)  $e^z dx = e^x dy = e^{x+z} dz$

3)  $e^z dx = e^x dy = -e^{x+z} dz$

2)  $\frac{dx}{e^z} = \frac{dy}{e^x} = \frac{dz}{e^{x+z}}$

4)  $\frac{dx}{e^z} = \frac{dy}{e^x} = -\frac{dz}{e^{x+z}}$

**ЗАДАНИЕ N 7 (выберите один вариант ответа)**

Общее решение уравнения

$$(x + 2y) \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

может быть записано в виде  $z = f(u)$ , где  $f(u)$  – произвольная дифференцируемая функция, а аргумент  $u$  равен ...

**ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:**

1)  $xy - y^2$

3)  $xy + y^2$

2)  $xy + x^2$

4)  $xy - x^3$

**ЗАДАНИЕ N 8 (выберите один вариант ответа)**

Общее решения уравнения

$$y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = x - y$$

может быть представлено в неявной форме в виде ... , где  $F$  – произвольная дифференцируемая функция.

**ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:**

1)  $F(x^2 - y^2, x - y + z) = 0$

3)  $F(x + y^2, x - y + z) = 0$

2)  $F(x^2, x - y + z) = 0$

4)  $F(x^3 + y^3, x - y + z) = 0$

**ЗАДАНИЕ N 9 (введите ответ)**

Функция  $z(x, y)$ , являющаяся решением задачи Коши



$$y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

$$z|_{y=-2x} = y^2$$

принимает в точке  $(-1,7)$  значение ...

**ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:**

**ЗАДАНИЕ N 10 (введите ответ)**

Функция  $z(x, y)$ , являющаяся решением задачи Коши

$$\frac{1}{x^2} \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{1}{y^2} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{z^2},$$

$$z|_{x=3y} = 2y,$$

принимает в точке  $(-1,1)$  значение ...

**ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:**

АПД (активная познавательная деятельность) на практических занятиях оценивается активная познавательная позиция студента, его желание работать и знать материал дисциплины.

Вопросы к экзамену за 3 семестр:

1. Определение дифференциального уравнения и решения дифференциального уравнения. Задача Коши и краевая задача.
2. Геометрическое истолкование дифференциального уравнения (векторное поле) и его решения (интегральная кривая).
3. Задача обратная решению дифференциального уравнения.
4. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель.
5. Линейные уравнения. Уравнения Бернулли.
6. Уравнения с разделяющимися переменными и однородные уравнения.
7. Комплексная функция. Нормальная система дифференциальных уравнений. Расщепление комплексной системы на систему действительных уравнений.
8. Теорема существования и единственности (формулировка). Теорема существования и единственности для уравнения  $n$ -го порядка (фор-ка).
9. Экспонента комплексного числа, свойства.



10. Некоторые сведения о линейных дифференциальных уравнениях, свойства решений (с доказательством).
11. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами. Определение оператора  $L(p)$ , его свойства. Доказательство формулы:  
$$L(p)e^{\lambda t} = L(\lambda)e^{\lambda t}.$$
12. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами (случай простых корней). Теорема о виде решения.
13. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами (случай простых корней). Действительное решение уравнения с действительными коэффициентами.
14. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами (случай кратных корней). Формула смещения. Предложение о семействе функций  $\omega_0(t), \omega_1(t), \dots, \omega_{k-1}(t), \omega_k(t)$ .
15. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами (случай кратных корней). Теорема о виде решения.
16. Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами. Вид решения. Определение квазимногочлена. Теорема о виде частного решения.
17. Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами. Свойство квазимногочленов.
18. Нормальная линейная однородная система с постоянными коэффициентами. Случай простых корней характеристического уравнения.
19. Нормальная линейная однородная система с постоянными коэффициентами. Общий случай.
20. Нормальная система линейных уравнений с переменными коэффициентами. Простейшие свойства решений однородной системы. Линейная зависимость системы решений.
21. Нормальная система линейных уравнений с переменными коэффициентами. Фундаментальная система решений. Её существование, выражение решения с помощью фундаментальной системы решений.
22. Нормальная система линейных уравнений с переменными коэффициентами. Детерминант Вронского. Соответствие между произвольной матрицей с ненулевым определителем и фундаментальной матрицей линейной системы.
23. Нормальная система линейных уравнений с переменными коэффициентами. Правило дифференцирования детерминанта. Формула Лиувилля.



МИНОБРНАУКИ России  
Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Челябинский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ЧелГУ»)  
Факультет математический

Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине  
Дифференциальные уравнения,  
по направлению подготовки 02.03.01 Математика и компьютерные науки  
направленности (профилю) Математические и компьютерные методы в фундаментальных и  
прикладных исследованиях ФГБОУ ВО «ЧелГУ».

