Министерство образования и науки Российской Федерации
Южно-Уральский государственный университет
Кафедра общей и теоретической физики

531(07)
М55

В.К. Герасимов, Т.О. Миронова, Ю.Б. Пейсахов, Т.П. Привалова

# МЕХАНИКА И МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

**Учебное пособие**

Челябинск
Издательский центр ЮУрГУ
2014

УДК 531(075.8) + 539.1 (075.8)

*Одобрено*
*научно-методическим советом университета*

*Рецензенты:*
*Л.А. Песин, В.К. Усачев*

**Механика и молекулярная физика. Руководство к решению задач**: учебное пособие для студентов вузов / В.К. Герасимов, Т.О. Миронова, Ю.Б. Пейсахов, Т.П. Привалова. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2014. – 83 с.

Основное назначение учебного пособия – оказать помощь студентам очной и заочной форм обучения при выполнении контрольных работ по курсу общей физики. Дано краткое изложение теоретического материала и приведены примеры решения типовых задач по разделам «Механика», «Молекулярная физика и термодинамика».

Учебное издание предназначено для студентов, обучающихся по укрупненным группам специальностей и направлений подготовки в области образования «инженерное дело, технологии и технические науки».

УДК 531(075.8) + 539.1(075.8)

# ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие адресовано студентам заочного инженерно-экономического факультета для оказания помощи в правильной организации работы по изучению курса общей физики.

Курс физики составляет основу теоретической подготовки инженеров и является фундаментальной физико-математической базой, необходимой для успешной деятельности инженера любого профиля.

В результате изучения курса физики студент обязан:

– изучить основные физические явления;

– овладеть фундаментальными понятиями, законами и теориями классической и современной физики;

– овладеть методами физического исследования;

– уметь применять достижения физики в практической деятельности;

– ознакомиться с современной научной аппаратурой;

– приобрести навыки физического эксперимента и умение применять физические законы в прикладных задачах будущей специальности.

Учебное пособие соответствует учебной программе следующих направлений: 140100 Теплоэнергетика и теплотехника, 140400 Электроэнергетика и электротехника, 150400 Металлургия, 150700 Машиностроение, 151900 Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств, 220400 Управление в технических системах, 230100 Информатика и вычислительная техника.

В результате изучения физики у студентов формируются следующие компетенции.

*Общекультурные компетенции*:

культура мышления, умение обобщать и анализировать информацию, ставить цель и выбирать пути ее достижения;

умение логически верно, аргументированно и ясно строить устную и письменную речь;

стремление к саморазвитию, повышению своей квалификации и мастерства, к устранению пробелов в знаниях и к обучению на протяжении всей жизни;

*Общепрофессиональные компетенции*:

умение решать физические проблемы повышенной сложности, в том числе требующие оригинальных подходов;

умение читать и анализировать учебную и научную литературу;

знание основных физических законов, составляющих фундамент современной техники и технологий;

владение базовыми знаниями математических и естественнонаучных дисциплин и дисциплин общепрофессионального цикла в объеме, необходимом для использования в профессиональной деятельности основных законов соответствующих наук, разработанных в них подходов, методов и результатов математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования.

Дисциплина «физика» изучается в течение трех семестров. Данное пособие предназначено для студентов, начинающих изучать физику во втором семестре. Поэтому приведем несколько советов по правилам выполнения и оформления контрольных работ (КР) по курсу физики.

С первых дней учебного семестра приступайте к решению задач своей контрольной работы, изучая необходимый для этого материал по учебным пособиям. Сдавать КР необходимо в течение семестра, не позднее одной недели до начала сессии. На титульном листе КР проставьте номер своего шифра, определяющий номер варианта КР. В конце каждой КР приводите перечень используемой литературы: учебной и методической, – после этого поставьте дату и свою подпись.

Возвращенную не зачтенную работу исправляйте в этой же тетради на оставшихся чистых листах, начиная с заголовка *«Работа над ошибками»*. Отнеситесь к исправлениям серьезно, учитывая все замечания и вопросы, поставленные рецензентом. Обязательно указывайте номер исправленной задачи, не приводя повторно ее текста.

*Требования к оформлению решения задач КР.*

1. Приводите в своей тетради полный текст задачи, а затем краткое условие задачи, выписывая заданные и определяемые величины в общепринятых обозначениях.

2. Внимательно отнеситесь к каждому слову в формулировке задачи, чтобы выделить в ней все, в том числе и неявно заданные величины. Например: «… Найти путь, пройденный телом до остановки». Здесь неявно задана конечная скорость, равная нулю. Или в задаче говорится о газе, находящемся при нормальных условиях. Это означает, что заданы давление $p = 1{,}013 \cdot 10^5$ Па и температура 0 ℃, или $T$=273 К, и т. д.

3. В решении задачи приводите рисунок, график или схему.

4. Решение задачи сопровождайте краткими, но исчерпывающими пояснениями: а) назовите используемый для решения закон, б) приведите его словесную или математическую формулировку в общем виде, в) объясните правомерность применения закона и уточните формулу закона в условиях данной задачи, г) назовите величины, входящие в формулы, в том числе физические постоянные.

5. Каждую задачу стремитесь решать в общем виде, не делая промежуточных вычислений; решение задачи завершайте расчетной формулой определяемой величины.

6. Вычисляя, в расчетную формулу обязательно подставьте значения данных и табличных величин, предварительно переведя их в систему СИ.

## СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Трофимова, Т.И. Курс физики: учебное пособие для инженерно-технических специальностей вузов / Т.И. Трофимова. – М.: Академия, 2010. – 557 с.

2. Писарев, Н.М. Физика: Курс лекций для студентов инженерных специальностей вузов / Н.М. Писарев; под ред. Г.П. Вяткина. – Челябинск: Изд-во ЧГТУ, 1997. – Ч.1. – 320 с.

3. Детлаф, А.А. Курс физики: учебное пособие для втузов / А.А. Детлаф, Б.М. Яворский. – М.: Академия, 2008. – 719 с.

4. Савельев, И.В. Курс физики Т.1: Механика. Молекулярная физика: учебное пособие для втузов: в 3 т. / И.В. Савельев. – СПб. и др.: Лань, 2008. – 350 с.

5. Чертов, А.Г. Задачник по физике: учебное пособие для втузов / А.Г. Чертов, А.А. Воробьев. – М.: Издательство Физматлит, 2008. – 640 с.

6. Иродов, И.Е. Задачи по общей физике: учебное пособие для втузов / И.Е. Иродов. – СПб. и др.: Лань, 2009. – 431 с.

7. Фирганг, Е.В. Руководство к решению задач по курсу общей физики: учебное пособие для втузов по техническим и технологическим направлениям и специальностям / Е.В. Фирганг. – СПб. и др.: Лань, 2009. – 347 с.

8. Ахлюстин, В.А. Методические указания студентам – заочникам по физике / В.А. Ахлюстин, В.К. Герасимов, Ю.Б. Пейсахов; под ред. В.П. Бескачко. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2008. – 73 с.

9. Механика и молекулярная физика: учебное пособие к выполнению лабораторных работ / В.К. Герасимов, А.Е. Гришкевич, С.И. Морозов и др.; под ред. В.П. Бескачко. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2008. – 95 с.

ЧАСТЬ 1

# МЕХАНИКА

## 1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

### 1.1 Кинематика поступательного и вращательного движения

При рассмотрении задач данного раздела вводят понятие материальной точки (МТ). За материальную точку может быть принято любое тело, обладающее массой, размерами которого в условиях данной задачи можно пренебречь. Линия, описываемая материальной точкой в пространстве при ее движении, называется траекторией. Уравнение траектории для плоского движения имеет вид

$$y = y(x).$$

Движение материальной точки в пространстве определяется законом движения, который для МТ может быть задан в виде трех скалярных уравнений:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases}$$

либо эквивалентным векторным уравнением:

$$\vec{r} = \overrightarrow{r_0} + \overrightarrow{v_0}t + \frac{\vec{a}t^2}{2}.$$

Быстроту движения материальной точки характеризуют средней скоростью

$$\langle\vec{v}\rangle = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \quad \text{или} \quad \langle v\rangle = \frac{s}{\Delta t},$$

где $s$ – путь, пройденный за время $\Delta t$, и мгновенной скоростью

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t},$$

которая может быть записана, как любой вектор, в координатной форме:

$$\vec{v} = v_x\vec{\mathrm{i}} + v_y\vec{\mathrm{j}} + v_z\vec{\mathrm{k}}, \quad \text{а модуль} \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2},$$

где проекции скорости $v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$; $v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$; $v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$.

Быстроту изменения скорости при неравномерном движении характеризует ускорение: среднее ускорение

$$\langle\vec{a}\rangle = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

и мгновенное ускорение

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}.$$

С другой стороны,

$$\vec{a} = a_x\vec{\mathrm{i}} + a_y\vec{\mathrm{j}} + a_z\vec{\mathrm{k}},$$

где проекции вектора ускорения равны соответствующим производным по времени от проекций скорости:

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}; \quad a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}; \quad a_z = \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}.$$

В криволинейном движении осями координат могут быть касательная к траектории движения материальной точки и нормаль к ней. Орты осей в этом случае $\vec{\tau}$ и $\vec{n}$. При этом полное ускорение

$$\vec{a} = \overrightarrow{a_n} + \overrightarrow{a_\tau}, \text{ а его модуль } a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2},$$

где тангенциальное ускорение $a_\tau$ характеризует быстроту изменения *модуля скорости* и направлено по касательной к траектории:

$$a_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}, \text{ вектор } \overrightarrow{a_\tau} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{\tau};$$

нормальное ускорение характеризует быстроту изменения *направления скорости* и направлено по нормали к центру кривизны траектории:

$$a_n = \frac{v^2}{R}, \text{ вектор } \vec{a}_n = \frac{v^2}{R}\vec{n}.$$

Здесь $R$ – радиус кривизны траектории.

Движение материальной точки по окружности характеризуют угловой скоростью ω

$$\vec{\omega} = \frac{\mathrm{d}\vec{\varphi}}{\mathrm{d}t}, \qquad \omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$$

и угловым ускорением ε

$$\vec{\varepsilon} = \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}, \qquad \varepsilon = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}.$$

Угловые и линейные величины связаны следующими соотношениями:

$$v = \omega R;$$
$$a_\tau = \varepsilon R;$$
$$a_n = \omega^2 R.$$

Зная зависимость $\vec{v}(t)$ или $\vec{\omega}(t)$, можно найти $\vec{r} = \vec{r}(t)$ и $\varphi = \varphi(t)$:

$$\vec{r} = \overrightarrow{r_0} + \int_0^t \vec{v}(t)\mathrm{d}t, \quad \varphi = \varphi_0 + \int_0^t \omega(t)\mathrm{d}t.$$

Например, для равнопеременного поступательного движения ($\vec{a} = \mathrm{const}$) и равнопеременного вращения ($\vec{\varepsilon} = \mathrm{const}$) ) получаем:

$$\vec{r} = \overrightarrow{r_0} + \overrightarrow{v_0}t + \frac{\vec{a}t^2}{2}, \quad \vec{v} = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a}\,(t)\mathrm{d}t = \vec{v}_0 + \vec{a}t;$$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}, \quad \vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \int_0^t \vec{\varepsilon}\,(t)\mathrm{d}t = \vec{\omega}_0 + \vec{\varepsilon}t.$$

### 1.2. Динамика поступательного движения

В основе динамики поступательного движения лежат три закона Ньютона.

*Первый закон Ньютона:* всякое тело сохраняет свое состояние покоя или равномерного и прямолинейного движения до тех пор, пока на него не действуют другие тела.

*Второй закон Ньютона* (основной закон динамики) гласит, что скорость изменения импульса тела $\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$ равна результирующей всех сил $\vec{F}$, приложенных к телу:

$$\frac{\mathbf{d}\vec{\boldsymbol{p}}}{\mathbf{d}\boldsymbol{t}} = \vec{\boldsymbol{F}},$$

где $\vec{p} = m\vec{v}$ – импульс тела.

Если $m = \text{const}$, то $m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}$; так как $\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{a}$, то $\boldsymbol{m\vec{a}} = \vec{\boldsymbol{F}}$.

*Третий закон Ньютона:* $\overrightarrow{F_1} = -\overrightarrow{F_2}$, т. е. если первое тело действует на второе с силой $\overrightarrow{F_1}$, то второе тело действует на первое с силой, равной по модулю, но противоположно направленной.

## 1.3. Динамика вращательного движения

При решении рассматриваемой ниже группы задач в зависимости от условий необходимо бывает найти как кинематические параметры движения – скорость и ускорение движущихся тел, пройденный ими путь, так и динамические характеристики – силу и момент силы, а также физические величины, характеризующие участвующие в движении тела: массу и момент инерции.

Основной закон динамики вращательного движения:

$$\frac{\mathbf{d}\vec{\boldsymbol{L}}}{\mathbf{d}\boldsymbol{t}} = \frac{\mathbf{d}(\boldsymbol{I}\vec{\boldsymbol{\omega}})}{\mathbf{d}\boldsymbol{t}} = \overrightarrow{\boldsymbol{M}}, \text{ или } \vec{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{M}}}{\boldsymbol{I}},$$

где $\vec{L} = I\vec{\omega}$ – вектор момента импульса тела; $\vec{M}$ – вектор момента силы; $I$ – момент инерции тела, $\vec{\varepsilon}$ – угловое ускорение тела.

