





## Содержание

1. Цели освоения дисциплины
2. Место дисциплины в структуре ОПОП
3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины (модуля)
4. Объем дисциплины (модуля)
5. Структура и содержание дисциплины (модуля)
6. Фонд оценочных средств
  - 6.1. Перечень видов оценочных средств
  - 6.2. Типовые контрольные задания и иные материалы для текущей аттестации
  - 6.3. Типовые контрольные вопросы и задания для промежуточной аттестации
  - 6.4. Критерии оценивания
7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)
  - 7.1. Рекомендуемая литература
  - 7.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет"
  - 7.3. Перечень информационных технологий
8. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)
9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)
10. Специальные условия освоения дисциплины обучающимися с инвалидностью и ограниченными возможностями здоровья



### 1. ЦЕЛИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Целью преподавания дисциплины является знакомство с основными понятиями и методами теории римановых многообразий. Формирование у студентов логического мышления, навыков в умении использовать методы теории римановых многообразий при решении прикладных задач, связанных с реализацией профессиональных функций.

Результаты обучения по дисциплине направлены на достижение индикаторов, соответствующих компетенции ОПК-1:

ОПК-1.1. Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук

ОПК-1.2. Демонстрирует умения решать типовые задачи, формулируемые в рамках математических и (или) естественных наук

ОПК-1.3. Имеет навыки использования основных понятий, теорем, законов математики и (или) естественных наук для решения задач профессиональной деятельности

### 2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОПОП

Цикл (раздел) ОПОП: Б1.О.23

#### 2.1 Требования к предварительной подготовке обучающегося:

Изучение данной дисциплины требует предварительных знаний по дисциплинам:

Дифференциальная геометрия

Топология

Математический анализ

Дифференциальные уравнения

#### 2.2 Дисциплины и практики, для которых освоение данной дисциплины (модуля) необходимо как предшествующее:

Знания по дисциплине могут быть полезны для научно-исследовательской работы бакалавров и написания выпускной квалификационной работы. Данная дисциплина является предшествующей для дисциплин:

Вычислительная топология

Гиперболическая геометрия

Теория сложности геометрических объектов (научный семинар)

Маломерная топология (научный семинар)

### 3. КОМПЕТЕНЦИИ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

**ОПК-1: Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности**

#### Знать:

Для достижения ОПК-1.1: базовые понятия, полученные в области теории гладких многообразий

#### Уметь:

Для достижения ОПК-1.2: решать типовые задачи, формулируемые в рамках теории гладких многообразий

#### Владеть:

Для достижения ОПК-1.3: навыками использования основных понятий, теорем, законов теории гладких многообразий для решения задач профессиональной деятельности

**В результате освоения дисциплины обучающийся должен**

#### 3.1 Знать:

3.1.1 способы использования фундаментальных знаний в области гладких многообразий в профессиональной деятельности

#### 3.2 Уметь:



Рабочая программа дисциплины "Гладкие многообразия" по направлению подготовки (специальности)  
02.03.01 "Математика и компьютерные науки" направленности (профилю) Топологические и аналитические  
методы исследования математических моделей ФГБОУ ВО «ЧелГУ»

стр. 4

3.2.1 использовать фундаментальные знания в области гладких многообразий в профессиональной деятельности

**3.3 Владеть:**

3.3.1 использования фундаментальных знаний в области гладких многообразий в профессиональной деятельности

**4. ОБЪЕМ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)**

Общая трудоемкость		3 ЗЕТ
Часов по учебному плану	: 108	Виды контроля в семестрах:  зачеты 6
в том числе	:	
аудиторные занятия	: 64	
самостоятельная работа	: 37,5	
контактная работа:	70,5	
ИКР:	6,5	