Версия документа - 1

стр. 20 из 33

Первый экземпляр \_\_\_\_\_

КОПИЯ № \_\_\_\_\_

24. Нормальная неоднородная система линейных уравнений с переменными коэффициентами. Вид решения. Метод вариации постоянных.
25. Линейные уравнения  $n$ -го порядка с переменными коэффициентами. Сведение к нормальной линейной системе. Эквивалентность решения уравнения и системы.
26. Линейные уравнения  $n$ -го порядка с переменными коэффициентами. Линейная независимость. Фундаментальная система решений. Её существование, выражение решения с помощью фундаментальной системы решений.
27. Линейные уравнения  $n$ -го порядка с переменными коэффициентами. Детерминант Вронского. Формула Лиувилля.
28. Линейные уравнения  $n$ -го порядка с переменными коэффициентами. Метод вариации постоянных.
29. Показательная функция матрицы. Ряд от матрицы.
30. Экспонента матрицы. Свойства и способы ее нахождения.
31. Экспонента диагональной и жордановой матрицы.
32. Линейные уравнения второго порядка. Приведение к виду без первой производной.
33. Понятия колеблющегося и неколеблющегося на интервале решения. Теорема о неколеблющемся решении.
34. Теорема Штурма и ее следствие.
35. Теорема сравнения и ее следствие.
36. Теорема Кнезера. Понятие о краевых задачах. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для нормальной системы линейных уравнений. Формулировка теоремы существования и единственности решения задачи Коши для линейного уравнения  $n$ -го порядка.
37. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для одного уравнения. Ломаные Эйлера.
38. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений.

Вопросы к экзамену, 4 семестр:

1. Уравнения, неразрешенные относительно производной. Теорема существования и единственности, следствие.
2. Дискриминантная кривая, особое решение дифференциального уравнения, неразрешенного относительно производной.



МИНОБРНАУКИ России  
Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Челябинский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ЧелГУ»)  
Факультет математический

Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине  
Дифференциальные уравнения,  
по направлению подготовки 02.03.01 Математика и компьютерные науки  
направленности (профилю) Математические и компьютерные методы в фундаментальных и  
прикладных исследованиях ФГБОУ ВО «ЧелГУ».

Версия документа - 1

стр. 21 из 33

Первый экземпляр \_\_\_\_\_

КОПИЯ № \_\_\_\_\_

3. Методы решения уравнений, неразрешенных относительно производной: разрешение относительно производной, метод введения параметра. Уравнения Клеро.
4. Уравнения, допускающие понижение порядка. Промежуточные интегралы. Уравнения, которые не содержат явно искомую функцию или независимую переменную.
5. Понижение порядка в однородных уравнениях. Приведение к полной производной.
6. Непродолжаемые решения. Предложение о существовании непродолжаемого решения.
7. Предложение о выходе непродолжаемого решения за границу ограниченного замкнутого множества, следствие для автономной системы. Пример.
8. Непрерывная зависимость решения от начальных условий и правой части уравнения. Теорема о непрерывной зависимости решения от правой части уравнения. Следствие о непрерывной зависимости решений от начальных условий.
9. Теорема о непрерывной зависимости решения от параметра.
10. Дифференцируемость решения по параметру. Теорема о дифференцируемости решения по параметру, система уравнений в вариациях. Следствие о дифференцируемости решения по начальным значениям, система уравнений в вариациях.
11. Теорема о дифференцируемости по параметру высоких порядков, следствие о разложении решения по степеням малого параметра.
12. Автономные системы дифференциальных уравнений и их фазовые пространства. Понятие автономной системы и нормальной автономной системы. Кинематическая интерпретация решения автономной системы. Совпадение двух траекторий.
13. Положения равновесия и замкнутые кривые. Три вида траекторий автономной системы.
14. Фазовые пространства. Фазовые траектории. Критерий положения равновесия. Связь геометрической и кинематической интерпретаций решений нормальной системы.
15. Фазовая плоскость линейной однородной системы с постоянными коэффициентами. Невырожденный случай.
16. Фазовая плоскость линейной однородной системы с постоянными коэффициентами. Вырожденный случай.



МИНОБРНАУКИ России  
Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Челябинский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ЧелГУ»)  
Факультет математический

Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине  
Дифференциальные уравнения,  
по направлению подготовки 02.03.01 Математика и компьютерные науки  
направленности (профилю) Математические и компьютерные методы в фундаментальных и  
прикладных исследованиях ФГБОУ ВО «ЧелГУ».