Момент инерции тела приближенно находится как сумма моментов инерции материальных точек, составляющих тело:

$$I = \sum m_i r_i^2.$$

Здесь $r_i$ – расстояние отдельных точек от оси или центра вращения; $m_i r_i^2$ – момент инерции $i$-той материальной точки массой $m_i$.

В случае непрерывного распределения масс эта сумма сводится к интегралу по всей массе тела:

$$I = \int_0^m r^2\,\mathrm{d}m.$$

Таким способом вычисляют моменты инерции разных тел. Приведем значения моментов инерции некоторых тел массой $m$ (тела однородные):

а) полый тонкостенный цилиндр и обруч радиуса $R$ относительно его оси симметрии:

$$I = mR^2;$$

б) сплошной цилиндр и диск радиуса $R$ относительно его оси симметрии:

$$I = \frac{mR^2}{2};$$

в) шар радиуса $R$ относительно оси, проходящей через его центр:

$$I = \frac{2}{5}mR^2.$$

Теорема Штейнера позволяет найти момент инерции $I$ некоторого тела массой $m$ относительно произвольной оси:

$$I = I_0 + ma^2,$$

если известен момент инерции $I_0$ этого тела относительно оси, проходящей через центр масс тела параллельно произвольной оси, находящейся на расстоянии $a$ от нее.

Момент силы $\bar{F}$ относительно оси $z$ (проекция вектора $\vec{M}$ на ось $z$)

$$M = F_{\perp} r \sin\alpha = F_{\perp} l,$$

где $F_{\perp}$ – проекция силы на плоскость, перпендикулярную оси вращения $z$, $r$ – величина радиуса-вектора, проведенного из точки O на оси Z к точке приложения силы; $l$ – плечо силы, – это кратчайшее расстояние (по перпендикуляру) от оси вращения до линии действия силы.

## 1.4. Работа и механическая энергия

Работа – это одна из форм передачи энергии от одних тел к другим. Поэтому, при решении задач следует помнить, что работа совершается за счет убыли энергии.

В зависимости от условий задачи рассматривают два основных пути определения работы.

1. Известна сила $F$, под действием которой перемещается тело. В этом случае работа на участке траектории от точки 1 до точки 2 определяется по формуле:

$$A = \int_1^2 \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_1^2 F\mathrm{d}s\cos\alpha;$$

где $\mathrm{d}s$ – малое перемещение тела, на котором величину силы можно считать постоянной; $\alpha$ – угол между направлением действия силы и направлением перемещения.

Если сила постоянна (не изменяется ее величина и угол $\alpha$), то формула для вычисления работы принимает простой вид:

$$A = Fs\cos\alpha,$$

где $s$ – путь, пройденный телом под действием силы $\vec{F}$.

2. Сила неизвестна, но известна механическая энергия тела $E$. В этом случае работу вычисляют как приращение энергии тела, т. е. как разность энергии тела в конечном и начальном состояниях:

$$A = \Delta E = E_{\text{кон}} - E_{\text{нач}}.$$

В механике рассматривают механическую энергию, складывающуюся из кинетической $E_{\text{К}}$ и потенциальной энергии $E_{\text{П}}$.

*Кинетическая энергия* – это энергия, зависящая от скорости движения тела. При поступательном движении тела массой $m$ со скоростью $v$ его кинетическая энергия $E_К$ равна $\frac{mv^2}{2}$. При вращательном движении тела, имеющего момент инерции $I$, с угловой скоростью ω его кинетическая энергия равна $\frac{I\omega^2}{2}$. При одновременном участии тела в обоих видах движения кинетическая энергия определяется формулой

$$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}.$$

*Потенциальная энергия* – энергия, обусловленная взаимодействием тел и зависящая от положения тел или их частей относительно друг друга. Потенциальной энергией обладают все упруго деформированные тела, например, растянутая или сжатая пружина, а также все тела, которые притягиваются или отталкиваются друг от друга: Земля и другие планеты, взаимодействующие с Солнцем, молекулы, заряженные тела. Потенциальная энергия всегда взаимная, она относится к обоим взаимодействующим телам.

Для тела массой $m$, поднятого над поверхностью Земли на высоту $h$, потенциальная энергия $E_П$ определяется по формуле

$$E_П = mgh.$$

Эта формула справедлива только для случая, когда $h \ll R_з$, где $R_з$ – радиус Земли, и если за нулевой уровень $E_П$ принимают энергию тела на поверхности Земли.

Для упруго деформированной пружины (пластины) и т. п.

$$E_П = \frac{kx^2}{2},$$

где $k$ – коэффициент упругости или жесткость пружины; $x$ – величина деформации: удлинение или сжатие тела.

Вид функции потенциальной энергии находят, вычисляя неопределенный интеграл:

$$E_П = -\int \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} + C,$$

где $C$ – постоянная интегрирования, зависящая от выбора нулевого уровня $E_П$. Используя эту формулу для расчета $E_П$ любого тела и Земли и учитывая, что сила их взаимного притяжения $F = G\frac{mM_з}{r^2}$, получаем

$$E_П = -G\frac{mM_з}{r},$$

где $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{Н·м}^2}{\text{кг}^2}$ – гравитационная постоянная; $m$ и $M_з$ – массы тела и Земли; $r$ – расстояние от центра Земли до центра масс тела. Формула дает значение $E_П$ тела относительно его положения в бесконечности, в котором $E_П = 0$.

Таким образом, потенциальная и кинетическая энергия тела являются величинами относительными, т. е. их численное значение зависит от выбора системы отсчета.

Итак, на совершение работы тратится энергия. Но не вся затраченная энергия идет на полезную работу; часть ее расходуется на преодоление сил трения. Механизмы, с помощью которых совершается работа, характеризуют коэффициентом полезного действия (КПД) $\eta$, равным отношению полезной работы $A_{\text{П}}$ ко всей совершенной работе $A$, т. е. к затраченной энергии $\Delta E$.

$$\eta = \frac{A_{\text{П}}}{A} = \frac{A_{\text{П}}}{\Delta E}.$$

Быстроту совершения любой работы характеризуют мощностью. Следует различать среднюю мощность $\langle N \rangle$ и мгновенную мощность $N$. Среднюю мощность рассчитывают по формуле

$$\langle N \rangle = \frac{A}{\Delta t},$$

где $\Delta t$ – интервал времени, в течение которого совершена работа $A$.

Мгновенную мощность определяют по формулам

$$N = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} \quad \text{и} \quad N = Fv\cos\alpha\,.$$

Здесь $\mathrm{d}A$ – элементарная работа, совершаемая силой $F$ за бесконечно малый промежуток времени $\mathrm{d}t$; $v$ – скорость движения тела.

## 1.5. Законы сохранения

Всякая система при движении изменяет свое состояние, при этом изменяются значения параметров, характеризующих состояние системы. Однако существуют такие величины – функции состояния, которые обладают важным свойством оставаться с течением времени неизменными, если соблюдены определенные условия. Среди этих величин наиболее важную роль в механике играют импульс, момент импульса и энергия механической системы.

### 1.5.1. Закон сохранения импульса

*Закон сохранения импульса* (ЗСИ): ***в замкнутой системе полный импульс остается постоянным***

$$\boldsymbol{\vec{p}} = \overrightarrow{\mathbf{const}},$$

или

$$\boldsymbol{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2} + \cdots = \boldsymbol{m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2} + \cdots,$$

где $m_1, m_2, \ldots$ – массы тел, входящих в систему; $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots$ – скорости соответствующих тел до взаимодействия; $u_1, u_2, \ldots$ – скорости этих же тел после взаимодействия.

Замкнутой механической системой является такая система тел, на которую не действуют внешние силы. Но таких идеальных систем на практике не встречается: невозможно создать такую систему, чтобы полностью исключить ее взаимодействие с внешними телами, не входящими в систему. При решении практических задач замкнутой системой тел можно считать такую, на которую действуют внешние силы, но их сумма равна нулю. В ряде задач сохраняется проекция импульса на одну из осей, если при этом проекции внешних сил на эту ось равны нулю.

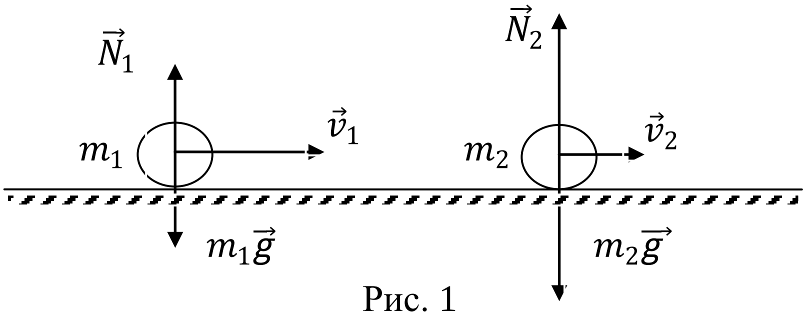


Рис. 1

Пример практически замкнутой системы приведен на рис. 1. На тела, входящие в систему: на два шарика, движущихся вдоль оси $x$, – действуют силы тяжести $m_1\vec{g}$, $m_2\vec{g}$ и силы нормальных реакций опоры $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$ но сумма этих сил равна нулю, да и проекции их на направление скорости равны нулю.

### 1.5.2. Закон сохранения момента импульса

*Закон сохранения момента импульса* (ЗСМИ) можно применять к любой механической системе при условии, что результирующий момент всех внешних сил, приложенных к системе, равен нулю $(\vec{M} = 0)$. Формулировка закона: ***Момент импульса замкнутой системы сохраняется, т. е. не изменяется с течением времени:***

$$\sum \overrightarrow{\boldsymbol{L}_{\mathrm{i}}} = \overrightarrow{\mathbf{const}}.$$

Здесь записана сумма векторов моментов импульса всех частей системы.

Напомним, что момент импульса твердого тела равен произведению его момента инерции на угловую скорость: $\vec{L} = I\vec{\omega}$, – а момент импульса системы тел есть векторная сумма моментов импульса всех тел данной системы:

$$\vec{L} = \sum \overrightarrow{L_{\mathrm{i}}} = \sum I_{\mathrm{i}} \, \overrightarrow{\omega_{\mathrm{i}}}.$$

### 1.5.3. Закон сохранения механической энергии

*Закон сохранения механической энергии* (ЗСМЭ)*:* ***полная механическая энергия системы тел сохраняется, если на тела системы действуют только* консервативные *силы*** (внутри и извне), ***а диссипативные силы отсутствуют или их работа равна нулю:***

$$E_{\text{К}} + E_{\text{П}} = \text{const},$$

где $E_К$ – кинетическая энергия, равная сумме энергий всех тел системы, $E_П$ – потенциальная энергия системы.

*Консервативными* являются силы, работа которых зависит только от закона сил и от начального и конечного положения тела; работа консервативных сил равна убыли потенциальной энергии системы. Консервативными являются сила тяжести, сила упругости $F_{упр} = -kx,$ гравитационная сила. *Диссипативными* являются силы трения и сопротивления, приводящие к превращению механической энергии во внутреннюю энергию тел путем их нагрева.

ЗСМЭ является частным случаем *закона сохранения энергии* системы: вследствие действия диссипативных сил происходит превращение кинетической энергии тел в эквивалентное количество других видов энергии, не связанных с механическим движением тел, например, в энергию теплового движения молекул.

## 1.6. Механические колебания

Гармонические колебания описывают уравнением:

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0),$$

где $x$ – смещение колеблющейся точки относительно положения равновесия в момент времени $t$; $A$ – наибольшее смещение, или амплитуда колебаний; ω – циклическая частота колебаний; $\varphi_0$ – начальная фаза колебаний; $(\omega t + \varphi_0) = \varphi$ – фаза колебаний в момент времени $t$.

Колебания характеризуют частотой ω и периодом $T$, связанными друг с другом соотношением: $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Период колебаний математического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

где $l$ – длина маятника; $g$ – ускорение свободного падения.

Период колебаний пружинного маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}},$$

где $m$ – масса груза; $k$ – жесткость пружины.

Кинетическая энергия гармонических колебаний

$$E_К = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}A^2\omega^2\sin^2\varphi,$$

где $m$ – масса колеблющегося объекта; $v$ – его скорость.

Потенциальная энергия гармонических колебаний

$$E_П = \frac{kx^2}{2} = \frac{m}{2}A^2\omega^2\cos^2\varphi,$$

где $k = m\omega^2$ – жесткость, или коэффициент упругости пружины.

Результатом сложения одинаково направленных гармонических колебаний равной частоты является также гармоническое колебание с периодом, равным периоду складываемых колебаний. Если уравнения двух складываемых колебаний:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_{01}),$$
$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_{02}),$$

то уравнение результирующего колебания:

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Здесь амплитуда результирующего колебания

$$A = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos \Delta\varphi,$$

где $A_1$ и $A_2$ – амплитуды складываемых колебаний; $\Delta\varphi$ – их разность фаз.