**5. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)**

Код занятия	Наименование разделов и тем /вид занятия/	Семестр / Курс	Часов	Литература
<b>Раздел 1. Гладкие многообразия</b>				
1.1	N-мерные многообразия /Лек/	6	4	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Л2.3
1.2	Касательное пространство /Лек/	6	4	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Л2.3
1.3	Кокасательное пространство /Лек/	6	4	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Л2.3
1.4	Полилинейные функции /Лек/	6	4	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Л2.3
1.5	N-мерные многообразия /Пр/	6	2	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Л2.3
1.6	N-мерные многообразия /Пр/	6	2	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Л2.3
1.7	Касательное пространство /Пр/	6	2	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Л2.3
1.8	Касательное пространство /Пр/	6	2	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Л2.3
1.9	Касательное пространство /Пр/	6	2	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Л2.3
1.10	Кокасательное пространство /Пр/	6	2	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Л2.3
1.11	Гладкие многообразия /Ср/	6	19	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Л2.3
<b>Раздел 2. Тензорное исчисление</b>				



Рабочая программа дисциплины "Гладкие многообразия" по направлению подготовки (специальности)  
02.03.01 "Математика и компьютерные науки" направленности (профилю) Топологические и аналитические  
методы исследования математических моделей ФГБОУ ВО «ЧелГУ»

стр. 5

2.1	Тензоры /Лек/	6	4	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Л2.3
2.2	Операции над тензорами /Лек/	6	4	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Л2.3
2.3	Пространство тензоров /Лек/	6	4	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Л2.3
2.4	Тензорные поля /Лек/	6	2	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Л2.3
2.5	Ковариантное дифференцирование /Лек/	6	2	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Л2.3
2.6	Тензоры /Пр/	6	2	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Л2.3
2.7	Операции над тензорами /Пр/	6	2	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Л2.3
2.8	Операции над тензорами /Пр/	6	2	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Л2.3
2.9	Пространство тензоров /Пр/	6	2	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Л2.3
2.10	Пространство тензоров /Пр/	6	2	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Л2.3
2.11	Тензорные поля /Пр/	6	2	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Л2.3
2.12	Тензорные поля /Пр/	6	2	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Л2.3
2.13	Ковариантное дифференцирование /Пр/	6	2	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Л2.3
2.14	Ковариантное дифференцирование /Пр/	6	2	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Л2.3
2.15	Контрольная работа /Пр/	6	2	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Л2.3
2.16	Тензорное исчисление /Ср/	6	18,5	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Л2.3
<b>Раздел 3. Иная контактная работа</b>				
3.1	Индивидуальные консультации, текущий контроль /ИКР/	6	6,5	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Л2.3

## 6. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

### 6.1. Перечень видов оценочных средств



Опрос по теме «Гладкие многообразия»  
Опрос по теме «Тензорное исчисление»  
Итоговая контрольная работа

### 6.2. Типовые контрольные задания и иные материалы для текущей аттестации

Пример итоговой контрольной работы:

Для тензора  $T = e_1 e^2 e^1 + e_1 e^1 e^2 + e_2 e^2 e^1 + e_2 e^1 e^2$ , заданного в базисах  $\{e_1, e_2\}$  касательного пространства  $T_p M$  и  $\{e^1, e^2\}$  кокасательного пространства, найти:

Значение  $T(w, x_1, x_2)$ , если  $w = e^1 + 2e^2$ ,  $x_1 = 2e_1 + e_2$ ,  $x_2 = e_1 + e_2$ .

Тензор, который получается в результате альтернирования тензора  $T$ .

Координаты тензора  $T$  в базисах  $\{e_{1'}, e_{2'}\}$  и  $\{e^{1'}, e^{2'}\}$ , если  $e_{1'} = e_1 + e_2$ ,  $e_{2'} = 2e_1 + e_2$ .