Версия документа - 1

стр. 22 из 33

Первый экземпляр \_\_\_\_\_

КОПИЯ № \_\_\_\_\_

17. Фазовая плоскость линейной однородной системы с постоянными коэффициентами. Существование нулевого собственного значения.
18. Первые интегралы. Критерий первого интеграла. Функциональная независимость первых интегралов в области, ее связь с линейной независимостью.
19. Теорема о существовании  $n$  независимых первых интегралов.
20. Теорема о получении решения с помощью первых интегралов. Теорема о выражении любого первого интеграла через систему  $n$  независимых первых интегралов.
21. Первые интегралы автономных систем, теорема о существовании  $n-1$  независимого первого интеграла, не содержащего  $t$ .
22. Устойчивость решения по Ляпунову, асимптотическая устойчивость по Ляпунову, связь этих понятий. Переход от исследования устойчивости произвольного решения к исследованию устойчивости нулевого решения.
23. Достаточное условие устойчивости для линейной однородной системы с постоянными коэффициентами.
24. Исследование устойчивости с помощью функций Ляпунова. Производная функции в силу системы уравнений. Теорема Ляпунова об устойчивости. Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости. Примеры.
25. Теорема Четаева о неустойчивости. Пример.
26. Теорема об устойчивости по первому приближению. Пример.
27. Предельные циклы.
28. Уравнения с частными производными первого порядка. Линейное однородное уравнение, теорема о связи решения с первым интегралом системы дифференциальных уравнений. Лемма о первых интегралах системы. Теорема об общем решении линейного уравнения.
29. Квазилинейное уравнение, понятие характеристики уравнения. Теорема о решении квазилинейного уравнения. Теорема о получении решения из первого интеграла. Теорема об общем решении квазилинейного уравнения (формулировка).
30. Задача Коши для квазилинейного уравнения, теорема о существовании единственного решения задачи Коши, геометрический смысл условия теоремы, пример.



МИНОБРНАУКИ России  
Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Челябинский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ЧелГУ»)  
Факультет математический

Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине  
Дифференциальные уравнения,  
по направлению подготовки 02.03.01 Математика и компьютерные науки  
направленности (профилю) Математические и компьютерные методы в фундаментальных и  
прикладных исследованиях ФГБОУ ВО «ЧелГУ».

Версия документа - 1

стр. 23 из 33

Первый экземпляр \_\_\_\_\_

КОПИЯ № \_\_\_\_\_

Билеты для проведения экзамена в 3 семестре.

#### БИЛЕТ 1.

1. Решить задачу Коши:  $y' = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}$ ,  $y(1) = 1$ .
2. Решить систему уравнений  $\dot{x} = Ax$ :  $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 6 & -6 & 5 \end{pmatrix}$ ,  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 2$ ,  $\lambda_3 = -1$ .
3. При каких  $a$  и  $b$  каждое решение уравнения  $y'' + ay' + by = 0$ , кроме  $y(x) \equiv 0$ , возрастает по абсолютной величине, начиная с некоторого  $x$ ?
4. Определение дифференциального уравнения и решения дифференциального уравнения.
5. Нормальная система линейных уравнений с переменными коэффициентами. Фундаментальная система решений. Её существование, выражение решения с помощью фундаментальной системы решений.

#### БИЛЕТ 2.

1. Решить уравнение:  $e^x \sin^3 y + (1 + e^{2x}) \cos y \cdot y' = 0$
2. Решить уравнение:  $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x$ .
3. Найти общее решение уравнения, используя формулу Лиувилля:  $t^2 \ddot{x} - 3t \dot{x} + 4x = 0$ .
4. Геометрическое истолкование дифференциального уравнения (векторное поле) и его решения (интегральная кривая).
5. Нормальная линейная однородная система с постоянными коэффициентами. Случай простых корней характеристического уравнения.

#### БИЛЕТ 3.

1. Решить задачу Коши:  $y \cos x dx + \sin x dy = \cos 2x dx$ ,  $y(\pi/2) = 1$ .
2. Решить систему уравнений:  $\begin{cases} \dot{x} = x + 8y - 8e^t \\ \dot{y} = y + 2x - 2e^t \end{cases}$ .
3. Составить линейное однородное дифференциальное уравнение (возможно меньшего порядка), имеющее данные частные решения:  $3x^2 + 6x + 23$ ,  $9x^2 - 3$ ,  $3x + 12$ .
4. Уравнения с разделяющимися переменными и однородные уравнения первого порядка.
5. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для одного уравнения (Доказательство единственности).