Уравнение затухающего колебательного движения имеет вид

$$x = A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Здесь $A = A_0 e^{-\delta t}$ является амплитудой затухающих колебаний; $A_0$ – начальная амплитуда (в момент времени $t = 0$); $\delta$ – коэффициент затухания, его величина $\delta = \frac{r}{2m}$, где $r$ – коэффициент сопротивления среды; $m$ – масса колеблющейся точки. Затухание колебаний характеризуют логарифмическим декрементом затухания

$$\theta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \delta T,$$

где $A(t)$ и $A(t+T)$ – амплитуды двух последовательных колебаний, отделенных друг от друга периодом колебаний $T$.

Циклическая частота затухающих колебаний

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2},$$

где $\omega_0$ – циклическая частота свободных (собственных) незатухающих колебаний той же колебательной системы.

## 2. РЕКОМЕНДАЦИИ К РЕШЕНИЮ ФИЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

1. Текст задачи следует внимательно прочитать, чтобы выяснить, какое движение (поступательное, вращательное, качение) или физическое явление рассматривается в задаче. Полезно сделать схематический чертеж или рисунок.

2. В разделе 1 – «Теоретическая часть» изучите сведения о рассматриваемом в задаче явлении: ознакомьтесь с основными формулами и величинами. Выясните, нельзя ли применить *законы сохранения (ЗСИ, ЗСМИ, ЗСМЭ)* – для этого проверьте, выполняются ли в задаче условия применения закона сохранения (замкнутость механической системы, консервативность сил). Выпишите законы и формулы, которые можно использовать при решении данной задачи.

3. Запишите краткое условие задачи, выбирая для обозначения заданных и искомых величин символы, которые использованы в формулах.

4. Задачу следует решать, как правило, в общем виде, т. е. получить расчетную формулу определяемой величины, содержащую символы заданных величин и физических постоянных.

5. Вычисление определяемой величины начинайте с подстановки в расчетную формулу значений величин. При этом следует помнить, что большинство физических величин имеют свои единицы измерения. Полезно записывать их при подстановке в формулу, чтобы убедиться, что все величины взяты в единицах СИ. Только при вычислении отношений, например, $\frac{m_2}{m_1}$, $\frac{E_2}{E_1}$, $\frac{v_2}{v_1}$ и т. п. можно подставлять величины в любых, но одинаковых единицах, т. е. не обязательно в СИ. Если определяемых величин несколько, то вывод расчетной формулы для следующей начинайте, *закончив вычисление предыдущей определяемой величины*.

6. Полезно выполнять проверку расчетной формулы на совпадение единиц измерения левой и правой части равенства. Несовпадение единиц указывает на ошибку в расчетной формуле.

7. Вычисления и запись результата делайте с точностью до двух или трех (не более) значащих цифр. Незначащие нули записывайте в виде сомножителя $10^{\pm n}$. При этом, если показатель степени $n$ соответствует приставке, то используйте её: например, $h = 0{,}00325$ м $= 3{,}25 \cdot 10^{-3}$ м $=$ $= 3{,}25$ мм; $v = 37\,400\ \frac{\text{м}}{\text{с}} = 3{,}74 \cdot 10^4\ \frac{\text{м}}{\text{с}} = 37{,}4 \cdot 10^3\ \frac{\text{м}}{\text{с}} = 37{,}4\ \frac{\text{км}}{\text{с}}$. Помните, что точность результата вычислений не может быть выше, чем точность исходных данных.

# 3. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

## 3.1. Кинематика поступательного и вращательного движения

### План решения кинематических задач

1. Сделайте рисунок, на котором покажите оси $x$ и $y$ и вектор начальной скорости $\vec{v_0}$; этот вектор направлен по касательной к траектории. В случае, если тело после броска совершает движение в поле тяжести Земли под действием силы $\vec{F_\text{т}} = m\vec{g}$, траекторией движения является парабола или ветвь параболы, а *полное ускорение тела равно ускорению свободного падения* $\vec{g}$.

2. Выясните характер независимых движений вдоль осей $x$ и $y$: равномерное или равнопеременное. Запишите для этих движений уравнения кинематики в проекции на оси $x$ и $y$: $x = f(t)$, $y = f(t)$, $v_x = f(t)$ и $v_y = f(t)$.

3. Для криволинейного движения используйте также естественные оси – касательную и нормаль к траектории. Такие оси следует показать на рисунке в той точке, где необходимо определить нормальное $\vec{a_n}$ и тангенциальное $\vec{a_\tau}$ ускорение. Эти ускорения являются составляющими полного ускорения, равного $\vec{g}$, поэтому для нахождения составляющих необходимо с конца вектора $\vec{g}$ опустить перпендикуляры на нормаль и касательную. Из полученного так треугольника ускорений с помощью функций $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ находят величины $a_n$ и $a_\tau$. Необходимые значения

тригонометрических функций определяют из треугольника скоростей; для его построения в той же точке траектории на рисунке показывают составляющие вектора скорости $\overrightarrow{v_x}$ и $\overrightarrow{v_y}$, при сложении которых получается вектор скорости $\vec{v}$, направленный по касательной к траектории.

4. Если в задаче задан кинематический закон поступательного или вращательного движения, то для нахождения скорости и ускорений используют определительные формулы, последовательно дифференцируя функцию закона движения $x = f(t)$ или $\varphi = f(t)$, а затем дифференцируя полученный закон изменения скорости $v = f(t)$ или $\omega = f(t)$.

***Задача 1***. Небольшое тело бросили под углом $\beta = 30°$ к горизонту с начальной скоростью $v_0 = 20\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найдите: 1) уравнение траектории движения тела $y(x)$, 2) время движения $t_0$, 3) скорость, нормальное $a_n$ и тангенциальное $a_\tau$ ускорение тела через $t = 1{,}5$ с после начала движения, 4) радиус кривизны траектории $R$ в этот момент времени.

***Дано***

$v_0 = 20\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$;
$\beta = 30°$;
$t = 1{,}5$ с.

$y(x) - ?$
$t_0 - ?\ v - ?$
$a_n - ?\ a_\tau - ?$
$R - ?$

***Решение***

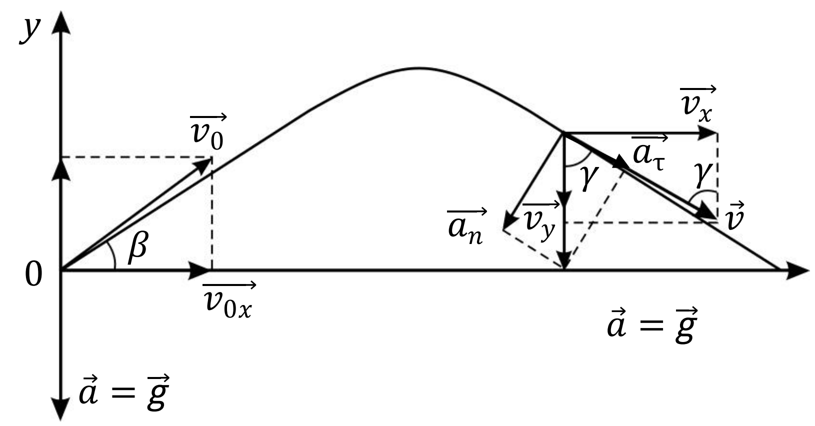



Рис. 2

В данном случае размерами тела можно пренебречь и принять его за материальную точку. Если не учитывать сопротивление воздуха, то в поле силы тяжести тело движется с постоянным ускорением $\vec{a} = \vec{g}$, направленным вертикально вниз (рис. 2). Движение тела криволинейное, сложное и характеризуется системой уравнений:

$$\vec{r} = \overrightarrow{r_0} + \overrightarrow{v_0}t + \frac{\vec{a}t^2}{2},$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{v_0} + \vec{a}t. \qquad (1)$$

Это движение можно представить как совокупность двух прямолинейных движений: горизонтального – по оси $x$, и вертикального – по оси $y$. Законы этих прямолинейных движений получим, проецируя на оси $x$ и $y$ уравнения (1). Запишем проекцию левой и правой части уравнений (1) на ось $x$:

$$v_x = v_{0x} + a_x t; \quad r_x = x = v_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}.$$

Так как проекция ускорения $a_x = 0$, а начальная скорость $v_{0x} = v_0 \cos\beta$, то

$$v_x = v_0 \cos\beta = \text{const}, \quad x = v_0 \cos\beta \cdot t, \qquad (2)$$

т. е. движение вдоль оси *x* равномерное. Аналогично запишем для оси *y*:

$$v_y = v_{0y} + a_y t, \quad r_y = y = v_{0y} t + \frac{a_y t^2}{2}. \qquad (3)$$

По рис. 2 видно, что $a_y = -g$, так как вектор $\vec{g}$ ⇅ оси $y$, а скорость $v_{0y} = v_0 \sin\beta$; поэтому уравнения (3) принимают следующий вид:

$$v_y = v_0 \sin\beta - gt; \quad y = v_0 \sin\beta \cdot t - \frac{gt^2}{2}. \qquad (4)$$

Следовательно, движение тела вдоль оси *y* равнопеременное: с постоянным ускорением $g$.

1) Найдем уравнение траектории в виде $y = y(x)$. Для этого из уравнения (2) выразим время $t = \frac{x}{v_0 \cos\beta}$ и подставим его в уравнение (4):

$$y = \frac{v_0 \sin\beta}{v_0 \cos\beta} x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\beta} x^2, \quad \text{или} \quad y = \operatorname{tg}\beta \cdot x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\beta} x^2.$$

После вычисления коэффициентов при переменной *x* получаем уравнение траектории в виде:

$$y = 1{,}73x - 0{,}017x^2.$$

Это уравнение параболы, ветви которой направлены вниз (см. рис. 2).

2) Время движения тела $t_0$ состоит из двух интервалов времени: времени подъема $t_1$ и равного ему времени падения $t_2$, так как падение и подъем тела происходили с одинаковым ускорением g. Время подъема может быть найдено из условия $v_y = 0$ в наивысшей точке траектории, т. е., в соответствии с уравнением (4): $0 = v_0 \sin\beta - gt_1$, откуда время $t_1 = \frac{v_0 \sin\beta}{g}$, а время движения тела $t_0 = 2t_1 = \frac{2v_0 \sin\beta}{g}$.

Вычисляем по этой формуле: $t_0 = \dfrac{2 \cdot 20\,\frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot \frac{1}{2}}{9{,}8\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}} = 2$ с.

Видим, что заданное время $t = 1{,}5$ с меньше, чем $t_0$, но больше времени движения до вершины параболы $t_1 = 1$ с, следовательно, заданная точка находится на нисходящей ветви параболы.

3) Модуль скорости движения тела выразим через проекции:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}.$$

Подставляя значения проекций скорости по формулам (2) и (4), получаем

$$v = \sqrt{(v_0 \cos\beta)^2 + (v_0 \sin\beta - gt)^2}.$$

Вычисляем: $v = \sqrt{(20\ \frac{м}{с} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (20\ \frac{м}{с} \cdot \frac{1}{2} - 9{,}8\ \frac{м}{с^2} \cdot 1{,}5\ с)^2} = 18{,}0\ \frac{м}{с}$.

Тангенциальное $a_\tau$ и нормальное $a_n$ ускорения могут быть определены двумя способами: аналитическим – по определительным формулам, и графическим – этот способ применим в данном решении.

Изобразим на рис. 2 в момент времени $t = 1{,}5$ с вектор скорости тела и его проекции $v_x$ и $v_y$. Далее изобразим в этот же момент времени вектор полного ускорения $\vec{a} = \vec{g}$ и разложим его на составляющие $\overrightarrow{a_\tau}$ и $\overrightarrow{a_n}$. Для этого проведем касательную к траектории (по ней направлен вектор скорости) и нормаль – перпендикулярно касательной. Чтобы найти составляющие $\overrightarrow{a_\tau}$ и $\overrightarrow{a_n}$, с конца вектора $\vec{g}$ опустим перпендикуляры на касательную и нормаль к траектории. Из полученного треугольника ускорений находим значения ускорений

$$a_\tau = g\cos\gamma; \quad a_n = g\sin\gamma. \qquad (5)$$

Так как угол $\gamma$ есть и в треугольнике скоростей, запишем значения $\cos\gamma$ и $\sin\gamma$ через проекции и модуль скорости:

$$\cos\gamma = \frac{v_y}{v} = \frac{v_0 \sin\beta - gt}{v}; \quad \sin\gamma = \frac{v_x}{v} = \frac{v_0\cos\beta}{v}.$$

Вычислим $\cos\gamma = \dfrac{20\ \frac{м}{с}\cdot\frac{1}{2} - 9{,}8\ \frac{м}{с^2}\cdot 1{,}5\ с}{18\ \frac{м}{с}} = 0{,}28$; $\quad \sin\gamma = \dfrac{20\ \frac{м}{с}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{18\ \frac{м}{с}} = 0{,}96$.

Результат расчета ускорений по формулам (5):

тангенциальное ускорение $a_\tau = 2{,}7\ \dfrac{м}{с^2}$, нормальное $a_n = 9{,}4\ \dfrac{м}{с^2}$.

