# Фонд оценочных средств
# для промежуточной аттестации

по дисциплине (модулю)

***Численные методы***

Направление подготовки (специальность)
02.03.01 – Математика и компьютерные науки

Профиль (специализ.)

Математические и компьютерные методы в фундаментальных и прикладных исследованиях
Присваиваемая квалификация
Бакалавр

Форма обучения
Очная

Челябинск 2025 г.

# Содержание

1. Паспорт фонда оценочных средств
2. Перечень формируемых компетенций
2.1. Компетенции, закреплённые за дисциплиной
3. Содержание оценочных средств по дисциплине
3.1. Виды оценочных средств
3.2. Содержание оценочных средств
4. Порядок проведения и критерии оценивания промежуточной аттестации
4.1. Порядок проведения промежуточной аттестации
4.2. Критерии оценивания промежуточной аттестации по видам оценочных средств.
4.3. Результаты промежуточной аттестации и уровни сформированности компетенций

## 1. ПАСПОРТ ФОНДА ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

Направление подготовки **02.03.01** – Математика и компьютерные науки
Дисциплина: *Численные методы*
Семестры изучения: 7,8
Формы промежуточной аттестации: *зачет (7 семестр), экзамен(8 семестр)*
*Примечание:* используется балльно-рейтинговая система для оценивания результатов .

## 2. ПЕРЕЧЕНЬ ФОРМИРУЕМЫХ КОМПЕТЕНЦИЙ

### 2.1. Компетенции, закреплённые за дисциплиной

Изучение дисциплины «Численные методы» направлено на формирование следующих компетенций:

| Коды компетенции согласно ФГОС (ОПОП ВО) | Содержание компетенций согласно ФГОС (ОПОП ВО) | Индикаторы достижения компетенции согласно ОПОП | Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| УК-3 | Способен осуществлять социальное взаимодействие и реализовывать свою роль в команде | УК-3.1. Демонстрирует понимание типологии и факторов формирования команд, лидерства и способов социального взаимодействия.<br>УК-3.2. Осуществляет взаимодействие с другими членами команды, в т.ч. участвует в обмене информацией, знаниями и опытом.<br>УК-3.3. Имеет опыт участия в командной работе. | Студен должен знать: Способы взаимодействия с участниками команды в процессе работы над проектом в области численного моделирования<br><br>Студент должен уметь: осуществлять взаимодействие с участниками команды в процессе работы над проектом в области численного моделирования<br><br>Студент должен иметь навыки работы в команде в процессе работы над проектом в области численного моделирования |
| ОПК-1 | Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, | ОПК-1.1. Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук | Студен должен знать классические методы численного решения систем линейных алгебраических уравнений; основные способы интерполирования функция; |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности | ОПК-1.2. Демонстрирует умения решать типовые задачи, формулируемые в рамках математических и (или) естественных наук<br><br>ОПК-1.3. Имеет навыки использования основных понятий, теорем, законов математики и (или) естественных наук для решения задач профессиональной деятельности | основные формулы приближенного вычисления интегралов; основные формулы численного дифференцирования; классические методы решения нелинейных уравнений и систем; основные методы решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка как в одномерном, так и в многомерном пространстве; разностные методы решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка; разностные схемы для основных уравнений математической физики.<br><br>Студент должен уметь находить число итераций, необходимое для достижения заданной точности; давать оценку погрешности приближенных формул; исследовать порядок аппроксимации разностных схем; строить формулы численного дифференцирования и интегрирования исходя из соображений точности; писать компьютерные программы, реализующие основные алгоритмы численных методов<br><br>Студент должен иметь навыки применения алгоритмов численных методов |

| | | | |
|---|---|---|---|
| ОПК-4 | Способен находить, анализировать, реализовывать программно и использовать на практике математические алгоритмы, в том числе с применением современных вычислительных систем | ОПК-4.1. Демонстрирует знание теории алгоритмов, методологии и технологии программирования.<br><br>ОПК-4.2. Демонстрирует умения находить, анализировать, реализовывать программно математические алгоритмы, в том числе с применением современных вычислительных систем<br><br>ОПК-4.3. Имеет практический опыт программной реализации математических алгоритмов | Студент должен знать основные математические алгоритмы, лежащие в основе численных методов<br><br>Студент должен уметь самостоятельно находить, анализировать, реализовывать программно и использовать на практике алгоритмы численных методов , в том числе с применением современных вычислительных систем<br><br>Студент должен владеть навыками программной реализации математических алгоритмов в области численных методов |

# 3. СОДЕРЖАНИЕ ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

## 3.1 Виды оценочных средств

| № п/п | Код компетенции/<br>планируемые результаты обучения | Контролируемые темы/ разделы | Наименование оценочного средства для текущего контроля | Наименование оценочного средства на промежуточной аттестации/№ задания |
|---|---|---|---|---|
| 1 | ОПК-1: Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности<br>ОПК-4: Способен находить, анализировать, реализовывать программно и использовать на практике математические алгоритмы, в том числе с применением современных вычислительных систем | Разделы 1-3 | Коллоквиум 1 | Коллоквиум 1<br>Экзаменационная контрольная работа |
| 2 | ОПК-1: Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности<br>ОПК-4: Способен находить, анализировать, реализовывать программно и использовать на практике математические алгоритмы, в том числе с применением современных вычислительных систем | Разделы 4-6 | Коллоквиум 2 | Коллоквиум 2<br>Экзаменационная контрольная работа |
| 3 | ОПК-1: Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, | Раздел 1 | Лабораторные работы 1-3 | Лабораторные работы 1-3<br>Экзаменационн |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности<br>ОПК-4: Способен находить, анализировать, реализовывать программно и использовать на практике математические алгоритмы, в том числе с применением современных вычислительных систем | | | ая контрольная работа |
| 4 | ОПК-1: Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности<br>ОПК-4: Способен находить, анализировать, реализовывать программно и использовать на практике математические алгоритмы, в том числе с применением современных вычислительных систем | Раздел 2 | Лабораторные работы 4-5 | Лабораторные работы 4-5<br>Экзаменационная контрольная работа |
| 5 | ОПК-1: Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности<br>ОПК-4: Способен находить, анализировать, реализовывать программно и использовать на практике математические алгоритмы, в том числе с применением современных | Раздел 3 | Лабораторные работы 6-7 | Лабораторные работы 6-7<br>Экзаменационная контрольная работа |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | вычислительных систем | | | |
| 6 | ОПК-1: Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности<br>ОПК-4: Способен находить, анализировать, реализовывать программно и использовать на практике математические алгоритмы, в том числе с применением современных вычислительных систем | Раздел 4 | Лабораторные работы 8-9 | Лабораторные работы 8-9<br>Экзаменационная контрольная работа |
| 7 | ОПК-1: Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности<br>ОПК-4: Способен находить, анализировать, реализовывать программно и использовать на практике математические алгоритмы, в том числе с применением современных вычислительных систем | Раздел 5 | Лабораторные работы 10-11 | Лабораторные работы 10-11<br>Экзаменационная контрольная работа |
| 8 | УК-3: Способен осуществлять социальное взаимодействие и реализовывать свою роль в команде | Раздел 6 | Совместное выполнение лабораторной работы 12 | Совместное выполнение лабораторной работы 12<br>Экзаменационная контрольная работа |

*Примечание*: *Типовые задания, критерии и показатели оценивания в рамках текущего контроля представлены в рабочей программе дисциплины (модуля). Полные комплекты оценочных средств и контрольно-измерительных материалов хранятся на кафедре.*

## 3.2 Содержание оценочных средств

**Вопросы к коллоквиуму 1 ( 7 семестр)**

1. Алгоритм метода Гаусса.
2. Метод прогонки.
3. Метод итераций решения системы линейных уравнений. Достаточное условие сходимости. Оценка погрешности.
4. Метод Якоби. Достаточное условие сходимости.
5. Метод простой итерации. Теорема о сходимости.
6. Метод Зейделя. Достаточное условие сходимости.
7. Метод минимальных невязок. Теорема о сходимости.
8. Многочлены Чебышева.
9. Явный итерационный метод с чебышевским набором параметров.
10. Постановка задачи интерполирования.
11. Интерполяционная формула Лагранжа.
12. Определение разделенной разности. Интерполяционная формула Ньютона .
13. Оценка погрешности интерполирования.
14. Оптимальный выбор узлов интерполирования.
15. Определение кубического сплайна.
16. Понятие квадратурной формулы.
17. Квадратурная формула прямоугольников и ее порядок точности.
18. Квадратурная формула трапеций и ее порядок точности.
19. Квадратурная формула Симпсона и ее порядок точности.
20. Квадратурные формулы интерполяционного типа. Формулы для коэффициентов. Утверждения о точности.
21. Квадратурные формулы Гаусса. Критерий точности.
22. Существование и единственность квадратурных формул Гаусса.
23. Свойства квадратурных формул Гаусса.
24. Построение формул численного дифференцирования методом неопределенных коэффициентов, погрешность аппроксимации первой и второй разностной производной.

**Вопросы к коллоквиуму 2 ( 8 семестр)**

1. Метод простой итерации решения нелинейного уравнения. Достаточное условие сходимости.
2. Метод релаксации решения нелинейного уравнения.
3. Метод Ньютона. Достаточное условие сходимости.
4. Модификации метода Ньютона: случай кратного корня, модифицированный метод Ньютона, метод секущих.
5. Методы решения систем нелинейных уравнений: метод итераций, метод Ньютона.
6. Методы решения систем нелинейных уравнений: нелинейные методы Якоби и Зейделя.
7. Метод Эйлера решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения, его порядок аппроксимации.
8. Определение методов Рунге-Кутта. Теорема о сходимости.
9. Определение многошагового разностного метода решения задачи Коши.

10. Погрешность аппроксимации многошаговых разностных методов.
11. Теорема о сходимости многошагового разностного метода.
12. Построение разностной схемы интегро-интерполяционным методом. Порядок аппроксимации и порядок точности.
13. Примеры разностных схем для уравнения теплопроводности. Условия устойчивости, полученные методом гармоник. Абсолютная и условная устойчивость.
14. Аппроксимация, корректность и сходимость разностных схем.
15. Разностная задача Дирихле для уравнения Пуассона.

