

Документ подписан простой электронной подписью  
Информация о владельце:  
ФИО: Таскаев Сергей Валерьевич  
Должность: Ректор  
Дата подписания: 15.09.2025 11:11:17  
Уникальный программный ключ:  
04c19ed80b98f4b6c773485b9a8788b8327324



МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Челябинский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ЧелГУ»)  
Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине «Аналитическая геометрия» по  
направлению подготовки 02.03.01 «Математика и компьютерные науки» направленности «Математические  
и компьютерные методы в фундаментальных и прикладных исследованиях» ФГБОУ ВО «ЧелГУ»

Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)  
**«Аналитическая геометрия»**

Направление подготовки (специальность)  
**02.03.01 «Математика и компьютерные науки»**

Направленность (профиль)  
**«Математические и компьютерные методы в фундаментальных и прикладных исследованиях»**

Присваиваемая квалификация  
**Бакалавр**

Форма обучения  
**Очная**

Челябинск, 2025 г.



## Содержание

1. Паспорт фонда оценочных средств .....	3
2. Перечень формируемых компетенций .....	4
3. Содержание оценочных средств по дисциплине .....	5
3.1. Виды оценочных средств .....	5
3.2. Содержание оценочных средств .....	5
4. Порядок проведения и критерии оценивания промежуточной аттестации .....	12
4.1. Порядок проведения промежуточной аттестации .....	12
4.2. Критерии оценивания промежуточной аттестации по видам оценочных средств .....	12
4.3. Результаты промежуточной аттестации и уровни сформированности компетенций.....	12



## 1. Паспорт фонда оценочных средств

Направление подготовки: 02.03.01 «Математика и компьютерные науки».

Направленность: «Математические и компьютерные методы в фундаментальных и прикладных исследованиях».

Дисциплина: «Аналитическая геометрия».

Семестры: 1, 2.

Форма промежуточной аттестации: зачёт в 1 семестре, экзамен в 1 семестре, экзамен в 2 семестре.

Для оценивания результатов обучения используется балльно-рейтинговая система.



## 2. Перечень формируемых компетенций

Изучение дисциплины «Аналитическая геометрия» направлено на формирование компетенций, приведённых в 1.

Таблица 1. Результаты обучения по дисциплине.

Коды компетенции согласно ФГОС (ОПОП ВО)	Содержание компетенций согласно ФГОС (ОПОП ВО)	Индикаторы достижения компетенции согласно ОПОП	Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине
ОПК-1	Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности	ОПК-1.1. Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук ОПК-1.2. Демонстрирует умения решать типовые задачи, формулируемые в рамках математических и (или) естественных наук ОПК-1.3. Имеет навыки использования основных понятий, теорем, законов математики и (или) естественных наук для решения задач профессиональной деятельности.	Знать: <ul style="list-style-type: none"><li>• основные понятия, результаты и методы аналитической геометрии, область их применения.</li></ul> Уметь: <ul style="list-style-type: none"><li>• решать стандартные задачи по аналитической геометрии и сводить новые задачи к стандартным.</li></ul> Владеть: <ul style="list-style-type: none"><li>• методами решения геометрических задач в профессиональной деятельности.</li></ul>



### 3. Содержание оценочных средств по дисциплине

#### 3.1. Виды оценочных средств

Таблица 2. Виды оценочных средств.

№ п/п	Код компетенции / планируемые результаты обучения	Контролируемые темы / разделы	Наименование оценочного средства для текущего контроля	Наименование оценочного средства на промежуточной аттестации
1	ОПК-1 Знать:	Векторная алгебра	Контрольная работа, теоретический срез.	Вопросы к экзамену
2	• основные понятия, результаты и методы аналитической геометрии, область их применения.	Прямая линия на плоскости	Контрольная работа, теоретический срез.	Вопросы к экзамену
3		Плоскость и прямая в пространстве	Контрольная работа, теоретический срез.	Вопросы к экзамену
4	Уметь:	Преобразование координат	Контрольная работа, теоретический срез.	Вопросы к экзамену
5	• решать стандартные задачи по аналитической геометрии и сводить новые задачи к стандартным.	Кривые второго порядка	Контрольная работа, теоретический срез.	Вопросы к экзамену
6		Поверхности второго порядка	Контрольная работа, теоретический срез.	Вопросы к экзамену
	Владеть:			
	• методами решения геометрических задач в профессиональной деятельности.			