МИНОБРНАУКИ России  
Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Челябинский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ЧелГУ»)  
Факультет математический

Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине  
Дифференциальные уравнения,  
по направлению подготовки 02.03.01 Математика и компьютерные науки  
направленности (профилю) Математические и компьютерные методы в фундаментальных и  
прикладных исследованиях ФГБОУ ВО «ЧелГУ».

Версия документа - 1

стр. 24 из 33

Первый экземпляр \_\_\_\_\_

КОПИЯ № \_\_\_\_\_

#### БИЛЕТ 4.

1. Решить задачу Коши:  $y' + \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x} = 0$ ,  $y(1) = 1$ .
2. Решить уравнение:  $y'' - 2y' = \sin x$ .
3. Найти общее решение уравнения, используя формулу Лиувилля:  $(2t + 1)\ddot{x} + 4t\dot{x} - 4x = 0$ .
4. Задача обратная решению дифференциального уравнения.
5. Нормальная система линейных уравнений с переменными коэффициентами. Детерминант Вронского. Соответствие между произвольной матрицей с ненулевым определителем и фундаментальной матрицей линейной системы.

#### БИЛЕТ 5.

1. Решить задачу Коши:  $x^2y' = 2xy - 3$ ,  $y(-1) = 1$ .
2. Решить систему уравнений  $\dot{x} = Ax$ :  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_{2,3} = 1$ .
3. Записать значения параметров  $a$  и  $b$ , чтобы  $y_1 = \cos 3x$  и  $y_2 = e^x$  являлись решениями линейного уравнения  $y''' - by'' + ay' - aby = 0$  ( $a = \text{const}$ ,  $b = \text{const}$ ).
4. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами. Определение оператора  $L(p)$ , его свойства. Доказательство формулы:  $L(p)e^{\lambda t} = L(\lambda)e^{\lambda t}$ .
5. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для одного уравнения (Доказательство существования).

#### БИЛЕТ 6.

1. Решить задачу Коши:  $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$ ,  $y(1) = 0$ .
2. Решить уравнение:  $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{\sqrt{4 - x^2}}$ .
3. Оценить сверху и снизу расстояние между двумя соседними нулями любого (не тождественно равного нулю) решения данного уравнения на заданном отрезке:  $(e^x + 7)y'' + e^{2x}y = 0$ ,  $x \in [0, 5]$ .
4. Комплексная функция. Нормальная система дифференциальных уравнений. Расщепление комплексной системы на систему действительных уравнений.
5. Нормальная система линейных уравнений с переменными коэффициентами. Правило дифференцирования детерминанта. Формула Лиувилля для нормальной системы.



МИНОБРНАУКИ России  
Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Челябинский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ЧелГУ»)  
Факультет математический

Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине  
Дифференциальные уравнения,  
по направлению подготовки 02.03.01 Математика и компьютерные науки  
направленности (профилю) Математические и компьютерные методы в фундаментальных и  
прикладных исследованиях ФГБОУ ВО «ЧелГУ».

Версия документа - 1

стр. 25 из 33

Первый экземпляр \_\_\_\_\_

КОПИЯ № \_\_\_\_\_

#### БИЛЕТ 7.

1. Решить уравнение:  $x^2 \cos^2 x (y - 2 \sin y + 3) dy - (x^2 + \cos^2 x) dx = 0$ .
2. Решить систему уравнений: 
$$\begin{cases} \dot{x} = x - y + 1 \\ \dot{y} = y - 4x. \end{cases}$$
3. При каких  $a$  и  $b$  все решения уравнения  $y'' + ay' + by = 0$  ограничены на всей числовой прямой  $-\infty < x < +\infty$ ?
4. Уравнения в полных дифференциалах.
5. Теорема Штурма и ее следствие.

#### БИЛЕТ 8.

1. Решить уравнение  $y' - (x + y) \ln(x + y + 5) = 5 \ln(x + y + 5) - 1$ , при условии  $y(0) = e - 5$ .
2. Найти  $e^{tA}$  при:  $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
3. Даны два различных решения  $y_1$  и  $y_2$  линейного неоднородного уравнения первого порядка. Выразить через них общее решение этого уравнения.
4. Нормальная неоднородная система линейных уравнений с переменными коэффициентами. Вид решения. Метод вариации постоянных для решения линейной системы.
5. Линейные уравнения второго порядка. Приведение к самосопряженному виду, к виду без первой производной (с помощью замены независимого переменного и с помощью замены неизвестной функции).