**Содержание лабораторных работ.**

**Лабораторная работа 1**

**Тема:** Элементы теории погрешностей

***Задание 1.*** Округляя числа до трех значащих цифр, определить абсолютную Δ и относительную δ погрешности полученных приближенных чисел.

| N вар. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***x*** | 2,1514 | 0,16152 | 0,01204 | 1,225 | 0,0015281 | 392,85 | 0,1545 | 0,003922 | 625,55 | 94,525 | 123,64 | 0,098675 |

***Задание 2.*** Определить абсолютные погрешности следующих приближенных чисел по их относительным погрешностям.

| N вар. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\tilde{x}$ | 132,67 | 2,32 | 35,72 | 0,896 | 232,44 | 26,145 | 4,567 | 0,987 | 111,43 | 468,38 | 18,135 | -5,542 |
| $\delta_x$ | 0,14% | 0,72% | 1,12% | 11% | 1,91% | 0,13% | 0,067% | 0,021% | 1,7% | 12% | 0,35% | 1,25% |

***Задание 3.*** Определить количество верных цифр в числе *x*, если известна его абсолютная погрешность.

| N вар. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\tilde{x}$ | 0,394 | 0,1132 | 38,2543 | 293,481 | 2,325 | 14,00231 | 0,0842 | 0,00381 | 32,285 | 0,2113 | 345,513 | 48,353 |
| $\Delta_x$ | $0{,}25\cdot10^{-2}$ | $0{,}1\cdot10^{-3}$ | $0{,}27\cdot10^{-2}$ | 0,11 | $0{,}1\cdot10^{-1}$ | $0{,}1\cdot10^{-3}$ | $0{,}15\cdot10^{-2}$ | $0{,}1\cdot10^{-4}$ | $0{,}2\cdot10^{-2}$ | $0{,}5\cdot10^{-2}$ | $6{,}7\cdot10^{-2}$ | $3{,}5\cdot10^{-2}$ |

***Задание 4.*** Определить количество верных цифр в числе, если известна его относительная погрешность.

| N вар. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\tilde{x}$ | 1,8921 | 0,2218 | 22,351 | 0,02425 | 0,000135 | 9,3598 | 0,11452 | 48361 | 592,8 | 14,9360 | 2,1317 | 0,3846 |
| $\delta_x$ | $0{,}1\cdot10^{-2}$ | $0{,}2\cdot10^{-1}$ | 0,1 | $0{,}5\cdot10^{-2}$ | 0,15 | 0,1% | 10% | 1% | 2% | 1% | 0,035 | 0,47 |

***Задание 5.*** Вычислить значения следующих функций при указанных значениях аргумента. Определить абсолютные и относительные погрешности результатов, считая все знаки исходных данных верными.

| N вар. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

| $F(x)$ | $x^3\sin(x)$ | $x\ln(x)$ | $e^x\cos(x)$ | $x^2\cos(x)$ | $x^2\ln(x)$ | $e^x\sin(x)$ | $x^2 tg(x)$ | $x^2/\ln(x)$ | $e^x/\sin(x)$ | $x^2 ctg(x)$ | $e^x/\cos(x)$ | $x^3\cdot\cos(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\tilde{x}$ | 1,414 | 3,142 | 1,732 | 1,414 | 3,142 | 1,732 | 1,414 | 3,142 | 1,732 | 1,414 | 1,318 | 2,154 |

***Задание 6.*** Вычислить значения следующих функций при указанных значениях переменных. Определить абсолютные и относительные погрешности результатов, считая все знаки исходных данных верными.

| N вар. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| u | $ln(x_1+x_2^2)$ | $(x_1+x_2^2)/x_3$ | $x_1x_2+x_1x_3$ | $x_3+ln(x_1+x_2^2)$ | $(x_1+x_2^3)/x_3$ | $x_1^2x_2+x_1x_3$ | $2ln(x_1^3+x_2)$ | $(x_1+x_2^3)/x_3^2$ | $x_1x_2+x_1x_3^2$ | $arctg(x_1)+x_2x_3^2$ | $(x_1^2-x_2)/x_3$ | $\ln(x_1+x_2x_3)$ |
| $\tilde{x}_1$ | 0,91 | 3,28 | 2,104 | 0,93 | 4,18 | 1,207 | 0,698 | 3,438 | 1,555 | 2,334 | 2,312 | 4,765 |
| $\tilde{x}_2$ | 1,132 | 0,932 | 1,935 | 1,231 | 0,345 | 1,467 | 1,351 | 0,873 | 2,122 | 3,663 | 1,243 | 3,586 |
| $\tilde{x}_3$ | – | 1,132 | 0,845 | 0,756 | 2,178 | 0,787 | – | 1,234 | 0,977 | 1,112 | 0,411 | 6,879 |

## Лабораторная работа 2.

**Тема:** Прямые методы решения систем линейных алгебраических уравнений.

Решить методом Гаусса СЛАУ.

1) $2,74x_1-1,18x_2+3,17x_3 = 2,18$
$1,12x_1+0,83x_2-2,16x_3 = -1,15$
$0,81x_1+1,27x_2+0,76x_3 = 3,23$

2) $4x_1+3x_2+2x_3+x_4 = 3$
$3x_1+6x_2+4x_3+2x_4 = 6$
$2x_1+4x_2+6x_3+3x_4 = 4$

3) $7,9x_1+5,6x_2+5,7x_3-7,2x_4 = 6,68$
$8,5x_1-4,8x_2+0,8x_3+3,5x_4 = 9,95$
$4,3x_1+4,2x_2-3,2x_3+9,3x_4 = 8,6$
$3,2x_1-1,4x_2-8,9x_3+3,3x_4 = 1$

4) $6x_1-x_2-x_3 = 11,33$
$-x_1+6x_2-x_3 = 32$
$-x_1-x_2+6x_3 = 42$

Решить СЛАУ методом Гаусса с выбором главного элемента по столбцу.

5) $2x1+4x2-7x3 = 1$
$3x_1+6x_2+x_3 = 0$
$x_1+3x_2+2x_3 = -1$

6) $–x1+3x2+x3 = 4$
$2x_1-6x_2-x_3 = 3$
$2x_1+5x_2+3x_3 = 1$

7) $3x_1-x_2+3x_3 = 0$
$6x_1-2x_2+x_3 = 1$
$x_1+x_2-x_3 = -2$

Решить СЛАУ методом Гаусса с выбором главного элемента по строке.

8) $x_1+2x_2-7x_3+4x_4 = 1$
$5x_1+10x_2+x_3-3x_4 = 2$
$x_1+5x_2-x_3+x_4 = -2$

9) $2x_1+x_2+2x_3-x_4 = -3$
$4x_1+2x_2-x_3+2x_4 = 3$
$x_1-x_2+x_3-x_4 = 1$

$2x_1+x_2+3x_3-x_4 = -1$ $\qquad$ $x_1+3x_2-2x_3+x_4 = 0$

10) $3x_1-x_2+x_3-5x_4 = 0$
$9x_1-3x_2+6x_3-5x_4 = 2$
$2x_1+x_2-4x_3+2x_4 = -1$
$x_1-3x_2+2x_3-x_4 = 3$

Вычислить определитель матрицы, пользуясь схемой Гаусса.

11) $\Delta=\begin{vmatrix} 1,00 & 0,42 & 0,54 & 0,66 \\ 0,42 & 1,00 & 0,32 & 0,44 \\ 0,54 & 0,32 & 1,00 & 0,22 \\ 0,66 & 0,44 & 0,22 & 1,00 \end{vmatrix}$ $\qquad$ 12) $\Delta=\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

13) $\Delta=\begin{vmatrix} 7,4 & 2,2 & -3,1 & -0,7 \\ 1,6 & 4,8 & -8,5 & 4,5 \\ 4,7 & 7,0 & -6,0 & 6,6 \\ 5,9 & 2,7 & 4,9 & -6,3 \end{vmatrix}$ $\qquad$ 14) $\Delta=\begin{vmatrix} 2,8 & 2,1 & -1,3 & 0,3 \\ -1,4 & 4,5 & -7,7 & 1,3 \\ 0,6 & 2,1 & -5,8 & 2,4 \\ 3,5 & -6,5 & 3,2 & -7,9 \end{vmatrix}$

Вычислить обратную матрицу по схеме Гаусса.

15) $A=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ $\qquad$ 16) $A=\begin{vmatrix} 1,16 & 0,83 & -0,66 \\ 0,45 & -0,54 & 0,83 \\ 0,32 & 0,28 & 1,06 \end{vmatrix}$

17) $A=\begin{vmatrix} 1,8 & -3,8 & 0,7 & -3,7 \\ 0,7 & 2,1 & -2,6 & -2,8 \\ 7,3 & 8,1 & 1,7 & -4,9 \\ 1,9 & -4,3 & -4,9 & -4,7 \end{vmatrix}$

Решить СЛАУ методом квадратного корня.

18) $1,65x_1-1,76x_2+0,77x_3 = 2,15$
$-1,76x_1+1,04x_2-2,61x_3 = 0,82$
$0,77x_1-2,61x_2-3,18x_3 = -0,73$

19) $0,53x_1-0,75x_2+1,83x_3 = 0,68$
$-0,75x_1+0,68x_2-1,19x_3 = 0,95$
$-0,75x_1+0,68x_2-1,19x_3 = 0,95$

20) $2{,}56x_1+0{,}67x_2-1{,}78x_3 = 1{,}14$
$0{,}67x_1-2{,}67x_2+1{,}35x_3 = 0{,}66$
$-1{,}78x_1+1{,}35x_2-0{,}55x_3 = 1{,}72$

21) $4{,}25x_1-1{,}48x_2+0{,}73x_3 = 1{,}44$
$-1{,}48x_1+1{,}73x_2-1{,}85x_3 = 2{,}73$
$0{,}73x_1-1{,}85x_2+1{,}36x_3 = -0{,}64$

Решить СЛАУ методом правой прогонки.

22) $-3x_1+2x_2 = 1$, $x_1+3x_2-2x_3 = 4$, $2x_2+6x_3+3x_4 = 0$, $-7x_3+9x_4+x_5 = -3$, $8x_4+x_5 = -7$
23) $2x_1+x_2 = 1$ , $x_1+3x_2+x_3 = 2$, $x_2+4x_3+2x_4 = -1$, $2x_3+5x_4+2x_5 = 0$, $2x_4+x_5 = 3$
24) $x_1+5x_2 = 0$, $x_1+7x_2-4x_3 = 1$, $-x_2+3x_3-2x_4 = 4$, $2x_3+8x_4-x_5 = 3$, $x_4-5x_5 = 0$
25) 25)$–x_1+3x_2 = 7$, $2x_1+9x_2-x_3 = 4$, $3x_2+5x_3+x_4 = -2$, $x_3-6x_4-x_5 = 1$, $2x_4+4x_5 = 1$

## Лабораторная работа 3

**Тема:** Итерационные методы решения систем линейных уравнений

### Задания

Методом итераций решить системы линейных уравнений, предварительно приведя их к виду, удобному для итераций и оценив число необходимых для этого шагов, $\varepsilon = \frac{1}{2}\cdot 10^{-3}$.

№ 1.

$$\begin{cases} -0{,}32x_1 - 1{,}27x_2 + 0{,}27x_3 - 0{,}18x_4 = -0{,}36 \\ 0{,}45x_1 - 1{,}23x_2 + 0{,}06x_3 = 0{,}88 \\ 0{,}31x_1 + 0{,}08x_2 - 0{,}77x_3 - 1{,}12x_4 = 0{,}55 \\ 0{,}05x_1 - 0{,}26x_2 - 0{,}34x_3 - 1{,}12x_4 = 1{,}17 \end{cases}$$

№ 2.

$$\begin{cases} -0{,}79x_1 + 0{,}31x_2 - 0{,}72x_4 = -0{,}11 \\ 0{,}56x_1 - x_2 - 1{,}31x_3 + 0{,}85x_4 = -0{,}52 \\ 0{,}11x_1 - 1{,}08x_3 + 0{,}78x_4 = -0{,}85 \\ 0{,}08x_1 + 0{,}09x_2 + 0{,}33x_3 - 0{,}79x_4 = 1{,}7 \end{cases}$$

№ 3.

$$\begin{cases} -x_1 + 0{,}24x_2 - 0{,}48x_3 + 0{,}23x_4 = 0{,}39 \\ -0{,}05x_1 - x_2 + 0{,}44x_3 + 0{,}31x_4 = 0{,}72 \\ -1{,}1x_1 + 0{,}27x_2 - 1{,}48x_3 - 0{,}32x_4 = 0{,}95 \\ -0{,}88x_1 + 0{,}17x_2 - 0{,}37x_3 - 0{,}77x_4 = 0{,}86 \end{cases}$$

№ 4.

$$\begin{cases} -x_1 + 0,22x_2 - 0,11x_3 + 0,31x_4 = -2,7 \\ -0,62x_1 - 0,78x_2 - 0,23x_3 + 0,53x_4 = -1,2 \\ 0,28x_1 + 0,22x_2 - 0,69x_3 - 1,51x_4 = -1,03 \\ 0,17x_1 - 0,21x_2 + 0,31x_3 - x_4 = 0,17 \end{cases}$$

Методом Якоби решить системы линейных уравнений, предварительно приведя матрицу системы к матрице с диагональным преобладанием и оценив число необходимых шагов для достижения точности 0,001.

