Рабочая программа дисциплины (модуля)*

Вариационное исчисление и оптимальное управление

Направление подготовки (специальность)

01.03.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль)

Прикладная математика и искусственный интеллект

Присваиваемая квалификация (степень)

бакалавр

Форма обучения

очная

Год(ы) набора 2025

*Рабочая программа дисциплины (модуля) адаптирована для инклюзивного обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья

Челябинск 2025 г.

Содержание

1. ЦЕЛИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Цель освоения учебной дисциплины «Вариационное исчисление и оптимальное управление» состоит в приобретении студентами теоретических знаний и практических умений и навыков по бесконечномерной оптимизации, использовании их для решения прикладных задач

Результаты обучения по дисциплине направлены на достижение индикаторов соответствующих компетенций:

ОПК-1.1. Обладает фундаментальными знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук

ОПК-1.2. Демонстрирует умение решать задачи, формулируемые в рамках математических и (или) естественных наук

ОПК-1.3. Имеет навыки использования основных понятий, теорем, законов математики и (или) естественных наук для решения задач профессиональной деятельности

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОПОП

Цикл (раздел) ОПОП:	Б1.О.19

2.1 Требования к предварительной подготовке обучающегося:

Алгебра

Математический анализ

Дифференциальные уравнения

Методы оптимизации

Функциональный анализ

2.2 Дисциплины и практики, для которых освоение данной дисциплины (модуля) необходимо как предшествующее:

Выполнение и защита выпускной квалификационной работы

3. КОМПЕТЕНЦИИ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

ОПК-1: Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности

Знать:

Для достижения ОПК 1.1: знать определения, теоремы, подходы к решению задач вариационного исчисления и оптимального управления

Уметь:

Для достижения ОПК 1.2: уметь применять методы вариационного исчисления и оптимального управления при решении конкретных задач, рассматриваемых в рамках дисциплины

Владеть:

Для достижения ОПК 1.3: владеть навыками практического использования основных понятий и методов вариационного исчисления и оптимального управления

В результате освоения дисциплины обучающийся должен

3.1	**Знать:**
3.1.1	примеры задач вариационного исчисления, необходимые условия слабого экстремума, основную лемму вариационного исчисления, уравнение Эйлера, правило множителей Лагранжа, принцип максимума Понтрягина
3.2	**Уметь:**
3.2.1	решать простейшую задачу вариационного исчисления, задачу Больца, вариационную задачу с подвижной границей, задачи со старшими производными, изопериметрические задачи, задачу Лагранжа, задачу оптимального управления
3.3	**Владеть:**
3.3.1	практического использования математического инструментария, базовых понятий и методов вариационного исчисления

4. ОБЪЕМ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Общая трудоемкость	**3 ЗЕТ**
Часов по учебному плану : 108 в том числе : аудиторные занятия : 66 самостоятельная работа : 35,3 : контактная работа: 72,7 ИКР: 6,7	Виды контроля в семестрах: зачеты 7

5. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Код занятия	Наименование разделов и тем /вид занятия/	Семестр / Курс	Часов	Литература
	Раздел 1. Основные понятия вариационного исчисления			
1.1	Примеры задач вариационного исчисления. Определение функционала. Сильный и слабый экстремумы функционала. Определение вариации функционала. Необходимое условие экстремума функционала. /Лек/	7	2	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Э1 Э2
1.2	Основные понятия вариационного исчисления. Понятие нормы. Нахождение вариации функционала /Пр/	7	4	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Э1 Э2
1.3	Решение дифференциальных уравнений в системе MAXIMA /Лаб/	7	4	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Э1 Э2
1.4	Примеры задач вариационного исчисления. Определение функционала. Сильный и слабый экстремумы функционала. Определение вариации функционала. Необходимое условие экстремума функционала. /Ср/	7	4	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Э1 Э2
	Раздел 2. Простейшая задача вариационного исчисления			
2.1	Необходимое условие слабого экстремума в простейшей задаче вариационного исчисления. Основная лемма вариационного исчисления. Уравнение Эйлера. /Лек/	7	2	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Э1 Э2
2.2	Задачи вариационного исчисления со старшими производными. Уравнение Эйлера-Пуассона. Необходимое условие слабого экстремума для случая векторной искомой функции. Система уравнений Эйлера. /Лек/	7	2	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Э1 Э2
2.3	Простейшая задача вариационного исчисления /Пр/	7	4	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Э1 Э2
2.4	Обобщения простейшей задачи вариационного исчисления /Пр/	7	6	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Э1 Э2
2.5	Поиск решения простейшей задачи вариационного исчисления в системе MAXIMA /Лаб/	7	2	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Э1 Э2
2.6	Простейшая задача вариационного исчисления. Обобщения простейшей задачи вариационного исчисления /Ср/	7	8	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Э1 Э2
	Раздел 3. Задача вариационного исчисления с подвижной границей			
3.1	Задача Больца. Условия трансверсальности. /Лек/	7	2	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Э1 Э2