#### БИЛЕТ 9.

1. Решить уравнение:  $(x^2 y^3 + y) dx + (x^3 y^2 + x) dy = 0$ .
2. Решить систему уравнений  $\dot{x} = Ax$ :  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$ ,  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = 1$ ,  $\lambda_3 = 2$ .
3. При каких  $a$  и  $b$  каждое решение уравнения  $y'' + ay' + by = 0$  обращается в нуль на бесконечном множестве точек?
4. Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами. Вид решения. Определение квазимногочлена. Теорема о виде частного решения.
5. Показательная функция матрицы. Ряд от матрицы.



МИНОБРНАУКИ России  
Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Челябинский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ЧелГУ»)  
Факультет математический

Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине  
Дифференциальные уравнения,  
по направлению подготовки 02.03.01 Математика и компьютерные науки  
направленности (профилю) Математические и компьютерные методы в фундаментальных и  
прикладных исследованиях ФГБОУ ВО «ЧелГУ».

Версия документа - 1

стр. 26 из 33

Первый экземпляр \_\_\_\_\_

КОПИЯ № \_\_\_\_\_

Билеты для проведения экзамена в 4 семестре.

#### БИЛЕТ 1.

1. Для задачи Коши  $\dot{x} = xt^6$ ,  $x(0) = 1$  построить последовательные приближения  $x_0(t)$ ,  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ .
2. Для уравнения  $\dot{x} = \operatorname{tg} x$  найти положения равновесия и исследовать их на устойчивость.
3. Найти производную от решения данного дифференциального уравнения по параметру  $\mu$  при  $\mu = 0$ :  $y' = y - x + \mu x e^{2y}$ ,  $y(1) = 2 - \mu$ .
4. Уравнения, неразрешенные относительно производной. Теорема существования и единственности, следствие.
5. Задача Коши для квазилинейного уравнения, теорема о существовании единственного решения задачи Коши (формулировка), геометрический смысл условия теоремы.

#### БИЛЕТ 2.

1. Для уравнения  $\dot{x} = x^{1/3}t^3$  найти первый интеграл  $V(t, x) = \operatorname{const}$ .
2. Для системы уравнений  $\begin{cases} \dot{x} = 5x + 3y \\ \dot{y} = -y - 3x \end{cases}$  нарисовать фазовый портрет и исследовать на устойчивость нулевое решение.
3. Найти производную от решения задачи  $y' = 2xy + \sin y$ ,  $y(1) = y_0$  по  $y_0$  при  $y_0 = 0$ .
4. Непродолжаемые решения. Предложение о существовании непродолжаемого решения.
5. Дискриминантная кривая, особое решение дифференциального уравнения, неразрешенного относительно производной.

#### БИЛЕТ 3.

1. Для задачи Коши  $x\dot{x} = t^3$ ,  $x(0) = 1$  указать какой-нибудь отрезок, на котором существует решение с данными начальными условиями.
2. Нарисовать фазовый портрет и исследовать на устойчивость положения равновесия системы  $\dot{x} = -2x + 4x^3$ .
3. Для системы уравнений  $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = 4y + 3x \end{cases}$  построить два независимых первых интеграла.
4. Теорема о непрерывной зависимости решения от правой части уравнения. Следствие о непрерывной зависимости решений от начальных условий.
5. Методы решения уравнений, неразрешенных относительно производной: разрешение относительно производной, метод введения параметра, Уравнения Клеро.



МИНОБРНАУКИ России  
Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Челябинский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ЧелГУ»)  
Факультет математический

Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине  
Дифференциальные уравнения,  
по направлению подготовки 02.03.01 Математика и компьютерные науки  
направленности (профилю) Математические и компьютерные методы в фундаментальных и  
прикладных исследованиях ФГБОУ ВО «ЧелГУ».

Версия документа - 1

стр. 27 из 33

Первый экземпляр \_\_\_\_\_

КОПИЯ № \_\_\_\_\_

#### БИЛЕТ 4.

1. Для задачи Коши  $\dot{x} = xt^3$ ,  $x(0) = 1$  построить три последовательных приближения  $x_0(t)$ ,  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ .
2. Для системы уравнений  $\begin{cases} \dot{x} = 2y - 3x \\ \dot{y} = y - 2x \end{cases}$  нарисовать фазовый портрет и исследовать на устойчивость нулевое решение.
3. Решить уравнение  $y^2 - (x + y + y/x)y' + y + y^2/x = 0$  и выделить интегральные кривые, проходящие через точку  $M_1(1, 0)$  или через точку  $M_2(0, 0)$ .
4. Дифференцируемость решения по начальным значениям, система уравнений в вариациях.
5. Уравнения, допускающие понижение порядка. Промежуточные интегралы.