№ 5.

$$\begin{cases} 2,3x_1 + 1,1x_2 + 0,23x_3 = 3,3 \\ -2x_1 + 1,3x_2 + 1,77x_3 = -0,7 \\ 2,5x_1 + 3,2x_2 + 2,73x_3 = 7,7 \end{cases}$$

№ 6.

$$\begin{cases} -2,4x_1 + x_2 + 1,2x_3 = 5,1 \\ 0,93x_1 - 2,5x_2 + 5,8x_3 = 11,1 \\ 1,2x_1 + 1,3x_2 + 1,4x_3 = 1,5 \end{cases}$$

№ 7.

$$\begin{cases} 1,3x_1 - 0,3x_2 + 3,8x_3 = 3,9 \\ 4,63x_1 - 4x_2 + 3,4x_3 = 9,9 \\ 1,2x_1 + 1,3x_2 - 2,6x_3 = 1,5 \end{cases}$$

№ 8.

$$\begin{cases} 2,15x_1 + 2,3x_2 - 0,3x_3 = 4 \\ 0,25x_1 + 2,5x_2 - 1,3x_3 = 2,5 \\ -0,3x_1 + 3,9x_2 + 1,2x_3 = 4,5 \end{cases}$$

Методом простой итерации решить систему линейных уравнений с точностью до 0,001.

№ 9.

$$\begin{cases} 2,8x_1 - 0,2x_2 - 0,4x_3 + 1,2x_4 = 2,23 \\ 0,42x_1 + 3,7x_2 - 1,5x_3 - 0,11x_4 = 1,71 \\ 0,05x_1 - 0,13x_2 + 2,2x_3 + 1,3x_4 = -0,54 \\ -1,2x_1 - 1,1x_2 + 2x_3 + 4,7x_4 = 0,65 \end{cases}$$

№ 10.

$$\begin{cases} 3{,}3x_1 + 1{,}2x_2 - 0{,}07x_3 + x_4 = 0{,}23 \\ 0{,}1x_1 + 2{,}7x_2 + 0{,}3x_3 - 1{,}2x_4 = 7{,}2 \\ 0{,}5x_1 - 0{,}5x_2 + 2{,}2x_3 + 0{,}5x_4 = -0{,}22 \\ 0{,}2x_1 - 0{,}3x_2 - 0{,}4x_3 + 1{,}8x_4 = -0{,}6 \end{cases}$$

№ 11.

$$\begin{cases} 3{,}4x_1 + 1{,}1x_2 + 0{,}2x_3 - 1{,}2x_4 = 2 \\ -0{,}7x_1 + 3{,}3x_2 - 0{,}3x_3 + 2x_4 = 1{,}9 \\ 0{,}4x_1 + 0{,}3x_2 + 2{,}6x_3 + 0{,}2x_4 = -0{,}4 \\ -0{,}2x_1 + 0{,}6x_2 + 0{,}4x_3 + 1{,}7x_4 = -6{,}5 \end{cases}$$

№ 12.

$$\begin{cases} 2{,}5x_1 - 0{,}12x_2 + 2{,}2x_3 + 0{,}2x_4 = -1{,}2 \\ 1{,}2x_1 + 3x_2 + x_3 - 1{,}5x_4 = 0{,}1 \\ 0{,}2x_1 - 0{,}4x_2 + 2{,}5x_3 + 0{,}7x_4 = -0{,}4 \\ 0{,}3x_1 + 0{,}7x_2 - 0{,}8x_3 + 3{,}7x_4 = 0{,}6 \end{cases}$$

Методом Зейделя решить системы линейных уравнений, приведя их к виду, удобному для итераций, $\varepsilon = \frac{1}{2}\cdot 10^{-3}$.

№ 13.

$$\begin{cases} 2{,}7x_1 + 0{,}9x_2 - 1{,}5x_3 = 3{,}5 \\ 4{,}5x_1 - 2{,}8x_2 + 6{,}7x_3 = 2{,}6 \\ 5{,}1x_1 + 3{,}7x_2 - 1{,}4x_3 = -0{,}14 \end{cases}$$

№ 14.

$$\begin{cases} 3{,}8x_1 + 6{,}7x_2 - 1{,}2x_3 = 5{,}2 \\ 6{,}4x_1 + 1{,}3x_2 - 2{,}7x_3 = 3{,}8 \\ 2{,}4x_1 - 4{,}5x_2 + 3{,}5x_3 = -0{,}6 \end{cases}$$

№ 15. $\begin{cases} 3{,}2x_1 - 11{,}5x_2 + 3{,}8x_3 = 2{,}8 \\ 0{,}8x_1 + 1{,}3x_2 - 6{,}4x_3 = -6{,}5 \\ 2{,}4x_1 + 7{,}2x_2 - 1{,}2x_3 = 4{,}5 \end{cases}$

№ 16. $\begin{cases} 5{,}6x_1 + 2{,}7x_2 - 1{,}7x_3 = 1{,}9 \\ 3{,}4x_1 - 3{,}6x_2 - 6{,}7x_3 = -2{,}4 \\ 0{,}8x_1 + 1{,}3x_2 + 3{,}7x_3 = 1{,}2 \end{cases}$

Методом верхней релаксации решить системы линейных уравнений, приведя их к виду, удобному для итераций, $\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot 10^{-3}$.

№ 17.

$$\begin{cases} 2{,}7x_1 + 3{,}3x_2 + 1{,}3x_3 = 2{,}1 \\ 3{,}5x_1 - 1{,}7x_2 + 2{,}8x_3 = 1{,}7 \\ 4{,}1x_1 + 5{,}8x_2 - 1{,}7x_3 = 0{,}8 \end{cases}$$

№ 18.

$$\begin{cases} 3{,}6x_1 + 1{,}8x_2 - 4{,}7x_3 = 3{,}8 \\ 2{,}7x_1 - 3{,}6x_2 + 1{,}9x_3 = 0{,}4 \\ 1{,}5x_1 + 4{,}5x_2 + 3{,}3x_3 = -1{,}6 \end{cases}$$

№ 19.

$$\begin{cases} 3{,}7x_1 - 2{,}3x_2 + 4{,}5x_3 = 2{,}4 \\ 2{,}5x_1 + 4{,}7x_2 - 7{,}8x_3 = 3{,}5 \\ 1{,}6x_1 + 5{,}3x_2 + 1{,}3x_3 = -2{,}4 \end{cases}$$

№ 20.

$$\begin{cases} 2{,}4x_1 + 3{,}7x_2 - 8{,}3x_3 = 2{,}3 \\ 1{,}8x_1 + 4{,}3x_2 + 1{,}2x_3 = -1{,}2 \\ 3{,}4x_1 - 2{,}3x_2 + 5{,}2x_3 = 3{,}5 \end{cases}$$

Решить системы линейных уравнений методом минимальных невязок и методом скорейшего спуска, $\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot 10^{-3}$.

№ 21.

$$\begin{cases} 2{,}74x_1 - 1{,}18x_2 + 1{,}23x_3 = 0{,}16 \\ -1{,}18x_1 + 1{,}71x_2 - 0{,}52x_3 = 1{,}81 \\ 1{,}23x_1 - 0{,}52x_2 + 0{,}62x_3 = -1{,}25 \end{cases}$$

№ 22.

$$\begin{cases} 1{,}17x_1 - 0{,}65x_2 + 1{,}54x_3 = -1{,}43 \\ -0{,}65x_1 + 1{,}16x_2 - 1{,}33x_3 = 0{,}68 \\ 1{,}54x_1 - 1{,}33x_2 + 2{,}15x_3 = 1{,}87 \end{cases}$$

№ 23.

$$\begin{cases} 3{,}74x_1 + 0{,}86x_2 + 1{,}13x_3 = 1{,}13 \\ 0{,}86x_1 + 1{,}71x_2 - 0{,}49x_3 = 1{,}88 \\ 1{,}13x_1 - 0{,}49x_2 + 1{,}26x_3 = -0{,}25 \end{cases}$$

№ 24.

$$\begin{cases} 2{,}01x_1 - 0{,}53x_2 + 1{,}13x_3 = -2{,}09 \\ -0{,}53x_1 + 1{,}62x_2 - 1{,}03x_3 = 0{,}39 \\ 1{,}13x_1 - 1{,}03x_2 + 2{,}34x_3 = 2{,}13 \end{cases}$$

## Лабораторная работа 4

**Тема:** Интерполирование алгебраическими многочленами

**Задания.**

Найти многочлен наименьшей степени, принимающий в данных точках заданные значения:

Вариант-1: Вариант-2: Вариант-3:

| X | Y | | X | Y | | X | Y |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1,45 | 3,14 | | 0 | 2 | | 0 | 1,45 |
| 1,36 | 4,15 | | 1 | 3 | | 1,5 | 3,14 |
| 1,14 | 5,65 | | 5 | 147 | | 6,8 | 4,11 |

Дана таблица значений функции f(x):

| x | 2,0 | 2,3 | 2,5 | 3,0 | 3,5 | 3,8 | 4,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | 5,848 | 6,127 | 6,300 | 6,694 | 7,047 | 7,243 | 7,368 |

Пользуясь формулой Лагранжа, найти значения функции в указанных точках:

Вариант-4: 2,22;

Вариант-5: 2,41;

Вариант-6: 2,78;

Вариант-7: 3,34;

Вариант-8: 3,75;

Вариант-9: 3,88.

Используя “барицентрический” вид многочлена Лагранжа, найти значения функций, заданных таблицами, в указанных точках:

Вариант-10:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| x | 14 | 17 | 31 | 35 |
| F(x) | 68,7 | 64,0 | 44,0 | 39,1 |

Найти f(20).

Вариант-11:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| x | 93,0 | 96,2 | 100,0 | 104,2 | 108,7 |
| f(x) | 11,38 | 12,80 | 14,70 | 17,07 | 19,91 |

Найти f(102).

Вариант-12:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| x | 0 | 2 | 3 | 6 | 7 | 9 |
| F(x) | 658503 | 704969 | 729000 | 804357 | 830584 | 884736 |

Найти f(5).

Построить интерполяционные многочлены Ньютона для функции

$f(x) = \lg x - \frac{x-1}{x}$ по следующим узлам:

Вариант-13: x=1, 2, 4, 8, 10;

Вариант-14: x=2, 4, 8, 10;

Вариант-15: x=4, 8, 10;

Вариант-16: x=2, 4, 8.

(Для всех этих случаев вычислить приближенное значение **lg5,25.** Получить оценку погрешности остаточного члена.)

