

|                                                                                                                                                                                                                                                      |                                                                                                                                                                          |                                                                                                                                                                                          |        |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| Документ подписан простой электронной подписью<br>Информация о владельце:<br>ФИО: Таскаев Сергей Валерьевич<br>Должность: Ректор<br>Дата подписания: 02.04.2025 16:53:15<br>Уникальный программный ключ:<br>04c19ed8bfb98f5b6cb77a486b9a8788b8522525 | МИНОВЕРНАУКИ РОССИИ<br>Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Челябинский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ЧелГУ») | Рабочая программа дисциплины "Векторный и тензорный анализ" по направлению подготовки (специальности) 03.03.02 "Физика" направленности (профилю) Фундаментальная физика ФГБОУ ВО «ЧелГУ» | стр. 1 |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|

## **Рабочая программа дисциплины (модуля)\***

### **Векторный и тензорный анализ**

Направление подготовки (специальность)

03.03.02 Физика

Направленность (профиль)

Фундаментальная физика

Присваиваемая квалификация (степень)

бакалавр

Форма обучения

очная

Год(ы) набора 2023

\*Рабочая программа дисциплины (модуля) адаптирована для инклюзивного обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья

Челябинск 2023 г.



## Содержание

1. Цели освоения дисциплины
2. Место дисциплины в структуре ОПОП
3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины (модуля)
4. Объем дисциплины (модуля)
5. Структура и содержание дисциплины (модуля)
6. Фонд оценочных средств
  - 6.1. Перечень видов оценочных средств
  - 6.2. Типовые контрольные задания и иные материалы для текущей аттестации
  - 6.3. Типовые контрольные вопросы и задания для промежуточной аттестации
  - 6.4. Критерии оценивания
7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)
  - 7.1. Рекомендуемая литература
  - 7.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет"
  - 7.3. Перечень информационных технологий
8. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)
9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)
10. Специальные условия освоения дисциплины обучающимися с инвалидностью и ограниченными возможностями здоровья



### 1. ЦЕЛИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Дисциплина предназначена для освоения студентами теории и практики векторного и тензорного анализа, необходимых для использования в различных курсах физики и математики.

Цель дисциплины — изложить основы векторного и тензорного анализа на современном языке и в достаточно полном объеме.

Задачи дисциплины заключаются в развитии следующих знаний, умений и навыков личности:

- дать полное представление об основных понятиях векторного и тензорного анализа;
- научить пользоваться полученными знаниями – доказывать теоремы, устанавливать связи между различными понятиями и с другими областями математики;
- развить основы математического мышления, использования математического языка;
- научить решать задачи и упражнения, используя определения, теоремы и технические приемы;
- показать возможные приложения полученных знаний в различных областях.

Результаты обучения дисциплине направлены на достижение индикаторов:

ОПК-1.1. Обладает базовыми знаниями, полученными в области физико-математических и (или) естественных наук;

ОПК-1.2. Демонстрирует умение решать задачи, формулируемые в рамках физико-математических и (или) естественных наук;

ОПК-1.3. Имеет навыки использования основных понятий, законов физико-математических и (или) естественных наук для решения задач профессиональной деятельности.

### 2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОПОП

Цикл (раздел) ОПОП: Б1.О.04

#### 2.1 Требования к предварительной подготовке обучающегося:

Математический анализ

Линейная алгебра

#### 2.2 Дисциплины и практики, для которых освоение данной дисциплины (модуля) необходимо как предшествующее:

Теоретическая механика

Механика сплошных сред

### 3. КОМПЕТЕНЦИИ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

**ОПК-1: Способен применять базовые знания в области физико-математических и (или) естественных наук в сфере своей профессиональной деятельности;**

#### **Знать:**

Для достижения ОПК-1.1: • свойства различных криволинейных координатных систем; • свойства локального базиса криволинейной системы координат; • определение тензора и основные операции тензорной алгебры; • дифференциальные операции векторного анализа в криволинейных и декартовых координатах,  $\text{div}$ ,  $\text{grad}$ ,  $\text{rot}$ ; • формулы Стокса и Остроградского-Гаусса, их скалярную и векторную версии;

#### **Уметь:**

Для достижения ОПК-1.2: • определять компоненты векторов локального базиса в любой точке криволинейной системы координат; • находить компоненты тензора первого и второго ранга при преобразовании координат; • выполнять преобразования тензоров и тензорных выражений; • раскрыть повторную операцию теории поля для произвольных скалярных и векторных полей в декартовой системе координат

#### **Владеть:**

Для достижения ОПК-1.3: навыками решения прикладных задач на основе стандартных задач векторного и тензорного анализа.



