Фонд оценочных средств
для промежуточной аттестации
по дисциплине (модулю)
Уравнения математической физики

Направление подготовки (специальность)
01.03.02 – Прикладная математика и информатика

Профиль (направленность)
Прикладная математика и искусственный интеллект

Присваиваемая квалификация
Бакалавр

Форма обучения
очная

Челябинск 2025 г.

Содержание

1. ПАСПОРТ ФОНДА ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

Направление подготовки **01.03.02** – Прикладная математика и информатика
Направленность (профиль): Прикладная математика и искусственный интеллект
Дисциплина: Уравнения математической физики
Семестры изучения: 5,6
Формы промежуточной аттестации: зачет (5 семестр), экзамен(6 семестр)
Примечание: используется балльно-рейтинговая система для оценивания результатов

2. ПЕРЕЧЕНЬ ФОРМИРУЕМЫХ КОМПЕТЕНЦИЙ

2.1. Компетенции, закреплённые за дисциплиной

Изучение дисциплины «Уравнения математической физики» направлено на формирование следующих компетенций:

Коды компетенции согласно ФГОС (ОПОП ВО)	Содержание компетенций согласно ФГОС (ОПОП ВО)	Индикаторы достижения компетенции согласно ОПОП	Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине
1	2	3	4
ОПК-1	Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1. Обладает фундаментальными знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук ОПК-1.2. Демонстрирует умение решать задачи, формулируемые в рамках математических и (или) естественных наук ОПК-1.3. Имеет навыки использования основных понятий, теорем, законов математики и (или) естественных наук для решения задач профессиональной деятельности	Знать: основные факты, методы и концепции математической физики Уметь: применять математический аппарат теории уравнений с частными производными; Иметь навыки постановки и решения математических задач, приводящих к уравнениям с частными производными.

3. СОДЕРЖАНИЕ ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

3.1 Виды оценочных средств

№ п/п	Код компетенции/ планируемые результаты обучения	Контролируемые темы/ разделы	Наименование оценочного средства для текущего контроля	Наименование оценочного средства на промежуточной аттестации/№ задания
1	ОПК-1	Разделы 1-5	Контрольная работа	Экзаменационный билет
2	ОПК-3	Разделы 1-5	Контрольная работа	Экзаменационный билет

Типовые задания, критерии и показатели оценивания в рамках текущего контроля представлены в рабочей программе дисциплины (модуля). Полные комплекты оценочных средств и контрольно-измерительных материалов хранятся на кафедре.

3.2 Содержание оценочных средств

Уравнения математической физики. Контрольная работа №1.

Вариант №1

1. $y'' - 4y' + 5y = 0$

2. $y'' - 3y' + 2y = xe^{2x}$

3. $y'' - 2y' - 3y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

4. $(1 - x)u_x + (1 + y)u_y = 0$

5. $2xu_x + (y - x)u_y = x^2$

Вариант №2

1. $y'' - 6y' + 10y = 0$

2. $y'' - 5y' + 6y = (x + 1)e^{3x}$

3. $y'' + y' - 2y = \dfrac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}$

4. $(2 - x)u_x + (3 + y)u_y = 0$

5. $xu_x + 2yu_y = x^2y + u$

Уравнения математической физики. Контрольная работа №2

Вариант 1

1. Определить тип уравнения и привести его к каноническому виду

$$u_{xx} + u_{xy} - 2u_{yy} + 15u_x + 21u_y = 0$$

2. Определить тип уравнения и привести его к каноническому виду

$$u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + 3u_x = 0$$

3. Определить тип уравнения и привести его к каноническому виду

$$2u_{yy} + u_{xx} - 2u_{xy} + 2u_x - 2u_y = 0$$

4. Найти общее решение уравнения с постоянными коэффициентами

$$u_{xx} + u_{xy} - 2u_{yy} + 3(u_x - u_y) = 0$$

5. Найти общее решение уравнения с переменными коэффициентами

$$u_{xx} - u_{yy} + (x + y)(u_x - u_y) = 0$$

Вариант 2

1. Определить тип уравнения и привести его к каноническому виду

$$u_{xx} - u_{xy} - 2u_{yy} + 6u_x - 3u_y = 0$$

2. Определить тип уравнения и привести его к каноническому виду

$$u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + u_y = 0$$

3. Определить тип уравнения и привести его к каноническому виду

$$2u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + u_x = 0$$

4. Найти общее решение уравнения с постоянными коэффициентами

$$2u_{xx} + u_{xy} - u_{yy} + 6(2u_x - u_y) = 0$$

5. Найти общее решение уравнения с переменными коэффициентами

$$2u_{xx} + u_{xy} - u_{yy} + 3\frac{2u_x - u_y}{x + 2y} = 0$$

Вариант 3

1. Определить тип уравнения и привести его к каноническому виду

$$u_{xx} + u_{xy} - 2u_{yy} - 6u_x - 3u_y = 0$$

2. Определить тип уравнения и привести его к каноническому виду

$$u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 2u_y + u_x = 0$$

3. Определить тип уравнения и привести его к каноническому виду

$$5u_{xx} - 4u_{xy} + 8u_{yy} - 6u_x + 6u_y = 0$$

4. Найти общее решение уравнения с постоянными коэффициентами

$$u_{xx} - 4u_{xy} + 4u_{yy} - 4(u_x - 2u_y) = 0$$

5. Найти общее решение уравнения с переменными коэффициентами

$$2u_{xx} - u_{xy} - u_{yy} + 3\,(u_x - u_y)\sin(x+y) = 0$$

Вариант 4

1. Определить тип уравнения и привести его к каноническому виду

$$2u_{xx} + u_{xy} - u_{yy} - 6(u_x + u_y) = 0$$

2. Определить тип уравнения и привести его к каноническому виду

$$u_{xx} - 4u_{xy} + 4u_{yy} + 4u_x = 0$$

3. Определить тип уравнения и привести его к каноническому виду

$$u_{yy} - 2u_{xy} + 2u_{xx} - u_y = 0$$

4. Найти общее решение уравнения с постоянными коэффициентами

$$4u_{xx} - 4u_{xy} + u_{yy} - u_x + \frac{u_y}{2} = 0$$

5. Найти общее решение уравнения с переменными коэффициентами

$$2u_{xx} + u_{xy} - u_{yy} + 3\,(u_x - u_y)\cos(x+2y) = 0$$

Уравнения математической физики. Контрольная работа №3

Вариант 1

1. Найти решение задачи Коши для однородного волнового уравнения при $x \in \mathbb{R}$ и $t > 0$

$$u_{tt} - u_{xx} = 0,$$
$$u|_{t=0} = \sin x,$$
$$u_t|_{t=0} = x$$

2. Найти решение задачи Коши для неоднородного волнового уравнения при $x \in \mathbb{R}$ и $t > 0$

$$u_{tt} - u_{xx} = \sin t,$$
$$u|_{t=0} = 0,$$
$$u_t|_{t=0} = \cos x$$

3. Найти решение задачи Коши для однородного волнового уравнения при $x > 0$ и $t > 0$

$$u_{tt} - u_{xx} = 0,$$
$$u|_{t=0} = 2\cos 3x,$$
$$u_t|_{t=0} = \sin x,$$
$$u_x|_{x=0} = 0$$

4. Найти решение задачи Коши для однородного волнового уравнения при $x > 0$ и $t > 0$

$$u_{tt} - u_{xx} = 0,$$
$$u|_{t=0} = x^{-2}(1 - \cos x),$$
$$u_t|_{t=0} = \sin x,$$
$$u|_{x=0} = \cos t$$