По данным таблицам значений функций определить значение аргумента **x,** соответствующее указанным значениям **y,** пользуясь многочленом Ньютона**:**

Вариант-17: y=0

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| x | 1 | 2 | 2,5 | 3 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| y | -6 | -1 | 5,625 | 16 |

Вариант-18: y=20

| x | 4 | 6 | 8 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| y | 11 | 27 | 50 | 83 |

Просуммировать конечные ряды:

Вариант-19: $1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2+n^2$;

Вариант-20: $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3$;

Вариант-21: $1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2$;

Вариант-22: $1^3+3^3+5^3+\ldots+(2n-1)^3$.

Дана таблица значений функции y=shx.

| x | shx | | x | shx |
|---|---|---|---|---|
| 1,0 | 1,17520 | | 1,5 | 2,12928 |
| 1,1 | 1,33565 | | 1,6 | 2,37557 |
| 1,2 | 1,50946 | | 1,7 | 2,64563 |
| 1,3 | 1,69838 | | 1,8 | 2,94217 |
| 1,4 | 1,90430 | | | |

Найти приближенные значения shx для следующих значений аргумента:

Вариант-23: 1,01; 1,02; 1,03; 1,11; 1,12; 1,13;

(*использовать первую интерполяционную формулу Ньютона*)

Вариант-24: 1,75; 1,76; 1,78; 1,79.

( *использовать вторую интерполяционную формулу Ньютона*)

**Лабораторная работа 5.**

**Тема:** Интерполирование сплайнами

Функция $f(x)$ задана таблицей своих значений . Построить сплайн третьего порядка и вычислить значение функции в указанных точках , $M_i = S_i''(x_i)$:

**Вариант N1.**

| $i$ | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | **0.1** | **0.15** | **0.19** | **0.25** | **0.28** | **0.30** |
| $f(x_i)$ | **1.1052** | **1.1618** | **1.2092** | **1.2840** | **1.3231** | **0.3499** |

$2M_0 + M_1 = 3{,}3722$ , $0{,}5M_4 + 2M_5 = 3{,}3614$ , $x = 0{,}20$.

**Вариант N2.**

| $i$ | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | **0.2** | **0.24** | **0.26** | **0.29** | **0.32** | **0.38** |
| $f(x_i)$ | **1.2214** | **1.2712** | **1.2969** | **1.3364** | **1.3771** | **1.4623** |

$2M_0 + 0{,}1M_1 = 2{,}5699$ , $0{,}3M_4 + 2M_5 = 3{,}3378$ , $x = 0{,}31$.

**Вариант N3.**

| $i$ | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | **0.1** | **0.13** | **0.17** | **0.20** | **0.25** | **0.28** |
| $f(x_i)$ | **0.0998** | **0.1296** | **0.1692** | **0.1987** | **0.2474** | **0.2764** |

$2M_0 + 0.5M_1 = -0.2644$ , $0.4M_4 + 2M_5 = -0.6580$ , $x = 0.15$.

**Вариант N4.**

| $i$ | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | **0.1** | **0.15** | **0.18** | **0.22** | **0.28** | **0.30** |
| $f(x_i)$ | **1.1052** | **1.1618** | **1.1972** | **1.2461** | **1.3231** | **1.3499** |

$2M_0 + M_1 = 3.3722$ , $0.5M_4 + 2M_5 = 3.3614$ , $x = 0.16$.

**Вариант N5.**

| $i$ | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | **0.2** | **0.24** | **0.27** | **0.30** | **0.32** | **0.38** |
| $f(x_i)$ | **1.2214** | **1.2712** | **1.3100** | **1.3499** | **1.3771** | **1.4623** |

$2M_0 + 0.1M_1 = 2.5699$ , $0.3M_4 + 2M_5 = 3.3378$ , $x = 0.25$.

**Вариант N6.**

| $i$ | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|---|---|

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | **0.1** | **0.14** | **0.16** | **0.20** | **0.24** | **0.30** |
| $f(x_i)$ | **0.1234** | **0. 1456** | **0.1874** | **0.2361** | **0.2475** | **0.4562** |

$2M_0 + 0.3M_1 = -0.3421$ , $0.5M_4 + 2M_5 = -0.6578$ , $x = 0.20$.

**Вариант N7.**

| $i$ | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | **0.2** | **0.26** | **0.28** | **0.31** | **0.32** | **0.38** |
| $f(x_i)$ | **1.2214** | **1.2765** | **1.3071** | **1.3456** | **1.3775** | **1.4568** |

$2M_0 + 0.5M_1 = 1.8765$ , $0.3M_4 + 2M_5 = 3.4567$ , $x = 0.30$.

**Вариант N8.**

| $i$ | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | **0.2** | **0.25** | **0.28** | **0.30** | **0.33** | **0.36** |
| $f(x_i)$ | **1.2222** | **1.2345** | **1.2876** | **1.3345** | **1.3864** | **1.4123** |

$2M_0 + 0.5M_1 = 2.2132$ , $0.5M_4 + M_5 = 4.1211$ , $x = 0.26$.

**Вариант N9.**

| $i$ | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | **0.1** | **0.15** | **0.18** | **0.23** | **0.26** | **0.31** |
| $f(x_i)$ | **0.2345** | **0.3647** | **0.4634** | **0.5221** | **0.6231** | **0.8352** |

$M_0 + M_1 = 3.2756$ , $M_4 + M_5 = 3.8731$ , $x = 0.30$.

**Вариант N10.**

| $i$ | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | **0.1** | **0.13** | **0.18** | **0.24** | **0.28** | **0.32** |
| $f(x_i)$ | **1.1123** | **1.1453** | **1.2344** | **1.4321** | **1.8321** | **1.8888** |

$2M_0 + 0.5M_1 = -0.2313$ , $0.4M_4 + 2M_5 = -0.8765$ , $x = 0.20$.

**Вариант N11.**

| $i$ | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | **0.2** | **0.24** | **0.25** | **0.28** | **0.35** | **0.38** |
| $f(x_i)$ | **1.2342** | **1.4532** | **1.8723** | **2.1234** | **2.3421** | **2.4321** |

$2M_0 + M_1 = 2.2431$ , $M_4 + 3M_5 = 3.6231$ , $x = 0.26$.

**Вариант N12.**

| $i$ | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | **0.1** | **0.13** | **0.18** | **0.20** | **0.24** | **0.28** |
| $f(x_i)$ | **0.1234** | **0.1345** | **0.1678** | **0.2234** | **0.2678** | **0.3112** |

$M_0 + 0.5M_1 = 3.3452$ , $0.5M_4 + 2M_6 = 3.6751$ , $x = 0.25$.

**Вариант N13.**

| $i$ | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | **0.1** | **0.15** | **0.18** | **0.22** | **0.26** | **0.31** |
| $f(x_i)$ | **0.1234** | **0.1456** | **0.1897** | **0.2343** | **0.2872** | **0.3213** |

$M_0 + 0.5M_1 = -0.2435$ , $M_4 + 2M_5 = -0.6545$ , $x = 0.20$.

**Вариант N14.**

| $i$ | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | **0.2** | **0.24** | **0.28** | **0.32** | **0.36** | **0.38** |
| $f(x_i)$ | **1.2345** | **1.2532** | **1.2876** | **1.3241** | **1.3632** | **1.4231** |

$2M_0 + M_1 = 2.2351$ , $M_4 + M_5 = 3.3452$ , $x = 0.30$.

**Вариант N15.**

| $i$ | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | **0.1** | **0.15** | **0.16** | **0.18** | **0.25** | **0.30** |
| $f(x_i)$ | **0.1123** | **0.1467** | **0.1873** | **0.2134** | **0.2436** | **0.2531** |

$2M_0 + 0.5M_1 = 3.3722$ , $0.5M_4 + 2M_5 = 3.5342$ , $x = 0.20$.

**Вариант N16.**

| $i$ | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | **0.2** | **0.23** | **0.26** | **0.30** | **0.34** | **0.36** |
| $f(x_i)$ | **1.1232** | **1.2345** | **1.2675** | **1.2876** | **1.3452** | **1.3672** |

$2M_0 + M_1 = 1.9274$ , $0.5M_4 + 2M_5 = 2.3421$ , $x = 0.25$.

**Вариант N17.**

| $i$ | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|---|---|

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | **0.1** | **0.14** | **0.18** | **0.23** | **0.28** | **0.31** |
| $f(x_i)$ | **1.1122** | **1.1342** | **1.1654** | **1.2132** | **1.2454** | **1.2675** |

$M_0 + M_1 = 3.3722$ , $M_4 + 2M_5 = 3.3614$ , $x = 0.15.$

**Вариант N18.**

| $i$ | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | **0.2** | **0.24** | **0.26** | **0.28** | **0.32** | **0.36** |
| $f(x_i)$ | **1.2231** | **1.2524** | **1.2861** | **1.3421** | **1.3872** | **1.4653** |

$M_0 + 2M_1 = 2.7645$ , $0.5M_4 + M_5 = 2.7545$ , $x = 0.30.$

**Вариант N19.**

| $i$ | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | **0.2** | **0.25** | **0.28** | **0.34** | **0.38** | **0.42** |
| $f(x_i)$ | **1.3452** | **1.3654** | **1.3823** | **1.4231** | **1.4652** | **1.4826** |

$M_0 + 0.5M_1 = 1.7236$ , $0.5M_4 + M_5 = 1.7436$ , $x = 0.30.$

**Вариант N20.**

| $i$ | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | **0.2** | **0.23** | **0.26** | **0.28** | **0.34** | **0.38** |
| $f(x_i)$ | **0.0291** | **0.1342** | **0.3522** | **0.4635** | **0.4821** | **0.5212** |

$2M_0 + 0.5M_1 = 3.3722$ , $M_4 + M_5 = 3.5806$ , $x = 0.25.$

**Вариант N21.**

| $i$ | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | **0.1** | **0.16** | **0.18** | **0.24** | **0.26** | **0.32** |
| $f(x_i)$ | **0.1232** | **0.1342** | **0.16232** | **0.18234** | **0.2342** | **0.2621** |

$M_0 + 2M_1 = 3.4534$ , $0.5M_4 + 2M_5 = 3.3614$ , $x = 0.16.$

**Вариант N22.**

| $i$ | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | **0.1** | **0.12** | **0.15** | **0.19** | **0.24** | **0.28** |
| $f(x_i)$ | **0.2143** | **0.2432** | **0.2832** | **0.3123** | **0.3243** | **0.3622** |

$M_0 + 0.4M_1 = 3.3255$ , $M_4 + 2M_5 = 3.8453$ , $x = 0.20.$

**Вариант N23**.

| $i$ | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | **0.2** | **0.24** | **0.25** | **0.32** | **0.36** | **0.40** |
| $f(x_i)$ | **1.2342** | **1.2633** | **1.2823** | **1.3645** | **1.3843** | **1.4123** |

$M_0 + 2M_1 = 1.4636$ , $0.5M_4 + 2M_5 = 1.9786$ , $x = 0.30$.

**Вариант N24.**

| $i$ | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | **0.1** | **0.14** | **0.16** | **0.18** | **0.24** | **0.28** |
| $f(x_i)$ | **1.1231** | **0.1342** | **0.1654** | **0.1823** | **0.2134** | **0.2432** |

$2M_0 + 0.5M_1 = 3.3722$ , $0.5M_4 + 2M_5 = 3.3614$ , $x = 0.20$.