3.2	Задачи вариационного исчисления с подвижной границей /Пр/	7	4	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Э1 Э2
3.3	Контрольная работа №1 /Пр/	7	2	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Э1 Э2
3.4	Нахождение экстремали в задаче со свободной границей в системе MAXIMA /Лаб/	7	2	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Э1 Э2
3.5	Нахождение экстремали в Больца в системе MAXIMA /Лаб/	7	2	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Э1 Э2
3.6	Задачи вариационного исчисления с подвижной границей /Ср/	7	4	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Э1 Э2
	Раздел 4. Правило множителей Лагранжа в гладких конечномерных задачах на условный экстремум			
4.1	Правило множителей Лагранжа в гладкой конечномерной задаче на условный экстремум. /Лек/	7	2	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Э1 Э2
4.2	Правило множителей Лагранжа /Ср/	7	4	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Э1 Э2
	Раздел 5. Изопериметрическая задача. Задача Лагранжа			
5.1	Правило множителей Лагранжа в гладких бесконечномерных задачах на условный экстремум. /Лек/	7	2	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Э1 Э2
5.2	Задача Лагранжа. Постановка задачи. Управляемый, допустимый и оптимальный процессы. Необходимые условия слабого локального минимума в задаче Лагранжа. /Лек/	7	2	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Э1 Э2
5.3	Правило множителей Лагранжа /Пр/	7	2	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Э1 Э2
5.4	Изопериметрическая задача /Пр/	7	2	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Э1 Э2
5.5	Задача Лагранжа /Пр/	7	4	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Э1 Э2
5.6	Поиск решения изопериметрической задачи в системе MAXIMA /Лаб/	7	2	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Э1 Э2
5.7	Изопериметрическая задача. Задача Лагранжа /Ср/	7	8	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Э1 Э2
	Раздел 6. Задача оптимального управления			
6.1	Постановка задачи оптимального управления. Примеры задач оптимального управления. Определение локально оптимального процесса в сильном смысле. Формулировка принципа максимума Л.С.Понтрягина. /Лек/	7	2	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Э1 Э2
6.2	Задача оптимального управления /Пр/	7	4	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Э1 Э2
6.3	Контрольная работа №2 /Пр/	7	2	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Э1 Э2

6.4	Задача оптимального управления /Ср/	7	4	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Э1 Э2
	Раздел 7. Численные методы для решения задач вариационного исчисления			
7.1	Метод начальных параметров для решения задач вариационного исчисления в системе MAXIMA /Лаб/	7	4	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Э1 Э2
7.2	Численные методы для решения задач вариационного исчисления /Ср/	7	3,3	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Э1 Э2
	Раздел 8. Иная контактная работа			
8.1	Индивидуальные консультации, Текущий контроль /ИКР/	7	6,7	Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Э1 Э2

6. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

6.1. Перечень видов оценочных средств

Контрольные работы
Лабораторные работы
Вопросы для подготовки к зачету
Тест

6.2. Типовые контрольные задания и иные материалы для текущей аттестации

Образец контрольной работы приведен в приложении

Образец лабораторной работы приведен в приложении

6.3. Типовые контрольные вопросы и задания для промежуточной аттестации

Вопросы для подготовки к зачету

1. Примеры задач вариационного исчисления.
2. Определение функционала. Сильный и слабый экстремумы функционала.
3. Определение вариации функционала. Необходимое условие экстремума функционала.
4. Простейшая задача вариационного исчисления. Необходимое условие слабого экстремума в простейшей задаче вариационного исчисления Основная лемма вариационного исчисления. Уравнение Эйлера.
5. Интегрирование уравнения Эйлера.
6. Задачи вариационного исчисления со старшими производными. Уравнение Эйлера-Пуассона.
7. Необходимое условие слабого экстремума для случая векторной искомой функции. Система уравнений Эйлера.
8. Задачи вариационного исчисления с подвижной границей. Условия трансверсальности.
9. Задача Больца. Условия трансверсальности.
10. Правило множителей Лагранжа в гладкой конечномерной задаче на условный экстремум.
11. Правило множителей Лагранжа в гладких бесконечномерных задачах на условный экстремум.
12. Изопериметрическая задача. Постановка задачи. Необходимые условия слабого локального минимума.
13. Постановка задачи Лагранжа. Управляемый, допустимый и оптимальный процессы. Необходимые условия слабого локального минимума в задаче Лагранжа.
14. Постановка задачи оптимального управления. Примеры задач оптимального управления. Определение локально оптимального процесса в сильном смысле. Формулировка принципа максимума Л.С Понтрягина.

Образец тестовых заданий приведен в приложении

6.4. Критерии оценивания

В течение учебного семестра студенты за каждый вид работы получают баллы. Кроме этого, на зачете максимально можно получить 15 баллов. Итоговая оценка складывается из суммы баллов, полученных за работу в семестре и за ответ на зачете. Затем полученная сумма баллов переводится в оценку. При этом допускается получение студентом автоматической оценки только по результатам работы в семестре.

Набранные баллы Оценка

Менее 61 незачтено
61 – 100 зачтено

Начисляемые баллы за выполнение плановых заданий

Посещение занятий - 13 баллов
Выполнение работ лабораторного практикума:
Лабораторная работа № 1 - 5 баллов
Лабораторная работа № 2- 5 баллов
Лабораторная работа № 3- 5 баллов
Лабораторная работа № 4- 5 баллов
Лабораторная работа № 5- 5 баллов
Лабораторная работа № 6- 5 баллов
Выполнение заданий на практических занятиях - 20 баллов
Контрольная работа №1 - 15 баллов
Контрольная работа №2 - 12 баллов
Своевременное выполнение заданий - 10 баллов

Контрольная работа №1 содержит пять заданий, контрольная работа №2 содержит четыре задания. За каждое из этих заданий можно получить от 0 до 3 баллов. Если задание выполнено правильно, то оно оценивается 3 баллами. Если задание выполнено с ошибками, то баллы снижаются в зависимости от количества допущенных ошибок. Если допущена одна ошибка, то здание оценивается 2 баллами, допущены две ошибки – 1 балл. Если допущено более двух ошибок в задании или студент не выполнил какое-либо задание, то за него он получает 0 баллов.

Выполнение заданий на занятиях оценивается от 0 до 3 баллов. Если задание выполнено правильно, то оно оценивается 3 баллами. Если допущена одна ошибка, то здание оценивается 2 баллами, допущены две ошибки – 1 балл. В остальных случаях студент получает 0 баллов.

Качество выполненной лабораторной работы оценивается в баллах. Для получения максимального количества баллов необходимо выполнить все задания лабораторной работы без ошибок в установленные сроки, ответить на вопросы преподавателя во время защиты работы. При защите отчетов каждому студенту предлагается ответить на несколько вопросов по теме лабораторной работы, позволяющих оценить степень самостоятельности выполненной работы. Частичное выполнение заданий, допущенные ошибки при их выполнении или при ответе на вопросы преподавателя приводят к снижению количества баллов за лабораторную работу.

На зачете студенты выполняют тест. Продолжительность зачета – 60 минут. Студент выполняет 15 тестовых заданий. Если задание выполнено правильно, то оно оценивается 1 баллом.

7. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

7.1. Рекомендуемая литература

7.1.1. Основная литература

	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год	Ресурс
Л1.1	Никитина С. А., Ухоботов В. И.	Основы вариационного исчисления и оптимального управления: учебное пособие (http://library.csu.ru/rbooks2/view2? code=local/007730/nikitinasa)	Челябинск : Издательство Челябинского государственного университета, 2016	ЭБС
Л1.2	Абдрахманов В. Г., Рабчук А. В.	Элементы вариационного исчисления и оптимального управления. Теория, задачи, индивидуальные задания (https://e.lanbook.com/book/211535)	Санкт- Петербург : Лань, 2022	ЭБС
Л1.3	Киселев В.Ю.	Вариационное исчисление и теория оптимального управления: учебное пособие (https://znanium.com/catalog/document?id=432974)	Вологда : Инфра-Инженерия, 2023	ЭБС

7.1.2. Дополнительная литература

	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год	Ресурс
Л2.1	Гюнтер Н. М.	Курс вариационного исчисления (https://e.lanbook.com/book/210236)	Санкт- Петербург : Лань, 2022	ЭБС
Л2.2	Толпегин О. А.	Математическое программирование. Вариационное исчисление: учебное пособие для вузов (https://urait.ru/bcode/538075)	Москва : Юрайт, 2024	ЭБС

7.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет"

Э1	КиберЛенинка - научная электронная библиотека (журналы) http://cyberleninka.ru
Э2	Единое окно доступа к информационным ресурсам [Электронный ресурс] : сайт / ФГАУ ГНИИ ИТТ «Информика». – Москва, 2005 – . – URL: http://window.edu.ru/

7.3 Перечень информационных технологий

7.3.1 Программное обеспечение

Maxima

LMS Moodle

7.3.2 Профессиональные базы данных и информационно-справочные системы

1. Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU (https://elibrary.ru/defaultx.asp?) eLIBRARY.RU : научная электронная библиотека : сайт. – Москва, 2000 – . – URL: https://elibrary.ru. – Режим доступа: для зарегистрир. пользователей. – Текст : электронный.

2. Реферативная база по математике MathSciNet (https://mathscinet.ams.org/mathscinet/) Mathematical Reviews (MR) : реферативная база данных / American Mathematical Society. – URL: http://www.ams.org/mathscinet/. – Яз. рус., англ. – Режим доступа: для зарегистрир. пользователей ЧелГУ. – Текст : электронный.

8. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Для реализации дисциплины используются учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, практических занятий, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, компьютерные классы для проведения лабораторных работ, а также помещения для самостоятельной работы.

Учебные аудитории укомплектованы специализированной мебелью (подразумевается наличие стандартных рабочих (посадочных) мест) и техническими средствами обучения (переносное и / или стационарное мультимедийное оборудование: экран, ноутбук, проектор).

Для проведения занятий лекционного типа предлагаются наборы демонстрационного оборудования и учебно- наглядных пособий (мультимедийные презентации по отдельным темам, рисунки, таблицы, схемы и т.д).

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с подключением к сети "Интернет" и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду университета

9. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Учебным планом предусмотрена самостоятельная работа студентов. Самостоятельная работа проводится с целью углубления знаний по дисциплине и предусматривает:
• проработку теоретического материала по учебникам или конспекту лекций с обязательным разбором приведенных примеров;
• подготовку к практическим занятиям;
• подготовку к лабораторным занятиям;
• подготовку к контрольным работам;
• подготовку к сдаче зачета.

При планировании времени на самостоятельную работу студентам необходимого предусмотреть регулярное повторение пройденного материала. Теоретический материал, законспектированный на лекциях, необходимо дополнять сведениями из литературных источников, представленных в рабочей программе.

Студент обязан в полном объёме использовать время самостоятельной работы, предусмотренное настоящей рабочей программой, для изучения соответствующих разделов дисциплины, и своевременно обращаться к преподавателю в случае возникновения затруднений при выполнении самостоятельной работы.

В случае применения при изучении дисциплины электронного обучения, дистанционных образовательных технологий общение обучающихся и преподавателя осуществляется в режиме реального или отложенного времени, при этом используются возможности системы дистанционного обучения Moodle и электронная почта.