5. Найти решение задачи Коши для неоднородного волнового уравнения при $x > 0$ и $t > 0$

$$u_{tt} - u_{xx} = (t^2 + 2)\sin x,$$
$$u|_{t=0} = e^{-x^2},$$
$$u_t|_{t=0} = \cos x,$$
$$u_x|_{x=0} = t^2$$

Вариант 2

1. Найти решение задачи Коши для однородного волнового уравнения при $x \in \mathbb{R}$ и $t > 0$

$$\begin{aligned} &u_{tt} - 4u_{xx} = 0,\\ &u|_{t=0} = 2\cos 3x,\\ &u_t|_{t=0} = \sin x \end{aligned}$$

2. Найти решение задачи Коши для неоднородного волнового уравнения при $x \in \mathbb{R}$ и $t > 0$

$$\begin{aligned} &u_{tt} - u_{xx} = x,\\ &u|_{t=0} = x^2,\\ &u_t|_{t=0} = x^3 \end{aligned}$$

3. Найти решение задачи Коши для однородного волнового уравнения при $x > 0$ и $t > 0$

$$\begin{aligned} &u_{tt} - u_{xx} = 0,\\ &u|_{t=0} = \sin x,\\ &u_t|_{t=0} = x,\\ &u_x|_{x=0} = 0 \end{aligned}$$

4. Найти решение задачи Коши для однородного волнового уравнения при $x > 0$ и $t > 0$

$$\begin{aligned} &u_{tt} - u_{xx} = 0,\\ &u|_{t=0} = e^{-x^2},\\ &u_t|_{t=0} = \cos^2 x,\\ &u|_{x=0} = te^{-t} \end{aligned}$$

5. Найти решение задачи Коши для неоднородного волнового уравнения при $x > 0$ и $t > 0$

$$\begin{aligned} &u_{tt} - u_{xx} = e^{-t}\cos x,\\ &u|_{t=0} = \frac{1}{2}\cos x + e^{-x},\\ &u_t|_{t=0} = \frac{1}{2}\cos x + \sin x,\\ &u|_{x=0} = \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{1+t^2} \end{aligned}$$

Вариант 3

1. Найти решение задачи Коши для однородного волнового уравнения при $x \in \mathbb{R}$ и $t > 0$

$$\begin{aligned} &4u_{tt} - u_{xx} = 0, \\ &u|_{t=0} = \frac{1}{3}\sin 3x, \\ &u_t|_{t=0} = 2\cos x \end{aligned}$$

2. Найти решение задачи Коши для неоднородного волнового уравнения при $x \in \mathbb{R}$ и $t > 0$

$$\begin{aligned} &u_{tt} - u_{xx} = x^3, \\ &u|_{t=0} = x^2, \\ &u_t|_{t=0} = x \end{aligned}$$

3. Найти решение задачи Коши для однородного волнового уравнения при $x > 0$ и $t > 0$

$$\begin{aligned} &u_{tt} - u_{xx} = 0, \\ &u|_{t=0} = 2\cos x, \\ &u_t|_{t=0} = \sin^2 x, \\ &u_x|_{x=0} = 0 \end{aligned}$$

4. Найти решение задачи Коши для однородного волнового уравнения при $x > 0$ и $t > 0$

$$\begin{aligned} &u_{tt} - u_{xx} = 0, \\ &u|_{t=0} = \frac{1-\cos x}{x^2}, \\ &u_t|_{t=0} = e^{-x}, \\ &u|_{x=0} = \cos t \end{aligned}$$

5. Найти решение задачи Коши для неоднородного волнового уравнения при $x > 0$ и $t > 0$

$$\begin{aligned} &u_{tt} - u_{xx} = t(t^2+6)\cos x, \\ &u|_{t=0} = \frac{1}{1+x^2}, \\ &u_t|_{t=0} = \sin x, \\ &u_x|_{x=0} = \sin t \end{aligned}$$

Вариант 4

1. Найти решение задачи Коши для однородного волнового уравнения при $x \in \mathbb{R}$ и $t > 0$

$$u_{tt} - 9u_{xx} = 0,$$
$$u|_{t=0} = \frac{1}{1 + e^{-x^2}},$$
$$u_t|_{t=0} = \sin x$$

2. Найти решение задачи Коши для неоднородного волнового уравнения при $x \in \mathbb{R}$ и $t > 0$

$$u_{tt} - u_{xx} = xt,$$
$$u|_{t=0} = x^2,$$
$$u_t|_{t=0} = 0$$

3. Найти решение задачи Коши для однородного волнового уравнения при $x > 0$ и $t > 0$

$$u_{tt} - u_{xx} = 0,$$
$$u|_{t=0} = 2\cos^2 x,$$
$$u_t|_{t=0} = \sin x,$$
$$u_x|_{x=0} = 0$$

4. Найти решение задачи Коши для однородного волнового уравнения при $x > 0$ и $t > 0$

$$u_{tt} - u_{xx} = 0,$$
$$u|_{t=0} = \frac{\tan x}{x},$$
$$u_t|_{t=0} = \cos x,$$
$$u|_{x=0} = \sin 2t$$

5. Найти решение задачи Коши для неоднородного волнового уравнения при $x > 0$ и $t > 0$

$$u_{tt} - u_{xx} = \sin 2x \sin t,$$
$$u|_{t=0} = \cos x,$$
$$u_t|_{t=0} = 1/3 \sin 2x,$$
$$u_x|_{x=0} = 2/3 \sin t$$

Контрольная работа №4.

Во всех примерах требуется решить начально-краевую задачу на отрезке методом разделения переменных.

Вариант 1

1

$$\begin{aligned} &u_{tt} - u_{xx} = 0 \\ &u_x|_{x=0} = 0 \\ &u|_{x=\pi} = 0 \\ &u|_{t=0} = \pi^2 - x^2 \\ &u_t|_{t=0} = 0 \end{aligned}$$

2

$$\begin{aligned} &u_{tt} - u_{xx} = 0 \\ &u_x|_{x=0} = 0 \\ &u|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0 \\ &u|_{t=0} = \cos x + \cos 5x \\ &u_t|_{t=0} = 3\cos 3x \end{aligned}$$

3

$$\begin{aligned} &u_{tt} - u_{xx} = (t^2 - 4)\sin 2\pi x \\ &u|_{x=0} = 0 \\ &u|_{x=1} = 0 \\ &u|_{t=0} = 3\sin(\pi x) \\ &u_t|_{t=0} = 0 \end{aligned}$$

4

$$\begin{aligned} &u_{tt} - u_{xx} = t^3 \sin 3x + 2x \\ &u|_{x=0} = 0 \\ &u_x|_{x=\frac{\pi}{2}} = t^2 \\ &u|_{t=0} = \sin^3 x \\ &u_t|_{t=0} = \sin 3x \end{aligned}$$

Вариант 2

Во всех примерах требуется решить начально-краевую задачу на отрезке методом разделения переменных.

1

$$\begin{aligned}
&u_{tt} - u_{xx} = 0\\
&u_x|_{x=0} = 0\\
&u|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0\\
&u|_{t=0} = \frac{\pi^2}{4} - x^2\\
&u_t|_{t=0} = 0
\end{aligned}$$

2

$$\begin{aligned}
&u_{tt} - u_{xx} = 0\\
&u|_{x=0} = 0\\
&u_x|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0\\
&u|_{t=0} = \sin^3 x\\
&u_t|_{t=0} = \sin 3x
\end{aligned}$$

3

$$\begin{aligned}
&u_{tt} - u_{xx} = (2t+1)\cos\frac{3x}{2}\\
&u_x|_{x=0} = 0\\
&u|_{x=\pi} = 0\\
&u|_{t=0} = 0\\
&u_t|_{t=0} = 2\cos\frac{x}{2}
\end{aligned}$$

4

$$\begin{aligned}
&u_{tt} - u_{xx} = (t^2+1)\cos 3x + 6xt\\
&u_x|_{x=0} = t^3\\
&u|_{x=\frac{\pi}{2}} = t^3\pi/2\\
&u|_{t=0} = \cos 5x\\
&u_t|_{t=0} = \cos x
\end{aligned}$$

Вариант 3

Во всех примерах требуется решить начально-краевую задачу на отрезке методом разделения переменных.