### 6.3. Типовые контрольные вопросы и задания для промежуточной аттестации

Вопросы для опросов:

1. Определение  $n$ -мерного многообразия
2. Функция перехода от одной карты к другой
3. Определение гладкого многообразия
4. Определение локальных координат на карте
5. Определение гладкой кривой
6. Определение касательного вектора
7. Теорема о связи координат касательного вектора в разных локальных системах координат
8. Определение касательного пространства
9. Определение ковектора
10. Определение координат ковектора в локальной системе координат
11. Понятие тензора
12. Определение равенства тензоров
13. Определение линейной комбинации тензоров
14. Определение операции умножения тензоров
15. Определение операции транспонирования тензора с помощью перестановки
16. Определение операции альтернирования тензора
17. Теорема о размерности пространства кососимметрических тензоров
18. Определение операции внешнего произведения тензоров
19. Определение операции опускания верхнего индекса тензора

### 6.4. Критерии оценивания

Балльно-рейтинговая система оценки знаний студента по дисциплине выстраивается на основе балловой оценки различных форм деятельности студентов. Промежуточный контроль осуществляется в форме опросов по каждому разделу и итоговой контрольной работы.

Описание показателей и критериев оценивания компетенций для опросов и контрольной работы:

Опрос по теме «Гладкие многообразия» - 20 баллов

Опрос по теме «Тензорное исчисление» - 20 баллов

Итоговая контрольная работа - 60 баллов

Итоговая оценка выставляется по балльной системе. Суммируются баллы, полученные за опросы и контрольную работу. Итоговая оценка выставляется по 100-балльной шкале, исходя из полученной суммы баллов:

- от 0 до 49 баллов – «не зачтено»;
- от 50 до 100 баллов – «зачтено».

## 7. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

### 7.1. Рекомендуемая литература

#### 7.1.1. Основная литература

	Авторы,	Заглавие	Издательство,	Ресурс
Л1.1	Киреев И. В., Кнауб Л. В., Левчук Д. В., Нужин Я. Н.	Тензорный анализ и дифференциальная геометрия: учебное пособие ( <a href="https://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=497726">https://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=497726</a> )	Красноярск : Сибирский федеральный университет (СФУ), 2017	ЭБС



	Авторы,	Заглавие	Издательство,	Ресурс
Л1.2	Кораблёв Ф. Г.	Тензорные поля на гладких многообразиях: учебное пособие ( <a href="http://library.csu.ru/rbooks2/view2?code=local/007886/007886">http://library.csu.ru/rbooks2/view2?code=local/007886/007886</a> )	Челябинск : Издательство Челябинского государственног о университета, 2022	ЭБС
Л1.3	Горлач Б. А.	Тензорная алгебра и тензорный анализ ( <a href="https://e.lanbook.com/book/211781">https://e.lanbook.com/book/211781</a> )	Санкт- Петербург : Лань, 2022	ЭБС

#### 7.1.2. Дополнительная литература

	Авторы,	Заглавие	Издательство,	Ресурс
Л2.1	Быков В. М.	Дифференциальная геометрия: текст лекций	Челябинск : Челябинский государственны й университет, 1993	
Л2.2	Фоменко А. Т.	Дифференциальная геометрия и топология: дополнительные главы	Москва : Издательство Московского государственног о университета, 1983	
Л2.3	Дегтярева О. М., Хузиахметова Р. Н., Хузиахметова А. Р., Емелина И. Д.	Элементы тензорного исчисления: учебное пособие ( <a href="https://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=500689">https://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=500689</a> )	Казань : Казанский национальный исследовательск ий технологически й университет (КНИТУ), 2018	ЭБС

#### 7.3 Перечень информационных технологий

##### 7.3.1 Программное обеспечение

MS Office365

LMS Moodle

##### 7.3.2 Профессиональные базы данных и информационно-справочные системы

1. Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU (<https://elibrary.ru/defaultx.asp?>) eLIBRARY.RU : научная электронная библиотека : сайт. – Москва, 2000 – . – URL: <https://elibrary.ru>. – Режим доступа: для зарегистрир. пользователей. – Текст : электронный.

2. Реферативная база по математике MathSciNet (<https://mathscinet.ams.org/mathscinet/>) Mathematical Reviews (MR) : реферативная база данных / American Mathematical Society. – URL: <http://www.ams.org/mathscinet/>. – Яз. рус., англ. – Режим доступа: для зарегистрир. пользователей ЧелГУ. – Текст : электронный.