Радиус кривизны траектории в точке $A$, где находилось тело в момент $t = 1{,}5$ с, находим из формулы нормального ускорения:

$$a_n = \frac{v^2}{R}; \ \rightarrow \ R = \frac{v^2}{a_n}; \ \text{ вычисляем } R = \frac{\left(18\ \frac{м}{с}\right)^2}{9{,}4\ \frac{м}{с^2}} = 34\ м.$$

***Задача 2.*** Материальная точка движется по окружности радиусом $R = 2$ см. Зависимость пути от времени дается уравнением $s = Ct^3$, где $C = 0{,}1\ \frac{м}{с^3}$. Определите нормальное и тангенциальное ускорение точки в момент, когда линейная скорость точки $v = 0{,}3\ \frac{м}{с}$.

***Дано***

$R = 2 \cdot 10^{-2}$ м;

$s = Ct^3$;

$C = 0{,}1\ \frac{м}{с^3}$;

$v = 0{,}3\ \frac{м}{с}$.

$a_n$ – ? $a_\tau$ – ?

***Решение***

Найдем нормальное ускорение по формуле

$$a_n = \frac{v^2}{R}.$$

Вычислим $a_n = \dfrac{\left(0{,}3\ \frac{м}{с}\right)^2}{2\cdot 10^{-2}\ м} = 4{,}5\ \dfrac{м}{с^2}$.

Запишем определительную формулу тангенциального ускорения

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}. \qquad (1)$$

Найдем модуль скорости по формуле $v(t) = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$. (2)

Дифференцируя зависимость пути от времени, получаем

$$v(t) = 3Ct^2. \quad (3)$$

В соответствии с формулой (1) величина $a_\tau$ равна производной от функции $v(t)$; с учетом выражения (3) находим

$$a_\tau = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(3Ct^2) = 6Ct, \quad (4)$$

где $t$ – момент времени, в который скорость стала равна 0,3 м/с. Находим это время из формулы (3):

$$t^2 = \frac{v(t)}{3C} = \frac{0{,}3\ \frac{\text{м}}{\text{с}}}{3 \cdot 0{,}1\ \frac{\text{м}}{\text{с}^3}} = 1\ \text{с}^2;\ \rightarrow\ t = 1\ с.$$

Вычисляем тангенциальное ускорение по формуле (4):

$$a_\tau = 6 \cdot 0{,}1\ \frac{\text{м}}{\text{с}^3} \cdot 1\ \text{с} = 0{,}6\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

***Задача 3***. Материальная точка вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = A + Bt + Ct^2$, где $A = 10$ рад, $B = 20\ \frac{\text{рад}}{\text{с}}$, $C = -2\ \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$. Определите полное ускорение точки, находящейся на расстоянии $r = 0{,}1$ м от оси вращения, для момента времени $t = 4$ с.

***Дано***

$\varphi = A + Bt + Ct^2$;

$A = 10$ рад;

$B = 20\ \frac{\text{рад}}{\text{с}}$;

$C = -2\ \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$;

$r = 0{,}1$ м;

$t = 4$ с.

$a - ?$

***Решение***

Полное ускорение $\vec{a}$ материальной точки, движущейся по криволинейной траектории, может быть найдено как векторная сумма тангенциального ускорения $\overrightarrow{a_\tau}$, направленного по касательной к траектории, и нормального ускорения $\overrightarrow{a_n}$, направленного к центру кривизны траектории:

$$\vec{a} = \overrightarrow{a_\tau} + \overrightarrow{a_n}.$$

Так как векторы ускорений $\overrightarrow{a_n}$ и $\overrightarrow{a_\tau}$ взаимно перпендикулярны (рис. 3), то модуль ускорения

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}. \quad (1)$$

Нормальное и тангенциальное ускорения точки вращающегося тела выражаются формулами

$$a_\tau = \varepsilon r,\quad a_n = \omega^2 r,$$

где $\omega$ – угловая скорость; $\varepsilon$ – угловое ускорение тела.

Подставляя выражения $a_\tau$ и $a_n$ в формулу (1), находим полное ускорение вращающейся материальной точки

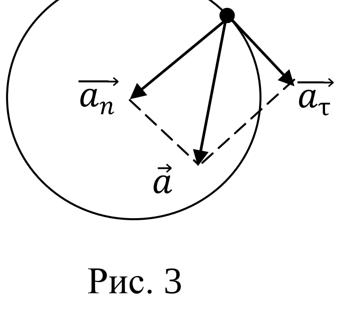



Рис. 3

$$a = \sqrt{\varepsilon^2 r^2 + \omega^4 r^2} = r\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (2)$$

Угловую скорость $\omega$ найдем, взяв первую производную от угла поворота по времени:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = B + 2Ct.$$

Вычислим угловую скорость в момент времени $t = 4$ с:

$$\omega = (20\ \frac{\text{рад}}{\text{с}} + 2\left(-2\ \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}\right) \cdot 4\ \text{с} = 4\ \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

Угловое ускорение находим, взяв первую производную от угловой скорости по времени:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 2C;\ \text{вычислим}\ \varepsilon = 2 \cdot 2\ \frac{\text{рад}}{\text{с}^2} = -4\ \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}.$$

Подставляя значения $\varepsilon$, $\omega$ и $r$ в формулу (2), получаем величину полного ускорения материальной точки:

$$a = 0{,}1\ \text{м}\sqrt{\left(-4\ \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}\right)^2 + \left(4\ \frac{\text{рад}}{\text{с}}\right)^4} = 1{,}65\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

## 3.2. Динамика поступательного и вращательного движения

### План решения задач с помощью законов динамики

1. ***Поступательное движение тел.***

1) Выделите систему взаимодействующих тел. Сделайте рисунок.

2) Укажите на рисунке силы, действующие на каждое тело. Учтите, что силу трения можно показать, если известно направление движения.

3) Выберите систему координат. Удобно для каждого тела одну из координатных осей направить по направлению ускорения тела.

4) Запишите для каждого тела закон динамики движения – 2-й закон Ньютона, в следующем виде:

$$m\vec{a} = \sum\overrightarrow{F_i}\ .$$

5) Запишите этот закон в проекциях на координатные оси и выразите определяемую величину.

6) По полученной расчетной формуле произведите вычисления.

2. ***Вращательное движение тел.***

1) Запишите закон динамика вращательного движения тела относительно неподвижной оси вращения.

2) Покажите на рисунке плечо силы и расстояния масс от оси вращения, необходимые для расчета момента инерции тела. Запишите определительные формулы для момента силы $M$ и момента инерции $I$; при этом обратите внимание на то, чтобы величины $M$ и $I$ , были записаны относительно одной и той же оси вращения тела.

3) Из закона динамики получите расчетную формулу определяемой величины и произведите вычисления.

***Задача 4.*** Мяч массой $m = 200$ г упруго ударяется о стену под углом $\alpha = 60°$ к нормали. Определите величину и направление импульса силы, который действовал на стенку во время удара. Скорость мяча $v = 5{,}0\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

***Дано*** | ***Решение***

$m = 0{,}2$ кг;
$\alpha = 60°$;
$v = 5{,}0\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

$\overrightarrow{F_c}\Delta t$–?

При упругом ударе величина скорости не изменяется $(v_2 = v_1)$ и угол, под которым отскакивает мяч, равен углу падения мяча $\alpha$ (рис. 4). Мяч в условии задачи можно принять за материальную точку, пренебрегая его размерами, а стену рассматривать как абсолютно твердое тело.

При взаимодействии мяча со стеной на мяч действует Земля: силой тяжести, – и стена: силой упругости $\overrightarrow{F_\text{м}}$. Однако проекция силы тяжести на ось $x$ равна нулю; поэтому величину силы тяжести мяча можно исключить из дальнейшего рассмотрения. Под действием силы упругости $\overrightarrow{F_\text{м}}$ изменяется направление скорости мяча.

Запишем второй закон Ньютона в виде:

$$\overrightarrow{F_\text{м}}\Delta t = m\overrightarrow{v_2} - m\overrightarrow{v_1}, \qquad (1)$$

где $\overrightarrow{F_\text{м}}$ – средняя сила, с которой стена действует на мяч; $\Delta t$ – время взаимодействия мяча со стеной.

Для того, чтобы уравнение (1) переписать в скалярном виде, нужно знать направление силы $\overrightarrow{F_\text{м}}$. Из уравнения (1) следует, что импульс силы удара мяча совпадает по направлению с вектором приращения импульса мяча $\Delta(m\vec{v}) = m\overrightarrow{v_2} - m\overrightarrow{v_1}$ , т. е. $\overrightarrow{F_\text{м}}\Delta t \upuparrows \Delta(m\vec{v})$.

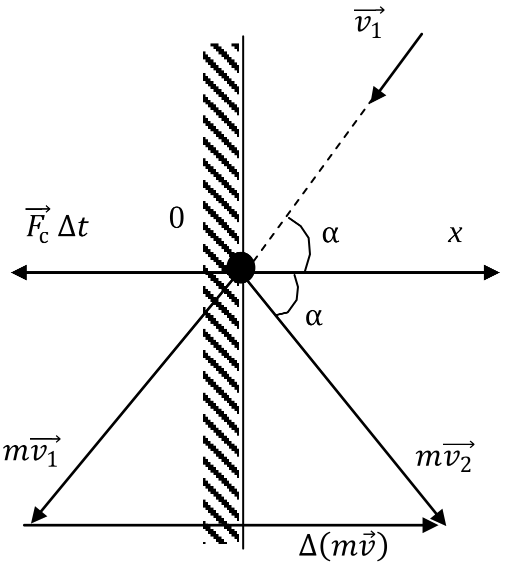



Рис. 4

По правилу вычитания векторов найдем вектор приращения импульса мяча $\Delta(m\vec{v})$ (см. рис. 4), он направлен перпендикулярно поверхности стены. Следовательно, и импульс силы $\overrightarrow{F_\text{м}}\Delta t$, действующий на мяч, направлен вдоль нормали к поверхности стены.

Перепишем уравнение (1) в проекции на ось $x$:

$$F_\text{м}\Delta t = mv_2\cos\alpha - m(-v_1\cos\alpha).$$

Так как $v_2 = v_1 = v$, то

$$F_\text{м}\Delta t = mv\cos\alpha - m(-v\cos\alpha) = \\ = 2mv\cos\alpha. \qquad (2)$$

Нас интересует импульс силы, *действующий на стену* во время удара. Используем третий закон Ньютона: сила $\vec{F_\text{c}}$, с которой мяч действует на стену, равна по величине и противоположно направлена силе $\overrightarrow{F_\text{м}}$, с которой стена действует на мяч (см. рис. 4):

$$\vec{F_\text{c}} = -\overrightarrow{F_\text{м}}, \qquad \text{и} \qquad \vec{F_\text{c}}\,\Delta t = -\overrightarrow{F_\text{м}}\Delta t.$$

Отсюда, с учетом формулы (2), получаем $F_\text{c}\Delta t = 2mv\cos\alpha$.

Вычислим импульс силы: $F_c\Delta t = 2 \cdot 0{,}2\text{ кг} \cdot 5\ \frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot \frac{1}{2} = 1\text{ Н} \cdot \text{с}.$

***Задача 5.*** Маховик в виде диска радиусом $R = 0{,}2$ м и массой $m = 50$ кг был раскручен до частоты вращения $n_0 = 480\ \frac{\text{об}}{\text{мин}}$, а затем был предоставлен самому себе. Под действием сил трения маховик остановился через $t = 50$ с. Определите момент сил трения.

| ***Дано*** | ***Решение*** |
|---|---|
| $R = 0{,}2$ м;<br>$m = 50$ кг;<br>$n_0 = 480\ \frac{\text{об}}{\text{мин}} = 8\frac{\text{об}}{\text{с}}$;<br>$n_1 = 0$;<br>$t = 50$ с.<br>$M - ?$ | В соответствии с основным законом динамики вращательного движения момент сил трения равен скорости изменения момента импульса маховика: |

$$\vec{M} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(I\vec{\omega})}{\mathrm{d}t}. \qquad (1)$$

По условию задачи маховик представляет собой твердый сплошной диск, момент инерции которого
относительно его оси симметрии

$$I = \frac{mR^2}{2} = \text{const}. \qquad (2)$$

С учетом формулы (2) из закона динамики (1) получаем момент сил трения

$$\vec{M} = I\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} = \frac{mR^2}{2}\vec{\varepsilon}, \qquad (3)$$

где $\vec{\varepsilon}$ – угловое ускорение маховика.

Так как угловое ускорение $\vec{\varepsilon}$ и момент сил трения в данном случае сонаправлены, то векторное уравнение (3) можно заменить скалярным:

$$M = \frac{mR^2}{2}\varepsilon. \qquad (4)$$

При равнозамедленном вращении (вектор $\vec{M} \downarrow\uparrow \vec{\omega}$ (рис. 5)) величина углового ускорения определяется выражением

$$\varepsilon = \frac{\omega_1 - \omega_0}{t}. \qquad (5)$$

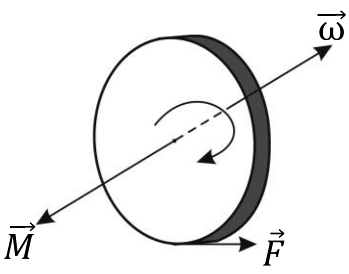


Рис. 5

Здесь конечная угловая скорость $\omega_1 = 0$, а начальная $\omega_0 = 2\pi n_0$. Подставив ускорение $\varepsilon$ в закон динамики (4), получаем величину момента силы

$$M = \frac{mR^2}{2}\frac{2\pi n_0}{t} = \frac{\pi mR^2 n_0}{t}. \qquad (6)$$

Проверим расчетную формулу (6) по единицам измерения. Подстановка единиц измерения величин в правую часть этого равенства:

$$\frac{1\ \text{кг}\cdot 1\ \text{м}^2\cdot 1\ \text{с}^{-1}}{1\ \text{с}} = 1\,\frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}^2}\cdot\text{м} = 1\ \text{Н}\cdot\text{м}, -$$

дает единицу определяемой физической величины – момента сил.