**Вариант N25.**

| $i$ | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | **0.2** | **0.24** | **0.26** | **0.28** | **0.34** | **0.38** |
| $f(x_i)$ | **1.1234** | **1.1453** | **1.1675** | **1.2123** | **1.2456** | **1.2654** |

$M_0 + 2M_1 = -0.2344$ , $M_4 + 2M_5 = -0.5432$ , $x = 0.25$.

## Лабораторная работа 6.

**Тема:** Численное интегрирование.

**Задания.**

Вычислить приближенное значение интеграла с помощью формулы а) прямоугольников, б) трапеций, в) Симпсона. Величину шага выбрать заранее, сделав вручную оценку погрешности через вторую (случаи а,б) или четвертую (случай в) производные. Сравнить с точным значением интеграла

1.(а) $\int_{-1}^{1} |x| dx$ 2.(б) $\int_{0.8}^{1.8} \frac{dx}{2x^2+1}$ 3.(в) $\int_{1.6}^{2.4} (x+1)\sin x dx$

4.(а) $\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{2} dx$ 5.(б) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos x dx$ 6.(в) $\int_{0.6}^{1.4} \frac{dx}{x^2+1}$

7.(а) $\int_0^1 \frac{dx}{2+x^3}$ 8.(б) $\int_{0.2}^{1.2} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$ 9.(в) $\int_{0.6}^{1.6} x^2 \cos x dx$

10.(а) $\int_1^3 \frac{dx}{x^2}$ 11.(б) $\int_{1.4}^{3} \lg x dx$ 12.(в) $\int_{0.18}^{0.98} \frac{dx}{x+2}$

13.(а) $\int_1^2 \frac{xdx}{x+2}$ 14.(б) $\int_{0,1}^{1} \frac{dx}{x^3}$ 15.(в) $\int_{0,5}^{1,2} \frac{dx}{x+1}$

16.(а) $\int_0^2 \sin x dx$ 17.(б) $\int_{1.5}^{2.5} \frac{dx}{(x-1)(x-3)}$ 18.(в) $\int_2^4 tgx dx$

19.(а) $\int_{-0,5}^{1,3} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$ 20.(б) $\int_1^{2.6} \frac{xdx}{\sqrt{x^2+3}}$ 21.(в) $\int_{0.2}^{2} \frac{0.5+x}{\sqrt{x^2+1}} dx$

22.(а) $\int_{0.2}^{2.4} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+2} dx$ 23.(б) $\int_{0.6}^{1.8} \frac{x^2 dx}{\sqrt{x+1.7}}$ 24.(в) $\int_{0.7}^{1.3} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+0.3}}$

## Лабораторная работа 7.

**Тема:** Квадратурные формулы интерполяционного типа

**Задания.**

Вычислить интеграл, построив квадратурную формулу интерполяционного типа по заданным узлам. Коэффициенты квадратурной формулы, которые сами являются интегралами от полиномов, вычислить интегрированием по заданной квадратурной формуле с равноотстоящими узлами (формулы прямоугольников, трапеций, Симпсона) из предыдущей работы. Ответ проверить, вычислив точное значение интеграла.

**Вариант 1**

$\int_{0.1}^{1} \frac{dx}{x}$, узлы: 0.1, 0.14, 0.2, 0.4, 0.6, 0.7, 0.9, 1;

**Вариант 2**

$\int_{0}^{1} \frac{x^2}{1+x^2} dx$, узлы: 0, 0.2, 0.3, 0.5, 0.8, 0.9, 1;

**Вариант 3**

$\int_{0.2}^{1} \frac{dx}{x}$, сетка равномерная с шагом 1/5;

**Вариант 4**

$\int_{0}^{1} (1-x)(1-2x)(1-3x) dx$, узлы: 0, 1/5, 1/4, 1/3, 1/2, 1;

**Вариант 5**

$\int_{0.1}^{1} \frac{dx}{x^2}$, узлы: 0.1, 0.2, 0.3, 0.5, 0.79, 0.884, 1;

**Вариант 6**

$\int_{0}^{1} \frac{(1+x)^2}{1+x^2} dx$, узлы: 0, 0.3, 0.4, 0.5, 0.8, 1;

**Вариант 7**

$\int_{0.2}^{1} \frac{dx}{x+1}$, сетка равномерная с шагом 1/5;

Вычислить интегралы по формулам типа Гаусса, пользуясь таблицей узлов и коэффициентов, и оценить погрешности по формуле для погрешности . Вычислить точное значение интеграла и сравнить ответ.

**Вариант 8**

$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{3+x}$, n=4.

**Вариант 9**

$\int_{0}^{1} \ln(1+x) dx$, n=5.

**Вариант 10**

$\int\limits_0^1 \sqrt{1+x}\,dx$, n=3.

**Вариант 11**

$\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{2+x}$, n=5.

**Вариант 12**

$\int\limits_0^1 \ln(2+3x)dx$, n=4.

**Вариант 13**

$\int\limits_0^1 \sqrt{2+5x}\,dx$, n=4.

Вычислить интегралы по формулам типа Гаусса, пользуясь таблицей узлов и коэффициентов. Контроль вычислений провести применением других квадратурных формул при большом числе узлов (n=100).

**Вариант 14**

$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}dx$, n=11.

**Вариант 15**

$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1-0.25\sin^2 x\right)^{-\frac{1}{2}}dx$, n=3.

**Вариант 16**

$\int\limits_0^1 \frac{\lg(1+x)}{1+x^2}dx$, n=4.

**Вариант 17**

$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x^2 dx$, n=9.

**Вариант 18**

$\int\limits_0^1 e^{x^2} dx$, n=9.

**Вариант 19**

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx\text{, n=3.}$$

Вычислить интегралы по формуле Эрмита при небольшом числе узлов (n=4,5,6,7). Вычислить точное значение интеграла и сравнить ответ.

**Вариант 20**

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx.$$

**Вариант 21**

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{1-x^2}+x\sqrt{1-x^4}}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}dx.$$

**Вариант 22**

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{1-x^2}+2\sqrt{x^4-x^6}}{(x\sqrt{1+x^2}-2)\sqrt{1-x^4}}dx.$$

**Вариант 23**

$$\int_0^1 \frac{4+x^3-3x^2\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}(4+x^3)}dx.$$

**Вариант 24**

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{1-x^2}\,dx}{(\arctan x+10)\sqrt{(1+x^2)(1-x^4)}}.$$

**Вариант 25**

$$\int_0^1 \frac{(x^2-5x)\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-x^4}}{(x-5)\sqrt{1-x^4}}dx.$$

## Лабораторная работа 8

**Тема:** Решение нелинейных уравнений

**Задания.**

1. Отделить вещественные корни аналитически или графически.
2. Уточнить корни делением отрезка пополам (если это возможно) с точностью до 0.1.
3. Уточнить корни заданным методом с заданной точностью.
   Для метода Ньютона и метода простой итерации число итераций, необходимое для достижения заданной точности, выбрать заранее, сделав вручную оценку погрешности. Для

остальных методов итерации прекращаются после того, как разность двух последовательных приближений становится меньше заданной точности.

4.Проверить результаты подстановкой найденных значений в уравнение.

**Варианты.**

1. Найти все корни уравнения $1000000\, x^4 - 3000\, x^3 + 1000002\, x^2 - 3000\, x + 2 = 0$

с точностью 0.0001 методом а) Ньютона б) секущих.

2. Найти все корни уравнения $x^4 - 10001.01\, x^3 - 9800.01\, x^2 - 999901\, x + 10000 = 0$

с точностью 0.001 а) методом Ньютона б) Модифицированным методом Ньютона.

3. Найти все корни уравнения $\sin(1/x) = x$

на отрезке [0.1 ; 0.5] с точностью 0.001 методом Ньютона.

4. Найти все корни уравнения $\mathrm{arctg}\,(3x) = x$

методом простой итерации с точностью до 0.001 сделав предварительную оценку погрешности.

5. Найти корень уравнения $x^4 - 20\, x^3 + 101\, x^2 - 20\, x + 1 = 0$

на отрезке [-1,1] с точностью 0.0001 методом Ньютона с параметрами p=1 и p=2. Сравнить количества итераций необходимые для достижения заданной точности.

6. Найти корень уравнения $x\, e^x = 1$

с точностью 0.0001 методом Ньютона и модифицированным методом Ньютона. Итерации производить пока разность между соседними итерациями не станет меньше заданной точности. Сравнить необходимые количества итераций.

7. Найти все корни уравнения $x^3 + 3\, x^2 - 1 = 0$ методом простой итерации с точностью 0. 0005.

8. Найти все корни уравнения $x^4 - 10000.01\, x^3 + 101\, x^2 - 10000.01\, x + 100 = 0$

с точностью до 0.001 а) методом Ньютона б) модифицированным методом Ньютона.

9. Найти корень уравнения $\arccos(x/2) = x^2$

на отрезке [0,2] а) методом Ньютона б) модифицированным методом Ньютона.

10. Найти все корни уравнения $x^4 – 0.015x^3 + 0.3x^2 + x – 1 = 0$

с точностью 0.00001 методом а) Ньютона б) секущих.

11. Найти все корни уравнения $5555x^4 – 555x^3 – 55x^2 – 5x = 0$

с точностью 0.00001 методом а) Ньютона б) секущих.

12. Найти корень уравнения $\operatorname{arctg}(7x) = 0.2$

на отрезке [-1,1] а) методом Ньютона б) модифицированным методом Ньютона.

13 . Найти корень уравнения $x^2e^{2x} = 1$

с точностью 0.001 методом Ньютона. Итерации производить пока разность между соседними итерациями не станет меньше заданной точности. Сравнить необходимые количества итераций.

14. Найти все корни уравнения $x^3 – 45x^2 + 43 = 0$

на отрезке [-2,1] а) модифицированным методом Ньютона б) методом секущих.

15 . Найти корень уравнения $\arcsin(x) + e^x = 2$ методом простой итерации с точностью до 0.001 сделав предварительную оценку погрешности.

16. Найти все корни уравнения $54x^4 + x^2 – 0.0000001 =0$

с точностью 0.00001 методом а) Ньютона б) секущих.

17. Найти все корни уравнения $12x^4 + 11x^3 –10x^2 –999 = 0$ на отрезке [-3.5,3] с точностью 0.0001 методом Ньютона с параметрами p=1 и p=2. Сравнить количества итераций необходимые для достижения заданной точности.

18. Найти корень уравнения $x^4e^{4x} = 444$ с точностью 0.0001 методом Ньютона и модифицированным методом Ньютона. Итерации производить пока разность между соседними итерациями не станет меньше заданной точности. Сравнить необходимые количества итераций.

## Лабораторная работа 9

**Тема:** Итерационные методы решения систем нелинейных уравнений

**Задания к лабораторной работе:**

1. Графически отделить корни системы.
2. Выбрать начальное приближение близко к корню.
3. Уточнить корень заданным методом с заданной точностью.
4. Для метода простой итерации проверить достаточные условия сходимости.
5. Итерации проводить до тех пор, пока разность между соседними приближениями не станет меньше заданной точности.