**В результате освоения дисциплины обучающийся должен**

|                     |                                                                                                                       |
|---------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>3.1 Знать:</b>   |                                                                                                                       |
| 3.1.1               | • свойства различных криволинейных координатных систем;                                                               |
| 3.1.2               | • свойства локального базиса криволинейной системы координат;                                                         |
| 3.1.3               | • определение тензора и основные операции тензорной алгебры;                                                          |
| 3.1.4               | • дифференциальные операции векторного анализа в криволинейных и декартовых координатах, div, grad, rot;              |
| 3.1.5               | • формулы Стокса и Остроградского-Гаусса, их скалярную и векторную версии;                                            |
| 3.1.6               |                                                                                                                       |
| <b>3.2 Уметь:</b>   |                                                                                                                       |
| 3.2.1               | • определять компоненты векторов локального базиса в любой точке криволинейной системы координат;                     |
| 3.2.2               | • находить компоненты тензора первого и второго ранга при преобразовании координат;                                   |
| 3.2.3               | • выполнять преобразования тензоров и тензорных выражений;                                                            |
| 3.2.4               | • раскрыть повторную операцию теории поля для произвольных скалярных и векторных полей в декартовой системе координат |
| <b>3.3 Владеть:</b> |                                                                                                                       |
| 3.3.1               | решения прикладных задач на основе стандартных задач векторного и тензорного анализа.                                 |

**4. ОБЪЕМ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)**

|                                                                                                                                                      |                                            |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------|
| Общая трудоемкость                                                                                                                                   | <b>2 ЗЕТ</b>                               |
| Часов по учебному плану : 72<br>в том числе :<br>аудиторные занятия : 36<br>самостоятельная работа : 32,3<br><br>контактная работа: 39,7<br>ИКР: 3,7 | Виды контроля в семестрах:<br><br>зачеты 2 |

**5. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)**

| Код занятия | Наименование разделов и тем /вид занятия/                                                                                                                                      | Семестр / Курс | Часов | Литература                          |
|-------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|-------|-------------------------------------|
|             | <b>Раздел 1. Определение тензора и операции тензорной алгебры.</b>                                                                                                             |                |       |                                     |
| 1.1         | Введение в тензорный анализ. Основные задачи тензорного исчисления. Локальный базис криволинейной системы координат. Ковариантные и контравариантные компоненты вектора. /Лек/ | 2              | 1     | Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1<br>Л2.2<br>Э1 Э2 |
| 1.2         | Преобразование базиса и компонент вектора при преобразовании координат. /Лек/                                                                                                  | 2              | 1     | Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1<br>Л2.2<br>Э1 Э4 |
| 1.3         | Определение тензора произвольного ранга и строения. Ортогональные аффинные преобразования. Декартов тензор. /Лек/                                                              | 2              | 1     | Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1<br>Л2.2<br>Э1 Э2 |
| 1.4         | Тензоры в матричном и диадном виде. Единичный декартов тензор второго ранга и альтернирующий тензор третьего ранга. /Лек/                                                      | 2              | 1     | Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1<br>Л2.2<br>Э3 Э4 |
| 1.5         | Индексная форма записи тензора. Операции тензорной алгебры. /Лек/                                                                                                              | 2              | 1     | Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1<br>Л2.2<br>Э1 Э2 |



