

Документ подписан простой электронной подписью  
Информация о владельце:  
ФИО: Таскаев Сергей Валерьевич  
Должность: Ректор  
Дата подписания: 15.09.2025 11:13:06  
Уникальный программный ключ  
04c19ed8bfb98f3b6cb77a486b9a8788b8427514



МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Челябинский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ЧелГУ»)

Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине «Алгебра» по направлению  
подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика» направленности «Информационно-  
управленческие технологии» ФГБОУ ВО «ЧелГУ»

стр. 1

Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)  
**«Алгебра»**

Направление подготовки (специальность)  
**01.03.02 «Прикладная математика и информатика»**

Направленность (профиль)  
**«Прикладная математика и искусственный интеллект»**

Присваиваемая квалификация  
**Бакалавр**

Форма обучения  
**Очная**

Челябинск, 2025 г.



## Содержание

1. Паспорт фонда оценочных средств .....	3
2. Перечень формируемых компетенций .....	4
3. Содержание оценочных средств по дисциплине .....	6
3.1. Виды оценочных средств .....	6
3.2. Содержание оценочных средств .....	8
4. Порядок проведения и критерии оценивания промежуточной аттестации .....	17
4.1. Порядок проведения промежуточной аттестации.....	17
4.2. Критерии оценивания промежуточной аттестации по видам оценочных средств .....	17
4.3. Результаты промежуточной аттестации и уровни сформированности компетенций .....	18



## 1. Паспорт фонда оценочных средств

Направление подготовки: 01.03.02 Прикладная математика и информатика.

Направленность: Прикладная математика и искусственный интеллект.

Дисциплина: Алгебра.

Семестры: 1, 2.

Форма промежуточной аттестации: зачёт с оценкой в 1 семестре, экзамен во 2 семестре.

Для оценивания результатов обучения используется балльно-рейтинговая система.



## 2. Перечень формируемых компетенций

Изучение дисциплины «Алгебра» направлено на формирование компетенций, приведённых в 1.

Таблица 1. Результаты обучения по дисциплине.

Коды компетенции согласно ФГОС (ОПОП ВО)	Содержание компетенций согласно ФГОС (ОПОП ВО)	Индикаторы достижения компетенции согласно ОПОП	Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине
ОПК-1	Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	Применяет фундаментальные знания, полученные в области математических наук в своей профессиональной деятельности	<p>Знать:</p> <ul style="list-style-type: none"><li>основные понятия математической логики и информатики; теоретические и практические основы алгебры; основные геометрические объекты, их свойства, геометрические методы анализа и решения прикладных задач; базовые понятия математического анализа, применяемые в математических науках, прикладной математике и информатике; различные типы дифференциальных уравнений и способы их решения; основные положения теории функции комплексной переменной; теоретические и практические положения функционального анализа; базовые определения и законы аналитической механики и теоретической физики; классические понятия вариационного исчисления и методы теории оптимального управления.</li></ul> <p>Уметь:</p> <ul style="list-style-type: none"><li>применять язык математической логики при анализе и решении задач профессиональной деятельности; использовать различные алгебраические объекты и структуры в задачах профессиональной деятельности; применять геометрические методы для анализа и решения прикладных задач; использовать математический</li></ul>



Коды компетенции согласно ФГОС (ОПОП ВО)	Содержание компетенций согласно ФГОС (ОПОП ВО)	Индикаторы достижения компетенции согласно ОПОП	Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине
			<p>аппарат в решении профессиональных задач; применять классические методы математического анализа в решении задач прикладной математики и информатики; создавать алгоритмы решения прикладных задач над полем комплексных чисел; использовать измерительную аппаратуру для определения значений физических характеристик объектов; применять вариационный подход и методы оптимального управления к решению практических задач.</p> <p>Владеть:</p> <ul style="list-style-type: none"><li>• созданием алгоритмов решения прикладных задач; использованием разных систем координат и их баз с целью оптимизации решения как задач фундаментальной математики, так и прикладных задач; программной реализацией алгоритмов задач профессиональной деятельности; решением дифференциальных уравнений в математических моделях различных прикладных задач; проведением физических экспериментов в лабораторных условиях.</li></ul>



### 3. Содержание оценочных средств по дисциплине

#### 3.1. Виды оценочных средств

Таблица 2. Виды оценочных средств.