1

$$\begin{aligned}&u_{tt} - u_{xx} = 0\\&u|_{x=0} = 0\\&u|_{x=2} = 0\\&u|_{t=0} = 0\\&u_t|_{t=0} = 2x - x^2\end{aligned}$$

2

$$\begin{aligned}&u_{tt} - u_{xx} = 0\\&u_x|_{x=0} = 0\\&u|_{x=\pi} = 0\\&u|_{t=0} = \cos^3 \frac{x}{2}\\&u_t|_{t=0} = 2\cos \frac{3x}{2}\end{aligned}$$

3

$$\begin{aligned}&u_{tt} - u_{xx} = t^3 \sin 3x\\&u|_{x=0} = 0\\&u_x|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0\\&u|_{t=0} = 2\sin(x)\\&u_t|_{t=0} = 0\end{aligned}$$

4

$$\begin{aligned}&u_{tt} - u_{xx} = (t^2 - 4)\sin 2\pi x - 2x\\&u|_{x=0} = t^2\\&u|_{x=1} = t\\&u|_{t=0} = \sin^3 \pi x\\&u_t|_{t=0} = x + \sin \pi x\end{aligned}$$

Вариант 4

Во всех примерах требуется решить начально-краевую задачу на отрезке методом разделения переменных.

1

$$\begin{aligned}
&u_{tt} - u_{xx} = 0\\
&u|_{x=0} = 0\\
&u_x|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0\\
&u|_{t=0} = 0\\
&u_t|_{t=0} = -x^2 + \pi x
\end{aligned}$$

2

$$\begin{aligned}
&u_{tt} - u_{xx} = 0\\
&u|_{x=0} = 0\\
&u|_{x=1} = 0\\
&u|_{t=0} = 3\sin 2\pi x\\
&u_t|_{t=0} = \sin^3 \pi x
\end{aligned}$$

3

$$\begin{aligned}
&u_{tt} - u_{xx} = (t^2+1)\cos 3x\\
&u_x|_{x=0} = 0\\
&u|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0\\
&u|_{t=0} = 0\\
&u_t|_{t=0} = \cos x
\end{aligned}$$

4

$$\begin{aligned}
&u_{tt} - u_{xx} = (2t+1)\cos\frac{3x}{2} + 2x\\
&u_x|_{x=0} = t^2\\
&u|_{x=\pi} = t\\
&u|_{t=0} = \cos\frac{5x}{2}\\
&u_t|_{t=0} = 1 + \cos\frac{x}{2}
\end{aligned}$$

Контрольная работа №5.

Вариант 1

1. Решить начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности в прямоугольнике

$$
\begin{aligned}
&u_t - \Delta u = 0,\\
&u_x(0, y, t) = 0\\
&u(\pi, y, t) = 0\\
&u(x, 0, t) = 0\\
&u(x, \pi, t) = 0\\
&u(x, y, 0) = (\pi - x)(\pi + x)\, y\, (\pi - y)
\end{aligned}
$$

2. Решить начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности в прямоугольнике

$$
\begin{aligned}
&u_t - \Delta u = t \sin(\pi x) \sin\left(\frac{\pi}{2} y\right),\\
&u(0, y, t) = 0\\
&u(2, y, t) = 0\\
&u(x, 0, t) = 0\\
&u_y(x, 1, t) = 0\\
&u(x, y, 0) = \sin(\pi x) \sin\left(\frac{3\pi}{2} y\right)
\end{aligned}
$$

3. Решить начально-краевую задачу для волнового уравнения в прямоугольнике

$$
\begin{aligned}
&u_{tt} - \Delta u = t \sin(x) \cos\left(\frac{y}{2}\right),\\
&u(0, y, t) = 0\\
&u(\pi, y, t) = 0\\
&u_y(x, 0, t) = 0\\
&u(x, \pi, t) = 0\\
&u(x, y, 0) = 2 \sin(x) \cos\left(\frac{y}{2}\right)\\
&u_t(x, y, 0) = \sin(x) \cos\left(\frac{y}{2}\right)
\end{aligned}
$$

Вариант 2

1. Решить начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности в прямоугольнике

$$
\begin{aligned}
&u_t - \Delta u = 0,\\
&u(0, y, t) = 0\\
&u_x(1, y, t) = 0\\
&u(x, 0, t) = 0\\
&u(x, 2, t) = 0\\
&u(x, y, 0) = x\,(2 - x)\,y\,(2 - y)
\end{aligned}
$$

2. Решить начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности в прямоугольнике

$$
\begin{aligned}
&u_t - \Delta u = e^{-t}\sin(x)\cos\left(\frac{3}{2}y\right),\\
&u(0, y, t) = 0\\
&u(\pi, y, t) = 0\\
&u_y(x, 0, t) = 0\\
&u(x, \pi, t) = 0\\
&u(x, y, 0) = \sin(2x)\cos\left(\frac{3}{2}y\right)
\end{aligned}
$$

3. Решить начально-краевую задачу для волнового уравнения в прямоугольнике

$$
\begin{aligned}
&u_{tt} - \Delta u = \sin(t)\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\sin(\pi y),\\
&u(0, y, t) = 0\\
&u_x(1, y, t) = 0\\
&u(x, 0, t) = 0\\
&u(x, 2, t) = 0\\
&u(x, y, 0) = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\sin(\pi y)\\
&u_t(x, y, 0) = 2\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\sin(\pi y)
\end{aligned}
$$

Вариант 3

1. Решить начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности в прямоугольнике

$$
\begin{aligned}
&u_t - \Delta u = 0,\\
&u(0, y, t) = 0\\
&u(\pi, y, t) = 0\\
&u_y(x, 0, t) = 0\\
&u(x, \pi, t) = 0\\
&u(x, y, 0) = x\,(\pi - x)\,(\pi - y)\,(\pi + y)
\end{aligned}
$$

2. Решить начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности в прямоугольнике

$$
\begin{aligned}
&u_t - \Delta u = t \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \sin\left(\pi y\right),\\
&u(0, y, t) = 0\\
&u_x(1, y, t) = 0\\
&u(x, 0, t) = 0\\
&u(x, 2, t) = 0\\
&u(x, y, 0) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \sin\left(2\pi y\right)
\end{aligned}
$$

3. Решить начально-краевую задачу для волнового уравнения в прямоугольнике

$$
\begin{aligned}
&u_{tt} - \Delta u = \cos(\pi t) \cos\left(\frac{3x}{2}\right) \sin\left(y\right),\\
&u_x(0, y, t) = 0\\
&u(\pi, y, t) = 0\\
&u(x, 0, t) = 0\\
&u(x, \pi, t) = 0\\
&u(x, y, 0) = 3 \cos\left(\frac{3x}{2}\right) \sin\left(y\right)\\
&u_t(x, y, 0) = \cos\left(\frac{3x}{2}\right) \sin\left(y\right)
\end{aligned}
$$

Вариант 4

1. Решить начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности в прямоугольнике

$$
\begin{aligned}
&u_t - \Delta u = 0,\\
&u(0, y, t) = 0\\
&u(2, y, t) = 0\\
&u(x, 0, t) = 0\\
&u_y(x, 1, t) = 0\\
&u(x, y, 0) = x\,(2 - x)\,y\,(2 - y)
\end{aligned}
$$