#### БИЛЕТ 5.

1. Решить уравнение:  $yy'' + 1 = y'^2$ .
2. Нарисовать фазовый портрет системы  $\dot{x} = -3x^2 + 4x$ .
3. В зависимости от параметра  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  исследовать на устойчивость нулевое решение системы уравнений  $\begin{cases} \dot{x} = -y - \varepsilon x + x^3 \\ \dot{y} = y^3 + x. \end{cases}$
4. Непродолжаемые решения. Предложение о существовании непродолжаемого решения.
5. Фазовые пространства. Фазовые траектории. Критерий положения равновесия. Связь геометрической и кинематической интерпретаций решений нормальной системы.

#### БИЛЕТ 6.

1. Решить уравнение:  $x^2y'^2 = xyy' + 1$ .
2. Нарисовать фазовый портрет и исследовать на устойчивость положения равновесия системы  $\dot{x} = 3x^2 - 6x$ .
3. Для уравнения  $\dot{x} = x^{1/5}t^5$  найти первый интеграл  $V(t, x) = const$ .
4. Исследование устойчивости с помощью функций Ляпунова. Производная функции в силу системы уравнений. Теорема Ляпунова об устойчивости. Пример.
5. Уравнения, допускающие понижение порядка. Уравнения, не содержащие явно искомой функции или независимого переменного.



МИНОБРНАУКИ России  
Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Челябинский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ЧелГУ»)  
Факультет математический

Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине  
Дифференциальные уравнения,  
по направлению подготовки 02.03.01 Математика и компьютерные науки  
направленности (профилю) Математические и компьютерные методы в фундаментальных и  
прикладных исследованиях ФГБОУ ВО «ЧелГУ».

Версия документа - 1

стр. 28 из 33

Первый экземпляр \_\_\_\_\_

КОПИЯ № \_\_\_\_\_

#### БИЛЕТ 7.


1. Решить уравнение:  $(y')^2 - yy'' = (y/x)^2$ .
2. Для уравнения  $\dot{x} = \ln(1+x)$  найти положение равновесия и исследовать его на устойчивость.
3. Для уравнения  $\dot{x} = \mu\sqrt{\ln x} + xt$ ,  $x(0) = 1 - \frac{\mu}{\sqrt{2}}$  найти  $\left. \frac{\partial x(t, \mu)}{\partial \mu} \right|_{\mu=0}$ .
4. Предложение о выходе непродолжаемого решения за границу ограниченного замкнутого множества, следствие для автономной системы.
5. Понятие автономной системы и нормальной автономной системы. Кинематическая интерпретация решения автономной системы. Совпадение двух траекторий.

#### БИЛЕТ 8.

1. Для задачи Коши  $\dot{x} = x^2/t$ ,  $x(1) = 1$  построить три последовательных приближения  $x_0(t)$ ,  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ .
2. Для системы уравнений построить два независимых первых интеграла:  $\begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = y - 4x. \end{cases}$
3. При каких  $a$  особая точка системы  $\dot{x} = a(x + y)$ ,  $\dot{y} = a^2y$  является седлом?
4. Теорема о непрерывной зависимости решения от параметра.
5. Уравнения, допускающие понижение порядка. Понижение порядка в однородных уравнениях. Приведение к полной производной.

#### БИЛЕТ 9.

1. Решить уравнение:  $(y')^2 + 2yy'' = 0$ .
2. Для уравнения  $\dot{x} = \cos x$  найти положение равновесия и исследовать его на устойчивость.
3. При каких  $a, b, c, d$  для каждого решения системы  $\dot{x} = ax + by$ ,  $\dot{y} = cx + dy$  полярный угол точки  $(x(t), y(t))$  возрастает при увеличении  $t$ ?
4. Теорема о дифференцируемости по параметру высоких порядков, следствие о разложении решения по степеням малого параметра.
5. Дискриминантная кривая, особое решение дифференциального уравнения, неразрешенного относительно производной.

	МИНОБРНАУКИ России Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Челябинский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ЧелГУ») Факультет математический		
Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине Дифференциальные уравнения, по направлению подготовки 02.03.01 Математика и компьютерные науки направленности (профилю) Математические и компьютерные методы в фундаментальных и прикладных исследованиях ФГБОУ ВО «ЧелГУ».			
Версия документа - 1	стр. 29 из 33	Первый экземпляр _____	КОПИЯ № _____

#### **4. Порядок проведения и критерии оценивания промежуточной аттестации**

##### **4.1. Порядок проведения промежуточной аттестации**

Оценка за дисциплину формируется на основе полученных оценок за контрольно-рейтинговые мероприятия текущего контроля. Если студент не согласен с оценкой, полученной по результатам текущего контроля, студент проходит мероприятие промежуточной аттестации в виде выполнения письменной работы, включающей два теоретических вопроса и три задачи. На выполнение работы отводится 90 минут. Максимальное возможное количество баллов за работу составляет 25 баллов.