Типовые задания, критерии и показатели оценивания в рамках текущего контроля представлены в рабочей программе дисциплины (модуля). Полные комплекты оценочных средств и контрольно-измерительных материалов хранятся на кафедре.

#### 3.2. Содержание оценочных средств

Промежуточная аттестация проводится в виде экзамена.

Экзаменационный билет за 1 семестр содержит 2 теоретических вопроса и 3 практических задания.

Теоретические вопросы к экзамену за 1 семестр

1. Векторы. Определение вектора. Равенство векторов. Коллинеарность и компланарность векторов.
2. Линейные операции над векторами. Свойства операций. Теорема о коллинеарных векторах.
3. Аффинная система координат на плоскости и в пространстве. Координаты точки.
4. Координаты вектора. Прямоугольная система координат на плоскости и в пространстве.



5. Полярная система координат на плоскости. Связь с прямоугольной.
6. Цилиндрическая, сферическая системы координат в пространстве. Связь с прямоугольной.
7. Линейная комбинация векторов. Линейно зависимые, независимые векторы.
8. Свойства линейно зависимых и независимых систем векторов.
9. Геометрические свойства линейно зависимых систем векторов, состоящих из одного, двух, трех векторов. Линейная зависимость четырех векторов.
10. Базис. Базисы на прямой, плоскости, в пространстве. Координаты вектора в базисе. Сложение векторов и умножение вектора на число в координатах.
11. Деление отрезка в заданном отношении.
12. Определение скалярного произведения векторов.
13. Длина вектора. Расстояние между двумя точками. Угол между векторами.
14. Векторная ортогональная проекция и скалярная проекция вектора на ось. Свойства скалярной проекции.
15. Доказательство свойств скалярного произведения. Теорема о записи скалярного произведения в координатах.
16. Правая тройка векторов: определение и примеры.
17. Определение и свойства векторного произведения векторов. Теорема о записи векторного произведения в координатах.
18. Определение и свойства смешанного произведения векторов. Теорема о записи смешанного произведения векторов через координаты сомножителей.
19. Направляющие косинусы.
20. Общее понятие об уравнениях. Алгебраические линии и поверхности.
21. Направляющий вектор. Вектор нормали. Параметрическое уравнение прямой на плоскости.
22. Каноническое уравнение прямой на плоскости.
23. Общее уравнение прямой на плоскости. Геометрический смысл коэффициентов.
24. Критерий коллинеарности вектора и прямой.
25. Расстояние от точки до прямой на плоскости.
26. Взаимное расположение прямых на плоскости.
27. Теорема о полуплоскостях.
28. Параметрическое уравнение плоскости.
29. Общее уравнение плоскости. Геометрический смысл коэффициентов в общем уравнении плоскости.
30. Взаимное расположение плоскостей.
31. Расстояние от точки до плоскости.
32. Параметрические уравнения прямой в пространстве.
33. Каноническое уравнение прямой в пространстве.
34. Прямая как линия пересечения двух плоскостей.
35. Каноническое уравнение прямой в пространстве.
36. Взаимное расположение прямой и плоскости.
37. Взаимное расположение прямых в пространстве.
38. Расстояние от точки до прямой в пространстве.
39. Расстояние между скрещивающимися прямыми.
40. Переход от одной аффинной системы координат к другой с тем же началом.
41. Переход от одной аффинной системы координат к другой с изменением начала координат.



42. Переход от одной прямоугольной системы координат на плоскости к другой прямоугольной системе координат.
43. Определение кривой второго порядка. Корректность определения.
44. Определение эллипса. Каноническое уравнение эллипса.
45. Директориальное свойство эллипса. Оптическое свойство эллипса.
46. Определение гиперболы. Каноническое уравнение гиперболы.
47. Директориальное свойство гиперболы. Оптическое свойство гиперболы.
48. Определение параболы. Каноническое уравнение параболы. Оптическое свойство параболы.

Определения, формулировки свойств, предложений, теорем и полные доказательства приведены в системе LMS Moodle ([moodle.uio.csu.ru](http://moodle.uio.csu.ru)).