2. Решить начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности в прямоугольнике

$$
\begin{aligned}
&u_t - \Delta u = e^t \cos\left(\frac{x}{2}\right) \sin(y),\\
&u_x(0, y, t) = 0\\
&u(\pi, y, t) = 0\\
&u(x, 0, t) = 0\\
&u(x, \pi, t) = 0\\
&u(x, y, 0) = \cos\left(\frac{3x}{2}\right) \sin(y)
\end{aligned}
$$

3. Решить начально-краевую задачу для волнового уравнения в прямоугольнике

$$
\begin{aligned}
&u_{tt} - \Delta u = e^{-t} \sin(\pi x) \cos\left(\frac{\pi y}{2}\right),\\
&u(0, y, t) = 0\\
&u(2, y, t) = 0\\
&u_y(x, 0, t) = 0\\
&u(x, 1, t) = 0\\
&u(x, y, 0) = \sin(\pi x) \cos\left(\frac{\pi y}{2}\right)\\
&u_t(x, y, 0) = 3 \sin(\pi x) \cos\left(\frac{\pi y}{2}\right)
\end{aligned}
$$

Контрольная работа №6.

Вариант 1

1. Найти решение уравнения Пуассона в прямоугольнике.

Вариант 2

1. Найти решение уравнения Пуассона в прямоугольнике.

$$\Delta u = y(2-y)\sin(\pi x)$$
$$u(x,0) = x(2-x)$$
$$u_y(x,1) = 0$$

2.

$$u(0,y) = 0$$
$$u(2,y) = 0$$

2. Найти решение уравнения Лапласа в квадрате.

$$\Delta u = 0$$
$$u(x,0) = 0$$
$$u_y(x,1) = \cos(2\pi x)$$

3.

$$u_x(0,y) = \cos(\pi y)$$
$$u(1,y) = 0$$

3. Найти решение уравнения Пуассона в квадрате.

$$\Delta u = 2\sin(2x)\cos\left(\frac{y}{2}\right)$$

4.

$$u(0,y) = \cos\left(\frac{3}{2}y\right)$$
$$u(\pi,y) = \cos\left(\frac{5}{2}y\right)$$
$$u_y(x,0) = \sin(3x)$$
$$u(x,\pi) = \sin(5x)$$

4. Найти решение уравнения Лапласа вне круга.

$$\Delta u = 0, \quad 2 \leqslant r + \infty,$$
$$u_r(2,\varphi) = 2\sin\varphi + \cos 3\varphi$$

Контрольная работа № 7 (обзорная)

Вариант 1

1. Найти общее решение уравнения в частных производных первого порядка

$$2xu_x + (y-x)u_y = x^2$$

2. Привести уравнение к каноническому виду и найти его общее решение

$$u_{xx} + 5u_{xy} + 6u_{yy} + u_x - 2u_y = 0$$

3. Решить начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности в квадрате со стороной π методом разделения переменных

$$\begin{aligned}
&u_t - \Delta u = t\cos x \sin\left(\frac{5}{2}y\right),\\
&u(x,y,0) = \cos 2x \sin\left(\frac{3}{2}y\right),\\
&u(x,0,t) = 0,\\
&u_y(x,\pi,t) = 0,\\
&u_x(0,y,t) = 0,\\
&u_x(\pi,y,t) = 0.
\end{aligned}$$

Вариант 2

1. Найти общее решение уравнения в частных производных первого порядка

$$xyu_x - x^2u_y = yu$$

2. Привести уравнение к каноническому виду и найти его общее решение

$$u_{xx} + 2u_{xy} - 8u_{yy} + 2u_x + 4u_y = 0$$

3. Решить начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности в квадрате со стороной π методом разделения переменных

$$\begin{aligned}
&u_t - \Delta u = (1+t)\sin x \cos\left(\frac{3}{2}y\right),\\
&u(x,y,0) = \sin 3x \cos\left(\frac{5}{2}y\right),\\
&u_y(x,0,t) = 0,\\
&u(x,\pi,t) = 0,\\
&u(0,y,t) = 0,\\
&u(\pi,y,t) = 0.
\end{aligned}$$

Типовые контрольные вопросы для промежуточной аттестации

1. Классификация линейных ДУЧП второго порядка с двумя независимыми переменными. Канонический вид уравнений гиперболического типа.

2. Классификация линейных ДУЧП второго порядка с двумя независимыми переменными. Канонический вид уравнений параболического типа.

3. Классификация линейных ДУЧП второго порядка с двумя независимыми переменными. Канонический вид уравнений эллиптического типа.

4. Классификация уравнений второго порядка со многими независимыми переменными.

5. Корректность постановки задач математической физики. Пример задачи с не единственным решением.

6. Корректность постановки задач математической физики. Пример задачи не имеющей решение.

7. Корректность постановки задач математической физики. Пример Адамара.

8. Решение задачи Коши для одномерного волнового уравнения на числовой оси. Формула Даламбера для однородного уравнения с ненулевыми начальными условиями.

9. Решение задачи Коши для одномерного волнового уравнения на числовой оси. Формула Даламбера для неоднородного уравнения с нулевыми начальными условиями.

10. Решение задачи Коши для одномерного волнового уравнения на полуоси с закрепленным концом.

11. Решение задачи Коши для одномерного волнового уравнения на полуоси со свободным концом.

12. Формальное решение начально-краевой задачи для неоднородного волнового уравнения на отрезке методом Фурье. Случай граничного условия вида $u(0) = 0, u(l) = 0$.

13. Формальное решение начально-краевой задачи для неоднородного волнового уравнения на отрезке методом Фурье. Случай граничного условия вида $u'(0) = 0, u(l) = 0$.

14. Формальное решение начально-краевой задачи для неоднородного волнового уравнения на отрезке методом Фурье. Случай граничного условия вида $u(0) = 0, u'(l) = 0$.

15. Обоснование метода Фурье решения начально-краевой задачи для однородного волнового уравнения на отрезке. Обоснование сходимости формального ряда Фурье для граничных условий вида $u(0) = 0, u(l) = 0$.

16. Корректность начально-краевой задачи для одномерного волнового уравнения. Обоснование непрерывной зависимости решения от начальных данных .

17. Корректность начально-краевой задачи для одномерного волнового уравнения. Обоснование единственности решения .

18. Формальное решение начально-краевой задачи для неоднородного уравнения теплопроводности на отрезке методом Фурье. Случай граничного условия вида $u(0) = 0, u(l) = 0$.

19. Формальное решение начально-краевой задачи для неоднородного уравнения теплопроводности на отрезке методом Фурье. Случай граничного условия вида $u'(0) = 0, u(l) = 0$.

20. Формальное решение начально-краевой задачи для неоднородного уравнения теплопроводности на отрезке методом Фурье. Случай граничного условия вида $u(0) = 0, u'(l) = 0$.

21. Обоснование метода Фурье решения начально-краевой задачи для одномерного уравнения теплопроводности. Обоснование сходимости формального ряда Фурье.

22. Корректность начально-краевой задачи для одномерного уравнения теплопроводности. Применение принципа максимума для обоснования единственности решения.

23. Корректность начально-краевой задачи для одномерного уравнения теплопроводности. Применение принципа максимума для обоснования непрерывной зависимость от начальных данных.

24. Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности в многомерном случае (вывод формулы).

25. Решение задачи Коши для волнового уравнения в многомерном случае (вывод формулы).