|                                                              |                                                                                                                         |   |     |                                           |
|--------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|-----|-------------------------------------------|
| 1.6                                                          | Смешанный тензор второго ранга как линейный оператор. Матрица линейного оператора. /Лек/                                | 2 | 1   | Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1<br>Л2.2<br>Э1 Э4       |
| 1.7                                                          | Элементы векторного анализа. /Ср/                                                                                       | 2 | 2   | Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1<br>Л2.2<br>Э1 Э3 Э4    |
| 1.8                                                          | Индексные обозначения тензоров. /Ср/                                                                                    | 2 | 2   | Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1<br>Л2.2<br>Э1 Э2 Э3 Э4 |
| 1.9                                                          | Локальный базис криволинейной системы координат. /Ср/                                                                   | 2 | 2   | Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1<br>Л2.2<br>Э1 Э2       |
| 1.10                                                         | Ковариантные и контравариантные компоненты вектора. /Ср/                                                                | 2 | 2   | Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1<br>Л2.2<br>Э2 Э4       |
| 1.11                                                         | Определение тензора. /Ср/                                                                                               | 2 | 2   | Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1<br>Л2.2<br>Э1 Э2 Э4    |
| 1.12                                                         | Операции тензорной алгебры. /Ср/                                                                                        | 2 | 1,5 | Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1<br>Л2.2<br>Э1 Э2 Э4    |
| 1.13                                                         | Контрольная работа: Тензорный анализ. /Лек/                                                                             | 2 | 1   | Л1.1 Л1.2Л2.2<br>Э2 Э4                    |
| <b>Раздел 2. Дифференцируемые скалярные и векторные поля</b> |                                                                                                                         |   |     |                                           |
| 2.1                                                          | Инварианты линейного оператора, дивергенция и ротор линейного оператора. /Лек/                                          | 2 | 1   | Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1<br>Л2.2<br>Э2          |
| 2.2                                                          | Дивергенция и ротор линейного оператора в ортонормированном базисе. /Лек/                                               | 2 | 1   | Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1<br>Л2.2                |
| 2.3                                                          | Дифференцируемое скалярное поле. Производная по направлению и градиент скалярного поля. /Лек/                           | 2 | 1   | Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1<br>Л2.2<br>Э2          |
| 2.4                                                          | Дифференцируемое векторное поле. Производная по направлению, дивергенция и ротор векторного поля. /Лек/                 | 2 | 1   | Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1<br>Л2.2                |
| 2.5                                                          | Производная векторного поля по направлению в ортонормированном базисе. /Лек/                                            | 2 | 1   | Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1<br>Л2.2                |
| 2.6                                                          | Дифференциальные операции градиент, дивергенция и ротор в криволинейных координатах. /Лек/                              | 2 | 1   | Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1<br>Л2.2                |
| 2.7                                                          | Дифференциальные операции: градиент, дивергенция и ротор в декартовой системе координат. /Ср/                           | 2 | 3,3 | Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1<br>Л2.2<br>Э1 Э2 Э3 Э4 |
| 2.8                                                          | Дифференциальные операции: градиент, дивергенция и ротор в криволинейной системе координат. /Ср/                        | 2 | 2,5 | Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1<br>Л2.2<br>Э1 Э2 Э3 Э4 |
| <b>Раздел 3. Основные операции векторного анализа</b>        |                                                                                                                         |   |     |                                           |
| 3.1                                                          | Оператор Гамильтона. Символическая запись операций градиент, дивергенция и ротор. Повторные операции теории поля. /Лек/ | 2 | 1   | Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1<br>Л2.2<br>Э3          |
| 3.2                                                          | Дифференциальные операции градиент, дивергенция и ротор в криволинейных координатах. /Лек/                              | 2 | 1   | Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1<br>Л2.2<br>Э4          |
| 3.3                                                          | Оператор Гамильтона /Пр/                                                                                                | 2 | 2   | Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1<br>Л2.2<br>Э1 Э2 Э3 Э4 |