3. Web of Science (<https://apps.webofknowledge.com>) Web of Science : мультидисциплинарная реферативная база данных / компания Thomson Reuters. – Режим доступа: для зарегистрир. пользователей ЧелГУ. – Текст : электронный.

4. Scopus (<https://www.scopus.com>) Scopus : реферативная база данных / Elsevier BV. – URL: <http://www.scopus.com/>. – Яз. англ. – Режим доступа: для зарегистрир. пользователей ЧелГУ. – Текст : электронный.

#### 8. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Для реализации дисциплины используются учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, а также помещения для самостоятельной работы.

Учебные аудитории укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения (мультимедийное устройство, проектор, ноутбук или стационарный компьютер).



Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с подключением к сети "Интернет" и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду университета.

## 9. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

При изучении данной дисциплины используются лекции, практические (семинарские) занятия и самостоятельная работа студента. На лекциях и семинарских занятиях излагается основное содержание тем программы, рассматриваются основные методы и приёмы решения задач.

Для наиболее эффективного изучения дисциплины обучающемуся рекомендуется:

- посещать лекционные занятия, кратко и вдумчиво конспектировать материал лекции, с указанием даты проведения лекции и темы;
- посещать практические (семинарские) занятия, на которых рассматриваются основные методы и приёмы решения задач. Рекомендуется перед каждым практическим занятием выполнить домашнее задание, что позволит лучше усвоить предыдущий материал, и изучить лекционный материал по предстоящей теме;
- самостоятельно прорабатывать материал как после каждого занятия, так и по завершению темы, что позволяет связать воедино полученные сведения и составить цельную картину.

При обучении лиц с ограниченными возможностями здоровья электронное обучение, дистанционные образовательные технологии предусматривают возможность приема-передачи информации в доступных для них формах.

Реализация дисциплины с применением электронного обучения, дистанционных образовательных технологий (далее – ЭО, ДОТ) осуществляется на основании «Положения о реализации основных и дополнительных образовательных программ с применением электронного обучения и дистанционных образовательных технологий в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Челябинский государственный университет», «Положения о порядке зачета обучающимся по основным профессиональным образовательным программам высшего образования в ФГБОУ ВО «ЧелГУ» результатов освоения в организациях, осуществляющих образовательную деятельность, учебных предметов, курсов, дисциплин (модулей), практик, дополнительных образовательных программ» посредством электронной информационно-образовательной среды ФГБОУ ВО «ЧелГУ». В исключительных случаях (форс-мажор и т.п.) при реализации образовательной деятельности с применением ЭО, ДОТ могут применять компоненты, не входящие в перечень электронной информационно-образовательной среды.

## 10. СПЕЦИАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ ОБУЧАЮЩИМИСЯ С ИНВАЛИДНОСТЬЮ И ОГРАНИЧЕННЫМИ ВОЗМОЖНОСТЯМИ ЗДОРОВЬЯ

Освоение дисциплины инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья осуществляется с использованием специальных технических средств и голо информационных технологий, предоставляемых Ресурсным учебно-методическим центром по обучению инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья ЧелГУ по запросу обучающегося.

1. Мобильные специальные технические средства для лиц с нарушениями зрения: портативный компьютер с вводом/выводом шрифтом Брайля с синтезатором речи «EIBraile-W14J G2»; ноутбуки с программной экранного доступа NVDA; электронные увеличители для удаленного просмотра; видеоувеличители портативные; тифлоплеер; цифровые диктофоны.

2. Мобильные специальные технические средства для лиц с нарушениями слуха: система свободного звукового поля со встроенной совместимостью с FM-устройствами; радиоклассы «Сонет-PCM» с передатчиком, заушным индуктором и индукционной петлей; система информационная для слабослышащих переносная «Исток» А2 со встроенным плеером – звуковым информатором; документ-камера; программируемые слуховые аппараты индивидуального пользования.