26. Решение начально-краевой задачи для двумерного уравнения теплопроводности методом Фурье в круге. Уравнение цилиндрических функций (функций Бесселя).
27. Решение начально-краевой задачи для двумерного волнового уравнения методом Фурье в прямоугольнике.
28. Решение начально-краевой задачи для двумерного уравнения теплопроводности методом Фурье в прямоугольнике.
29. Решение краевой задачи для уравнения Лапласа и Пуассона в прямоугольнике методом Фурье.
30. Решение краевой задачи для уравнения Лапласа и Пуассона в круге методом Фурье.
31. Свойства гармонических функций
32. Обоснование единственности и непрерывной зависимости от граничных условий решения первой краевой задачи для уравнения Лапласа.
33. Метод функции Грина для решения уравнений Лапласа и Пуассона.

Типовые контрольные задания для промежуточной аттестации

1. Найти общее решение уравнения в частных производных первого порядка

$$yu_x + 2xu_y = u$$

$$yu_x + xu_y = x - y$$

$$\checkmark x^2u_x + y^2u_y = x^2 - y^2$$

$$(1+x)u_x + yu_y = 1 + x - y$$

$$xu_x + (1+y)u_y = 1 + y - x$$

$$\sin xu_x + \sin yu_y = \sin x - \sin y$$

2. Привести уравнение к каноническому виду и найти его общее решение

$$u_{xx} - \frac{5}{2}u_{xy} + u_{yy} + 2u_x - u_y = 0$$

$$2u_{xx} - u_{xy} - u_{yy} + 4u_x + 2u_y = 0$$

$$2u_{xx} + u_{xy} - 3u_{yy} + 2u_x + 3u_y = 0$$

$$2u_{xx} - 5u_{xy} - 3u_{yy} + 4u_x + 2u_y = 0$$

3. Решить задачу Коши для волнового уравнения на полуоси.

$$\begin{aligned} &u_{tt} - u_{xx} = 0 \\ &u(x,0) = \sin^2(x) \\ &u_t(x,0) = 0 \\ &u_x(0,t) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &u_{tt} - u_{xx} = 0 \\ &u(x,0) = \cos 2x \\ &u_t(x,0) = \sin x \sin 3x \\ &u_x(0,t) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &u_{tt} - u_{xx} = 0 \\ &u(x,0) = \sin 3x \\ &u_t(x,0) = \cos x \cos 3x \\ &u(0,t) = 0 \end{aligned}$$

$$u_{tt} - u_{xx} = 0$$
$$u(x,0) = e^{-|x|}$$
$$u_t(x,0) = \sin x$$
$$u(0,t) = 0$$

$$u_{tt} - u_{xx} = 0$$
$$u(x,0) = e^{-x^2}$$
$$u_t(x,0) = \frac{1}{1+x^2}$$
$$u_x(0,t) = 0$$

$$u_{tt} - u_{xx} = 0$$
$$u(x,0) = e^{-x^2}\sin x$$
$$u_t(x,0) = \sin x$$
$$u(0,t) = 0$$

4. Решить начально-краевую задачу для волнового уравнения на отрезке методом разделения переменных

$$u_{tt} - u_{xx} = 2x + 3\sin 3\pi x$$
$$u(0,t) = 0$$
$$u(1,t) = t^2$$
$$u(x,0) = \sin 2\pi x$$
$$u_t(x,0) = 0$$

$$u_{tt} - u_{xx} = 6xt + t\sin \pi x$$
$$u(0,t) = t$$
$$u(1,t) = t^3$$
$$u(x,0) = \sin 3\pi x$$
$$u_t(x,0) = 0$$

$$u_{tt} - u_{xx} = 2(x-1) - e^{-t} + t^2\cos\frac{3\pi}{2}x$$
$$u_x(0,t) = t^2$$
$$u(1,t) = e^{-t}$$
$$u(x,0) = 1$$
$$u_t(x,0) = -1$$

$$
\begin{aligned}
&u_{tt} - u_{xx} = -4\left(\sin 2t + x\cos 2t\right) + e^{-t}\sin\frac{3\pi}{2}x\\
&u_x(0,t) = \sin 2t\\
&u(1,t) = \cos 2t\\
&u(x,0) = x + \sin\frac{\pi}{2}x\\
&u_t(x,0) = 2\cos 2t
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&u_{tt} - u_{xx} = 6xt + 2 - 6t\\
&u_x(0,t) = t^3\\
&u(1,t) = t^2\\
&u(x,0) = \cos\frac{3\pi}{2}x\\
&u_t(x,0) = 0
\end{aligned}
$$

5. Решить начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности на отрезке методом разделения переменных

$$
\begin{aligned}
&u_t - 4u_{xx} = (2t-1)x + 1 + \sin^3 \pi x\\
&u(0,t) = t\\
&u(1,t) = t^2\\
&u(x,0) = \sin 2\pi x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&u_t - u_{xx} = t\sin\frac{\pi x}{2} - e^{-t}\left(1 + 2xe^{-t}\right)\\
&u(0,t) = e^{-t}\\
&u_x(1,t) = e^{-2t}\\
&u(x,0) = 1 + x + 2\sin\frac{3\pi}{2}x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&u_t - u_{xx} = xe^{-t}\left(2\cos 2t - \sin 2t\right)\\
&u(0,t) = 0\\
&u(1,t) = e^{-t}\sin 2t\\
&u(x,0) = 2\sin 3\pi x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&u_t - u_{xx} = x - 1 + e^{-t}(1-t) + t\cos\frac{\pi}{2}x\\
&u_x(0,t) = t\\
&u(1,t) = te^{-t}\\
&u(x,0) = \cos\frac{3\pi}{2}x
\end{aligned}
$$

6. Решить начально-краевую задачу для волнового уравнения в прямоугольнике методом разделения переменных

$$
\begin{aligned}
&u_{tt} - \Delta u = t\sin 2x\sin y,\\
&u(x,y,0) = \sin x\sin 3y,\\
&u_t(x,y,0) = 0,\\
&u(0,y,t) = 0,\\
&u(\pi,y,t) = 0,\\
&u(x,0,t) = 0,\\
&u(x,\pi,t) = 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&u_{tt} - \Delta u = t\cos\frac{x}{2}\cos\frac{3y}{2},\\
&u(x,y,0) = 2\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{y}{2},\\
&u_t(x,y,0) = 0,\\
&u_x(0,y,t) = 0,\\
&u(\pi,y,t) = 0,\\
&u_y(x,0,t) = 0,\\
&u(x,\pi,t) = 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&u_{tt} - \Delta u = (1+2t)\sin 2\pi x\cos\pi y,\\
&u(x,y,0) = \sin\pi x\sin 3\pi y,\\
&u_t(x,y,0) = 0,\\
&u(0,y,t) = 0,\\
&u(1,y,t) = 0,\\
&u(x,0,t) = 0,\\
&u(x,1,t) = 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&u_{tt} - \Delta u = (3+t)\sin 2x \cos\frac{y}{2},\\
&u(x,y,0) = \sin x \cos\frac{3y}{2},\\
&u_t(x,y,0) = 0,\\
&u(0,y,t) = 0,\\
&u(\pi,y,t) = 0,\\
&u_y(x,0,t) = 0,\\
&u(x,\pi,t) = 0.
\end{aligned}
$$