|                                                                                                                                                                                          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |   |     |                                           |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|-----|-------------------------------------------|
| Рабочая программа дисциплины "Векторный и тензорный анализ" по направлению подготовки (специальности) 03.03.02 "Физика" направленности (профилю) Фундаментальная физика ФГБОУ ВО «ЧелГУ» |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |   |     | стр. 6                                    |
| 3.4                                                                                                                                                                                      | Дифференциальные операторы /Пр/                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 2 | 2   | Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1<br>Л2.2<br>Э1 Э4       |
| 3.5                                                                                                                                                                                      | Контрольная работа: Тензорный анализ /Пр/                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 2 | 2   | Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1<br>Л2.2<br>Э1 Э2 Э4    |
| <b>Раздел 4. Формулы Грина, Гаусса-Остроградск и Стокса</b>                                                                                                                              |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |   |     |                                           |
| 4.1                                                                                                                                                                                      | Теорема Гаусса-Остроградского. /Лек/                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 2 | 1   | Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1<br>Л2.2<br>Э4          |
| 4.2                                                                                                                                                                                      | Теорема Грина и теорема Стокса. /Лек/                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 2 | 1   | Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1<br>Л2.2                |
| 4.3                                                                                                                                                                                      | Вычисление потока /Пр/                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 2 | 2   | Л1.1 Л1.2Л2.1<br>Э3 Э4                    |
| 4.4                                                                                                                                                                                      | Дивергенция векторного поля /Пр/                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 2 | 2   | Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.2<br>Э3 Э4               |
| 4.5                                                                                                                                                                                      | Теорема Гаусса-Остроградского. Выражение дивергенции через поток. /Пр/                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 2 | 2   | Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1<br>Л2.2<br>Э3 Э4       |
| 4.6                                                                                                                                                                                      | Соленоидальные векторные поля и их признаки /Пр/                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 2 | 2   | Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1<br>Л2.2<br>Э1 Э2       |
| 4.7                                                                                                                                                                                      | Ротор векторного поля. Теорема Стокса. Потенциальные векторные поля /Пр/                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | 2 | 2   | Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1<br>Л2.2<br>Э3          |
| 4.8                                                                                                                                                                                      | Контрольная работа: Формулы Грина, Стокса /Пр/                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 2 | 2   | Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1<br>Л2.2<br>Э2 Э4       |
| <b>Раздел 5. Элементы теории групп</b>                                                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |   |     |                                           |
| 5.1                                                                                                                                                                                      | Обобщение на объекты произвольной природы. Элементы теории групп. /Лек/                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 2 | 1   | Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1<br>Л2.2<br>Э4          |
| 5.2                                                                                                                                                                                      | В рамках самостоятельной работы студент должен закрепить основные понятия и разобрать примеры к ним. Именно: Определение группы. Групповые аксиомы. Коммутативные группы. Подгруппы. Конечные и непрерывные группы, смешанные группы. Порядок конечной группы. Компактные непрерывные группы. Примеры групп: Векторные пространства, общая линейная группа $GL(n)$ , унитарная группа $U(n)$ , унитарная унимодулярная группа $SU(n)$ , группа вращений $O$ , полная ортогональная группа $O3$ , группа движений евклидова пространства, группа трансляций кристаллической решетки, симметрическая группа $n$ -ой степени $P_n$ (группа перестановок), точечные группы симметрии. /Ср/ | 2 | 15  | Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1<br>Л2.2<br>Э1 Э2 Э3 Э4 |
| <b>Раздел 6. Иная контактная работа</b>                                                                                                                                                  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |   |     |                                           |
| 6.1                                                                                                                                                                                      | Индивидуальные консультации, текущий контроль /ИКР/                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 2 | 3,7 | Л1.1 Л1.2 Л1.3                            |

## 6. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

### 6.1. Перечень видов оценочных средств

1. Контрольная работа: Тензорный анализ
2. Контрольная работа: Векторный анализ
3. Контрольная работа: Формулы Грина, Стокса

### 6.2. Типовые контрольные задания и иные материалы для текущей аттестации

Типовые задания представлены в приложении



### 6.3. Типовые контрольные вопросы и задания для промежуточной аттестации

Типовые задания представлены в приложении,  
Вопросы к зачету:

1. Предел векторной функции скалярного переменного, формальные свойства. Непрерывность векторной функции скалярного переменного.
2. Производная векторной функции скалярного переменного, выражение в координатах. Свойства производной.
3. Годограф. Геометрический смысл производной векторной функции скалярного переменного.
4. Понятие гладкой регулярной кривой. Длина дуги кривой. Длина дуги как натуральный параметр. Производная векторной функции по натуральному параметру.
5. Векторная функция двух скалярных аргументов. Частные производные. Поверхность и формы ее задания. Элементы дифференциальной геометрии поверхности: нормали и касательные к поверхности. Первая квадратичная форма поверхности и ее применение.
6. Скалярное поле. Поверхности и линии уровня скалярного поля. Дифференцируемость скалярного поля, градиент.
7. Производная скалярного поля по направлению. Связь градиента с производной по направлению.
8. Алгебраические и геометрические свойства градиента. Вычисления градиента и производной по направлению в координатах. Система обозначений Гамильтона.
9. Векторное поле. Дифференцируемость векторного поля, дифференциальный оператор. Матрица дифференциального оператора в декартовых координатах. Производная векторного поля по направлению.
10. Дивергенция векторного поля, свойства, вычисление в координатах. Поток векторного поля через поверхность. Теорема Гаусса-Остроградского. Выражение дивергенции через поток. Соленоидальные векторного поля и их признаки.
11. Ротор векторного поля, его выражение в декартовых координатах и через гамильтониан. Формальные свойства ротора. Теорема Стокса.
12. Потенциальные векторные поля. Различные признаки потенциальности.
13. Некоторые формулы векторного анализа: дивергенция и ротор векторного произведения векторных полей.
14. Некоторые формулы векторного анализа: градиент скалярного произведения векторных полей.
15. Вычисление дивергенции, ротора и градиента в криволинейных ортогональных системах координат.

### 6.4. Критерии оценивания

Балльно-рейтинговая система оценки знаний студента по дисциплине выстраивается на основе балловой оценки различных форм деятельности студентов. Для оценки зачета суммируются баллы семестра и контрольной зачетной работы.