№ п/п	Код компетенции / планируемые результаты обучения	Контролируемые темы / разделы	Наименование оценочного средства для текущего контроля	Наименование оценочного средства на промежуточной аттестации
1	ОПК-1 Знать: <ul style="list-style-type: none"><li>основные понятия математической логики и информатики; теоретические и практические основы алгебры; основные геометрические объекты, их свойства, геометрические методы анализа и решения прикладных задач; базовые понятия математического анализа, применяемые в математических науках, прикладной математике и информатике; различные типы дифференциальных уравнений и способы их решения; основные положения теории функции комплексной переменной; теоретические и практические положения функционального анализа; базовые определения и законы аналитической механики и теоретической физики; классические понятия вариационного исчисления и методы теории оптимального управления.</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>Группы, кольца, поля</li><li>Комплексные числа</li><li>Системы линейных уравнений. Матрицы и определители</li><li>Многочлены</li></ul>	Контрольная работа	Вопросы для экзамена



	<p>Уметь:</p> <ul style="list-style-type: none"><li>• применять язык математической логики при анализе и решении задач профессиональной деятельности; использовать различные алгебраические объекты и структуры в задачах профессиональной деятельности; применять геометрические методы для анализа и решения прикладных задач; использовать математический аппарат в решении профессиональных задач; применять классические методы математического анализа в решении задач прикладной математики и информатики; создавать алгоритмы решения прикладных задач над полем комплексных чисел; использовать измерительную аппаратуру для определения значений физических характеристик объектов; применять вариационный подход и методы оптимального управления к решению практических задач.</li></ul> <p>Владеть:</p> <ul style="list-style-type: none"><li>• созданием алгоритмов решения прикладных задач; использованием разных систем координат и их баз с целью оптимизации решения как задач фундаментальной математики, так и прикладных задач; программной реализацией</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>– Векторные пространства</li><li>– Линейные операторы</li><li>– Пространство со скалярным произведением</li><li>– Квадратичные формы</li></ul>	Контрольная работа	Вопросы для экзамена
--	---	--	--------------------	----------------------



	алгоритмов задач профессиональной деятельности; решением дифференциальных уравнений в математических моделях различных прикладных задач; проведения физических экспериментов в лабораторных условиях.			
--	---	--	--	--

Типовые задания, критерии и показатели оценивания в рамках текущего контроля представлены в рабочей программе дисциплины (модуля). Полные комплекты оценочных средств и контрольно-измерительных материалов хранятся на кафедре.

### 3.2. Содержание оценочных средств

Промежуточная аттестация проводится в виде зачёта и экзамена в 1 семестре, в виде экзамена во 2 семестре.

Вопросы к экзамену:

1. Определение векторного пространства. Простейшие свойства векторных пространств.
2. Определение подпространства, основные свойства подпространства.
3. Определение линейной зависимости и линейной независимости векторов, свойства линейно зависимых и  
  1. независимых векторов.
4. Критерий линейной зависимости.
5. Теорема об очистке линейно полного множества, определение базиса.
6. Теорема о выборе базиса.
7. Теорема о дополнении до базиса.
8. Критерий базиса.
9. Определение координат вектора в базисе, свойства координат вектора.
10. Размерность пространства, теорема о размерности, следствия из нее.
11. Матрица перехода, свойства матрицы перехода.
12. Теорема о монотонности размерности подпространств.
13. Теорема о пересечении подпространств.
14. Линейная оболочка, теорема о линейной оболочке.
15. Сумма подпространств, теорема о сумме подпространств.
16. Теорема о размерности суммы подпространств.
17. Прямая сумма подпространств, теорема о прямой сумме подпространств.
18. Дополнение к подпространству, теорема о существовании дополнения к подпространству.
19. Прямая сумма пространств, теорема о прямой сумме пространств.
20. Три понятия ранга матрицы, доказать, что строчный ранг матрицы не изменяется при элементарных  
  2. преобразованиях строк.
21. Доказать, что столбцовый ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях столбцов.
22. Доказать, что строчный ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях



- столбцов.
23. Доказать, что столбцовый ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях строк.
  24. Доказать, что столбцовый ранг матрицы равен строчному рангу матрицы.
  25. Доказать, что при элементарных преобразованиях строк минорный ранг матрицы не меняется.
  26. Теорема Кронекера-Капелли.
  27. Теорема об описании структуры решений системы линейных уравнений. \_
  28. Теорема о размерности пространства решений системы линейных однородных уравнений.
  29. Определение линейного оператора, теорема о свойствах линейных операторов.
  30. Операции над линейными операторами, теорема о свойствах операций над линейными операторами.
  31. Теорема о задании линейного оператора на базисе и матрицей.
  32. Теорема о свойствах матриц линейных операторов.
  33. Линейные функционалы.
  34. Линейные преобразования пространства .
  35. Матрицы линейных преобразований в разных базисах.
  36. Определение определителя матрицы линейного преобразования, доказать, что определитель линейного преобразования определен корректно.
  37. Инвариантные подпространства, свойства инвариантных подпространств.
  38. Характеристический многочлен линейного преобразования, теорема о характеристическом многочлене.
  39. Теорема Гамильтона-Кэли.
  40. Собственные векторы и собственные значения, теорема о нахождении собственных значений.
  41. Теорема об одномерных инвариантных подпространствах.
  42. Доказать, что собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям линейно независимы.
  43. Пространства со скалярным произведением, простейшие свойства таких пространств.
  44. Теорема Коши-Буняковского-Шварца.
  45. Свойства нормы вектора.
  46. Ортогональность векторов и подпространств, теорема об ортогональных множествах векторов, процесс ортогонализации Грама-Шмидта.
  47. Ортогональное дополнение, теорема об ортогональном дополнении.
  48. Теорема о связи между ортонормированными базисами в пространстве со скалярным произведением.
  49. Линейные функционалы, теорема о линейном функционале на пространстве со скалярным произведением.
  50. Сопряженное преобразование, теорема существования сопряженного преобразования.
  51. Теорема о свойствах сопряженных преобразований.
  52. Теорема о матрице сопряженного преобразования.
  53. Нормальные преобразования, теорема о собственных векторах и собственных значениях нормального преобразования.
  54. Критерий сохранения скалярного произведения линейным преобразованием.
  55. Два понятия квадратичной формы (как функции и как многочлена), связь между ними.
  56. Теорема о матрице квадратичной формы.
  57. Теорема Лагранжа о приведении квадратичной формы к каноническому виду.



58. Теорема о приведении квадратичной формы к диагональному виду с помощью перехода к ортонормированному базису.
59. Закон инерции квадратичных форм.
60. Линейная классификация квадратичных форм.
61. Критерий положительной определенности квадратичных форм.
62. Критерий Сильвестра.

Вопросы к микросессии 1:

1. Бинарная операция. Два свойства бинарной операции. Определение группы. Примеры.
2. Определение поля, кольца. Примеры.
3. Понятие комплексного числа. Операции над комплексными числами в алгебраической форме. Геометрическое представление комплексных чисел.
4. Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме. (Доказать.)
5. Формула возведения в степень комплексного числа. (Доказать.)
6. Извлечение корней из комплексных чисел. (Доказать.) Геометрическая интерпретация.
7. Доказать, что комплексные числа образуют поле.
8. Модуль, сопряжение комплексного числа и их свойства. (Доказать.)
9. Доказать, что все комплексные корни из 1 степени  $n$  образуют группу относительно операции умножения.
10. Определение матрицы. Операции с матрицами. Свойства операций с матрицами.
11. Определитель матрицы 2, 3-го порядка. Перестановки на множестве из  $n$  элементов. Четность перестановки. Доказать, что транспозиция меняет четность перестановки. Понятие определителя  $n$ -го порядка.
12. Алгебраическое дополнение и минор элемента матрицы. Формула разложения определителя матрицы по строке.
13. Свойства определителя. (Доказать.)
14. Определитель Вандермонда (доказать.)
15. Система линейных уравнений, ее матричная запись. Совместность, определенность системы линейных уравнений.
16. Правило Крамера решения систем линейных уравнений. (Доказать.)
17. Элементарные преобразования строк матрицы. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений.
18. Определение обратной матрицы. Способы ее нахождения, свойства. (Доказать.)
19. Определение ранга матрицы. Теорема о ранге.
20. Теорема Кронекера-Капелли, ее следствие.