7. Решить начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности в прямоугольнике методом разделения переменных

$$
\begin{aligned}
&u_t - \Delta u = e^{-t}\sin 2x \sin y,\\
&u(x,y,0) = \sin x \sin 3y,\\
&u(0,y,t) = 0,\\
&u(\pi,y,t) = 0,\\
&u(x,0,t) = 0,\\
&u(x,\pi,t) = 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&u_t - \Delta u = \sin t \cos\frac{x}{2}\cos\frac{3y}{2},\\
&u(x,y,0) = 2\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{y}{2},\\
&u_x(0,y,t) = 0,\\
&u(\pi,y,t) = 0,\\
&u_y(x,0,t) = 0,\\
&u(x,\pi,t) = 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&u_t - \Delta u = \left(1+e^{-t}\right)\sin 2\pi x \cos \pi y,\\
&u(x,y,0) = \sin \pi x \sin 3\pi y,\\
&u(0,y,t) = 0,\\
&u(1,y,t) = 0,\\
&u(x,0,t) = 0,\\
&u(x,1,t) = 0.
\end{aligned}
$$

$$u_t - \Delta u = \cos t \sin 2x \cos \frac{y}{2},$$
$$u(x,y,0) = \sin x \cos \frac{3y}{2},$$
$$u(0,y,t) = 0,$$
$$u(\pi,y,t) = 0,$$
$$u_y(x,0,t) = 0,$$
$$u(x,\pi,t) = 0.$$

8. Решить уравнение Пуассона в прямоугольнике методом разделения переменных.

$$\Delta u = 2\sin(2x)\cos\left(\frac{y}{2}\right)$$
$$u(0,y) = 0$$
$$u(\pi,y) = 0$$
$$u_y(x,0) = \sin(3x)$$
$$u(x,\pi) = \sin(5x)$$

$$\Delta u = 2\sin(2x)\cos\left(\frac{y}{2}\right)$$
$$u(0,y) = \cos\left(\frac{3}{2}y\right)$$
$$u(\pi,y) = \cos\left(\frac{5}{2}y\right)$$
$$u_y(x,0) = 0$$
$$u(x,\pi) = 0$$

$$\Delta u = 2\cos\frac{x}{2}\sin 2y$$
$$u_x(0,y) = 0$$
$$u(\pi,y) = 0$$
$$u(x,0) = \cos\frac{3x}{2}$$
$$u(x,\pi) = \cos\frac{5x}{2}$$

$$\Delta u = 2\cos\frac{x}{2}\sin 2y$$
$$u_x(0,y) = \sin y$$
$$u(\pi,y) = \sin 3y$$
$$u(x,0) = 0$$
$$u(x,\pi) = 0$$

9. Решить уравнение Лапласа в прямоугольнике методом разделения переменных.

$$\begin{aligned}
&\Delta u = 0\\
&u(0, y) = \cos\frac{3}{2}y\\
&u(\pi, y) = \cos\frac{5}{2}y\\
&u_y(x, 0) = \sin(3x)\\
&u(x, \pi) = \sin(5x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Delta u = 0\\
&u_x(0, y) = \sin y\\
&u(\pi, y) = \sin 3y\\
&u(x, 0) = \cos\frac{3x}{2}\\
&u(x, \pi) = \cos\frac{5x}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Delta u = 0\\
&u(0, y) = \sin\frac{3}{2}y\\
&u(\pi, y) = \sin\frac{5}{2}y\\
&u(x, 0) = \sin(3x)\\
&u_y(x, \pi) = \sin(5x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Delta u = 0\\
&u(0, y) = \sin y\\
&u_x(\pi, y) = \sin 3y\\
&u(x, 0) = \sin\frac{3x}{2}\\
&u(x, \pi) = \sin\frac{5x}{2}
\end{aligned}$$

10. Решить уравнение Лапласа в кольце методом разделения переменных.

$$\begin{aligned}
&\Delta u = 0, \quad 1 \leqslant r \leqslant 2,\\
&u(1, \varphi) = \sin\varphi + \cos\varphi,\\
&u(2, \varphi) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Delta u = 0, \quad 1 \leqslant r \leqslant 2,\\
&u(1,\varphi) = 0,\\
&u(2,\varphi) = \sin\varphi + \sin^2\varphi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Delta u = 0, \quad 1 \leqslant r \leqslant 2,\\
&u(1,\varphi) = 2\cos\varphi + 3\cos 2\varphi,\\
&u(2,\varphi) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Delta u = 0, \quad 1 \leqslant r \leqslant 2,\\
\checkmark\, &u(1,\varphi) = 0,\\
&u(2,\varphi) = \cos\varphi + \cos^2\varphi
\end{aligned}$$

Примеры решения типовых заданий для текущей и промежуточной аттестации

Вариант 1

Задача 1. Найти решение задачи Коши для уравнения

$$y^2 u_{xy} + u_{yy} - \frac{2}{y} u_y = 0$$

в полуплоскости $y > 0$, удовлетворяющее начальным условиям $u\big|_{y=1} = 1 - x$, $u_y\big|_{y=1} = 3$.

Решение. Сначала найдем общее решение уравнения в полуплоскости $y > 0$. Для этого приведем уравнение к каноническому виду. Характеристическое уравнение $-y^2 dxdy + dxdx = 0$ распадается на два уравнения $dx = 0, -y^2 dy + dx = 0$, для которых $x = C, 3x - y^3 = C$ являются общими интегралами. Следовательно, в уравнении нужно сделать замену переменных $\xi = x, \eta = 3x - y^3$. Тогда $u_y = -3y^2 u_\eta, \quad u_{xy} = -3y^2 u_{\xi\eta} - 9y^2 u_{\eta\eta}, u_{yy} = 9y^4 u_{\eta\eta} - 6y u_\eta$, и уравнение приводится к каноническому виду $u_{\xi\eta} = 0$. Интегрируя это уравнение, находим $u = f(\xi) + g(\eta) = f(x) + g\left(3x - y^3\right)$.

Теперь воспользуемся начальными условиями:

$$f(x) + g(3x - 1) = 1 - x$$
$$-3g'(3x - 1) = 3$$

Решая эту систему, получаем $f(x) = 2x + C, g(x) = -x - C$. Следовательно, решением задачи является функция $u(x, y) = 2x + C + (-3x + y^3 - C)$, то есть $u(x, y) = y^3 - x$.

Задача 2. Найти решение смешанной задачи для уравнения

$$u_{tt} - 9u_{xx} = 2$$

в области $x > 0$, $t > 0$, удовлетворяющее условиям

$$u\big|_{t=0} = x + x^3, \quad u_t\big|_{t=0} = -9x^2, \quad (u - u_x)\big|_{x=0} = t^2 - 1$$

Решение. Общее решение уравнения имеет вид

$$u(x, t) = f(x + 3t) + g(x - 3t) + t^2.$$

Из условий на искомую функцию получаем

$$\begin{array}{ll} f(x)+g(x)=x+x^3, & x\geq 0 \\ 3f'(x)-3g'(x)=-9x^2, & x\geq 0 \\ f(3t)+g(-3t)-f'(3t)-g'(-3t)=-1, & t\geq 0 \end{array}$$