На зачете выдается зачетная работа из 5 задач, взятых из вариантов контрольных работ, каждое задание оценивается в 8 баллов. Кроме того, выдается один теоретический вопрос из списка вопросов. Полученные баллы суммируются с баллами, полученными за практические занятия и контрольные работы. Зачет выставляется от 75 баллов.

На контрольных работах №1, 2 студенту предлагается решить две задачи, на контрольной работе №3 - три задачи.

Контрольная работа, выполненная студентом, оценивается по 8-ми бальной шкале, руководствуясь при этом следующими критериями:

Студент получает на контрольных работах №1, 2:

- 8 баллов, если правильно и с пояснениями решены две задачи;
- 6-7 баллов, если решены две задачи, но есть несущественные ошибки;
- 5 баллов, если решены три задачи, но есть ошибки;
- 4 баллов, если правильно и с пояснениями решены две задачи;
- 3 балла, если решены две задачи, но есть ошибки;
- 2 балла, если решена одна задача;
- 1 балл, если частично решена одна задача.

Студент получает на контрольной работе №3:

- 8 баллов, если правильно и с пояснениями решены три задачи;
- 7 баллов, если решены три задачи, но есть несущественные ошибки;
- 6 баллов, если решены три задачи, но есть ошибки;
- 5 баллов, если правильно и с пояснениями решены две задачи;
- 4 балла, если решены две задачи, но есть ошибки;
- 3 балла, если решена одна задача;
- 1-2 балл, если частично решена одна задача.

Теоретический вопрос оценивается максимум на 3 балла по следующей шкале:

3 балла - Теоретическое содержание курса освоено полностью без пробелов или в целом, или большей частью, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом сформированы или в основном сформированы, все или большинство предусмотренных рабочей программой учебных заданий выполнены, отдельные из



выполненных заданий содержат ошибки;

2 балла - Теоретическое содержание курса освоено в целом без пробелов, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом в основном сформированы, предусмотренные рабочей учебной программой учебные задания выполнены с отдельными неточностями, качество выполнения большинства заданий оценено числом баллов, близким к максимуму.

1 балл - Теоретическое содержание курса освоено большей частью, но пробелы не носят существенного характера, необходимые

Знать необходимый минимум

практические навыки работы с освоенным материалом в основном сформированы, большинство предусмотренных рабочей учебной программой учебных заданий выполнены, отдельные из выполненных заданий содержат ошибки.

0 баллов - Теоретическое содержание курса освоено частично, необходимые навыки работы не сформированы или сформированы отдельные из них, большинство предусмотренных рабочей учебной программой заданий не выполнено либо выполнено с грубыми ошибками, качество их выполнения оценено числом баллов, близким к минимуму.

## 7. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

### 7.1. Рекомендуемая литература

#### 7.1.1. Основная литература

|      | Авторы, составители | Заглавие                                                                                                                                                                                        | Издательство, год                                                   | Ресурс |
|------|---------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------|--------|
| Л1.1 |                     | Векторный и тензорный анализ: курс лекций: учебное пособие<br>( <a href="https://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=562699">https://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=562699</a> ) | Ставрополь : Северо-Кавказский Федеральный университет (СКФУ), 2018 | ЭБС    |
| Л1.2 | Курош А. Г.         | Теория групп<br>( <a href="https://e.lanbook.com/book/210179">https://e.lanbook.com/book/210179</a> )                                                                                           | Санкт- Петербург : Лань, 2022                                       | ЭБС    |
| Л1.3 | Горлач Б. А.        | Тензорная алгебра и тензорный анализ<br>( <a href="https://e.lanbook.com/book/211781">https://e.lanbook.com/book/211781</a> )                                                                   | Санкт- Петербург : Лань, 2022                                       | ЭБС    |

#### 7.1.2. Дополнительная литература

|      | Авторы, составители               | Заглавие                                                                                                                                                         | Издательство, год                                      | Ресурс |
|------|-----------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|--------|
| Л2.1 | Мак-Коннел А. Д.,<br>Корнев Г. В. | Введение в тензорный анализ<br>( <a href="https://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=116257">https://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=116257</a> ) | Москва : Гос. изд -во физико-математической лит., 1963 | ЭБС    |
| Л2.2 | Борисенко А. И.,<br>Тарапов И. Е. | Векторный анализ и начала тензорного исчисления: учебное пособие для студентов втузов                                                                            | М.: Высш. шк., 1966                                    |        |