Студент оформляет работу на отдельном листе и сдает преподавателю на проверку. В этом случае оценка за дисциплину рассчитывается на основе полученных оценок за контрольно-рейтинговые мероприятия текущего контроля и промежуточной аттестации. Фиксация результатов учебной деятельности по дисциплине проводится в день экзамена при личном присутствии студента.

##### **4.2. Критерии оценивания промежуточной аттестации по видам оценочных средств**

*Критерии оценивания контрольных работ:*

Каждая задача оценивается из максимума в 5 баллов:

5 баллов: решение полное и без вычислительных ошибок;

4 балла: решение записано не достаточно полно либо имеются незначительные вычислительные ошибки;

3 балла: в решении присутствуют серьезные недочеты либо решение изложено с пробелами в рассуждениях и вычислительными ошибками;

2 балла: приведены верные мысли, но решение изложено в общих чертах, не до конца, либо с вычислительными ошибками, повлекшими неправильный ход решения;

1 балл: приведены верные идеи на начальном этапе решения;

0 баллов; за полное отсутствие решения.

Если полученная сумма превышает 25 баллов, то превышение засчитывается, как бонусный балл.

*Критерии оценивания проверки домашних заданий по всем разделам:*

15 баллов: решены без ошибок 91-100% домашних заданий;

14 баллов: решены без ошибок 85-90% домашних заданий;

13 баллов: решены без ошибок 79-84% домашних заданий;

12 баллов: решены без ошибок 72-78% домашних заданий;

11 баллов: решены без ошибок 66-71% домашних заданий;



МИНОБРНАУКИ России  
Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Челябинский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ЧелГУ»)  
Факультет математический

Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине  
Дифференциальные уравнения,  
по направлению подготовки 02.03.01 Математика и компьютерные науки  
направленности (профилю) Математические и компьютерные методы в фундаментальных и  
прикладных исследованиях ФГБОУ ВО «ЧелГУ».

Версия документа - 1

стр. 30 из 33

Первый экземпляр \_\_\_\_\_

КОПИЯ № \_\_\_\_\_

10 баллов: решены без ошибок 61-65% домашних заданий;  
9 баллов: решены без ошибок 56-60% домашних заданий;  
8 баллов: решены без ошибок 51-55% домашних заданий;  
7 баллов: решены без ошибок 43-50% домашних заданий;  
6 баллов: решены без ошибок 36-42% домашних заданий;  
5 баллов: решены без ошибок 30-35% домашних заданий;  
4 балла: решены без ошибок 26-31% домашних заданий;  
3 балла: решены без ошибок 21-25% домашних заданий;  
2 балла: решены без ошибок 11-20% домашних заданий;  
1 балл: решены без ошибок 5-10% домашних заданий;  
0 баллов: решены без ошибок менее 5% домашних заданий либо решение задач отсутствует.

*Критерии оценивания для проверки конспектов лекций:*

Проверка конспектов лекций производится в конце каждого семестра, оцениваются:

наличие в конспекте студента всех пройденных тем лекций - 5 баллов  
полнота конспекта - 4 балла  
аккуратность оформления - 1 балл

*Критерии оценивания для теста:*

Студент отвечает на тест, состоящий из 10 вопросов, правильный ответ на каждый вопрос оценивается в 1 балл. Время на прохождение тестирования - 30 минут. Студенту дается одна попытка для прохождения теста в LMS Moodle.

*Критерии оценивания для активной познавательной деятельности на практических занятиях:*

На каждом практическом занятии студент может получить 2 балла:  
посещаемость - 1 балл;  
работа у доски - 1 балл;


В противном случае баллы не начисляются. В конце семестра баллы за посещаемость переводятся пропорционально из максимума в 10 баллов, баллы за работу у доски переводятся пропорционально из максимума в 15 баллов.

*Критерии оценивания экзамена:*

Экзаменационный билет содержит 2 теоретических вопроса и 3 задачи. Экзаменационная работа оценивается в 25 баллов, при этом каждое задание оценивается в 5 баллов.

*Критерии оценивания теоретического вопроса:*

5 баллов: Студент отлично знает материал, приводит точные и полные

	МИНОБРНАУКИ России Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Челябинский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ЧелГУ») Факультет математический		
	Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине Дифференциальные уравнения, по направлению подготовки 02.03.01 Математика и компьютерные науки направленности (профилю) Математические и компьютерные методы в фундаментальных и прикладных исследованиях ФГБОУ ВО «ЧелГУ».		
Версия документа - 1	стр. 31 из 33	Первый экземпляр _____	КОПИЯ № _____

доказательства. Студент практически не допускает ошибок.