3. Ассистивные информационные технологии: программное обеспечение экранного доступа с синтезом речи NVDA; программы экранного увеличения; программы речевого синтеза для компьютеров и ноутбуков; программы речевого синтеза для мобильных устройств; экранная клавиатура; экранная лупа.

При необходимости для обучающихся с нарушениями зрения на рабочих местах для проведения практических или лабораторных занятий устанавливается специальное программное обеспечение (программа речевой навигации NVDA, речевые синтезаторы, экранные лупы).

В учебных аудитории обеспечивается беспрепятственный доступ для обучающихся инвалидов и обучающихся с ограниченными возможностями здоровья. В каждой аудитории, где обучаются инвалиды и лица с ограниченными возможностями здоровья, предусматривается соответствующее количество мест для обучающихся с учетом нарушений их здоровья.

Для освоения дисциплины инвалидам и лицам с ограниченными возможностями здоровья предоставляется доступ к печатным источникам, имеющимся в научной библиотеке ЧелГУ, с помощью специальных технических средств; доступ к электронным источникам, представленным в форме электронного документа в фонде научной библиотеки



ЧелГУ или электронно-библиотечных системах, с помощью специальных технических и программных средств (рабочее место для незрячего пользователя с программным обеспечением экранного доступа с синтезом речи NVDA, рабочее место с компьютерным роллером и клавиатурой Clevy с большими кнопками и с разделяющей клавиши накладкой).

Учебно-методические материалы для обучающихся из числа инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья предоставляются в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации:

Для лиц с нарушениями зрения:

- в печатной форме увеличенным шрифтом,
- в форме электронного документа,
- в форме аудиофайла,
- в печатной форме шрифтом Брайля.

Для лиц с нарушениями слуха:

- в печатной форме,
- в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата:

- в печатной форме,
- в форме электронного документа,
- в форме аудиофайла.

Данный перечень может быть конкретизирован в зависимости от контингента обучающихся.

Для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья освоение дисциплины может быть частично или полностью осуществлено с использованием дистанционных образовательных технологий (Moodle, Adobe Connect Pro и пр.).

В освоении дисциплины инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья используется индивидуальная работа. Под индивидуальной работой подразумевается две формы взаимодействия с преподавателем: индивидуальная учебная работа (консультации), т.е. дополнительное разъяснение учебного материала и углубленное изучение материала с теми обучающимися, которые в этом заинтересованы, и индивидуальная воспитательная работа. Индивидуальные консультации направлены на индивидуализацию обучения и установлению воспитательного контакта между преподавателем и обучающимся инвалидом или обучающимся с ограниченными возможностями здоровья.

При проведении процедуры оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья по дисциплине обеспечивается выполнение следующих дополнительных требований в зависимости от индивидуальных особенностей, обучающихся:

- а) инструкция по порядку проведения процедуры оценивания предоставляется в доступной форме (устно, в письменной форме, в письменной форме шрифтом Брайля, устно с использованием услуг сурдопереводчика);
- б) доступная форма предоставления заданий оценочных средств (в печатной форме, в печатной форме увеличенным шрифтом, в печатной форме шрифтом Брайля, в форме электронного документа, задания зачитываются ассистентом, задания предоставляются с использованием сурдоперевода);
- в) доступная форма предоставления ответов на задания (письменно на бумаге, набор ответов на компьютере, письменно шрифтом Брайля, с использованием услуг ассистента, устно).

При проведении процедуры оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья предусматривается использование технических средств, необходимых им в связи с их индивидуальными особенностями. Эти средства могут быть предоставлены ЧелГУ или могут использоваться собственные технические средства. При необходимости инвалидам и лицам с ограниченными возможностями здоровья предоставляется дополнительное время для подготовки ответа на задания, процедура оценивания результатов обучения по дисциплине может проводиться в несколько этапов.

Проведение процедуры оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья допускается с использованием дистанционных образовательных технологий.