### 7.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет"

|    |                                                                                                                                                                                                                             |
|----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Э1 | Электронная информационно-образовательная среда <a href="http://de.ifmo.ru/--books/0051/8/8_1/81_obf_1.htm">http://de.ifmo.ru/--books/0051/8/8_1/81_obf_1.htm</a>                                                           |
| Э2 | Образовательный математический сайт <a href="http://www.exponenta.ru/">http://www.exponenta.ru/</a>                                                                                                                         |
| Э3 | Сайт по высшей математике для заочников и не только <a href="http://mathprofi.ru/">http://mathprofi.ru/</a>                                                                                                                 |
| Э4 | Сайт математического факультета ЧелГУ <a href="http://www.math.csu.ru/?option=com_content&amp;view=article&amp;id=82&amp;Itemid=73">http://www.math.csu.ru/?option=com_content&amp;view=article&amp;id=82&amp;Itemid=73</a> |

### 7.3 Перечень информационных технологий

#### 7.3.1 Программное обеспечение

LMS Moodle

MS Office365

Adobe Connect Acrobat

Adobe Reader

#### 7.3.2 Профессиональные базы данных и информационно-справочные системы



МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Челябинский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ЧелГУ»)

Рабочая программа дисциплины "Векторный и тензорный анализ" по направлению подготовки (специальности)  
03.03.02 "Физика" направленности (профилю) Фундаментальная физика ФГБОУ ВО «ЧелГУ»

стр. 9

Scopus (<https://www.scopus.com>) Scopus : реферативная база данных / Elsevier BV. – URL: <http://www.scopus.com/>. – Яз. англ. – Режим доступа: для зарегистрир. пользователей ЧелГУ. – Текст : электронный.

Web of Science : мультидисциплинарная реферативная база данных / компания Thomson Reuters. – Режим доступа: для зарегистрир. пользователей ЧелГУ. – Текст : электронный.

## 8. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Для реализации дисциплины используются учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, а также помещения для самостоятельной работы.

Для проведения занятий лекционного типа предлагаются наборы демонстрационного оборудования и учебно-наглядных пособий: цифровые образовательные ресурсы (мультимедийные презентации по некоторым темам лекций), различные формы наглядности (рисунки, таблицы, схемы и т.д). Для проведения занятий лекционного типа используется переносное и / или стационарное мультимедийное оборудование (экран, ноутбук, проектор, колонки) в аудиториях 1-го и лекционного корпусов ЧелГУ.

Для семинарских занятий используются аудитории оснащенные обычной доской, партами, переносным мультимедийным и аудиооборудованием (в случае необходимости).

Помещения для самостоятельной работы: электронный читальный зал научной библиотеки ЧелГУ (аудитория 206) для самостоятельной работы студента, оснащенный персональными компьютерами, мультимедийной аппаратурой. В аудиториях обеспечен доступ к различной справочной литературе, энциклопедиям, библиографическим и полнотекстовым базам данных, информационным ресурсам «Интернет».

## 9. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Учебный курс строится таким образом, чтобы способствовать созданию у студента понятийно-теоретического ядра и развитию практического навыка решения математических задач.

Для успешного усвоения материала студенту необходимо получить достаточное количество баллов по следующим формам обучения:

1. Лекционная форма, которая предполагает посещение и конспектирование лекций. Лекционные занятия могут проводиться как в классической форме, предполагающее устное изложение материала преподавателем и конспектированием материала студентам, так и форме семинара, студентам предлагается совместное решение теоретических задач при возможной помощи преподавателя. Кроме того, часть лекций сопровождается интерактивными материалами для лучшего понимания геометрической интерпретации материала.

2. Практические занятия предполагает посещение их студентом, получение баллов за посещаемость и выполнение контрольных работ.

Самостоятельная работа предполагает выполнение домашних заданий студентом. Для их выполнения студенту необходимо использование и изучение литературы по заданной теме в дополнении к материалам практических занятий. Домашние работы содержат от 3 до 5 задач по заданной теме. Выдаются после каждого практического занятия. Материал каждого практического занятия представлен в электронном виде на сайте математического факультета <http://www.math.csu.ru> и в виде твердых копий, которые студент может получить по желанию.

В ходе освоения дисциплины применяются следующие информационные технологии:

1. Слайдовые презентации лекций по некоторым темам дисциплины (по усмотрению преподавателя, не менее 6 часов).
  2. Дистанционные компьютерные тесты, размещенные в программной оболочке MOODLE.
  3. Организация онлайн консультаций и консультаций с использованием электронной почты и форумов в социальных сетях.
- В случае применения при обучении дисциплины электронного обучения, дистанционных образовательных технологий общение обучающихся и преподавателя осуществляется в режиме реального времени (онлайн-лекции (вебинары), чаты, видео-конференции и др.) или отложенного времени (система дистанционного обучения Moodle, MSOffice365, форумы, электронная почта и др.).