Из первых двух уравнений этой системы находим $f(x)=\frac{1}{2}x+C$, $g(x)=\frac{1}{2}x+x^3-C$, $x\geq 0$. Подставляя найденную функцию $f(x)$ в третье уравнение системы поулчаем $g'(x)-g(x)=C+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x$, откуда $g(x)=C_1e^x+\frac{1}{2}x-C$, $\quad x\leq 0$. Из условия непрерывности фукнции $g(x)$ при $x=0$ находим $C_1=0$, то есть $C_1=0$, т. е. $g(x)=\frac{1}{2}x-C, x\leq 0$. Следовательно, решением задачи является функция

$$u(x,t)=\begin{cases}(x-3t)^2+x+t^2, & x\geq 3t\\ x+t^2, & x<3t.\end{cases}$$

Задача 3 Решить смешанную задачу для неоднородного уравнения параболического типа

$$u_t-u_{xx}=t(x+1),\quad 0<x<1,\quad t>0$$

при начальном условии

$$u|_{t=0}=0$$

и граничных условиях

$$u_x|_{x=0}=t^2,\quad u|_{x=1}=t^2$$

Решение. Представим решение задачи в виде суммы двух функций, одна из которых удовлетворяет граничным условиям. Функция $w=xt^2$ удовлетворяет краевым условиям, уравнению $w_t-w_{xx}=2xt$ и начальному условию $w|_{t=0}=0$. Поэтому функция $v=u-xt^2$ удовлетворяет уравнению

$$v_t-v_{xx}=(1-x)t$$

и условиям

$$v|_{t=0}=0,\quad v_x|_{x=0}=0,\quad v|_{x=1}=0$$

Применяя метод разделения переменных для решения однородного уравнения v_t-v_{xx} при условиях $v|_{t=0}=0$, $v_x|_{x=0}=0$, положим $v=X(x)T(t)$. Получим задачу Штурма—Лиувилля

$$X''(x)+\lambda^2X(x)=0,\quad X'(0)=0,\quad X(1)=0$$

собственными значениями которой являются числа $\lambda_n = \frac{\pi}{2} + \pi n$ натуральными n, а собственными функциями — функции

$$X_n(x) = \cos \lambda_n x$$

Решение задачи неоднородного уравнения на функцию $v(x,t)$ ищем в виде ряда

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) \cos \lambda_n x$$

Подставляя это представление функции $v(x,t)$ в уравнение, получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(T_n'(t) + \lambda_n^2 T_n(t)\right) \cos \lambda_n x = (1-x)t$$

Разложим функцию $1-x$ в ряд Фурье по системе найденных собственных функций на интервале $(0,1)$:

$$1 - x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos \lambda_n x$$

Так как

$$a_n = 2\int_0^1 (1-x) \cos \lambda_n x dx = \frac{2}{\lambda_n^2}$$

то неоднородное уравнение на коэффициенты разложения $T_n(t)$ будет иметь вид

$$T_n'(t) + \lambda_n^2 T(t) = \frac{2t}{\lambda_n^2}$$

Его решением при нулевом начальном условим $T_n(0) = 0$ является функция

$$T_n(t) = 2\lambda_n^{-6}\left(e^{-\lambda_n^2 t} + \lambda_n^2 t - 1\right)$$

Таким образом, решением исходной задачи будет функция

$$u = xt^2 + 2\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^{-6}\left(e^{-\lambda_n^2 t} + \lambda_n^2 t - 1\right) \cos \lambda_n x, \quad \lambda_n = \frac{\pi}{2} + \pi n.$$

Вариант 2

Задача 1. Найти решение задачи для уравнения

$$u_{xx} + 3u_{xy} - 4u_{yy} - u_x + u_y = 0$$

во всей плоскости, удовлетворяющее условиям $u|_{y=4x} = 5x+e^x$, $u|_{y=-x} = 1$.

Решение. Найдем общее решение уравнения. Характеристическое уравнение $(dy)^2 - 3dxdy - 4dxdx = 0$ распадается на два уравнения $dy + dx = 0, \quad dy - 4dx = 0$, для которых $y + x = C$ и $y - 4x = C$ являются общими интегралами. Заменой переменных $\xi = y + x, \quad \eta = y - 4x$ исходное уравнение приводится к каноническому виду $u_{\xi\eta} - \frac{1}{5}u_\eta = 0$. Интегрируя это уравнение, находим $u = f(\eta)e^{-\xi/5} + g(\xi) = f(y - 4x)e^{-(y+x)/5} + g(y + x)$. Воспользуемся условиями на линиях $y = 4x$, $y = -x$:

$$f(0)e^{-x} + g(5x) = 5x + e^x$$
$$f(-5x) + g(0) = 1$$

. Решая эту систему, получаем $f(x) = 1 - g(0)$, $g(x) = x + e^{x/5} - f(0)e^{-x/5}$ Следовательно,

$$u(x, y) = [1 - g(0)]e^{-(x+y)/5} + x + y + e^{(x+y)/5} - f(0)e^{-(x+y)/5}.$$

Учитывая, что из системы на функции f и g при $x = 0$ следует равенство $f(0) + g(0) = 1$ окончательно находим решение задачи:

$$u(x, y) = x + y + e^{(x+y)/5}$$

Задача 2. Найти решение смешанной задачи для уравнения

$$u_{tt} - 4u_{xx} = 6xt$$

в области $x > 0$, $t > 0$, удовлетворяющее условиям

$$u|_{t=0} = x^3, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad u|_{x=0} = t^3$$

Решение. Общее решение уравнения имеет вид $u(x,t) = f(x + 2t) + g(x - 2t) + xt^3$. Из начальных и граничного условий получаем

$$\begin{aligned} &f(x) + g(x) = x^3, && x \geq 0 \\ &f'(x) - g'(x) = 0, && x \geq 0 \\ &f(2t) + g(-2t) = t^3, && t \geq 0 \end{aligned}$$

Из первых двух уравнений этой системы находим $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + C$, $g(x) = \frac{1}{2}x^3 - C, x \geq 0$. Подставляя найденную функцию $f(x)$ в третье уравнение системы, получаем $g(x) = \frac{3}{8}x^3 - C, x \leq 0$. Следовательно, решением задачи является функция

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+2t)^3 + \frac{1}{2}(x-2t)^3 + xt^3, & x \geq 2t \\ \frac{1}{2}(x+2t)^3 + \frac{3}{8}(x-2t)^3 + xt^3, & x < 2t \end{cases}$$

Задача 3 Решить смешанную задачу для неоднородного уравнения гиперболического типа

$$u_{tt} - u_{xx} = 2t, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

при начальных условиях

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = x$$

и граничных условиях

$$u|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=1} = t$$

Решение. Решение представим в виде суммы двух функций одна из которых удовлетворяет граничным условиям. Пусть, например, $w = xt$. Тогда $w_{tt} - w_{xx} = 0$,$w|_{t=0} = 0$, $w_t|t = 0 = x$. Следовательно, функция

$$v(x,t) = u(x,t) - xt$$

удовлетворяет уравнению

$$v_{tt} - v_{xx} = 2t$$

однородным граничным условиям

$$v|_{x=0} = 0, \quad v_x|_{x=1} = 0$$

и нулевым начальным условиям

$$v|_{t=0} = 0, \quad v_t|_{t=0} = 0$$

Применяя метод разделения переменных для решения однородного уравнения $v_{tt} - v_{xx} = 0$ положим $v(x,t) = X(x)T(t)$. Приходим к следующей задаче Штурма-Лиувилля:

$$X''(x) + \lambda^2 X = 0, \quad X(0) = 0, \quad X'(1) = 0$$

Решая эту задачу, находим ее собственные значения $\lambda_n = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ и соответствующие собственные функции

$$X_n(x) = \sin \lambda_n x$$

Решение неоднородной задачи на функцию $v(x,t)$ ищем в виде ряда

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) \sin \lambda_n x$$

где

$$T_n(0) = 0, \quad T_n'(0) = 0$$

Подставляя представление искомой функции в виде ряда в уравнение получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(T_n''(t) + \lambda_n^2 T_n(t)\right) \sin \lambda_n x = 2t$$

Для нахождения функции $T_n(t)$ разложим единицу в ряд Фурье по системе найденных собственных функций на интервале $(0,1)$:

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin \lambda_n x$$

Так как

$$\int\limits_0^1 \sin^2 \lambda_n x dx = \frac{1}{2}, \quad \text{то} \quad a_n = \int\limits_0^1 \sin \lambda_n x dx = \frac{2}{\lambda_n},$$

поэтому

$$T_n''(t) + \lambda_n^2 T_n(t) = \frac{4t}{\lambda_n}$$

Общее решение этого уравнения имеет вид:

$$T_n(t) = \frac{4t}{\lambda_n^3} + A \sin \lambda_n t + B \cos \lambda_n t$$

Учитывая начальные условия на функции $T_n(t)$, можем найти коэффициенты A, B и записать решение как

$$T_n(t) = \frac{4t}{\lambda_n^3} - \frac{4}{\lambda_n^4} \sin \lambda_n t$$

Таким образом, окончательное решение исходной задачи таково:

$$u = xt + 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^4} (\lambda_n t - \sin \lambda_n t) \sin \lambda_n x, \quad \lambda_n = \frac{\pi}{2} + \pi n.$$

4. ПОРЯДОК ПРОВЕДЕНИЯ И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ

ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

4.1. Порядок проведения промежуточной аттестации

В пятом семестре при проведении промежуточной аттестации суммируются баллы текущей аттестации (максимум 100 баллов). Зачет выставляется при количестве баллов, не меньшем 60.