Вопросы к микросессии 2:

1. Построение кольца многочленов от одного неизвестного.
2. Кольца без делителей нуля. Примеры.
3. Теорема о делении с остатком в кольце многочленов и в кольце целых чисел.
4. Свойства делимости многочленов и целых чисел.
5. Наибольший общий делитель для многочленов, его свойства, алгоритм Евклида для многочленов.
6. Теорема о линейном представлении наибольшего общего делителя.
7. Взаимно простые многочлены и их свойства.
8. Неприводимость многочленов, основная теорема арифметики многочленов.
9. Понятие производной многочлена. Теорема о кратных множителях многочлена и его



- производной. Отделение кратных множителей многочлена с помощью алгоритма Евклида.
10. Корни многочленов. Теорема Безу. Схема Горнера.
  11. Теорема о числе корней и степени многочлена.
  12. Функциональное и алгебраическое равенство многочленов. Теорема об однозначности задания многочлена своими значениями.
  13. Интерполяционные формулы Лагранжа и Ньютона.
  14. Решение уравнений третьей и четвертой степени.
  15. Построение кольца многочленов от нескольких неизвестных.
  16. Симметрические многочлены, формулы Виета.
  17. Основная теорема о симметрических многочленах.
  18. Теорема о существовании корня неприводимого многочлена в некотором расширении поля и следствие из нее.
  19. Основная теорема алгебры многочленов.
  20. Рациональные корни многочленов над полем рациональных чисел. \_

Вопросы к микросессии 3:

1. Определение векторного пространства. Теорема о простейших свойствах векторного пространства (доказать).
2. Определение подпространства. Теорема о свойствах подпространства (доказать).
3. Определение линейной зависимости и линейной независимости векторов. Теорема о линейно зависимых независимых множествах (доказать).
4. Критерий линейной зависимости (доказать).
5. Теорема об очистке линейно полного множества (доказать).
6. Определение базы. Теорема о выборе базы (доказать).
7. Теорема о дополнении до базы (доказать).
8. Критерий базы (доказать). Определение координат вектора в базе.
9. Определение размерности пространства. Теорема о размерности пространства (доказать).
10. Определение матрицы перехода от одной базы к другой. Теорема о свойствах матрицы перехода (доказать).
11. Теорема о пересечении подпространств (доказать).
12. Теорема о строении линейной оболочки (доказать).
13. Теорема о сумме двух подпространств (доказать).
14. Теорема о размерности суммы двух подпространств (доказать).
15. Определение прямой суммы двух подпространств.
16. Теорема о прямой сумме двух подпространств (доказать).
17. Определение ранга матрицы.
18. Теорема о пространстве решений однородной системы линейных уравнений (доказать).
19. Теорема о размерности пространства решений однородной системы линейных уравнений (доказать).
20. Определение линейного оператора. Теорема о свойствах линейных операторов (доказать).
21. Операции над линейными операторами. Доказать, что линейные операторы образуют пространство.
22. Матрица линейного оператора. Теорема о задании линейного оператора на базе и матрицей.
23. Теорема о связи матриц линейного преобразования в разных базах (доказать).
24. Определение ядра и образа линейного преобразования. Доказать, что ядро линейного преобразования является подпространством. Доказать, что образ линейного преобразования является подпространством.
25. Характеристический многочлен линейного преобразования. Теорема Гамильтона-Кэли.



## 26. Собственные векторы и собственные значения линейного преобразования. Теорема о нахождении собственных значений.

Вопросы к микросессии 4:

1. Определение и примеры нормальной жордановой формы матрицы.
2. Определение корневого вектора, корневого подпространства. Теоремы о корневых подпространствах, о разложении на корневые подпространства, о нормальной жордановой форме матрицы.
3. Инвариантные подпространства. Теорема об одномерных инвариантных подпространствах.
4. Доказать, что собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям, линейно независимы.
5. Критерий диагонализуемости линейного преобразования.
6. Пространства со скалярным произведением. Теорема о простейших свойствах таких пространств.
7. Теорема Коши-Буняковского-Шварца.
8. Теорема о свойствах нормы вектора.
9. Ортогональность векторов и подпространств. Теорема об ортогональных множествах векторов, процесс ортогонализации.
10. Ортогональное дополнение. Теорема об ортогональном дополнении.
11. Теорема о связи между ортонормированными базисами в пространстве со скалярным произведением.
12. Линейные функционалы. Теорема о строении линейного функционала на пространстве со скалярным произведением.
13. Сопряженное преобразование. Теорема существования сопряженного преобразования.
14. Теорема о свойствах сопряженных преобразований.
15. Теорема о матрице сопряженного преобразования.
16. Нормальные преобразования. Теорема о собственных векторах и собственных значениях нормального преобразования.
17. Преобразование, сохраняющее скалярное произведение. Критерий сохранения скалярного произведения линейным преобразованием.
18. Определение самосопряженного преобразования. Доказательство теоремы о вещественности собственных значений самосопряженного преобразования.
19. Два понятия квадратичной формы (как функции и как многочлена), связь между ними.
20. Теорема о матрице квадратичной формы.
21. Закон инерции квадратичных форм.
22. Критерий положительной определенности квадратичных форм.

Пример контрольной работы №1:

1. Вычислите:  $\frac{2+3i}{1-i} + (2-i)(1+3i) + 11$ .
2. Вычислите:  $\left(\frac{1-i}{1+\sqrt{3}}\right)^{45}$ .
3. Вычислите, ответ запишите в алгебраической форме:  $\sqrt[4]{-4i}$ .
4. Решите уравнение  $z^2 - (3-3i)z + 4 - 12i = 0$ .
5. Изобразите на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющие условию:  $|z + i + 3| \geq 3$ .



Пример контрольной работы №2:

1. Для матриц  $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$  вычислите значения выражений: а)  $A \cdot B$ ; б)  $2C^2 - A^t \cdot B^t$ .
2. Определите число инверсий в перестановке:  $(1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7)$   
 $(4 \ 7 \ 2 \ 5 \ 1 \ 2 \ 6)$
3. Разлагая по второму столбцу, вычислите определитель:  $\begin{vmatrix} -1 & a & 2 \\ 3 & b & -1 \\ -1 & c & 1 \end{vmatrix}$
4. Приведением к треугольному виду вычислите определитель матрицы:  $\begin{vmatrix} -2 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$
5. Найдите любым способом обратную к матрице:  $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

Пример контрольной работы №3:

1. Найдите общее решение и одно частное решением системы. Сделать проверку:
$$\begin{cases} -x_1 + 5x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 14x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -2 \end{cases}$$
2. Решить матричное уравнение:
$$X \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$
3. Решить систему методом Крамера:
$$\begin{cases} -6x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 6 \\ -4x_1 + x_2 - 8x_3 = 3 \\ -x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$$
4. Найти решение системы. Сделать проверку:
$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 2x_3 - 5x_5 = 2 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 + 3x_4 + 4x_5 = -5 \\ -3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_5 = -3 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 5x_5 = 5 \end{cases}$$

Пример контрольной работы №4:

1. Даны многочлены:  $f(x) = x^5 - x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 9x + 9$ ,  $g(x) = x^4 - 3x^2 - 10x - 6$ . Найдите их НОД и его линейное разложение.
2. Разложите многочлен  $2x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x + 1$  по степеням  $x - 1$ .



3. Выразите многочлен в виде многочлена от элементарных симметрических, если  $F(x) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - x_1x_2x_3$ .
4. Представьте в виде суммы простейших над полем  $\mathbb{R}$  рациональную дробь:  $\frac{3x^2+4x+5}{(x+6)^2(x^2+3x+3)}$

Пример контрольной работы №5:

1. Вычислить:  $\left(\frac{2-2i}{\sqrt{3}-i}\right)^{120}$ .

2. Вычислить:  $\begin{vmatrix} 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \end{vmatrix}$ .