При обучении лиц с ограниченными возможностями здоровья электронное обучение, дистанционные образовательные технологии предусматривают возможность приема-передачи информации в доступных для них формах.

Реализация дисциплины с применением электронного обучения, дистанционных образовательных технологий (далее – ЭО, ДОТ) осуществляется на основании «Положения о реализации основных и дополнительных образовательных программ с применением электронного обучения и дистанционных образовательных технологий в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Челябинский государственный университет», «Положения о порядке зачета обучающимися по основным профессиональным образовательным программам высшего образования в ФГБОУ ВО «ЧелГУ» результатов освоения в организациях, осуществляющих образовательную деятельность, учебных предметов, курсов, дисциплин (модулей), практик, дополнительных образовательных программ» посредством электронной информационно-образовательной среды ФГБОУ ВО «ЧелГУ». В исключительных случаях (форс-мажор и т.п.) при реализации образовательной деятельности с применением ЭО, ДОТ могут применять компоненты, не входящие в перечень электронной информационно-образовательной среды.



## 10. СПЕЦИАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ ОБУЧАЮЩИМИСЯ С ИНВАЛИДНОСТЬЮ И ОГРАНИЧЕННЫМИ ВОЗМОЖНОСТЯМИ ЗДОРОВЬЯ

Освоение дисциплины инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья осуществляется с использованием специальных технических средств и голо информационных технологий, предоставляемых Ресурсным учебно-методическим центром по обучению инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья ЧелГУ по запросу обучающегося.

1. Мобильные специальные технические средства для лиц с нарушениями зрения: портативный компьютер с вводом/выводом шрифтом Брайля с синтезатором речи «EIBraile-W14J G2»; ноутбуки с программной экранного доступа NVDA; электронные увеличители для удаленного просмотра; видеувеличители портативные; тифлоплеер; цифровые диктофоны.

2. Мобильные специальные технические средства для лиц с нарушениями слуха: система свободного звукового поля со встроенной совместимостью с FM-устройствами; радиоклассы «Сонет-PCM» с передатчиком, заушным индуктором и индукционной петлей; система информационная для слабослышащих переносная «Исток» А2 со встроенным плеером – звуковым информатором; документ-камера; программируемые слуховые аппараты индивидуального пользования.

3. Ассистивные информационные технологии: программное обеспечение экранного доступа с синтезом речи NVDA; программы экранного увеличения; программы речевого синтеза для компьютеров и ноутбуков; программы речевого синтеза для мобильных устройств; экранная клавиатура; экранная лупа.

При необходимости для обучающихся с нарушениями зрения на рабочих местах для проведения практических или лабораторных занятий устанавливается специальное программное обеспечение (программа речевой навигации NVDA, речевые синтезаторы, экранные лупы).

В учебные аудитории обеспечивается беспрепятственный доступ для обучающихся инвалидов и обучающихся с ограниченными возможностями здоровья. В каждой аудитории, где обучаются инвалиды и лица с ограниченными возможностями здоровья, предусматривается соответствующее количество мест для обучающихся с учетом нарушений их здоровья.

Для освоения дисциплины инвалидам и лицам с ограниченными возможностями здоровья предоставляется доступ к печатным источникам, имеющимся в научной библиотеке ЧелГУ, с помощью специальных технических средств; доступ к электронным источникам, представленным в форме электронного документа в фонде научной библиотеки ЧелГУ или электронно-библиотечных системах, с помощью специальных технических средств и программных средств (рабочее место для незрячего пользователя с программным обеспечением экранного доступа с синтезом речи NVDA, рабочее место с компьютерным роллером и клавиатурой Clevy с большими кнопками и с разделяющей клавиши накладкой).

Учебно-методические материалы для обучающихся из числа инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья предоставляются в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации:

Для лиц с нарушениями зрения:

- в печатной форме увеличенным шрифтом,
- в форме электронного документа,
- в форме аудиофайла,
- в печатной форме шрифтом Брайля.

Для лиц с нарушениями слуха:

- в печатной форме,
- в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата:

- в печатной форме,
- в форме электронного документа,
- в форме аудиофайла.

Данный перечень может быть конкретизирован в зависимости от контингента обучающихся.