**Используя метод простой итерации решить систему уравнений с точностью до 0.001. Корни отделить графически.**

Вариант 1

$$\begin{cases} \sin(x+1) - y = 1{,}2, \\ 2x + \cos y = 2. \end{cases}$$

Вариант 2

$$\begin{cases} \cos(x-1) + y = 0{,}5, \\ x - \cos y = 3. \end{cases}$$

Вариант 3

$$\begin{cases} 2x^2 - xy^2 - y + 2x - 2y + 6 = 0, \\ y - 0{,}5x - 1 = 0. \end{cases}$$

Вариант 4

$$\begin{cases} 5x - 6y + 20\lg x + 16 = 0, \\ 2x + y - 10\lg y - 4 = 0. \end{cases}$$

**Найти решение системы методом Ньютона с точностью 0.0001.Корни отделить графически.**

Вариант 5

$$\begin{cases} 3x^2y + y^2 - 1 = 0, \\ x^4 + x^3y - 1 = 0. \end{cases}$$

Вариант 6

$$\begin{cases} \operatorname{tg}(xy + 0,4)^2 = x. \\ 0,6x^2 + 2y^2 = 1, x > 0, y > 0. \end{cases}$$

Вариант 7

$$\begin{cases} \sin(x + y) - 1{,}2x = 0{,}2, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Вариант 8

$$\begin{cases} x + 3\lg^2 x - y = 0, \\ 2x^2 - xy - 5x + 1 - 0. \end{cases}$$

Найти решение системы с помощью нелинейного метода Якоби с точностью 0.0005. Корни отделить графически. Внутренние итерации выполнить по методу Ньютона.

Вариант 9

$$\begin{cases} \cos(y - 1) + y = 0{,}7, \\ \sin y + 2x = 2. \end{cases}$$

Вариант 10

Найти решение системы с помощью нелинейного метода Зейделя с точностью 0.0003. Корни отделить графически. Внутренние итерации выполнить по методу секущих.

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - 1 = 0, \\ xy^3 - y - 3 = 0. \end{cases}$$

## Лабораторная работа 10

**Тема:** Задача Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений

**Задачи:**

1) $y' = x + \dfrac{y}{x}, \quad y(1) = 0, \quad a = 1, b = 1.5$ [точное решение: $y = x^2 - x$]
2) $y' = -\dfrac{xy}{1+x^2}, \quad y(0) = 1, \quad a = 0, b = 0.5$ [точное решение: $y = (1+x^2)^{-1/2}$]
3) $y' = -y\cos x + \cos x \sin x, \quad y(0) = -1, \quad a = 0, b = 0.5$
[точное решение: $y = \sin x - 1$]
4) $y' = \dfrac{1}{\cos x} - \dfrac{\sin x}{\cos x} y, \quad y(0) = 0, \quad a = 0, b = 1$ [точное решение: $y = \sin x$]

**Варианты:**

1. Методом Эйлера решить дифференциальные уравнения на отрезке [a,b]. Построить графики приближенного и точного решений.

Вариант 1: задача 1,
Вариант 2: задача 2,
Вариант 3: задача 3,
Вариант 4: задача 4.

2. Применяя метод Эйлера-Коши, найти решение дифференциального уравнения в указанной точке с точностью 0.001. Построить графики приближенного и точного решений.

Вариант 5: задача 1,
Вариант 6: задача 2,
Вариант 7: задача 3,
Вариант 8: задача 4.

3. Применяя метод Эйлера-Коши с уточнением, составить таблицу приближенных значений решения дифференциального уравнения на отрезке [a,b] с точностью 0.001. Построить графики приближенного и точного решений.

Вариант 9: задача 1,
Вариант 10: задача 2,
Вариант 11: задача 3,
Вариант 12: задача 4.

4. Методом Рунге-Кутта второго порядка найти решение на отрезке [a,b] следующих дифференциальных уравнений при заданных начальных условиях с указанным шагом h. Построить графики приближенного и точного решений.

Вариант 13: задача 1, h=0.05,
Вариант 14: задача 2, h=0.1,
Вариант 15: задача 3, h=0.1,
Вариант 16: задача 4, h=0.05.

5. Методом Рунге-Кутта четвертого порядка найти решение на отрезке [a,b] следующих дифференциальных уравнений при заданных начальных условиях с указанным шагом h. Построить графики приближенного и точного решений.

Вариант 17: задача 1, h=0.005,
Вариант 18: задача 2, h=0.05,
Вариант 19: задача 3, h=0.01,
Вариант 20: задача 4, h=0.1.

6. Неявным методом Адамса указанного порядка точности найти решение дифференциального уравнения на данном отрезке. “Начальный отрезок” найти методом Эйлера. Внутренние итерации производить по методу Ньютона. Построить графики приближенного и точного решений.

Вариант 21: задача 1, h=0.05, m = 3,
Вариант 22: задача 2, h=0.01, m = 4,
Вариант 23: задача 3, h=0.1, m = 5,
Вариант 24: задача 4, h=0.05, m = 3.

7. Явным методом Адамса указанного порядка точности найти решение дифференциального уравнения на данном отрезке. “Начальный отрезок” найти методом Рунге-Кутта. Построить графики приближенного и точного решений.

Вариант 25: задача 1, h=0.05, m = 3,
Вариант 26: задача 2, h=0.01, m = 2,
Вариант 27: задача 3, h=0.1, m = 3,
Вариант 28: задача 4, h=0.05, m = 4.

## Лабораторная работа 10

**Тема:** Задача Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Методом Эйлера решить системы дифференциальных уравнений на отрезке [a,b] с точностью 0.001. Построить графики компонент решения.

1. $\begin{cases} y' = -yz + \dfrac{\sin x}{x} \\ z' = -z^2 + \dfrac{3.5x}{1+x^2} \end{cases}$ y(0)=0; a=0, b=1, z(0)=-0.4122

2. $\begin{cases} y' = 1 - \dfrac{1}{z} \\ z' = \dfrac{1}{y-x} \end{cases}$ y(1)=-1; a=1, b=1.5, z(1)=1

3. $\begin{cases} y' = \dfrac{y}{x} + \sqrt{y^2 - x^2} \\ z' = \dfrac{y+z}{z^2 - x} \end{cases}$ y(1) = 1.25, a = 1, b = 1.5, z(1) =0

Методом Рунге-Кутта четвертого порядка найти решение на отрезке [a,b] следующих систем дифференциальных уравнений при заданных начальных условиях с указанным шагом h; изобразить кривую (y(x),z(x)) для x на отрезке [a,b].

4. $\begin{cases} y' = y - 2z + y(5y^2 + 3z^2) \\ z' = 2y + z + z(4y^2 + 3z^2) \end{cases}$ y(0)=0.25, a=0, b= pi/4, z(0)= 0.25, h=(b-a)/100

5. $\begin{cases} y' = -z + y(y^2 + z^2) \\ z' = y + z(y^2 + z^2) \end{cases}$ y(0) = 0.5, a=0, b= $\pi$/4, z(0) = 0, h = 0.01.

6. $\begin{cases} y' = y - z + y(y^2 + z^2) \\ z' = y + z + z(y^2 + z^2) \end{cases}$ y(0) = 0.1, a=0, b= $\pi$/2, z(0) = 0, h = 0.01.

7. $\begin{cases} y' = 0.1y - z + y(y^2 + z^2) \\ z' = y + 0.1z + z(y^2 + z^2) \end{cases}$ y(0) = 0.2, a=0, b=3$\pi$/2, z(0) = 0, h = 0.01.

8. $\begin{cases} y' = 10y - z + y(y^2 + z^2) \\ z' = y + 10z + z(y^2 + z^2) \end{cases}$ y(0) = 0.4, a=0, b=2$\pi$, z(0) = 0, h = 0.01.

9. $\begin{cases} y' = y - z + 0.001y(y^2 + z^2) \\ z' = y + z + 100z(y^2 + z^2) \end{cases}$ y(0) = 0.4, a=0, b=2$\pi$, z(0) = 0, h = 0.01.

Методом Рунге-Кутта второго порядка решить системы дифференциальных уравнений на отрезке [a,b] с точностью 0.001.Построить графики компонент решения.

10. $\begin{cases} y' = \sin(3y^2) + x + z \\ z' = x + y - 2z^2 + 1 \end{cases}$ y(0)=1, z(0)=0.5

11. $\begin{cases} y' = -2.4xy^2 + z^2 - x - 1 \\ z' = \dfrac{1}{12z^2} z^2 - y - \dfrac{x}{y} \end{cases}$ y(0) = 5/6, z(0) = 1.

12. $\begin{cases} y' = \ln(2.5x + \sqrt{4x^2 + z^2}) \\ z' = \sqrt{4x^2 + y^2}) \end{cases}$ y(0) = 0.5, z(0) = 1.

Методом Эйлера-Коши решить системы дифференциальных уравнений на отрезке [a,b] с указанным шагом. Построить графики компонент решения.

13. $\begin{cases} y' = -yz + \dfrac{\sin x}{x} \\ z' = -z^2 + \dfrac{3.5x}{1 + x^2} \end{cases}$ y(0)=0; a=0, b=1,z(0)= 0.5, h=0.01

14. $\begin{cases} y' = 2 - \dfrac{1}{z} \\ z' = \dfrac{3}{y - x} \end{cases}$ y(1)=-1; a=1, b=1.5, h=0.01,z(1)=1

15 $\begin{cases} y' = \dfrac{y}{x} + \sqrt{y^2 + x^2} \\ z' = \dfrac{y + z}{z^2 - x} \end{cases}$ y(1) = 1.25, a = 1, b = 1.5, z(1) =0, h = 0.05.

## Лабораторная работа 12

**Тема:** Метод конечных разностей решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка

### Задания к лабораторной работе:

**ЗАДАНИЕ 1.** Решить задачу аналитически. Составить программу для решения методом конечных разностей краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка с использованием метода прогонки. Применить разностные схемы а) первого порядка аппроксимации, б) второго порядка аппроксимации. Сравнить полученные результаты между собой и с точным решением краевой задачи.

Замечание: Для данной группы заданий можно получить точное аналитическое решение стандартными методами из курса ОДУ.

**Варианты:**

Âàðèàí ò¹ 1

$$\begin{cases} u''(x) + u'(x) = 1 \\ u'(0) = 0 \\ u(1) = 1 \end{cases}$$

Âàðèàí ò¹ 2

$$\begin{cases} u''(x) - u'(x) = 0 \\ u(0) = -1 \\ u'(1) - u(1) = 2 \end{cases}$$

Âàðèàí ò¹ 3

$$\begin{cases} u''(x) - u'(x) = 2e^{2x} \\ u'(0) = 2 \\ u(1) = e^2 \end{cases}$$

Âàðèàí ò¹ 4

$$\begin{cases} u''(x) + u'(x) = 2 \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 2 \end{cases}$$

Âàðèàí ò¹ 5

$$\begin{cases} u''(x) - u(x) = 2x \\ u(0) = 0 \\ u(1) = -1 \end{cases}$$

Âàðèàí ò¹ 6

$$\begin{cases} u''(x) - u(x) = 0 \\ u(0) = 1 \\ u(1) = \left(e^2 + 1\right)/2e \end{cases}$$

**ЗАДАНИЕ 2.** Решить задачу аналитически. Составить программу для решения методом конечных разностей краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка с использованием метода прогонки. Для построения разностной схемы использовать интегро-интерполяционный метод. Коэффициенты вычислять двумя различными способами – через формулу трапеций и через формулу прямоугольников. Сравнить полученные результаты между собой и с точным решением краевой задачи.

Замечание: Для данной группы заданий можно получить точное аналитическое решение стандартными методами из курса ОДУ.