Большую часть времени обучающиеся самостоятельно работают с учебно-методическими материалами. Студенты имеют возможность консультироваться с преподавателем по всем вопросам, возникающим в ходе самостоятельной работы, посредством электронной почты, сообщений системы дистанционного обучения Moodle.
Доступ обучающегося к учебным ресурсам в режиме отложенного времени, самостоятельной работы осуществляется через сеть Интернет в удобном для него месте, времени и темпе.

При обучении лиц с ограниченными возможностями здоровья электронное обучение, дистанционные образовательные технологии предусматривают возможность приема-передачи информации в доступных для них формах.
Реализация дисциплины с применением электронного обучения, дистанционных образовательных технологий (далее – ЭО, ДОТ) осуществляется на основании «Положения о реализации основных и дополнительных образовательных программ с применением электронного обучения и дистанционных образовательных технологий в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Челябинский государственный университет», «Положения о порядке зачета обучающимся по основным профессиональным образовательным программам высшего образования в ФГБОУ ВО «ЧелГУ» результатов освоения в организациях, осуществляющих образовательную деятельность, учебных предметов, курсов, дисциплин (модулей), практик, дополнительных образовательных программ» посредством электронной информационно-образовательной среды ФГБОУ ВО «ЧелГУ». В исключительных случаях (форс-мажор и т.п.) при реализации образовательной деятельности с применением ЭО, ДОТ могут применять компоненты, не входящие в перечень электронной информационно- образовательной среды.

10. СПЕЦИАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ ОБУЧАЮЩИМИСЯ С ИНВАЛИДНОСТЬЮ И ОГРАНИЧЕННЫМИ ВОЗМОЖНОСТЯМИ ЗДОРОВЬЯ

Освоение дисциплины инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья осуществляется с использованием специальных технических средств и информационных технологий, предоставляемых Ресурсным учебно-методическим центром по обучению инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья ЧелГУ по запросу обучающегося (мобильные специальные технические средства для лиц с нарушениями зрения и с нарушением слуха, ассистивные информационные технологии).
При необходимости для обучающихся с нарушениями зрения на рабочих местах для проведения практических или лабораторных занятий устанавливается специальное программное обеспечение (программа речевой навигации, речевые синтезаторы, экранные лупы).
В учебные аудитории обеспечивается беспрепятственный доступ для обучающихся с инвалидностью и с ограниченными возможностями здоровья. В каждой аудитории, где обучаются инвалиды и лица с ограниченными возможностями здоровья, предусматривается соответствующее количество мест для обучающихся с учетом нарушений их здоровья.
Для освоения дисциплины инвалидам и лицам с ограниченными возможностями здоровья предоставляется доступ к печатным источникам, имеющимся в научной библиотеке ЧелГУ, с помощью специальных технических средств; доступ с помощью специальных технических и программных средств к электронным источникам, представленным в форме электронного документа в фонде научной библиотеки ЧелГУ или электронно-библиотечных системах.
Учебно-методические материалы для обучающихся из числа инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья предоставляются в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и особенностям восприятия информации.
Для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья освоение дисциплины может быть частично или полностью осуществлено с использованием дистанционных образовательных технологий.
При проведении промежуточной аттестации по дисциплине обучающимся с инвалидностью и с ограниченными возможностями здоровья обеспечивается по их заявлению предоставление в доступной форме в зависимости от их индивидуальных особенностей инструкции о порядке проведения промежуточной аттестации, оценочных средств и возможности ответов на задания (письменно на бумаге, набор ответов на компьютере, письменно шрифтом Брайля, с использованием услуг ассистента, устно).
При проведении процедуры оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья предусматривается использование предоставленных ЧелГУ или собственных технических средств, необходимых им в связи с их индивидуальными особенностями. При необходимости инвалидам и лицам с ограниченными возможностями здоровья предоставляется дополнительное время для подготовки ответа на задания, процедура оценивания результатов обучения по дисциплине может проводиться в несколько этапов.