4 балла: Студент хорошо знает материал. Однако, допускает незначительные ошибки и неточности при доказательстве теорем.

3 балла: Студент знаком с материалом, знает определения и формулировки теорем. Студент допускает грубые фактические ошибки, при доказательстве теорем, либо не доводит доказательство до конца.

2 балла: Студент излагает материал с трудом, с грубыми фактическими ошибками.

1 балл: Студент не знает основных положений вопроса, не ориентируется в основных понятиях.

0 баллов: Студент отказывается от ответов на вопрос.

Критерии оценивания решения задачи:

5 баллов: Задача решена верно.

4 балла: Задача решена с незначительными ошибками.

3 балла: Задание выполнено не менее, чем на 60 процентов.

2 балла: Ход решения верный, но решение содержит одну грубую ошибку.

1 балл: Задание начато, но не выполнено, допущены грубые ошибки.

0 баллов: Студент отказывается от решения задачи.

#### **4.3. Результаты промежуточной аттестации и уровни сформированности компетенций**

Семестр 3(Указано максимальное количество баллов)

Проверка конспекта лекций: 10

Проверка домашних заданий по всем разделам: 15

Активная познавательная деятельность на практических занятиях: 25

Контрольная работа №1 (Уравнения первого порядка, разрешенные относительно производной): 25

Контрольная работа №2 (Линейные уравнения и системы с постоянными коэффициентами): 25

Тест за 3 семестр: 10

Итого 110

Экзамен 25


Семестр 4(Указано максимальное количество баллов)

Проверка конспекта лекций: 10

Проверка домашних заданий по всем разделам: 15

Активная познавательная деятельность на практических занятиях: 25

Контрольная работа №3 (Теоремы существования, уравнения неразрешенные

		МИНОБРНАУКИ России Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Челябинский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ЧелГУ») Факультет математический	
Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине Дифференциальные уравнения, по направлению подготовки 02.03.01 Математика и компьютерные науки направленности (профилю) Математические и компьютерные методы в фундаментальных и прикладных исследованиях ФГБОУ ВО «ЧелГУ».			
Версия документа - 1	стр. 32 из 33	Первый экземпляр _____	КОПИЯ № _____

относительно производной и уравнения, допускающие понижение порядка):

25

Контрольная работа №4 (Дифференцируемость по параметру, фазовые портреты, первые интегралы, устойчивость): 25

Тест за 4 семестр: 10

Итог 110

Экзамен 25

Итоговая оценка выставляется, исходя из набранной суммы баллов:

0-49 баллов – «неудовлетворительно»

50-69 баллов – «удовлетворительно»

70-90 баллов – «хорошо»

91 и более – «отлично».

Особенности проведения процедуры оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья обозначены в рабочей программе дисциплины (модуля).

Уровни сформированности компетенций определяется следующим образом:

1. Высокий уровень сформированности компетенций соответствует оценке «отлично»:

- предполагает формирование компетенций на высоком уровне, готовность к самостоятельной профессиональной деятельности: формируются навыки самостоятельного доказательства утверждений и полного воспроизведения определений, понятий и доказательств известных утверждений и теорем;
- студент способен решить любую задачу из пройденного материала и объяснить своё решение.

2. Средний уровень соответствует оценке «хорошо»:

- предполагает формирование компетенций на среднем уровне: формируются навыки воспроизведения определений, понятий и доказательств известных утверждений и теорем;
- студент способен решить задачи из пройденного материала и объяснить своё решение.



МИНОБРНАУКИ России  
Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Челябинский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ЧелГУ»)  
Факультет математический

Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине  
Дифференциальные уравнения,  
по направлению подготовки 02.03.01 Математика и компьютерные науки  
направленности (профилю) Математические и компьютерные методы в фундаментальных и  
прикладных исследованиях ФГБОУ ВО «ЧелГУ».

Версия документа - 1

стр. 33 из 33

Первый экземпляр \_\_\_\_\_

КОПИЯ № \_\_\_\_\_

3. Базовый уровень соответствует оценке «удовлетворительно»:
- предполагает формирование компетенций на начальном уровне: формируются навыки воспроизведения определений, понятий и формулировок известных утверждений и теорем;
  - студент способен отвечать на вопросы в форме теста. Количество правильных ответов – не менее 50%.
4. Низкий уровень характеризуется несформированностью компетенций на начальном уровне по завершении изучения дисциплины, соответствует оценке «неудовлетворительно».