Âàðèàí ò ¹ 7

$$\begin{cases} u''(x)+u(x)=1 \\ -u'(0)+u(0)=1 \\ u(\pi/2)=0 \end{cases}$$

Âàðèàí ò ¹ 8

$$\begin{cases} u''(x)+u(x)=0 \\ -u'(0)+u(0)=-1 \\ u(\pi/2)=1 \end{cases}$$

Âàðèàí ò ¹ 9

$$\begin{cases} u''(x)+u(x)=0 \\ -u'(0)=0 \\ u(1)=-1 \end{cases}$$

Âàðèàí ò ¹ 10

$$\begin{cases} u''(x)+9u(x)=0 \\ -u'(0)+u(0)=-3\sqrt{2} \\ u(\pi/4)=1 \end{cases}$$

Âàðèàí ò ¹ 11

$$\begin{cases} u''(x)+4u(x)=\cos(2x) \\ -u'(0)+u(0)=\pi/8 \\ u(\pi/4)=0 \end{cases}$$

Âàðèàí ò ¹ 12

$$\begin{cases} u''(x)=1 \\ u'(0)=0 \\ u(1)=0 \end{cases}$$

**Задание 3.** Составить программу для решения методом конечных разностей краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка с использованием метода прогонки. Применить разностные схемы а) первого порядка аппроксимации, б) второго порядка аппроксимации. Сравнить полученные результаты между собой и с приведенным в ответах графиком решения краевой задачи.

Âàðèàí ò¹ 13

$$\begin{cases} u''(x)+\dfrac{1.5^2}{1.5x+1}u'(x)=\dfrac{3}{\sqrt{1.5x+1}} \\ 4.5u(0)-u'(0)=2.5/1.5 \\ u'(1)=\sqrt{2.5} \end{cases}$$

Âàðèàí ò¹ 14

$$\begin{cases} u''(x)-(x+0.9)^2u'(x)-\dfrac{2}{(x+0.9)^2}u(x)=0.9 \\ u(0)-u'(0)=1.9/0.9 \\ u(1)=1.9/0.9 \end{cases}$$

Âàðèàí ò¹ 15

$$\begin{cases} u''(x)-u'(x)-u(x)=1.416\cdot\sin(0.6x)-\cos(0.6x) \\ u'(0)=-0.6^2 \\ 0.6u(1)+2u'(1)=-0.9798825323 \end{cases}$$

Âàðèàí ò¹ 16

$$\begin{cases} u''(x)-(x^2+0.4)u'(x)-2x\cdot u(x)=\dfrac{2(3x^2-0.4)}{(x^2+0.4)^3} \\ u(0)-2u'(0)=1/0.4 \\ u(1)=1/1.4 \end{cases}$$

Âàðèàí ò¹ 17

$$\begin{cases} u''(x)+\dfrac{3.15}{2.1x+1}u'(x)=\dfrac{4.2}{\sqrt{(2.1x+1)}} \\ 6.3u(0)-u'(0)=1 \\ u'(1)=1.760681686 \end{cases}$$

Âàðèàí ò¹ 18

$$\begin{cases} u''(x)+u'(x)-u(x)=2.112\sin(0.8x)-\cos(0.8x) \\ u'(0)=-0.64 \\ 0.8u(1)+2u'(1)=-1.941296864 \end{cases}$$

**Задание 4.** Составить программу для решения методом конечных разностей краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка с использованием метода прогонки. Для построения разностной схемы использовать интегро-интерполяционный метод. Коэффициенты вычислять двумя различными способами – через формулу трапеций и через формулу прямоугольников. Сравнить полученные результаты между собой и с приведенным в ответах графиком решения краевой задачи.

Âàðèàí ò¹ 20

$$\begin{cases} (e^x+3x^3)u''(x)+(e^x+9x^2)u'(x)-x^5u(x)=0 \\ -u'(0)+u(0)=3.2 \\ u(0.83)=4.3 \end{cases}$$

Âàðèàí ò¹ 21

$$\begin{cases} (3x+ch\,x+sh^3x)u''(x)+(3+sh\,x+3sh^2x\cdot ch\,x)u'(x)+4x^3u(x)+5x-3x^3=0 \\ -u'(0)+u(0)=3 \\ u(0.9)=4 \end{cases}$$

Âàðèàí ò¹ 22

$$\begin{cases} \left(x+ch^2x+sh\,x\right)u''(x)+\left(2ch\,x\cdot sh\,x+ch\,x+1\right)u'\left(x\right)+23x^2u\left(x\right)+3x-x^2=0 \\ -u'\left(0\right)+u\left(0\right)=2 \\ u\left(0.7\right)=3 \end{cases}$$

Âàðèàí ò¹ 23

$$\begin{cases} \left(e^x+\sin x\right)u''(x)+\left(e^x+\cos x\right)u'\left(x\right)-3x^3u\left(x\right)+x+1=0 \\ -u'\left(0\right)+u\left(0\right)=2 \\ u\left(\pi/4\right)=5 \end{cases}$$

Âàðèàí ò¹ 24

$$\begin{cases} \left(e^x+1\right)u''(x)+e^xu'\left(x\right)-x^3u\left(x\right)+x=0 \\ -2u'\left(0\right)+u\left(0\right)=3 \\ u\left(\pi/4\right)=5 \end{cases}$$

## Контрольные вопросы к экзамену

**Численные методы решения систем линейных алгебраических уравнений.**

1. Алгоритм метода Гаусса.
2. Вычисление определителя матрицы и обратной матрицы.
3. Метод прогонки. Достаточное условие устойчивости прогонки (с доказательством).
4. Метод итераций решения системы линейных уравнений. Достаточное условие сходимости (с доказательством). Оценка погрешности.
5. Метод Якоби. Достаточное условие сходимости.
6. Метод простой итерации решения системы линейных уравнений. Теорема о сходимости (с доказательством).
7. Метод Зейделя. Достаточное условие сходимости (с доказательством).
8. Метод минимальных невязок. Теорема о сходимости (с доказательством).
9. Многочлены Чебышева (с доказательством).
10. Явный итерационный метод с чебышевским набором параметров. Теорема без доказательства.

**Интерполирование и приближение функций.**

1. Постановка задачи интерполирования.
2. Интерполяционная формула Лагранжа (вывод).
3. Интерполяционная формула Ньютона (вывод).
4. Оценка погрешности интерполирования (с доказательством).

5. Оптимальный выбор узлов интерполирования (с доказательством).
6. Интерполирование сплайнами. Выписать систему уравнений.

**Численное интегрирование и дифференцирование.**
1. Понятие квадратурной формулы.
2. Квадратурная формула прямоугольников и ее порядок точности (с доказательством).
3. Квадратурная формула трапеций и ее порядок точности (с доказательством).
4. Квадратурная формула Симпсона и ее порядок точности (без доказательства).
5. Квадратурные формулы интерполяционного типа. Формулы для коэффициентов. Утверждения о точности (с доказательством).
6. Квадратурные формулы Гаусса. Критерий точности (с доказательством).
7. Существование и единственность квадратурных формул Гаусса (с доказательством).
8. Свойства квадратурных формул Гаусса .
9. Построение формул численного дифференцирования методом неопределенных коэффициентов. Погрешность аппроксимации первой и второй разностной производной (с доказательством).

**Решение нелинейных уравнений.**
1. Метод простой итерации решения нелинейного уравнения. Достаточное условие сходимости (с доказательством).
2. Метод релаксации решения нелинейного уравнения.
3. Метод Ньютона. Достаточное условие сходимости (с доказательством).

**Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений.**
1. Метод Эйлера решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения, его порядок аппроксимации (с доказательством).
2. Методы Рунге-Кутта, однопараметрическое семейство 2 порядка аппроксимации..
3. Теорема о сходимости методов Рунге-Кутта.
4. Многошаговые разностные методы решения задачи Коши (определение).

**Разностные методы решения задач математической физики.**
1. Разностные схемы для уравнения теплопроводности. Примеры.
2. Аппроксимация, корректность и сходимость разностных схем.
3. Разностная задача Дирихле для уравнения Пуассона. Канонический вид. Условия положительности коэффициентов.
4. Принцип максимума (с доказательством).
5. Следствия из принципа максимума для разностных схем (с доказательством).

**Экзаменационные билеты**

Билет 1

1. Метод прогонки. Достаточные условия устойчивости прогонки (с доказательством).
2. Оценка погрешности интерполирования.
3. Понятие квадратурной формулы.

4. Найти шаг сетки h, обеспечивающий точность 0.001 квадратурной формулы прямоугольников для вычисления интеграла $\int_1^2 (-x^2-6x+1)dx$

Билет 2

1. Метод итераций решения системы линейных уравнений. Достаточное условие сходимости (с доказателством). Оценка погрешности.
2. Интерполирование сплайнами. Выписать систему уравнений.
3. Условия положительности коэффициентов.
4. Найти порядок аппроксимации оператора $2y''(x)+3y'(x)$ разностным выражением $2y_{\bar{x}x,i}+3y_{\dot{x},i}$ .

Билет 3

1. Метод простой итерации решения системы линейных уравнений. Теорема о сходимости (с доказательством).
2. Квадратурная формула Симпсона и ее порядок точности.
3. Постановка задачи интерполирования.
4. Построить формулу численного дифференцирования, точную для многочленов степени 2 , для вычисления $f'(0)$ по системе узлов -h, 0, 2h.

Билет 4

1. Многочлены Чебышева (с доказательством).
2. Квадратурные формулы интерполяционного типа. Формулы для коэффициентов. Утверждения о точности.
3. Пример разностной схемы для уравнения теплопроводности.
4. Найти число итераций, необходимое для достижения заданной точности ε=0.001 решения системы

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}22x_1 - 0{,}05x_2 + 0{,}11x_3 - 0{,}08x_4 + 2{,}15, \\ x_2 = 0{,}11x_1 + 0{,}15x_2 - 0{,}28x_3 - 0{,}04x_4 - 0{,}83, \\ x_3 = 0{,}08x_1 - 0{,}15x_2 + 0{,}12x_4 + 1{,}15, \\ x_4 = -0{,}22x_1 + 0{,}13x_2 - 0{,}27x_3 + 0{,}34, \end{cases}$$

методом итераций.

Билет 5

1. Интерполяционная формула Лагранжа (вывод).
2. Свойства квадратурных формул Гаусса.
3. Правая разностная производная

4. Исследовать порядок точности квадратурной формулы

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)h, \quad h=(b-a)/n$$

Билет 6

1. Интерполяционная формула Ньютона (вывод).
2. Явный итерационный метод с чебышевским набором параметров. Теорема.без доказательства.
3. Левая разностная производная и ее порядок аппроксимации.
4. Построить формулу численного дифференцирования, точную для многочленов степени 2 , для вычисления $f'(0)$ по системе узлов 0, h/2, h.

Билет 7

1. Оптимальный выбор узлов интерполирования (с доказательством).
1. Теорема о сходимости методов Рунге-Кутта.
2. Центральная разностная производная и ее порядок аппроксимации.
3. Найти шаг сетки h, обеспечивающий точность 0.001 квадратурной формулы трапеций для вычисления интеграла $\int_1^2 (x^2 - 3x + 7)dx$

Билет 8

1. Квадратурная формула прямоугольников и ее порядок точности (с доказательством).
2. Метод Якоби. Достаточное условие сходимости.
3. Аппроксимация, корректность и сходимость разностных схем.
4. При каких значениях параметра τ сходится метод релаксации для нахождения положительного корня функции $4 - 4x - 4x^2$ ?