#### База практических заданий за 1 семестр

№ п/п	Формулировка вопроса	Правильный ответ
1.	В полярной системе координат даны точки А (8, $-2\pi/3$ ) и В (6, $\pi/3$ ). Найдите координаты середины отрезка АВ.	(1, $-2\pi/3$ )
2.	Найти длину суммы векторов $a$ и $b$ , если $ a =3$ , $ b =4$ и угол между $a$ и $b$ равен $\pi/3$ .	$\sqrt{37}$
3.	Найти длину вектора $a-2b$ , если $ a =1$ , $ b =2$ и угол между $a$ и $b$ равен $2\pi/3$ .	$\sqrt{21}$
4.	Найти вектор, являющийся ортогональной проекцией вектора $a=(-10, 2, -2)$ на прямую с направляющим вектором $e=(2, 2, 1)$ .	(-4, -4, -2)
5.	Найдите объем пирамиды с вершинами в точках: О (-1, -1, -1), А (1, 0, 0), В (0, 1, 0), С (0, 0, 1).	2/3
6.	Напишите уравнение плоскости, проходящей через центр системы координат и содержащей прямую $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{0} = \frac{z}{-1}$ .	$x-y+2z=0$
7.	Даны точки О (0, 0, 0), А (1, 1, 1), В (0, 1, 0) и С (0, 0, 2). Найдите расстояние между прямыми ОС и АВ.	1
8.	Выяснить взаимное расположение двух плоскостей $\begin{cases} x = 1 + u \\ y = 1 + 2u + v \\ z = 1 + 3u - v \end{cases}$ и $\begin{cases} x = 1 + u + v \\ y = -1 + 4u \\ z = 2 + u + 5v \end{cases}$ .	Параллельны
9.	Найдите объем параллелепипеда, построенного на	46



	векторах $3a-4b+4c$ , $5a+6b-2c$ и $3a+3b-2c$ , где векторы $a$ , $b$ и $c$ попарно ортогональны и имеют единичную длину.	
10.	Найдите косинус угла между прямыми $x+2y+3=0$ и $-3x+4y+1=0$ .	$1/\sqrt{5}$
11.	Найти угол между плоскостями $x+2y-z-1=0$ и $3x-5y-7z=0$ .	$\pi/2$
12.	Найти расстояние от точки $M(1, 1, 1)$ до плоскости $2x-2y+z-4=0$ .	1
13.	Найдите проекцию точки $A(2, -1, 3)$ на плоскость $3x-4y+15=0$ .	$(-1, 3, 3)$
14.	Составить уравнение эллипса, если фокусами являются точки $(\pm 1, 0)$ , а точка $(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ принадлежит эллипсу.	$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$
15.	Составить уравнение эллипса, если фокусами являются точки $(\pm 2, 0)$ , а директрисами являются прямые $x = \pm 18$ .	$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{32} = 1$
16.	Составить каноническое уравнение гиперболы, проходящей через точку $(-1, 3)$ и имеющей асимптоты, $y = \pm 2x$ .	$\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{5} = 1$ $\frac{y}{4}$
17.	Напишите каноническое уравнение параболы, фокус которой расположен в точке $(2, 0)$ . Найдите уравнение ее директрисы.	$y^2 = 8x$ , $x = -2$

Экзаменационный билет за 2 семестр содержит 2 теоретических вопроса и 2 практических задания.

#### Теоретические вопросы к экзамену за 2 семестр

1. Определение собственного вектора матрицы. Доказательство леммы о собственных векторах симметрической матрицы.
2. Доказательство леммы о приведении симметрической матрицы к диагональному виду.
3. Доказательство теоремы о приведении уравнения кривой второго порядка к каноническому виду.
4. Определение ортогонального инварианта кривой второго порядка. Доказательство леммы о характеристическом многочлене матрицы квадратичной части и следствие из нее. Доказательство леммы об определителе расширенной матрицы.
5. Определение центральной кривой второго порядка. Доказательство теоремы о нахождении центра кривой второго порядка.