Вычисляем момент силы трения по формуле (6):

$$M = \frac{3{,}14\cdot 50\ \text{кг}\cdot(0{,}2)^2\ \text{м}^2\cdot 8\ \text{с}^{-1}}{50\ \text{с}} = 1{,}0\ \text{Н}\cdot\text{м}.$$

***Задача 6.*** Блок, имеющий форму диска массой $m = 3$ кг, укреплен на краю горизонтального стола. Гири массой $m_1 = 1$ кг и $m_2 = 1{,}5$ кг соединены невесомой нитью, перекинутой через блок (рис. 6). Коэффициент трения гири о поверхность стола $\mu = 0{,}2$. Определите ускорение $a$, с которым движутся гири, и силы натяжения нити $T_1$ и $T_2$ по обе стороны блока. Трением при вращении блока можно пренебречь.

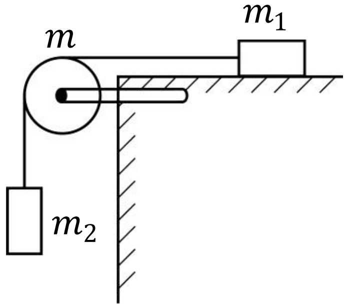



Рис. 6

***Решение***

Механическая система состоит из трех тел, взаимодействующих посредством нити. В таких случаях рассматривают отдельно движение каждого тела, мысленно разрывая нить и заменяя действие других тел на данное силой натяжения нити. Силы, действующие на каждое тело, показаны на рис. 7. При этом следует учесть, что для сил взаимодействия двух тел выполняется третий закон Ньютона:

$$\overrightarrow{T_1}' = -\overrightarrow{T_1};\quad \overrightarrow{T_2}' = -\overrightarrow{T_2};\quad \text{модули сил}\quad T_1' = T_1;\quad T_2' = T_2. \qquad (1)$$

***Дано***

$m = 3$ кг;

$m_1 = 1$ кг;

$m_2 = 1{,}5$ кг;

$\mu = 0{,}2$.

1) $a - ?$

2) $T_1 - ?$

$T_2 - ?$

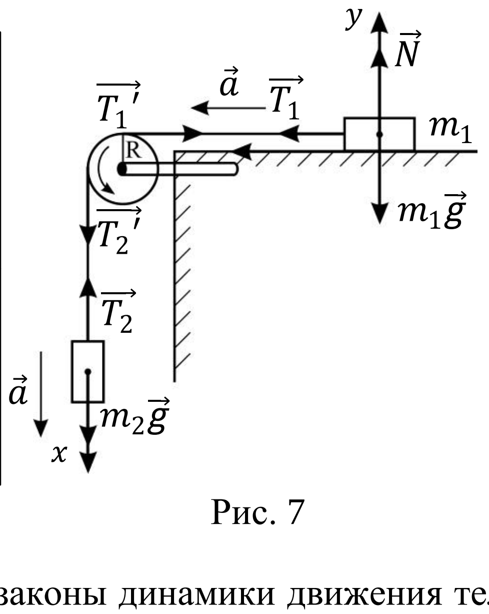



Рис. 7

Запишем законы динамики движения тел системы, учитывая, что гири движутся поступательно, а блок вращается. Для поступательного движения тел используем второй закон Ньютона:

$$m_1\vec{a} = \overrightarrow{T_1} + \vec{N} + \overrightarrow{F_{\text{тр}}} + m_1\vec{g}; \qquad (2)$$

$$m_2\vec{a} = \overrightarrow{T_2} + m_2\vec{g}. \tag{3}$$

Уравнение (2) в проекциях на оси $x$ и $y$ имеет следующий вид:

$$\text{ось } x\text{:} \quad m_1 a = T_1 - F_{\text{тр}}; \tag{4}$$

$$\text{ось } y\text{:} \quad 0 = N - m_1 g. \tag{5}$$

В уравнении (4) сила трения $F_{\text{тр}} = \mu N$; заменяя, согласно уравнению (5), $N = m_1 g$, получаем формулу $F_{\text{тр}} = \mu m_1 g$. С учетом этого перепишем уравнение (4) в виде:

$$m_1 a = T_1 - \mu m_1 g. \tag{6}$$

Уравнение (3) запишем в проекции на ось $x$, направленную вдоль ускорения второй гири:

$$m_2 a = -T_2 + m_2 g. \tag{7}$$

Закон динамики вращения блока относительно неподвижной оси $z$ имеет следующий вид:

$$I\vec{\varepsilon} = \vec{M} = \overrightarrow{M_1} + \overrightarrow{M_2}, \tag{8}$$

где $I = \frac{mR^2}{2}$ – момент инерции блока (диска) относительно его оси симметрии; $\vec{\varepsilon}$ – угловое ускорение блока; оно связано с линейным ускорением точек на его периметре формулой $\varepsilon = \frac{a}{R}$, причем, величина $a$ равна ускорению нити, не проскальзывающей по блоку, а следовательно, и ускорению гирь; $\overrightarrow{M_1}$ и $\overrightarrow{M_2}$ – моменты сил натяжения нити $\overrightarrow{T_1}'$ и $\overrightarrow{T_2}'$.

Из рисунка (см. рис. 7) видно, что момент силы $\overrightarrow{T_2}'$ вращает блок против часовой стрелки, а момент силы $\overrightarrow{T_1}'$ препятствует этому вращению, стремясь повернуть блок по часовой стрелке. Соответственно вектор $\overrightarrow{M_1} \upharpoonleft\downharpoonright \overrightarrow{M_2}$, – они направлены по оси вращения $z$, перпендикулярной плоскости рисунка. Поэтому модуль равнодействующего момента сил

$$M = M_2 - M_1 = T_2 R - T_1 R. \tag{9}$$

Здесь учтено, что плечо обеих сил натяжения нити равно радиусу диска $R$.

С использованием формул для $I$, $\varepsilon$ и $M$ уравнение (8) принимает следующий вид:

$$\frac{mR^2}{2} \cdot \frac{a}{R} = T_2 R - T_1 R, \quad \text{или} \quad \frac{ma}{2} = T_2 - T_1. \tag{10}$$

Таким образом, получили систему трех уравнений законов динамики движения тел (6), (7) и (10), позволяющих найти 3 неизвестные величины ($a$, $T_1$ и $T_2$) в виде:

$$\begin{gathered} m_1 a = T_1 - \mu m_1 g; \\ m_2 a = -T_2 + m_2 g; \\ \frac{1}{2} ma = T_2 - T_1; \end{gathered} \tag{11}$$

Заметим, что при сложении уравнений системы (11) неизвестные величины $T_1$ и $T_2$ исключаются (сумма этих слагаемых равна нулю) и получаем уравнение с одной неизвестной величиной $a$:

$$a\left(m_1 + m_2 + \frac{m}{2}\right) = m_2 g - \mu m_1 g.$$

Выразим определяемую величину ускорения гирь:

$$a = g\frac{(m_2 - \mu m_1)}{\left(m_1 + m_2 + \frac{m}{2}\right)}.$$

Вычисляем $a = 9{,}8\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}\frac{(1{,}5 - 0{,}2\cdot 1)\ \text{кг}}{\left(1 + 1{,}5 + \frac{3}{2}\right)\text{кг}} = 3{,}2\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$

Силу натяжения нити $T_2$ выразим из закона динамики (7):

$$T_2 = m_2(g - a),$$

а силу натяжения нити $T_1$ – из закона динамики вращения блока (третье уравнение в системе уравнений (11)):

$$T_1 = T_2 - \frac{ma}{2}.$$

Вычисляем силы натяжения:

$$T_2 = 1{,}5\ \text{кг}\cdot(9{,}8 - 3{,}2)\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2} = 9{,}9\ \text{Н}; \qquad T_1 = 9{,}9\ \text{Н} - \frac{3\ \text{кг}\cdot 3{,}2\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}}{2} = 5{,}1\ \text{Н}.$$

***Задача 7.*** На обод маховика радиусом $R = 30$ см намотан нерастяжимый шнур, к концу которого привязан груз массой $m = 2$ кг. Определите момент инерции маховика, если он, вращаясь равноускоренно под действием силы тяжести груза, за время $t_1 = 3$ с приобрел угловую скорость $\omega_1 = 9\,\frac{\text{рад}}{\text{с}}$.

***Дано***

$R = 30$ см $= 0{,}3$ м;

$m = 2$ кг;

$t_1 = 3$ с;

$\omega_0 = 0$;

$\omega_1 = 9\,\frac{\text{рад}}{\text{с}}$.

$I - ?$

***Решение***

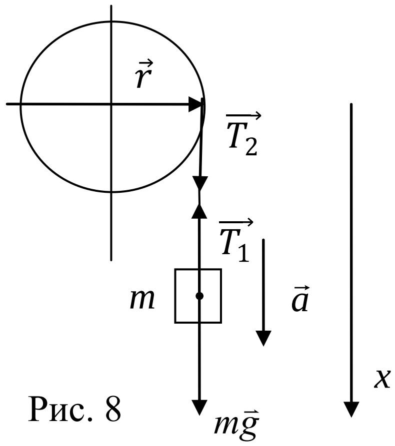



Рис. 8

Составим систему уравнений движения двух связанных шнуром тел (рис. 8), одно из которых: груз, – совершает поступательное движение, а другое: маховик, – вращательное.

Запишем закон динамики движения груза – второй закон Ньютона:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T_1}.$$

В проекции на ось $x$

$$ma = mg - T_1. \quad (1)$$

Основной закон динамики вращательного движения маховика

$$I\vec{\varepsilon} = \vec{M}.$$

Так как векторы $\vec{\varepsilon}$ и $\vec{M}$ сонаправлены, то в скалярном виде

$$I\varepsilon = M. \quad (2)$$

Из закона динамики (2) выразим определяемую величину момента инерции маховика:

$$I = \frac{M}{\varepsilon}. \quad (3)$$

Угловое ускорение ε для равноускоренного движения маховика

$$\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_1 - \omega_0}{\Delta t} = \frac{\omega_1}{t_1}. \quad (4)$$

Момент силы натяжения шнура

$$M = T_2 r \sin(\vec{r}, \overrightarrow{T_2}).$$

Так как угол между радиус-вектором $\vec{r}$, проведенным от оси вращения в точку приложения силы натяжения шнура, и силой натяжения равен $90^0$ (см. рис. 8), а численное значение радиус-вектора равно радиусу маховика $R$, то для момента силы натяжения получаем следующее выражение:

$$M = T_2 R.$$

Силу натяжения шнура найдем, используя закон движения груза (1). По третьему закону Ньютона для взаимодействия груза и маховика посредством шнура силы натяжения численно равны: $T_2 = T_1$. Тогда формула для момента силы, вращающей маховик, принимает вид:

$$M = T_1 R. \quad (5)$$

Значение $T_1$ находим из уравнения движения груза (1):

$$T_1 = m(g - a). \quad (6)$$

Здесь ускорение груза $a$ равно ускорению любой точки нерастяжимого шнура, в том числе и точки, находящейся на ободе маховика, для которой запишем связь линейного и углового ускорения в виде:

$$a = \varepsilon R. \quad (7)$$

С учетом выражений (6) и (7) формула (5) для момента силы принимает следующий вид:

$$M = m(g - \varepsilon R)R. \quad (8)$$

Подставим выражение (8) в формулу (3) для расчета момента инерции и заменим угловое ускорение по формуле (4). Так получаем расчетную формулу для определения момента инерции маховика *динамическим методом:*

$$I = \frac{m\left(g - \frac{\omega_1 R}{t}\right)Rt}{\omega_1}, \quad \text{или} \quad I = \frac{m(gt - \omega_1 R)R}{\omega_1}.$$

Проверим полученную формулу по единицам измерения величин:

$$\frac{1\ \text{кг}\left(1\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\cdot 1\ \text{с} - 1\ \text{с}^{-1}\cdot 1\ \text{м}\right)1\ \text{м}}{\text{с}^{-1}} = 1\ \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2(\text{с}^{-1}-\text{с}^{-1})}{\text{с}^{-1}} = 1\ \text{кг}\cdot\text{м}^2.$$

Получили единицу измерения момента инерции $I$, следовательно, расчетная формула верна. Вычисляем по ней момент инерции маховика

$$I = \frac{2\ \text{кг}\left(9{,}8\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}3\ \text{с} - 9\ \text{с}^{-1}\cdot 0{,}3\ \text{м}\right)0{,}3\ \text{м}}{9\ \text{с}^{-1}} = 1{,}8\ \text{кг}\cdot\text{м}^2.$$