В 6 семестре полученные за текущую аттестацию баллы суммируются с баллами, полученными за экзаменационную контрольную работу. Максимальный балл за текущую аттестацию составляет 50. Максимальный балл за экзаменационную работу также равен 50. В экзаменационной работе предлагается один теоретический вопрос и две задачи. Оценка за экзаменационную работу выставляется по результатам очного собеседования по теоретическому вопросу и решению задач.

Начисляемые рейтинговые баллы

5 семестр (зачет)

Контрольная № 1 - 25 баллов
Контрольная № 2 - 25 баллов
Контрольная № 3 - 25 баллов
Контрольная № 4 - 25 баллов

6 семестр (экзамен)

Контрольная № 1 - 15 баллов
Контрольная № 2 - 15 баллов
Контрольная № 3 - 20 баллов

Экзаменационная контрольная работа - 50 баллов

Собеседование по теоретическому вопросу - 20 баллов
Задача №1 - 15 баллов
Задача №2 - 15 баллов

Принимаются следующие правила согласования балльно-рейтинговой и пятибальной систем оценивания:

0 – 40 баллов – выставляется оценка “неудовлетворительно”,
41 – 60 баллов – выставляется оценка “удовлетворительно”,
61 – 80 баллов – выставляется оценка “хорошо”,
81 – 100 баллов – выставляется оценка “отлично”.

4.2. Критерии оценивания промежуточной аттестации по видам оценочных средств.

Для контрольных работ №1-6 приняты следующие критерии оценивания отдельной задачи.

1. Правильность решения задачи (80% от максимального балла за задачу). Оценивается наличие верного решения задачи, применение соответствующих методов и алгоритмов, а также получение верного ответа.
2. Структура и логика изложения (20% от максимального балла за задачу). Оценивается последовательность и четкость изложения решения, наличие всех промежуточных шагов и выводов.

Общий балл за конрольную работу является суммой баллов за решение каждой из задач. Он определяется числом задач в данной работе и максимальным баллом, которым оценивается вся работа (разблюдовку по баллам см выше).

Критерии оценивания ответа на экзаменационный билет по курсу уравнения математической физики разделяется на две части: оценка теоретического вопроса и оценка решения задач.

Теоретический вопрос (максимальная оценка - 20 баллов):

1. Знание основных понятий и терминов (6 баллов). Оценивается умение студента определить и использовать ключевые понятия и термины, связанные с темой вопроса.
2. Структура и последовательность изложения (6 баллов). Оценивается логика и структура ответа, включая последовательное и грамотное изложение материала, разбивка на подразделы, а также связь между ними.
3. Глубина понимания и анализа теоретических положений (8 баллов). Оценивается способность студента объяснить принципы и методы, привести примеры использования, а также продемонстрировать критическое мышление и аналитические способности при работе с теоретическим материалом.

Задачи (максимальная оценка - 15 баллов за каждую задачу):

1. Правильность решения задачи (9 баллов). Оценивается верное решение задачи, применение соответствующих методов и алгоритмов, а также получение корректного ответа.
2. Структура и логика изложения (3 балла). Оценивается последовательность и четкость изложения решения, наличие всех промежуточных шагов и выводов.
3. Применение теоретических знаний (3 балла). Оценивается умение студента связать решение задачи с изученными теоретическими положениями и применить их для анализа и интерпретации результатов.

4.3. Результаты промежуточной аттестации и уровни сформированности компетенций

Итоговая оценка студента: максимальный балл за экзаменационный билет составляет 50 баллов (20 баллов за теоретический вопрос и по 15 баллов за каждую из двух задач).

Особенности проведении процедуры оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья обозначены в рабочей программе дисциплины (модуля).

Уровни сформированности компетенций определяются следующим образом:

1. Высокий уровень сформированности компетенций соответствует оценке отлично

   и предполагает формирование компетенций на высоком уровне, готовность к самостоятельной профессиональной деятельности: формируются знания постановок основных задач математической физики, их решений, теорем о свойствах решений, физических законов, лежащих в основе процессов, моделями которых являются основные уравнения математической физики, основных методов решения уравнений с частными производными: разделения переменных, спуска, характеристик, функций Грина, усреднения, интегральных преобразований; формируются умения давать физическую интерпретацию решениям дифференциальных уравнений математической физики, разбираться в доказательствах и доказывать теоремы о существовании, единственности и устойчивости решений, решать задачи по нахождению решений методом разделения переменных, методом функций Грина и другими; формируются твердые навыки владения основными методами решения уравнений с частными производными и их применения в профессиональной деятельности.

2. Средний уровень соответствует оценке хорошо

   и предполагает формирование компетенций на среднем уровне: формируется комплексное знание проблематики в области математической физики, физических законов, лежащих в основе процессов, моделями которых являются основные уравнения математической физики, основных методов решения уравнений с частными производными: разделения переменных, спуска, характеристик, функций Грина, усреднения, интегральных преобразований; формируются умения давать физическую интерпретацию решениям дифференциальных уравнений математической физики, разбираться в доказательствах теорем о существовании, единственности и устойчивости решений, решать задачи по нахождению решений методом разделения переменных, методом функций Грина и другими; формируются навыки владения основными методами решения уравнений с частными производными и их применения в профессиональной деятельности.

3. Базовый уровень соответствует оценке удовлетворительно

   и предполагает формирование компетенций на начальном уровне: формируется представление о проблематике в области математической физики, физических законов, лежащих в основе процессов, моделями которых являются основные уравнения математической физики, знание основных методов решения уравнений с частными производными; формулировок теорем о существовании, единственности и устойчивости решений, формируются умения давать физическую интерпретацию решениям дифференциальных уравнений математической физики, решать задачи по нахождению решений методом разделения переменных, методом функций Грина и другими.

4. Низкий уровень соответствует оценке неудовлетворительно.

01.03.02 Прикладная математика и искусственный интеллект, Прикладная математика и информатика ФОС "Уравнения математической физики", год набора 2025, форма обучения очная

Фонд оценочных средств дисциплины (модуля) одобрен и рекомендован:

Проректор по учебной работе утверждено 24.02.25 А.А. Саламатов

Ученым советом математического факультета

Протокол заседания № 6 от 20.02.2025

Председатель Ученого совета
математического факультета согласовано Е.А. Сбродова

Заседанием кафедры вычислительной математики

Протокол заседания № 9 от 20.02.2025

Заведующий кафедрой согласовано В. Н. Павленко

Автор (составитель) В.А. Адарченко

Структура рабочей программы соответствует приказу ректора ФГБОУ ВО «ЧелГУ» от «13» апреля 2021 г. № 247-1