6. Доказательство теоремы о распознавании центральных кривых второго порядка при помощи ортогональных инвариантов.
7. Определение ортогонального полуинварианта кривой второго порядка. Доказательство леммы о характеристическом многочлене расширенной матрицы и следствие из нее. Доказательство леммы об инвариантности параметра  $S$ .
8. Доказательство теоремы о распознавании нецентральных кривых второго порядка при помощи ортогональных инвариантов и полуинвариантов.
9. Определение аффинных преобразований плоскости и пространства.
10. Доказательство свойств аффинных преобразований.
11. Доказательство теоремы об аффинной классификации кривых второго порядка.
12. Определение поверхности второго порядка. Корректность определения.
13. Определения эллипсоида, однополостного и двуполостного гиперboloидов, эллиптического и гиперболического параболоидов. Исследование их формы и построение.
14. Определение конической поверхности. Определение эллиптического конуса и его построение. Кривые второго порядка как конические сечения.
15. Определение цилиндрической поверхности. Определения эллиптического, гиперболического и параболического цилиндров. Их построение.
16. Доказательство теоремы о прямолинейных образующих однополостного гиперboloида.
17. Доказательство теоремы о прямолинейных образующих гиперболического параболоида.
18. Доказательство леммы о диагонализируемости матрицы квадратичной части уравнения поверхности второго порядка.
19. Доказательство леммы об ортогональности собственных векторов симметрической матрицы размера  $3 \times 3$ .
20. Доказательство теоремы о приведении уравнения поверхности второго порядка к каноническому виду.
21. Определение ортогонального инварианта и полуинварианта поверхностей второго порядка. Доказательство леммы о характеристическом многочлене матрицы квадратичной части и следствие из нее. Доказательство леммы о характеристическом многочлене расширенной матрицы.
22. Определение центральной поверхности второго порядка.
23. Доказательство теоремы о нахождении центра поверхности второго порядка. Доказательство теоремы о распознавании поверхностей второго порядка при помощи ортогональных инвариантов и полуинвариантов.
24. Определение касательной прямой к поверхности второго порядка. Доказательство теоремы о касательной плоскости.
25. Описание сечений поверхности второго порядка плоскостью.
26. Доказательство теоремы об аффинной классификации поверхностей второго порядка.

Определения, формулировки свойств, предложений, теорем и полные доказательства приведены в системе LMS Moodle ([moodle.uio.csu.ru](http://moodle.uio.csu.ru)).



База практических заданий за 2 семестр.

№ п/п	Формулировка вопроса	Правильный ответ
1.	Определить канонический вид и каноническую систему координат линии второго порядка $5x^2+8xy+5y^2-18x-18y+9=0$ .	$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{9} = 1$ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
2.	Определить канонический вид и каноническую систему координат линии второго порядка $5x^2+4xy+8y^2-32x-56y+80=0$ .	$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
3.	Определить канонический вид и каноническую систему координат линии второго порядка $12xy+5y^2-12x-22y-19=0$ .	$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
4.	Определить канонический вид и каноническую систему координат линии второго порядка $x^2+2xy+y^2-8x+4=0$ .	$y^2 = 2\sqrt{2}x$ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
5.	Определить канонический вид и каноническую систему координат линии второго порядка $7x^2+16xy-23y^2-14x-16y-218=0$ .	$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
6.	Определить вид линии пересечения гиперboloида $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} - \frac{z^2}{2} = 1$ и плоскости $x=9$ .	Гипербола $\begin{cases} \frac{z^2}{16} - \frac{y^2}{64} = 1 \\ x = 9 \end{cases}$
7.	Определить вид линии, по которой плоскость $x-z=0$ пересекает поверхность $x^2+2y^2+z^2+4xy-2xz-4yz+2x-6z=0$ .	Парабола $\begin{cases} y^2 = 2x \\ x = z \end{cases}$
8.	По какой линии плоскость $x+y-z=0$ пересекает двуполостный гиперboloид $x^2+y^2-z^2 = -4$ ?	Гипербола $\begin{cases} (x')^2 - (y')^2 = 1 \\ x + y - z = -4 \end{cases}$



9.	Написать уравнение круглого конуса, касающегося плоскостей $Oxz$ и $Oyz$ по прямым $Ox$ и $Oy$ .	$z^2 = \pm 2xy$
10.	Написать уравнение эллипсоида с вершинами $(0, 0, 6)$ и $(0, 0, -2)$ , зная, что плоскость $Oxy$ пересекает его по окружности радиуса 3.	$\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{12} + \frac{(z-2)^2}{16} = 1$
11.	Написать уравнение гиперболического цилиндра с направляющей $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1, z=3$ и образующей, параллельной вектору $(1, 1, 1)$ .	$(-x+z-3)^2 - \frac{(-y+z-3)^2}{4} = 1$
12.	Определить аффинный тип поверхности с помощью метода Лагранжа: $4xy+2x+4y - 6z - 3=0$ .	Гиперболический параболоид
13.	Определить аффинный тип поверхности с помощью метода Лагранжа: $2x^2+y^2+2z^2-2xy - 2yz + 4x - 2y=0$ .	Эллиптический цилиндр
14.	Определить аффинный тип поверхности с помощью метода Лагранжа: $x^2+y^2-3z^2-2xy - 6xz-6yz+2x+2y+4z=0$ .	Двуполостный гиперboloид
15.	Определить тип поверхности $-x^2-9y^2+6xy+50x-50y-15z-100=0$ .	Параболический цилиндр
16.	Определить аффинный тип поверхности с помощью метода Лагранжа: $x^2-2y^2+z^2+4xy - 8xz-4yz-14x - 4y+14z+16=0$ .	Эллиптический конус