***Задача 8.*** Какой кинетической энергией обладает велосипедист с велосипедом при скорости движения $v = 36\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}$ ? Масса велосипедиста вместе с велосипедом $m = 76$ кг, в том числе масса каждого колеса велосипеда $m_\text{к} = 2$ кг; массу колеса считать распределенной по ободу.

| ***Дано*** | ***Решение*** |
|---|---|
| $m = 76$ кг;<br>$m_\text{к} = 2$ кг;<br>$v = 36\ \frac{\text{км}}{\text{ч}} = 10\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$. | Кинетическая энергия велосипедиста вместе с велосипедом складывается из двух слагаемых: энергии их поступательного движения и энергии вращательного движения колес. Колеса участвуют одновременно в этих двух видах движения. |
| $E_\text{К}$ – ? | |

Кинетическая энергия поступательного движения равна $\frac{mv^2}{2}$. Кинетическая энергия вращательного движения колеса равна $\frac{I\omega^2}{2}$ , где $I$ – момент инерции колеса. Он равен $m_\text{к}r^2$, так как массу считаем распределенной по ободу радиусом $r$. С учетом того, что угловая скорость вращения связана с линейной скоростью формулой $\omega = \frac{v}{r}$, кинетическую энергию вращательного движения колеса можно записать через скорость поступательного движения:

$$E_\text{вр} = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{1}{2}\ \frac{m_\text{к}r^2v^2}{r^2} = \frac{m_\text{к}v^2}{2}\ .$$

Тогда полная кинетическая энергия велосипедиста с велосипедом

$$E_\text{К} = \frac{mv^2}{2} + 2\frac{I\omega^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + 2\frac{m_\text{к}v^2}{2} = (m + 2m_\text{к})\frac{v^2}{2}.$$

Найдем численное значение кинетической энергии:

$$E_K = \left(76\ \text{кг} + 2\cdot 2\ \text{кг}\right)\frac{10^2\ \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}}{2} = 4\ 000\ \text{Дж} = 4\ \text{кДж}.$$

## 3.3. Законы сохранения

### План решения задач с использованием законов сохранения: ЗСИ, ЗСМИ и ЗСМЭ

Динамические функции механической системы: импульс, момент импульса, механическая энергия, – сохраняются при выполнении определенных условий. Поэтому выбору того или иного закона сохранения, например, при вращательном движении – ЗСМИ или ЗСМЭ, должен предшествовать анализ сил, действующих между телами механической системы.

1. Для сохранения количества движения: импульса или момента импульса, – требуется *замкнутая система тел*, т. е. отсутствие внешних сил или равенство нулю равнодействующей всех внешних сил. Но в ряде задач, к которым относятся удары шаров, разрыв гранаты, снаряда и др., достаточно, чтобы внутренние силы были большими по сравнению с внешними силами, тогда последними можно пренебречь и считать систему практически замкнутой. Для сохранения момента импульса достаточным является условие *равенства нулю момента внешних сил*, что обеспечивается, если силы параллельны оси вращения или когда линия их действия проходит через ось вращения.

2. Использование закона сохранения механической энергии возможно, если в рассматриваемой системе тел действуют *только консервативные силы* – и внутренние, и внешние. При этом силы трения и сопротивления движению и другие неконсервативные силы (работу которых невозможно представить как изменение потенциальной энергии), должны быть пренебрежимо малы по сравнению с консервативными силами. Однако, и при значительной величине силы трения возможно сохранение механической энергии, если работа силы трения равна нулю: для этого достаточно, чтобы не перемещалась точка приложения силы трения (или другой неконсервативной силы).

3. Способ решения задач с использованием того или иного *закона сохранения* заключается в составлении равенства, где значения сохраняющейся величины: импульса, момента импульса или механической энергии системы тел, – записывают в левой и в правой части, соответственно, в двух состояниях: начальном и конечном. Причем, для векторных величин импульса $\vec{p}$ и момента импульса $\vec{L}$ уравнения законов сохранения – векторные.

4. В связи с тем, что скорости тел: и линейная, и угловая, – величины относительные, то и связанные с ними динамические функции: импульс, момент импульса и кинетическая энергия тел, – также являются *относительными величинами,* т. е. их значения зависят от выбранной системы отсчета. Поэтому в уравнения законов сохранения следует записывать скорости тел относительно одной и той же системы отсчета: обычно используют условно неподвижную систему отсчета, связанную с Землей.

***Задача 9.*** Молот массой $m = 5$ кг, двигаясь со скоростью $v = 4\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$, ударяет по железному изделию, лежащему на наковальне. Масса наковальни вместе с изделием $M = 95$ кг. Считая удар неупругим, определите энергию, расходуемую на ковку (деформацию) изделия.

Найдите коэффициент полезного действия η процесса ковки в данных условиях.

***Дано*** | ***Решение***

$m = 5$ кг;
$v = 4\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$;
$M = 95$ кг.

$E_{\text{деф}} - ?$
$\eta - ?$

Рассмотрим систему молот – наковальня – Земля (рис. 9). Эта система является замкнутой, так как силы, возникающие при взаимодействии тел системы: сила тяжести, сила реакции опоры, на которой стоит наковальня, силы неупругой деформации (подобные силам трения), – являются внутренними. Известно, что если в системе действуют силы, аналогичные силе трения, то для системы не выполняется закон сохранения механической энергии, но выполняется закон сохранения полной энергии. Из него следует, что энергия, затраченная на деформацию изделия при ковке, равна разности значений механической энергии до и после удара:

$$E_{\text{деф}} = E_1 - E_2.$$

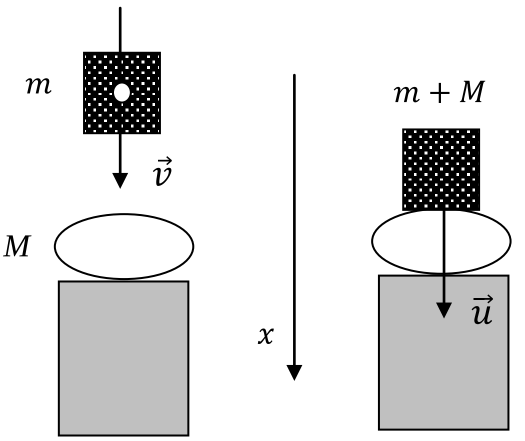


Рис. 9

Незначительным перемещением изделия и наковальни можно пренебречь, поэтому изменение потенциальной энергии $\Delta E_{\Pi} = 0$. Изменением механической энергии Земли в результате взаимодействия также можно пренебречь. Это означает, что на деформацию идет только часть *кинетической энергии:*

$$E_{\text{деф}} = E_{\text{К1}} - E_{\text{К2}}, \qquad (1)$$

где $E_{\text{К1}} = \frac{mv^2}{2}$ – кинетическая энергия молота перед ударом; $E_{\text{К2}} = \frac{(m+M)u^2}{2}$ – энергия молота и наковальни с изделием после неупругого удара.

Скорость системы $\vec{u}$ после неупругого удара определим из закона сохранения импульса:

$$m\vec{v} = (m + M)\vec{u}, \qquad (2)$$

где $m\vec{v}$ – импульс системы до удара; $(m + M)\vec{u}$ – импульс после удара. Проекция уравнения ЗСИ (2) на ось $x$:

$$mv = (m + M)u; \quad \rightarrow \quad u = \frac{mv}{m+M}. \qquad (3)$$

Энергию деформации найдем по уравнению (1) с учетом формулы (3):

$$E_{\text{деф}} = \frac{mv^2}{2} - \frac{(m+M)m^2v^2}{2(m+M)^2} = \frac{mv^2}{2}\left(1 - \frac{m}{m+M}\right) = \frac{mv^2}{2}\ \frac{M}{(m+M)}. \qquad (4)$$

Подставим значения величин в расчетную формулу (4):

$$E_{деф} = \frac{5\ кг \cdot \left(4\ \frac{м}{с}\right)^2}{2} \ \frac{95\ кг}{(5+95)кг} = 38\ Дж.$$

Эта энергия деформации по условию задачи является полезной, а затраченной энергией является первоначальная энергия молота перед ударом

$$E_1 = \frac{mv^2}{2}. \qquad (5)$$

Следовательно, коэффициент полезного действия процесса ковки

$$\eta = \frac{E_{деф}}{E_1};\ \text{при делении уравнения (4) на (5) имеем}\ \eta = \frac{M}{m+M}. \qquad (6)$$

Вычислим КПД процесса ковки $\eta = \frac{95\ кг}{(5+95)\ кг} = 0{,}95$.

***Задача 10.*** Шар массой $m_1 = 2{,}5$ кг, движущийся со скоростью $v_1 = 6\ \frac{м}{с}$ , сталкивается с шаром массой $m_2 = 1{,}5$ кг, который движется ему навстречу со скоростью $v_2 = 2\ \frac{м}{с}$. Определите: а) скорость шаров после удара, б) кинетическую энергию шаров до и после удара, в) энергию, затраченную на деформацию шаров при ударе. Удар считайте прямым, неупругим, центральным.

***Дано***

$m_1 = 2{,}5$ кг;
$v_1 = 6\ \frac{м}{с}$;
$m_2 = 1{,}5$ кг;
$v_2 = 2\ \frac{м}{с}$.

$u - ?\ E_1 - ?$
$E_2 - ?\ E_{деф} - ?$

***Решение***

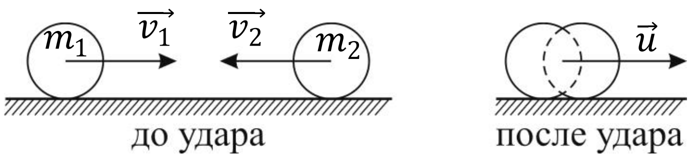



Рис. 10

а) Неупругие шары после удара не восстанавливают свою форму (рис. 10). Следовательно, не возникают силы, способные оттолкнуть шары друг от друга. Это приводит к тому, что шары после удара движутся вместе со скоростью $\vec{u}$. Определим эту скорость, используя закон сохранения импульса. Шары образуют замкнутую систему и поэтому, согласно ЗСИ:

$$\sum \overrightarrow{p_i} = \overrightarrow{const}.$$

До удара суммарный импульс двух шаров

$$\overrightarrow{p_0} = m_1\overrightarrow{v_1} + m_2\overrightarrow{v_2}.$$

После взаимодействия их суммарный импульс

$$\vec{p} = (m_1 + m_2)\vec{u}.$$

Следовательно, уравнение ЗСИ имеет следующий вид:

$$m_1\overrightarrow{v_1} + m_2\overrightarrow{v_2} = (m_1 + m_2)\vec{u}, \qquad (1)$$

Запишем проекцию уравнения (1) на ось $x$:

$$m_1v_1 - m_2v_2 = (m_1 + m_2)u,$$
выразим скорость шаров после удара и вычислим её:
$$u = \frac{m_1v_1 - m_2v_2}{m_1 + m_2} = \frac{2{,}5\text{ кг}\cdot 6\,\frac{\text{м}}{\text{с}} - 1{,}5\text{ кг}\cdot 2\,\frac{\text{м}}{\text{с}}}{2{,}5\text{ кг} + 1{,}5\text{ кг}} = 3\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

б) Кинетическую энергию шаров до и после удара определим по формулам:
$$E_1 = \frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} = \frac{1}{2}\left(2{,}5\text{ кг}\cdot 6^2\left(\frac{\text{м}}{\text{с}}\right)^2 + 1{,}5\text{ кг}\cdot 2^2\left(\frac{\text{м}}{\text{с}}\right)^2\right) = 48\text{ Дж};$$

$$E_2 = \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2} = \frac{1}{2}(2{,}5 + 1{,}5)\text{ кг}\cdot 3^2\left(\frac{\text{м}}{\text{с}}\right)^2 = 18\text{ Дж}.$$

в) Энергия деформации равна разности кинетических энергий шаров до и после удара:
$$E_{\text{деф}} = E_1 - E_2 = (48 - 18)\text{ Дж} = 30\text{ Дж}.$$
Можно также вычислить долю энергии, пошедшей на деформацию:
$$\delta = \frac{E_{\text{деф}}}{E_1} = \frac{30\text{ Дж}}{48\text{ Дж}} = 0{,}62;\quad \delta = 62\ \%.$$

***Задача 11.*** Шар массой $m_1 = 3$ кг, движущийся горизонтально со скоростью $v_1 = 5\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$, столкнулся с неподвижным шаром массой $m_2 = 2$ кг. Шары упругие, удар центральный. Определите: а) скорости шаров после удара, б) долю $\delta$ кинетической энергии, которую первый шар передал второму.

***Дано***

$m_1 = 3$ кг;
$v_1 = 5\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$;
$m_2 = 2$ кг;
$v_2 = 0$.