3. Найти значение выражения  $A^{-1} \cdot (B + C)$ , если:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ .
4. Решить систему, выполнить проверку:  
$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 + 6x_3 + 9x_4 = -6 \\ -x_1 - 2x_2 + 9x_3 + 6x_4 = -3 \\ -2x_1 + 2x_3 + 8x_4 = -6 \end{cases}$$
5. Найти НОД многочленов  $f(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$ ,  $g(x) = x^4 - x^3 - x + 1$  и его линейное разложение.
6. Найти все рациональные корни многочлена  $125x^4 - 126x + 1$ .

Пример контрольной работы №6:

1. Проверить, что векторы  $\{e_i\}$  образуют базис и найти координаты вектора  $x$  в этом базисе, если  $e_1 = (-1, 2, 1)$ ;  $e_2 = (-2, -1, -3)$ ;  $e_3 = (3, 0, -1)$ ;  $x = (8, -4, -4)$ .
2. Для системы векторов  $\{a_i\}$  выделить максимальную линейно независимую подсистему. Выразить оставшиеся векторы через вектор этой системы:  
 $a_1 = (4, -2, 3, 3)$ ;  $a_2 = (1, 3, 0, 3)$ ;  $a_3 = (-10, -2, -6, -12)$ ;  $a_4 = (8, -4, 6, 6)$ .
3. Даны два базиса:  $\{e_i\}$ ;  $\{f_i\}$ . Найти координаты вектора  $x$  в базисе  $\{f_i\}$ , если известно его разложение по базису  $\{e_i\}$ :  $x = -e_1 + e_2 + e_3$ .  $\{e_1 = (11, 5, -15)$ ;  $e_2 = (-2, -2, 0)$ ;  $e_3 = (7, 4, 3)\}$ ;  $\{f_1 = (-1, 2, 3)$ ;  $f_2 = (2, 2, 0)$ ;  $f_3 = (4, -1, -2)\}$ .
4. Проверить, образует ли указанное множество подпространство: последовательности вещественных чисел, имеющие предел  $a \in \mathbb{R}^n$ , в пространстве всех последовательностей вещественных чисел.

Пример контрольной работы №7:

1. Найти базис суммы и базис пересечения линейных оболочек  $Lin(a_1, a_2, a_3)$  и  $Lin(b_1, b_2, b_3)$ , где  
 $a_1 = (2, 1, 0, 1)$ ,  $a_2 = (3, -1, -2, -3)$ ,  $a_3 = (9, 2, -2, 0)$ ;  $b_1 = (3, -2, 0, 2)$ ,  $b_2 = (3, -1, -2, -3)$ ,  $b_3 = (-2, 3, -2, -7)$ .
2. Найти фундаментальную систему решений системы линейных уравнений:



$$\begin{cases} x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ -3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

3. Найти базис ядра и базис образа линейного оператора, заданного (в стандартных базисах) матрицей:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & -6 & 6 \\ -1 & -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

4. Найти хотя бы один прообраз вектора  $x = (-4, -9, -5)$  при линейном операторе, заданном матрицей (в стандартных базисах):

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 & 0 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Пример контрольной работы №8:

Линейное отображение  $\varphi$  задано в некотором базисе матрицей:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

1. Найти собственные значения и собственные векторы отображения  $\varphi$ ;
2. Выяснить, можно ли матрицу  $A$  привести к диагональному виду. В случае положительного ответа выписать ее диагональный вид;
3. Найти минимальный многочлен матрицы  $A$ ;
4. Найти жорданову форму матрицы  $A$ ;
5. Найти жорданов базис и матрицу отображения  $\varphi$  в этом базисе.
6. Сделать проверку.

Пример контрольной работы №9:

1. В евклидовом пространстве  $V$  дана линейная оболочка  $L = \langle (3,0,0,3), (3,-6,-9,3), (6,-7,9,0) \rangle$ 
  - а) С помощью процесса ортогонализации построить ортогональный базис подпространства  $L$ ,
  - б) Найти ортогональное дополнение к  $L$ .
2. Найти для вектора  $x = (1,1,1,1)$  и подпространства  $L$ , заданного системой

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 11x_3 - 13x_4 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + 18x_3 - 23x_4 = 0 \end{cases}$$

- а) проекцию вектора и его ортогональную составляющую;
  - б) расстояние от вектора до подпространства;
  - с) угол между вектором и подпространством.
3. Выяснить, является ли положительно определенной квадратичная форма  $f(x) = 4x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_2x_3$  и с помощью метода Лагранжа привести ее к каноническому виду. Выписать матрицы  $A, Q, T, T^{-1}$ . Сделать проверку.