## **4. Порядок проведения и критерии оценивания промежуточной аттестации**

### **4.1. Порядок проведения промежуточной аттестации**

Экзамен проводится в присутствии преподавателя и предполагает решение задач и развернутый, полный ответ на теоретические вопросы. Вопросы составляются с учётом материала, пройденного как на лекционных занятиях, так и на практических занятиях. Время, отводимое на выполнение итоговой работы, 90 минут.

### **4.2. Критерии оценивания промежуточной аттестации по видам оценочных средств**

Оценивание ответа на экзамене

Экзамен проводится по окончании первого семестра. Суммарный балл экзамена оценивается 40 баллами.

Экзамен состоит из 5 вопросов. Форма проведения экзамена – письменная.

Максимальная оценка за каждый вопрос составляет 8 баллов. При оценивании ответа на каждый из вопросов используется следующая шкала оценки:

8 баллов – вопрос раскрыт полностью, ошибок в ответе нет;

7 баллов – вопрос раскрыт не полностью (не менее 90%), ошибок в ответе нет;

6 баллов – вопрос раскрыт не полностью (не менее 80%), ошибок в ответе нет;

5 баллов – вопрос раскрыт не полностью (не менее 80%), 1-2 негрубые ошибки;

4 балла – вопрос раскрыт не полностью (не менее 80%), присутствуют грубые ошибки (не более двух);

3 балла – вопрос раскрыт удовлетворительно, имеются существенные недостатки по полноте и содержанию ответа;

2 балла – ответ не является логически законченным и обоснованным, поставленный вопрос раскрыт неудовлетворительно с точки зрения полноты и глубины изложения материала;

1 балл – в ответе приводятся бессистемные сведения, относящиеся к поставленному вопросу, но не дающие ответа на него;

0 баллов – отсутствует ответ на вопрос или содержание ответа не совпадает с поставленным вопросом.

### **4.3. Результаты промежуточной аттестации и уровни сформированности компетенций**

Итоговая оценка выставляется по балльной системе. Суммируются баллы, полученные за контрольные работы, домашние работы, за активную работу на занятиях, за теоретический срез знаний, баллы, полученные на экзамене. Итоговая оценка выставляется по 100-балльной шкале, исходя из полученной суммы баллов:

От 0 до 59 баллов – «неудовлетворительно»

От 60 до 74 баллов – «удовлетворительно»

От 75 до 84 баллов – «хорошо»

От 85 до 100 баллов – «отлично»

Особенности проведения процедуры оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья обозначены в рабочей программе дисциплины (модуля).



Уровни сформированности компетенций определяется следующим образом:

1. Продвинутый уровень сформированности компетенций соответствует оценке «отлично»:

Обучающийся владеет знаниями предмета в полном объеме учебной программы, достаточно глубоко осмысливает дисциплину; самостоятельно, в логической последовательности и исчерпывающе отвечает на все вопросы, подчеркивает при этом самое существенное, умеет анализировать, сравнивать, классифицировать, обобщать, конкретизировать и систематизировать изученный материал, выделять в нем главное; устанавливать причинно-следственные связи; четко формирует ответы.

2. Базовый уровень соответствует оценке «хорошо»:

Обучающийся владеет знаниями дисциплины почти в полном объеме программы (имеются пробелы знаний только в некоторых, особенно сложных разделах); самостоятельно и отчасти при наводящих вопросах дает полноценные ответы на вопросы; не всегда выделяет наиболее существенное, не допускает вместе с тем серьезных ошибок в ответах.

3. Пороговый уровень соответствует оценке «удовлетворительно»:

Обучающийся владеет основным объемом знаний по дисциплине; проявляет затруднения в самостоятельных ответах, оперирует неточными формулировками; в процессе ответов допускает ошибки по существу вопросов.

4. Низкий уровень соответствует оценке «неудовлетворительно»:

Обучающийся не освоил обязательного минимума знаний предмета, не способен ответить на вопросы даже при дополнительных наводящих вопросах экзаменатора.