Билет 9

1. Квадратурные формулы Гаусса. Критерий точности (с доказательством)..
2. Алгоритм метода Гаусса
3. Вторая разностная производная и ее порядок аппрокимации.
4. Найти число итераций, необходимое для достижения заданной точности ε=0.001 решения системы

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}22x_1 - 0{,}05x_2 + 0{,}21x_3 - 0{,}08x_4 + 1{,}15, \\ x_2 = 0{,}11x_1 + 0{,}15x_2 - 018x_3 - 0{,}0{,}4x_4 - 0{,}43, \\ x_3 = 0{,}08x_1 - 0{,}15x_2 + 0{,}12x_4 + 1{,}5, \\ x_4 = -0{,}12x_1 + 0{,}13x_2 - 0{,}26x_3 + 0{,}39, \end{cases}$$

методом итераций.

Билет 10

1. Метод простой итерации решения нелинейного уравнения. Достаточное условие сходимости (с доказательством).
2. Методы Рунге-Кутта, однопараметрическое семейство 2 порядка аппроксимации.
3. Что такое интерполяционный многочлен?
4. Найти шаг сетки h, обеспечивающий точность 0.001 квадратурной формулы прямоугольников для вычисления интеграла $\int_0^2 (x^2 - 2x + 3)dx$

Билет 11

1. Метод Ньютона. Достаточное условие сходимости (с доказательством)..
2. Принцип максимума.
3. Определение разделенной разности.
4. Найти порядок аппроксимации оператора $y''(x) + 8y'(x)$ разностным выражением $y_{\bar{x}x,i} + 8y_{x,i}$ .

Билет 12

1. Метод Зейделя. Достаточное условие сходимости (с доказательством).
2. Разностная задача Дирихле для уравнения Пуассона. Канонический вид. Условия положительности коэффициентов.
3. Привести пример двумерной сетки.
4. Найти шаг сетки h, обеспечивающий точность 0.001 квадратурной формулы Симпсона для вычисления интеграла $\int_1^3 (x^4 + x - 10)dx$.

# 4. ПОРЯДОК ПРОВЕДЕНИЯ И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

## 4.1. Порядок проведения промежуточной аттестации

Зачет и экзамен проставляются исходя из количества баллов, набранных в течение семестра.

**Начисляемые рейтинговые баллы.**

7 семестр (зачет)

Посещение лабораторных занятий -10
Ведение тетради -10
Выполнение лабораторных работ:
Лабораторная работа № 1 -10
Лабораторная работа № 2 -10
Лабораторная работа № 3 -10
Лабораторная работа № 4 -10
Лабораторная работа № 5 -10
Лабораторная работа № 6 -10
Лабораторная работа № 7 -10
Лабораторная работа № 8 -10
Итого 100 баллов

8 семестр (экзамен)

Ведение тетради -10
Посещение лекций за оба семестра -10
Выполнение лабораторных работ.
Лабораторная работа № 1 -10
Лабораторная работа № 2 -10
Лабораторная работа № 3 -10
Лабораторная работа № 4 -10
Коллоквиум №1 -20
Коллоквиум №2 -20
Контрольная №3 -20
Контрольная №4 -20
Экзаменационная контрольная работа - 25
Итого 125 баллов

## 4.2. Критерии оценивания промежуточной аттестации по видам оценочных средств.

### 4.2.1 Критерии оценивания лабораторной работы

Максимальный балл за одну лабораторную работу — 10 баллов.

| Балл | 9-10 баллов | 7-8 баллов | 3-6 баллов | 0-2 баллов |
|---|---|---|---|---|

| Уровень освоения проверяемых компетенций | высокий | средний | базовый | недостаточный |
|---|---|---|---|---|
| Критерии оценивания | Проделаны все предварительные построения, преобразования и оценки. Написана программа общего вида, позволяющая решать задачи из некоторого класса. Произведена проверка. Студент разбирается в программе и способен ее модифицировать. | Проделаны все основные предварительные построения. Написана программа общего вида, позволяющая решать задачи из некоторого класса. Произведена проверка. Студент разбирается в программе. | Написана работающая программа для решения конкретной задачи. Произведена проверка. Студент разбирается в программе и способен ее модифицировать. Предварительные выкладки могут отсутствовать. | Программа не работает или студент не разбирается в программе. |

### 4.2.2 Критерии оценивания коллоквиума

Максимальный балл за коллоквиум — 20 баллов. Этот балл складывается из баллов, полученных за каждый теоретический вопрос. В билете – 4 теоретических вопроса без доказательства.

**Критерии оценивания теоретического вопроса**

Максимальный балл за ответ на теоретический вопрос — 5.

| **5 баллов** | **4 балла** | **3 баллов** | **0-2 балла** |
|---|---|---|---|
| Высокий уровень освоения проверяемых компетенций | Средний уровень освоения проверяемых компетенций | Базовый уровень уровень освоения проверяемых компетенций | Недостаточный уровень освоения проверяемых компетенций |
| Даны аккуратные определения и четкие формулировки теорем, свойств. Объяснены | Даны аккуратные определения и четкие формулировки | Определения и формулировки в целом приведены, но содержат | Ответ на вопрос отсутствует или содержит определения и формулировки, |

| | | | |
|---|---|---|---|
| все обозначения, участвующие в ответе. | теорем, свойств. Не объяснены некоторые обозначения. Возможны незначительные неясности в изложении. | незначительные неточности, недостаточная ясность изложения | содержащие значительные ошибки |

**4.2.3 Критерии оценивания экзаменационной контрольной работы**

Максимальный балл за экзаменационную контрольную работу — 25 баллов. Этот балл складывается из баллов, полученных за каждый теоретический вопрос. В билете – 1 теоретический вопрос с доказательством и 3 теоретических вопроса без доказательства.

**Критерии оценивания теоретического вопроса с доказательством**

Максимальный балл — 10.

| **9-10 баллов** | **7-8 балла** | **3-6- баллов** | **0-2 балла** |
|---|---|---|---|
| Высокий уровень освоения проверяемых компетенций | Средний уровень освоения проверяемых компетенций | Базовый уровень уровень освоения проверяемых компетенций | Недостаточный уровень освоения проверяемых компетенций |
| Даны аккуратные определения и подробные доказательства теорем, свойств. Объяснены все обозначения, участвующие в ответе. | Даны определения и доказательства теорем, свойств. Не объяснены некоторые обозначения. Возможны незначительные неясности в изложении. | Определения и доказательства в целом приведены, но содержат незначительные неточности, недостаточная ясность изложения. Возможно, не приведены доказательства. | Ответ на вопрос отсутствует или содержит определения и формулировки, содержащие значительные ошибки |

**Критерии оценивания теоретического вопроса без доказательства**

Максимальный балл — 5.

| **5 баллов** | **4 балла** | **3 баллов** | **0-2 балла** |
|---|---|---|---|
| Высокий уровень освоения проверяемых | Средний уровень освоения проверяемых | Базовый уровень уровень освоения проверяемых | Недостаточный уровень освоения проверяемых |

| компетенций | компетенций | компетенций | компетенций |
|---|---|---|---|
| Даны аккуратные определения и четкие формулировки теорем, свойств. Объяснены все обозначения, участвующие в ответе. | Даны аккуратные определения и четкие формулировки теорем, свойств. Не объяснены некоторые обозначения. Возможны незначительные неясности в изложении. | Определения и формулировки в целом приведены, но содержат незначительные неточности, недостаточная ясность изложения | Ответ на вопрос отсутствует или содержит определения и формулировки, содержащие значительные ошибки |

### 4.2.4 Критерии оценивания ведения тетради

| Балл | 9-10 баллов | 7-8 баллов | 3-6 баллов | 0-2 баллов |
|---|---|---|---|---|
| Уровень освоения проверяемых компетенций | высокий | средний | базовый | недостаточный |
| Критерии оценивания | В тетради отражены все предварительные построения, преобразования и оценки. Студент блестяще разбирается в теории по теме лабораторной работы. | В тетради отражены все основные предварительные построения, преобразования и оценки. Студент хорошо разбирается в теории по теме лабораторной работы.. | В тетради отражены некоторые предварительные построения. Студент удовлетворительно разбирается в теории по теме лабораторной работы.. | В тетради не отражены предварительные построения или студент не разбирается в теории по теме лабораторной работы.. |

## 4.3. Результаты промежуточной аттестации и уровни сформированности компетенций

При подведении итогов учитываются результаты текущей аттестации. В 7 семестре при постановке зачета суммируются баллы текущей аттестации (максимум 100баллов). Зачет выставляется при количестве баллов, не меньшем 60.

В 8 семестре полученные за текущую аттестацию баллы суммируются с баллами, полученными за экзаменационную контрольную работу (максимум 125 баллов). Оценка выставляется по следующему критерию:

0-49 баллов - неудовлетворительно (2);
50-69 баллов - удовлетворительно (3);
70-90 баллов - хорошо (4);
91-125 баллов - отлично (5).

Особенности проведении процедуры оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья обозначены в рабочей программе дисциплины (модуля).

Уровни сформированности компетенций определяются следующим образом:

1. Высокий уровень сформированности компетенций соответствует оценке отлично

   и предполагает формирование компетенций на высоком уровне: готовность к самостоятельной профессиональной деятельности: формируются знания постановок основных задач численного анализа, методов их решений, теорем о свойсвах численных методов; формируются умения разбираться в доказательствах и доказывать теоремы об устойчивости, аппроксимации и сходимости численных методов, решать прикладные задачи численными методами; формируются твердые навыки владения основными методами численного решения математических задач и их применения в профессиональной деятельности.

2. Средний уровень соответствует оценке хорошо

   и предполагает формирование компетенций на среднем уровне: формируется комплексное знание проблематики в области численных методов, формируются знания постановок основных задач численного анализа, методов их решений, основных теорем; формируются умения разбираться в доказательствах теорем об устойчивости, аппроксимации и сходимости численных методов, решать прикладные задачи численными методами; формируются навыки владения основными методами численного решения математических задач и их применения в профессиональной деятельности.

3. Базовый уровень соответствует оценке удовлетворительно

   и предполагает формирование компетенций на начальном уровне: формируется представление о проблематике в области численных методов, формируются знания постановок основных задач численного анализа, методов их решений, формулировок теорем об устойчивости, аппроксимации и сходимости численных методов; формируется умение решать прикладные задачи численными методами; формируются базовые навыки владения основными методами численного решения математических задач и их применения в профессиональной деятельности.

4. Низкий уровень соответствует оценке неудовлетворительно.

**02.03.01, Математика и компьютерные науки, Математические и компьютерные методы в фундаментальных и прикладных исследованиях, Численные методы, 2025, очное**

**Фонд оценочных средств дисциплины (модуля) одобрен и рекомендован:**

| | | |
|---|---|---|
| Проректор по учебной работе | утверждено 24.02.25 | А.А. Саламатов |

Ученым советом математического факультета

Протокол заседания № 6 от 20.02.2025

| | | |
|---|---|---|
| Председатель Ученого совета<br>математического факультета | согласовано | Е.А. Сбродова |

**Заседанием кафедры вычислительной математики**

Протокол заседания № 9 от 20.02.2025

| | | |
|---|---|---|
| Заведующий кафедрой | согласовано | В. Н. Павленко |
| Автор (составитель) | | М. А. Овчинников |

**Структура рабочей программы соответствует приказу ректора ФГБОУ ВО «ЧелГУ» от «13» апреля 2021 г. № 247-1**