Вариант 1	**Вариант 2**
1. Найти вариацию функционала $$J[x]=\int_0^2\left(x'^2+x\right)dt$$ 2. Найти допустимую экстремаль функционала. Доказать, что на полученной экстремали достигается экстремум функционала $$J[x]=\int_0^2\left(x'^2-4x'\sin 2t-t^2\right)dt;$$ $x(0)=-1$, $x(2)=-\cos 4$. 3. Найти допустимую экстремаль функционала, зависящего от двух функций $$J[x_1, x_2]=\int_0^1\left(2x_1'+x_1'^2-x_2'^2+(x_1+x_2)^2\right)dt;$$ $x_1(0)=0$, $x_1(1)=2$, $x_2(0)=0$, $x_2(1)=4$. 4. Найти допустимую экстремаль в задаче Больца $$\int_0^1(x'^2+2xx'+4x^2)dt+4x^2(0)+x^2(1)\to extr.$$ 5. Найти допустимую экстремаль функционала $$J[x]=\int_0^2\left(x'^2-\frac{2x'}{\sqrt{1+t^2}}+\sin 3t\right)dt; \quad x(0)=0.$$	1. Найти норму $y=3x^2+x$ а) в пространстве $C[0, 2]$; б) в пространстве $C^1[0, 2]$. 2. Найти допустимую экстремаль функционала. Доказать, что на полученной экстремали достигается экстремум функционала $$J[x]=\int_0^2\left(x'^2-4x'\cos 2t+5\sin 3t\right)dt;$$ $x(0)=0$, $x(2)=\sin 4$. 3. Найти допустимую экстремаль функционала, зависящего от двух функций $$J[x_1, x_2]=\int_0^1\left(x_2'+x_1'^2-x_2'^2+(x_1-x_2)^2\right)dt;$$ $x_1(0)=0$, $x_1(1)=2$, $x_2(0)=-2$, $x_2(1)=-6$. 4. Найти допустимую экстремаль в задаче Больца $$\int_0^1(x'^2+5xx'+16x^2)dt+x^2(0)+4x^2(1)\to extr.$$ 5. Найти допустимую экстремаль функционала $$J[x]=\int_1^3\left(x'^2-\frac{4x'}{t}+t\sin t\right)dt; \quad x(1)=0.$$

Вариант 1

1. Найти допустимую экстремаль функционала в задаче со старшими производными

$$J[x]=\int_0^1\left(x''^2+5x'^2+4x^2+2e^{3e}\right)dt;$$

$$x(0)=2,\quad x(1)=2\,\mathrm{ch}1,\quad x'(0)=0,\quad x'(1)=2\mathrm{sh}1.$$

2. Найти допустимую экстремаль в изопериметрической задаче

$$J[x]=\int_0^1 x'^2dt\to \mathrm{extr};$$

$$x(0)=0,\ x(1)=1,\quad \int_0^1(2x+4x')dt=1.$$

3. Решить задачу Лагранжа

$$\int_0^1 (u^2+6xu+10x^2)dt\to min,$$

$$x'=3x+u,\quad x(0)=0,\quad x(1)=-2\mathrm{sh}1.$$

4. Решить задачу оптимального управления

$$\int_0^1\left(x'^2+2x\right)dt\to min,\quad x(0)=1,\quad |x'|\le 5.$$

Вариант 2

1. Найти допустимую экстремаль функционала в задаче со старшими производными

$$J[x]=\int_0^1\left(x''^2+3x'x''+x'^2+2t\right)dt;$$

$$x(0)=2,\quad x(1)=1+e^{-1},\quad x'(0)=-1,\quad x'(1)=-e^{-1}.$$

2. Найти допустимую экстремаль в изопериметрической задаче

$$J[x]=\int_0^1\left(x'^2+7t^2\right)dt\to \mathrm{extr};$$

$$x(0)=1,\ x(1)=2,\quad \int_0^1 xdt=3.$$

3. Решить задачу Лагранжа

$$\int_0^1 (u^2-4xu+5x^2)dt\to min,$$

$$x'=-2x+u,\quad x(0)=0,\quad x(1)=-4\mathrm{sh}1.$$

4. Решить задачу оптимального управления

$$\int_0^1\left(x'^2+4x\right)dt\to min,\quad x(0)=2,\quad |x'|\le 4.$$

Лабораторная работа 2. Простейшая задача вариационного исчисления

Рассматривается задача исследования на экстремум функционала

$$J(y) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\,dx \to \text{extr} \tag{2.1}$$

с заданными граничными условиями:

$$y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2, \tag{2.2}$$

где интегрант $F(x, y, y')$ – непрерывная функция трёх переменных и дифференцируемая функция двух своих последних аргументов.