Для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья освоение дисциплины может быть частично или полностью осуществлено с использованием дистанционных образовательных технологий (Moodle, Adobe Connect Pro и пр.).

В освоении дисциплины инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья используется индивидуальная работа. Под индивидуальной работой подразумевается две формы взаимодействия с преподавателем: индивидуальная учебная работа (консультации), т.е. дополнительное разъяснение учебного материала и углубленное изучение материала с теми обучающимися, которые в этом заинтересованы, и индивидуальная воспитательная работа. Индивидуальные консультации направлены на индивидуализацию обучения и установлению воспитательного контакта между преподавателем и обучающимся инвалидом или обучающимся с ограниченными возможностями здоровья.

При проведении процедуры оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья по дисциплине обеспечивается выполнение следующих дополнительных требований в зависимости от индивидуальных особенностей, обучающихся:



а) инструкция по порядку проведения процедуры оценивания предоставляется в доступной форме (устно, в письменной форме, в письменной форме шрифтом Брайля, устно с использованием услуг сурдопереводчика);

б) доступная форма предоставления заданий оценочных средств (в печатной форме, в печатной форме увеличенным шрифтом, в печатной форме шрифтом Брайля, в форме электронного документа, задания зачитываются ассистентом, задания предоставляются с использованием сурдоперевода);

в) доступная форма предоставления ответов на задания (письменно на бумаге, набор ответов на компьютере, письменно шрифтом Брайля, с использованием услуг ассистента, устно).

При проведении процедуры оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья предусматривается использование технических средств, необходимых им в связи с их индивидуальными особенностями. Эти средства могут быть предоставлены ЧелГУ или могут использоваться собственные технические средства. При необходимости инвалидам и лицам с ограниченными возможностями здоровья предоставляется дополнительное время для подготовки ответа на задания, процедура оценивания результатов обучения по дисциплине может проводиться в несколько этапов.

Проведение процедуры оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья допускается с использованием дистанционных образовательных технологий.

## Контрольная работа Тензорный анализ

**Пример 1.** Произвести свертку тензора по первым двум индексам

$$a_{ijk} = \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1959 & 5 \\ 2 & 2012 & 3 & 6 \end{array} \right)$$

**Пример 2.** Найти канонический вид и соответствующий ортонормированный базис для симметричного тензора, заданного в некотором ортонормированном базисе матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 17 & -8 & 4 \\ -8 & 17 & -4 \\ 4 & -4 & 11 \end{pmatrix}$$

## Контрольная работа Векторный анализ

### Вариант 1

**Пример 1.** Пусть векторы базиса имеют координаты  $e_1 = (1, 4)$ ,  $e_2 = (2, 4)$ . Вычислить матрицу метрического тензора  $g_{ij}$ .

**Пример 2.**

Пусть  $e_1, e_2$  — базис и  $e'_1 = e_1 - e_2$ ,  $e'_2 = -2e_1 + 3e_2$  — другой базис. Найти преобразование сопряженного базиса и координат ко-вектора  $\xi = e^1 - e^2$

### Вариант 2

**Пример 1.**

В декартовой системе координат вектор  $v$  имеет координаты  $v = (1, 1)$ . Вычислить его координаты в полярной системе координат.

**Пример 2.**

Пусть в области, определенной неравенствами  $-\infty < u < \infty$ ,  $0 \leq v \leq 2\pi$ , задан метрический тензор  $g_{11} = g_{22} = 1/v^2$ ,  $g_{12} = g_{21} = 0$ . Вычислить символы Кристоффеля первого и второго рода и найти геодезические.

## Контрольная работа Формулы Грина, Стокса

### Вариант 1

#### Пример 1.

Найти длину кривой винтовой линии  $L$ , заданной параметрически  $x = a \cos t$ ,  $y = a \sin t$ ,  $z = at$  при  $t \in [0, 4\pi]$  и  $a > 0$ .

#### Пример 2.

Найти координаты центра масс винтовой линии

$x = a \cos t$ ,  $y = a \sin t$ ,  $z = at$  при  $t \in [0, 4\pi]$  и для  $\rho(x, y, z) = x^2$ .

### Вариант 2

#### Пример 1.

Вычислить  $J = \oint_C (y^2 + z^2) dx + (x^2 + z^2) dy + (x^2 + y^2) dz$ ,

где  $C$  - кривая  $x^2 + y^2 + z^2 = 4x$ ,  $x^2 + y^2 = 2x$  (с  $z > 0$ ), пробегаемая так, что ограниченная на внешней стороне сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = 4x$  её наименьшая область остается слева.