Пример контрольной работы №10:

1. Найти собственные значения и собственные векторы линейного отображения, заданного матрицей:

$$\begin{pmatrix} -2 & -4 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Найти ортогональный базис линейной оболочки:  $L = \langle (2,1,3, -1), (7,4,3, -3), (5,7,7,8) \rangle$ .
3. Дополнить до ортогонального базиса пространства  $V$  ортогональный базис, найденный в пункте 2. Найти ортогональное дополнение к  $L$ .
4. Привести к каноническому виду квадратичную форму:  $f(x) = 4x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_2x_3$ . Выписать соответствующую матрицу линейного преобразования.
5. Проверить, является ли линейное преобразование  $\varphi$ , заданное в некотором ортонормированном базисе матрицей  $A_\varphi = \begin{pmatrix} 17 & -8 & 4 \\ -8 & 17 & -4 \\ 4 & -4 & 11 \end{pmatrix}$  нормальным, самосопряженным, ортогональным?



## 4. Порядок проведения и критерии оценивания промежуточной аттестации

### 4.1. Порядок проведения промежуточной аттестации

Оценка за дисциплину формируется на основе полученных оценок за контрольно-рейтинговые мероприятия текущего контроля. Студент может повысить свой рейтинг, пройдя контрольное мероприятие промежуточной аттестации. Студент выбирает случайный билет, содержащий 10 теоретических вопросов на знание определений и формулировок теорем, даётся 30 минут на их написание. Далее студент сдаёт написанные определения и получает приложение к билету в котором 7 задач, даётся 60 минут на их решение. Далее студент сдаёт решения задач и получает теоретический вопрос на доказательство из первой части билета, даётся 30 минут на доказательство. По истечении этого времени студент отвечает экзаменатору вопросы билета и объясняет, как решаются задачи. Фиксация результатов учебной деятельности по дисциплине проводится в день зачёта при личном присутствии студента.

Оценка за дисциплину формируется на основе полученных оценок за контрольно-рейтинговые мероприятия текущего контроля. Студент может повысить свой рейтинг, пройдя контрольное мероприятие промежуточной аттестации – ответ по билету. Студент выбирает случайный билет, содержащий 4 вопроса. Студенту предоставляется не более 60 минут на подготовку ответа. По истечении этого времени студент отвечает экзаменатору вопросы билета. Фиксация результатов учебной деятельности по дисциплине проводится в день экзамена при личном присутствии студента.

### 4.2. Критерии оценивания промежуточной аттестации по видам оценочных средств

Максимальное количество баллов, которое студент может набрать на зачете, составляет 40.

1-ая часть состоит из 10 теоретических вопросов (формулировки определений, теорем), максимальный балл, который может получить студент за каждый верно отвеченный вопрос равен 1 баллу,

Практическая часть содержит 7 задач, каждая оценивается в 3 балла. Максимальное число баллов за практическую часть 21 балл. Шкала оценивания задач:

- 3 балла – задача решена верно, ошибок нет;
- 2 балла - задача решена с одной вычислительной ошибкой;
- 1 балл - допущено две вычислительных ошибки;
- 0 баллов - в остальных случаях.

Третья часть (теоретическая) состоит из одного вопроса (теорема с доказательством). Максимальное количество баллов, которое студент может набрать на экзамене за 3 часть, составляет 9 баллов. Шкала оценивания ответа на теоретический вопрос:

- 9 баллов – вопрос раскрыт полностью, ошибок в ответе нет;
- 0 баллов - в остальных случаях.