1. Необходимое условие экстремума функционала: уравнение Эйлера

Как известно из курса вариационного исчисления, функция, на которой достигается экстремум в задаче (2.1), (2.2), должна удовлетворять дифференциальному уравнению (**уравнению Эйлера**)

$$F_y - \frac{dF_{y'}}{dx} = 0 .$$

Обратное неверно: на произвольном решении уравнения Эйлера экстремум функционала может и не достигаться.

Любое решение уравнения Эйлера называется **экстремалью**.

Так как уравнение Эйлера дополняется не начальными, а граничными условиями, то теорема Коши о существовании и единственности решения дифференциального уравнения здесь неприменима. Иными словами, экстремаль не обязательно существует, а если существует, то не обязательно единственна.

Алгоритм решения в Maxima.

1. Составить уравнение Эйлера, т.е. вычислить все входящие в него производные и записать их в одном выражении, не забыв при этом « = 0 ».

2. Найти общее решение получившегося дифференциального уравнения (см. лабораторную работу 1).

3. Найти частное решение, удовлетворяющее граничным условиям (2.2).

Замечание о том, как составить уравнение Эйлера.

Прежде всего, заметим, что полная производная $\frac{dF_{y'}}{dx}$, входящая в уравнение Эйлера, вычисляется по формуле

$$\frac{dF_{y'}}{dx} = \frac{\partial F_{y'}}{\partial x} + \frac{\partial F_{y'}}{\partial y} y' + \frac{\partial F_{y'}}{\partial y'} y'' .$$

На этапе формирования уравнения, чтобы не загромождать запись, можно считать производную y' независимой переменной, обозначив ее, например, Dy. Тогда вычисление $F_{y'}$ запишется как

diff(F, Dy);

После того, как уравнение будет сформировано (и записано, например, в переменную eqn), следует с помощью функции **subst** сделать подстановку

subst(Dy='diff(y,x),eqn);

2. Частный случай: интеграл импульса

Если интегрант $F = F(x, y')$ не зависит явно от *y*, то имеет место *интеграл импульса*

$$F_{y'} = const. \tag{2.3}$$

Алгоритм решения в Maxima.

1. Составить интеграл импульса. Выражение необходимо завершить « = %k », где %k –имя произвольной константы const из (2.3) (вообще, константе из (2.3) можно дать любое имя, которое бы начиналось с символа « % » и не совпадало бы с именами системных констант).

2. Найти общее решение получившегося дифференциального уравнения.

3. Найти частное решение, с помощью граничных условий (2.2) определив константы %c и %k.

Пример поиска частного решения.

Пусть имеется общее решение некоторого дифференциального уравнения, записанное в переменную sol:

sol: y=%k*x+%c $

Требуется найти частное решение, удовлетворяющее граничным условиям $y(0)=1$, $y(2)=3$.

Решение. Создадим переменные, в которые запишем граничные условия:

x1: 0$
y1: 1$
x2: 2$
y2: 3$

Подставим граничные условия слева и справа в общее решение, чтобы получить систему линейных уравнения относительно неизвестных %k и %c.

linEq1: subst([x=x1,y=y1],sol);

linEq2: subst([x=x2,y=y2],sol);

1=%c

3=2*%k+%c

Затем с помощью функции **solve** решим систему уравнений и запишем результат в переменную con:

```
con: solve([linEq1, linEq2], [%k,%c]);
[[%k=1,%c=1]]
```

Подставив значения получившихся констант в общее решение, получим частное решение:

```
subst(con,sol);
y=x+1
```

3. Задание

Для функционалов **a)**, **b)** найти экстремали и построить их графики. Для поиска экстремали функционала **b)** воспользоваться интегралом импульса.