$u_1 - ?$ $u_2 - ?$
$\delta - ?$

***Решение***

а) Соударяющиеся шары (рис. 11) образуют замкнутую консервативную систему. Из этого следует, что при их взаимодействии выполняется и закон сохранения импульса
$$m_1\vec{v_1} = m_1\vec{u_1} + m_2\vec{u_2}, \tag{1}$$
и закон сохранения механической энергии
$$\frac{m_1v_1^2}{2} = \frac{m_1u_1^2}{2} + \frac{m_2u_2^2}{2}. \tag{2}$$

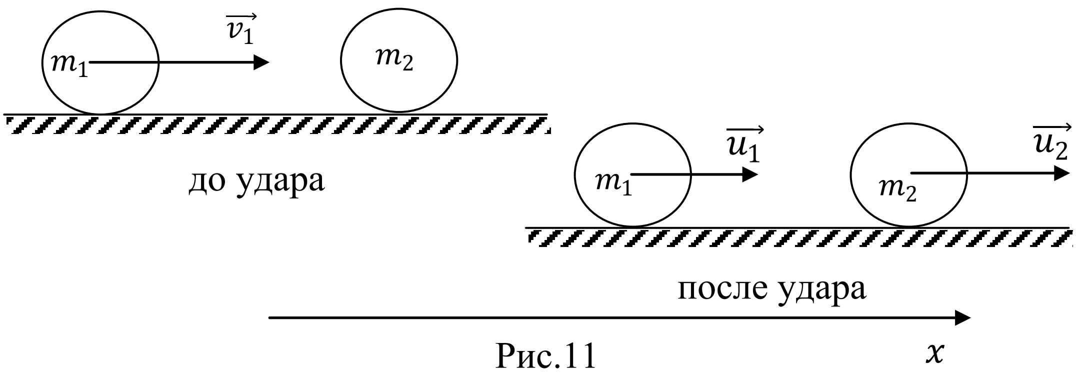


Рис.11

Для центрального удара можно от векторной записи ЗСИ (1) перейти к записи его в проекции на ось $x$:

$$m_1 v_1 = m_1 u_1 + m_2 u_2. \qquad (3)$$

Для решения нелинейной системы уравнений (2) и (3) получим линейное уравнение путем деления равенства (2) на (3). Чтобы массы шаров сократились при делении, перенесем в левую часть каждого уравнения слагаемое, содержащее $m_1$:

$$m_1(v_1^2 - u_1^2) = m_2 u_2^2; \qquad (2а)$$

$$m_1(v_1 - u_1) = m_2 u_2. \qquad (3а)$$

Разделим уравнение (2а) на (3а), при этом получим линейное уравнение

$$v_1 + u_1 = u_2. \qquad (4)$$

Далее решаем систему двух линейных уравнений: (3) и (4). Из уравнения (4) выразим скорость $u_1 = u_2 - v_1$ и подставим ее в уравнение (3):

$$m_1 v_1 = m_1 u_2 - m_1 v_1 + m_2 u_2; \quad \rightarrow \quad u_2 = \frac{2m_1 v_1}{m_1 + m_2}. \qquad (5)$$

Из уравнения (4) найдем скорость $u_1$, используя полученную величину $u_2$:

$$u_1 = u_2 - v_1 = \frac{2m_1 v_1}{m_1 + m_2} - v_1, \text{ или } u_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1}{m_1 + m_2}. \qquad (6)$$

Вычисляем скорости шаров после удара по формулам (5) и (6):

$$u_1 = \frac{(3-2)\text{ кг}\cdot 5\,\frac{\text{м}}{\text{с}}}{(3+2)\text{ кг}} = 1\ \frac{\text{м}}{\text{с}}. \qquad u_2 = \frac{2\cdot 3\text{ кг}\cdot 5\,\frac{\text{м}}{\text{с}}}{(3+2)\text{ кг}} = 6\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

б) Доля энергии $\delta$, переданной первым шаром второму, выразится отношением

$$\delta = \frac{W_2}{W_1} = \frac{m_2 u_2^2}{m_1 v_1^2} = \frac{m_2}{m_1}\left(\frac{u_2}{v_1}\right)^2, \qquad (7)$$

где $W_2$ – кинетическая энергия второго шара после удара, $W_1$ – кинетическая энергия первого шара до удара,

Подставляя в соотношение (7) величину $u_2$ по формуле (5), имеем:

$$\delta = \frac{m_2}{m_1}\left(\frac{2m_1 v_1}{(m_1 + m_2)v_1}\right)^2 = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}. \qquad (8)$$

Из полученного выражения видно, что доля переданной энергии зависит только от масс сталкивающихся шаров и не зависит от их скоростей. Вычислим долю $\delta$ переданной энергии по формуле (8):

$$\delta = \frac{4\cdot 2\text{ кг}\cdot 3\text{ кг}}{(2+3)^2\,(\text{кг})^2} = 0{,}96; \quad \text{или} \quad \delta = 96\%.$$

***Задача 12.*** Пуля массой $m_1 = 0{,}01$ кг попадает в деревянный брусок массой $m_2 = 5$ кг, подвешенный на нити, и застревает в нем. Определите скорость пули, если брусок вместе с пулей, отклонившись от первоначального положения, поднимается на высоту $h = 2$ см.

| ***Дано*** | ***Решение*** |
|---|---|
| $m_1 = 0{,}01$ кг;<br>$m_2 = 5$ кг;<br>$h = 0{,}02$ м. | |
| $v - ?$ | |

Рассмотрим систему пуля – брусок– Земля. Выясним характер взаимодействия тел в различных положениях бруска. Систему отсчета свяжем с Землей. В момент неупругого удара в системе действуют внутренние силы: сила тяжести $m\vec{g}$, сила упругой реакции нити, а также силы неупругой деформации, аналогичные силам трения. Следовательно, в момент удара в системе не выполняется закон сохранения механической энергии. А закон сохранения импульса выполняется, так как система замкнута. После взаимодействия пули с бруском: между положениями 1 и 2 (рис. 10), – действие силы неупругой деформации исчезает, а работу совершает только консервативная сила тяжести; значит, можно использовать закон сохранения механической энергии.

Проведенный анализ позволяет для абсолютно неупругого удара пули и бруска записать закон сохранения импульса в виде:

$$m_1\vec{v} = (m_1 + m_2)\vec{u}.$$

Здесь в левой части записан импульс системы до взаимодействия пули с бруском, равный импульсу пули, а справа – импульс бруска с пулей после их соударения. Запишем ЗСИ в проекции на ось $x$:

$$m_1 v = (m_1 + m_2)u\,,$$

и выразим скорость бруска с пулей:

$$u = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v\,. \qquad (1)$$

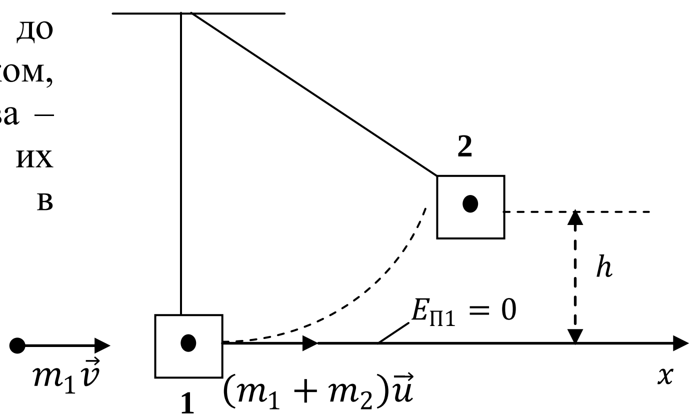



Рис. 12

Следовательно, брусок с пулей в положении 1 после неупругого удара обладает кинетической энергией

$$E_{К1} = \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2}.$$

Потенциальная энергия бруска в этом положении $E_{П1} = 0$, так как приняли $h_1 = 0$. За счет кинетической энергии брусок отклонится от положения равновесия и поднимется на высоту $h$, в положение 2. В этом положении скорость бруска и его кинетическая энергия равна нулю: $E_{К2} = 0$.

При переходе системы пуля – брусок – Земля из положения 1 в 2, для системы выполняется закон сохранения механической энергии:

$$E_{К1} + E_{П1} = E_{К2} + E_{П2}, \qquad (2)$$

где $E_{К1}$ и $E_{К2}$ – кинетическая энергия системы в положениях 1 и 2; $E_{П1}$ и $E_{П2}$ – потенциальная энергия системы в этих положениях. Подставим величины энергий в формулу ЗСМЭ (2):

$$\frac{(m_1+m_2)u^2}{2} + 0 = (m_1 + m_2)gh + 0\,. \qquad (3)$$

Из этого уравнения видно, что кинетическая энергия бруска в положении 1 полностью переходит в его потенциальную энергию в положении 2. Согласно уравнению (3)

$$u^2 = 2gh. \qquad (4)$$

Подставим в это уравнение скорость бруска $u$ по формуле (1):

$$\frac{m_1^2 v^2}{(m_1+m_2)^2} = 2gh \quad \text{и выразим скорость пули:} \quad v = \frac{(m_1+m_2)}{m_1}\sqrt{2gh}\,. \qquad (5)$$

Упростим формулу (5): с учетом того, что масса пули $m_1 \ll m_2$, величиной $m_1$, как слагаемым, можно пренебречь, – тогда определяемая скорость пули

$$v = \frac{m_2}{m_1}\sqrt{2gh}\,.$$

Вычислим величину $v$:

$$v = \frac{5\text{ кг}}{0{,}01\text{ кг}}\sqrt{2\cdot 9{,}8\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\cdot 2\cdot 10^{-2}\text{м}} \approx 500\cdot 2\sqrt{0{,}1}\ \frac{\text{м}}{\text{с}} = 315\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

***Задача 13.*** Диск радиусом $R = 2$ см начинает скатываться с высоты $h = 2$ м по наклонной плоскости, образующей угол $\alpha = 30^\circ$ с плоскостью горизонта. С каким ускорением движется центр масс диска? Найдите линейную скорость центра масс в конце наклонной плоскости.

| ***Дано*** | ***Решение*** |
|---|---|
| $R = 0{,}02$ м;<br>$h = 2$ м;<br>$\alpha = 30^\circ$.<br>$a_c - ?\ \ v_c - ?$ | Есть ***два пути*** решения данной задачи: с помощью законов динамики поступательного и вращательного движения и с использованием закона сохранения механической энергии (ЗСМЭ). |

***1-й путь*** *решения задачи*

*Качение* – это сложное движение, которое является суммой двух простых: вращательного движения тела вокруг оси $z_c$, проходящей через центр масс (ЦМ), и поступательного движения тела со скоростью, равной $v_c$ – скорости движения ЦМ. Центр масс механической системы или твердого тела – это точка С (рис. 13), которая в однородном поле тяжести совпадает с центром тяжести тела. Напомним, что центр тяжести тела – это точка, в которой приложена сила тяжести, равная $m\vec{g}$.

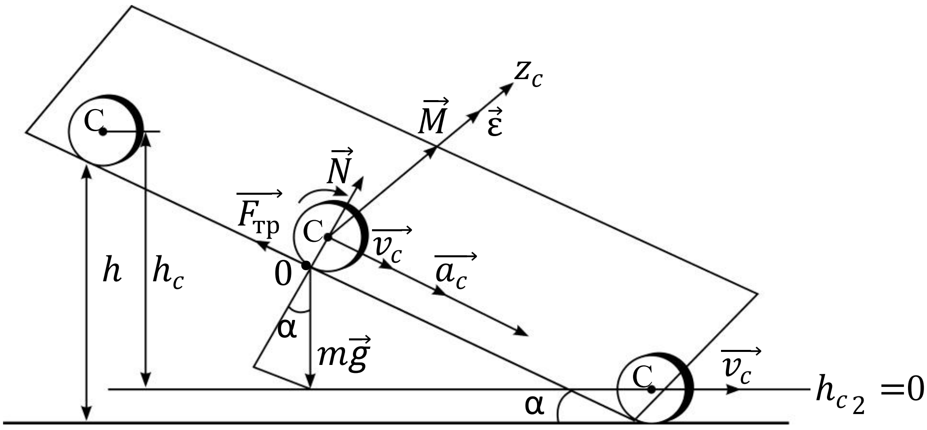



Рис. 13

Запишем закон динамики для вращательного движения диска вокруг оси $z_c$:

$$I_c\vec{\varepsilon} = \overrightarrow{M_{z_c}}\ . \tag{1}$$

На диск действуют два тела: Земля – силой тяжести $\overrightarrow{F_т} = m\vec{g}$, и наклонная плоскость. Реакция этой опоры состоит из двух составляющих: силы нормальной реакции $\vec{N}$ и силы трения $\overrightarrow{F_{тр}}$ , которая не дает проскальзывать диску, а обеспечивает его качение. Силы $\vec{N}$ и $m\vec{g}$ проходят через точку С, поэтому плечо каждой из них равно нулю, следовательно, моменты этих сил относительно оси $z_c$ равны нулю. Момент создает только сила $F_{тр}$ , для которой плечо равно радиусу диска $R$, а момент этой силы

$$M_{z_c} = F_{тр}R. \tag{2}$$

С учетом формулы (2) закон динамики (1) принимает следующий вид:

$$I_c\varepsilon = F_{тр}R\ . \tag{3}$$

Так как в этом уравнении содержатся две неизвестных величины: угловое ускорение ε и сила трения, – то требуется еще одно уравнение. Это закон динамики поступательного движения центра масс (точки С), или теорема о движении ЦМ:

$$m\overrightarrow{a_c} = \vec{F}\ , \tag{4}$$

где $\vec{F}$ – равнодействующая всех сил, приложенных к телу. В данной задаче

$$m\overrightarrow{a_c} = m\vec{g} + \overrightarrow{F_{тр}} + \vec{N}\ . \tag{4а}$$