Суммарный балл экзамена оценивается 32 баллами. Экзамен состоит из 4 вопросов. Форма проведения экзамена – письменная. Максимальная оценка за каждый вопрос составляет 8 баллов. При оценке каждого вопроса используется шкала оценки:

- 8 баллов – вопрос раскрыт полностью, ошибок в ответе нет;
- 7 баллов – вопрос раскрыт не полностью (не менее 90%), ошибок в ответе нет;
- 6 баллов – вопрос раскрыт не полностью (не менее 80%), ошибок в ответе нет;
- 5 баллов – вопрос раскрыт не полностью (не менее 80%), 1-2 негрубые ошибки;



- 4 балла – вопрос раскрыт не полностью (не менее 80%), присутствуют грубые ошибки (не более двух);
- 3 балла – вопрос раскрыт удовлетворительно, имеются существенные недостатки по полноте и содержанию ответа;
- 2 балла – ответ не является логически законченным и обоснованным, поставленный вопрос раскрыт неудовлетворительно с точки зрения полноты и глубины изложения материала;
- 1 балл – в ответе приводятся бессистемные сведения, относящиеся к поставленному вопросу, но не дающие ответа на него;
- 0 баллов – отсутствует ответ на вопрос или содержание ответа не совпадает с поставленным вопросом.

Оценивание ответа на зачёте/экзамене.

Продвинутый уровень освоения проверяемых компетенций	Базовый уровень освоения проверяемых компетенций	Пороговый уровень освоения проверяемых компетенций	Низкий уровень освоения проверяемых компетенций
«зачтено» 36 – 40 баллов	«зачтено» 28 – 35 баллов	«зачтено» 20 – 27 баллов	«не зачтено» 0 – 19 баллов
«отлично» 29 – 32 баллов	«хорошо» 23 – 28 баллов	«удовлетворительно» 16 – 22 баллов	«неудовлетворительно» 0 – 15 баллов
Обучающийся последовательно, грамотно и логически стройно излагает материал; владеет основными математическими методами и алгоритмами решения задач; умеет строить математические модели, увязывать теорию с практикой, показывает умение применять знания.	Обучающийся грамотно и по существу излагает материал; владеет основными математическими методами; не допускает существенных ошибок, но испытывает затруднения в выводах и доказательствах; умеет применять основные положения и формулы для решения задач.	Обучающийся имеет знания только основного материала, но не умеет делать выводов и доказательств; допускает ошибки, приводит недостаточно правильные формулировки; с трудом увязывает основные положения с практикой.	Обучающийся не знает основополагающих вопросов изучаемого курса или значительной части программного материала; допускает ошибки, обнаруживает неумение их исправлять; не может увязать теорию с практикой.

#### 4.3. Результаты промежуточной аттестации и уровни сформированности компетенций

Итоговая оценка выставляется по 40-балльной шкале, исходя из полученной суммы баллов:  
0 - 19 баллов – «не зачтено»,  
20 - 40 баллов – «зачтено».

Итоговая оценка выставляется по 32-балльной шкале, исходя из полученной суммы баллов:  
0 - 16 баллов – «неудовлетворительно»;



16 - 22 балла – «удовлетворительно»;

23 – 28 баллов – «хорошо»;

29 - 32 балла – «отлично».

Особенности проведения процедуры оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья обозначены в рабочей программе дисциплины (модуля).

Уровни сформированности компетенций определяется следующим образом:

1. Продвинутый уровень сформированности компетенций соответствует оценке «зачтено»/«отлично»:

Обучающийся владеет знаниями предмета в полном объеме учебной программы, достаточно глубоко осмысливает дисциплину; самостоятельно, в логической последовательности и исчерпывающе отвечает на все вопросы, подчеркивает при этом самое существенное, умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделять в нем главное: устанавливать причинно-следственные связи; четко формирует ответы.

2. Базовый уровень соответствует оценке «зачтено»/«хорошо»:

Обучающийся владеет знаниями дисциплины почти в полном объеме программы (имеются пробелы знаний только в некоторых, особенно сложных разделах); самостоятельно и отчасти при наводящих вопросах дает полноценные ответы на вопросы; не всегда выделяет наиболее существенное, не допускает вместе с тем серьезных ошибок в ответах.

3. Пороговый уровень соответствует оценке «зачтено»/«удовлетворительно»:

Обучающийся владеет основным объемом знаний по дисциплине; проявляет затруднения в самостоятельных ответах, оперирует неточными формулировками; в процессе ответов допускает ошибки по существу вопросов.

4. Низкий уровень соответствует оценке «не зачтено»/«неудовлетворительно»:

Обучающийся не освоил обязательного минимума знаний предмета, не способен ответить на вопросы даже при дополнительных наводящих вопросах экзаменатора.