Вариант 1.

a). $J(y)=\int_{-1}^{1}\left(y'^2+4y^2-8xy+2x^2\right)dx;\quad y(-1)=3;\quad y(1)=1;$

b). $J(y)=\int_{0}^{2}\left(y'^2-4y'e^{2x}+\sin^2 x\right)dx;\quad y(0)=1;\quad y(2)=-2;$

Вариант 2.

a). $J(y)=\int_{-1}^{1}\left(y'^2-4y^2+2xy-x^2\right)dx;\quad y(-1)=2;\quad y(1)=4;$

b). $J(y)=\int_{0}^{2}\left(y'^2-4y'\sin 2x-x^2\right)dx;\quad y(0)=1;\quad y(2)=-1;$

Вариант 3.

a). $J(y)=\int_{-1}^{1}\left(y'^2+4y^2+4x^2y+x\cos x\right)dx;\quad y(-1)=2;\quad y(1)=0.5;$

b). $J(y)=\int_{0}^{2}\left(y'^2-4y'\cos 2x+5\sin 3x\right)dx;\quad y(0)=2;\quad y(2)=-3;$

Вариант 4.

a). $J(y)=\int_{0}^{2}\left(y'^2+9y^2+2xy-x\sin x\right)dx;\quad y(0)=1;\quad y(2)=2;$

b). $J(y)=\int_{1}^{3}\left(y'^2-\frac{4y'}{x}+x\sin x\right)dx;\quad y(1)=1;\quad y(3)=-2;$

Вариант 5.

a). $J(y)=\int_{-2}^{0}\left(y'^2-4y^2+2y+xe^{2x}\right)dx;\quad y(-2)=0;\quad y(0)=1;$

b). $J(y)=\int_{-1}^{1}\left(y'^2-2y'e^{x}+\cos x\right)dx;\quad y(-1)=2;\quad y(1)=3;$

Литература

[1] Васильева А. Б., Медведев Г.Н., Тихонов Н.А., Уразгильдина Т.А. Дифференциальные и интегральные уравнения. Вариационное исчисление. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 432 с.

1.Указать экстремаль функционала для следующей задачи вариационного исчисления $\int_0^2 \left(x'^2 - 4x'e^{2t} + \sin^2 t\right)dt \to extr;$ $\quad x(0) = 1,\ x(2) = e^4.$

1)	$x = e^t$	2)	$x = 2e^t$
3)	$x = e^{2t}$	4)	$x = e^t + c_1 t + c_2$

2. Установите вид следующей задачи вариационного исчисления

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x''^2 - 2x'^2 + x^2 - 2e^t\right)dt \to extr;$$

$$x(0) = 2,\ x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,\quad x'(0) = 1,\quad x'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\left(2 + \frac{\pi}{2}\right).$$

1)	Простейшая задача вариационного исчисления	2)	Задача Больца
3)	Задача со старшими производными	4)	Изопериметрическая задача

3.Указать экстремаль функционала для следующей задачи вариационного исчисления $\int_0^2 \left(x'^2 - 4x'\cos 2t + 5\sin 3t\right)dt \to extr;$ $\quad x(0) = 0$

1)	$x = cos2t$	2)	$x = -sin2t$
3)	$x = sin2t$	4)	$x = sin2t + at + b$

01.03.02 Прикладная математика и информатика, направленность (профиль) Прикладная математика и искусственный интеллект
Рабочая программа дисциплины "Вариационное исчисление и оптимальное управление", 2025 год набора, очная форма обучения

Проректор по учебной работе	утверждено 24.02.25	А.А. Саламатов

Ученым советом математического факультета

Протокол заседания № 6 от 20.02.2025

Председатель Ученого совета математического факультета	согласовано	Е.А. Сбродова

Заседанием кафедры теории управления и оптимизации

Протокол заседания № 8 от 20.02.2025

Заведующий кафедрой	согласовано	И. В. Изместьев
Автор (составитель)		С.А. Никитина

Структура рабочей программы соответствует приказу ректора ФГБОУ ВО «ЧелГУ» от «13» апреля 2021 г. № 247-1