Проведем ось $x$, направляя ее вдоль ускорения $\overrightarrow{a_c}$, и запишем уравнение (4а) в проекции на ось $x$:

$$ma_c = mg\sin\alpha - F_{тр}\ . \tag{5}$$

Далее решаем систему уравнений (3) и (5), но сначала установим связь углового ускорения диска ε и линейного $a_c$. В силу относительности движения ускорение точки С $\overrightarrow{a_c} = -\overrightarrow{a_o}$, где $\overrightarrow{a_o}$ – ускорение перемещения точки О относительно точки С; модули этих ускорений одинаковы:

$a_c = a_o$. Из связи углового и линейного ускорения для вращения относительно оси $z_c$ имеем $a_o = \varepsilon R$, следовательно, исходя из равенства ускорений, получаем, что и величина

$$a_c = \varepsilon R. \tag{6}$$

С учетом формулы (6) закон динамики (3) принимает следующий вид:

$$I_c \frac{a_c}{R} = F_{\text{тр}} R. \tag{7}$$

Из системы уравнений (5) и (7) нужно исключить неизвестную силу $F_{\text{тр}}$, для этого преобразуем уравнение (7), подставляя в него величину момента инерции диска $I_c = \frac{mR^2}{2}$. При этом уравнение (7) запишется так:

$$\frac{mR^2}{2} \, \frac{a_c}{R} = F_{\text{тр}} R; \quad \rightarrow \quad F_{\text{тр}} = \frac{ma_c}{2}.$$

Подставим найденную величину силы $F_{\text{тр}}$ в уравнение (5):

$$ma_c = mg \sin \alpha - \frac{ma_c}{2}.$$

Выражая из полученного равенства ускорение $a_c$, получаем расчетную формулу для определяемой величины ускорения центра масс диска в виде:

$$a_c = \frac{2}{3} g \sin \alpha. \tag{8}$$

Вычисляем $a_c = \frac{2}{3} 9{,}8 \ \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot \frac{1}{2} = 3{,}3 \ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

Для нахождения скорости точки С в конце скатывания диска с наклонной плоскости решаем *кинематическую задачу.* Из формулы (8) видим, что величина ускорения $a_c = \text{const}$, т. е. движение точки С равноускоренное; для такого движения скорость

$$v_c = a_c t, \tag{9}$$

где $t$ – время движения диска; это время найдем из другого уравнения кинематики равноускоренного движения, согласно которому путь, пройденный точкой С,

$$x = v_0 t + \frac{a_c t^2}{2}. \tag{10}$$

Преобразуем данное уравнение с учетом того, что $v_0 = 0$, а из треугольника (см. рис. 11) имеем $\sin \alpha = \frac{h}{x}$, что дает величину $x = \frac{h}{\sin \alpha}$. Тогда, согласно уравнению (10), получаем

$$\frac{h}{\sin \alpha} = \frac{a_c t^2}{2}, \quad \rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2h}{a_c \sin \alpha}}. \tag{11}$$

Подставим в уравнение (9) ускорение по формуле (8) и время скатывания по формуле (11). При этом получаем расчетную формулу:

$$v_c = a_c \sqrt{\frac{2h}{a_c \sin \alpha}} = \sqrt{\frac{2ha_c}{\sin \alpha}} = \sqrt{\frac{2h}{\sin \alpha} \, \frac{2g \sin \alpha}{3}}, \text{ или } v_c = \sqrt{4gh/3}. \tag{12}$$

Вычислим величину скорости ЦМ диска: $v_c = \sqrt{\frac{4 \cdot 9{,}8 \ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}}{3} \ 2 \text{ м}} = 5{,}3 \ \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

### ***2-й путь*** *решения задачи*

Качение рассмотрим как вращение вокруг мгновенной оси вращения (МОВ). Этой осью (по свойству оси вращения, точки которой неподвижны) является линия касания диска с наклонной плоскостью, – эта линия проходит через точку О (см. рис. 13). В этой точке приложены силы реакции опоры – $N$ и $F_{\text{тр}}$, причем, вторая их них явно неконсервативная, но моменты этих сил относительно МОВ равны нулю (плечо для них равно нулю). Благодаря этому силы реакции опоры не совершают работу, величина которой при вращательном движении $A = \int_1^2 M_{\text{мов}}\, d\varphi = 0$, так как $M_{\text{мов}} = 0$. Сила тяжести $F_{\text{т}} = mg$ является консервативной, поэтому при качении выполняется закон сохранения механической энергии. Запишем ЗСМЭ, приравнивая $E_{\text{мех}} = E_{\text{К}} + E_{\text{П}}$ в двух положениях диска: 1 – вверху и 2 – внизу:

$$E_{\text{К}1} + E_{\text{П}1} = E_{\text{К}2} + E_{\text{П}2}. \tag{13}$$

Здесь $E_{\text{К}} = \frac{I_{\text{мов}}\omega^2}{2}$ – кинетическая энергия вращения диска относительно МОВ, $E_{\text{П}} = mgh_c$ – потенциальная энергия, где $h_c$ – высота, на которой находится точка С. Примем, что $h_{c_2} = 0$; в этом случае имеем удобный нуль отсчета потенциальной энергии, так как $E_{\text{П}2} = 0$. По рис. 13 видно, что $h_c \approx h,$ – с учетом того, что $R \ll h$. В положении 1 величина $E_{\text{К}1} = 0$, так как диск *начинает движение* из состояния покоя. С учетом этих замечаний уравнение ЗСМЭ (13) запишется в следующем виде:

$$0 + mgh = \frac{I_{\text{мов}}\omega^2}{2} + 0. \tag{14}$$

Величину момента инерции диска относительно МОВ найдем по теореме Штейнера, учитывая, что расстояние между осями $z_c$ и МОВ равно $R$:

$$I_{\text{мов}} = I_c + mR^2 = \frac{mR^2}{2} + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2.$$

Подставляя величину $I_{\text{мов}}$ в уравнение (14), получаем равенство

$$mgh = \frac{3}{4}mR^2\omega^2, \text{ или } gh = \frac{3}{4}v_c^2. \tag{15}$$

Здесь учтена связь линейной скорости точки С и угловой ω: $v_c = \omega R$.

Выразим из равенства (15) линейную скорость точки С:

$$v_c = \sqrt{4gh/3}\,.$$

Отметим, что полученная формула совпадает с формулой (12), найденной выше путем совместного решения двух задач – динамической и кинематической. Для нахождения ускорения $a_c$ нужно прибегнуть к кинематической задаче, согласно которой из уравнения (9)

$$a_c = \frac{v_c}{t}, \text{ или } a_c^2 = \frac{v_c^2}{t^2}. \tag{16}$$

Из кинематической задачи (см. уравнение (11)) запишем:

$$a_c t^2 = \frac{2h}{\sin\alpha}.$$

С учетом этого выражения формулу (16) перепишем в виде

$$a_c \frac{2h}{\sin\alpha} = v_c^2; \;\; \rightarrow \;\; a_c = \frac{v_c^2 \sin\alpha}{2h}.$$

Подставляя в последнее выражение величину $v_c^2$ из формулы (15), получаем расчетную формулу для линейного ускорения ЦМ диска в виде

$$a_c = \left(\frac{4}{3} gh\right) \frac{\sin\alpha}{2h}; \;\; \rightarrow \;\; a_c = \frac{2}{3} g \sin\alpha.$$

Полученная расчетная формула совпадает с формулой (8), найденной из решения с использованием законов динамики поступательного и вращательного движения диска.

Естественно, что при решении задач контрольной работы достаточно использовать один из двух рассмотренных выше способов решения. Отметим, что и в одном, и в другом способе время движения определяется в решении кинематической задачи.

***Задача 14.*** В центре платформы стоит человек и держит на вытянутых в стороны руках гири массой $m = 10$ кг каждая. Расстояние гири от оси вращения $l_1 = 50$ см. Платформа вращается с частотой $n_1 = 1\ \text{с}^{-1}$. Как изменится частота вращения платформы и какую работу произведет человек, если он сблизит руки, уменьшая расстояние каждой гири от оси вращения платформы до $l_2 = 20$ см? Суммарный момент инерции человека и платформы относительно оси вращения $I_0 = 2{,}5\ \text{кг} \cdot \text{м}^2$.

***Дано***

$m = 10$ кг;
$l_1 = 50$ см;
$n_1 = 1\ \text{с}^{-1}$;
$l_2 = 20$ см;
$I_0 = 2{,}5\ \text{кг} \cdot \text{м}^2$.

$n_2 - ?\ A - ?$

***Решение***

Рассмотрим систему тел «скамья – человек – гири» (рис. 14). В этой системе силы взаимодействия человека с гирями и со скамьей являются внутренними, и поэтому они не изменяют момент импульса системы.

Внешние силы: сила тяжести и сила нормальной реакции опоры, – параллельны оси вращения $z$, поэтому они не создают вращающего момента. Момент сил трения в оси $M_{\text{тр}} = 0$, так как частота вращения $n_1$ постоянна. Таким образом, моменты всех внешних сил относительно вертикальной оси вращения скамьи равны нулю. Следовательно, выполняется закон сохранения момента импульса системы в следующем виде:

$$\overrightarrow{L_1} = \overrightarrow{L_2}, \text{ или } I_1 \overrightarrow{\omega_1} = I_2 \overrightarrow{\omega_2}, \tag{1}$$

где $\overrightarrow{L_1} = I_1 \vec{\omega}_1$ и $\overrightarrow{L_2} = I_2 \overrightarrow{\omega_2}$ – моменты импульса системы относительно оси $z$, соответственно, до и после сближения гирь.

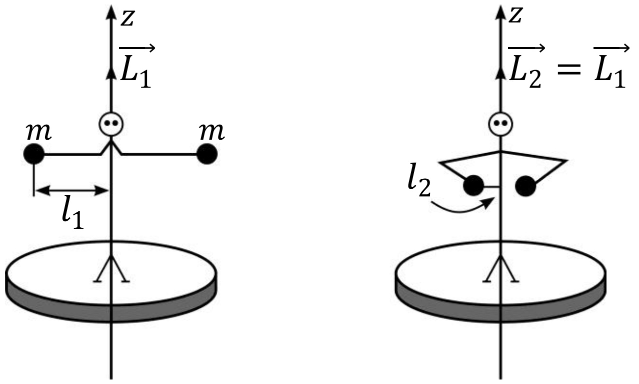



Рис. 14

Запишем векторное уравнение (1) в проекции на ось вращения:

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2. \qquad (2)$$

До сближения гирь момент инерции системы

$$I_1 = I_0 + 2ml_1^2,$$

а после сближения –

$$I_2 = I_0 + 2ml_2^2,$$

где $m$ – масса каждой гири. Используя связь угловой скорости ω и частоты вращения $n$:

$$\omega = 2\pi n, \qquad (3)$$

и подставляя величину ω и значения моментов инерции в уравнение ЗСМИ (2), получаем следующее равенство:

$$(I_0 + 2ml_1^2)n_1 = (I_0 + 2ml_2^2)n_2 .$$

Из этого уравнения искомая частота вращения платформы

$$n_2 = n_1 \frac{(I_0 + 2ml_1^2)}{(I_0 + 2ml_2^2)}.$$

Вычисляем величину $n_2$:

$$n_2 = 1\ \text{с}^{-1} \frac{(2{,}5\ \text{кг·м}^2 + 2 \cdot 10\ \text{кг} \cdot (0{,}5)^2\ \text{м}^2)}{(2{,}5\ \text{кг·м}^2 + 2 \cdot 10\ \text{кг} \cdot (0{,}2)^2\ \text{м}^2)} = 1\ \text{с}^{-1} \frac{7{,}5\ \text{кг·м}^2}{3{,}3\ \text{кг·м}^2} = 2{,}3\ \text{с}^{-1}.$$

Перейдем к вычислению работы, которую произвел человек, сближая гири. Все перечисленные выше внешние силы не создают вращающего момента относительно оси и, следовательно, не совершают работы. Поэтому *работу, совершенную человеком,* можно найти как приращение кинетической энергии системы:

$$A = E_{\text{К}2} - E_{\text{К}1} = \frac{I_2\omega_2^2}{2} - \frac{I_1\omega_1^2}{2}.$$

Подставляя угловую скорость ω по формуле (3), получаем расчетную формулу в виде

$$A = 2\pi^2(I_2 n_2^2 - I_1 n_1^2). \qquad (4)$$

Вычислим работу, совершенную человеком при перемещении гирь, по формуле (4):

$$A = 2 \cdot 3{,}14^2 \cdot (3{,}3\ \text{кг} \cdot \text{м}^2 (2{,}3)^2\ \text{с}^{-2} - 7{,}5\ \text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot 1^2\ \text{с}^{-2}) = 196\ \text{Дж}.$$

***Задача 15.*** Человек массой $m = 60$ кг находится на неподвижной платформе массой $M = 100$ кг и радиусом $R = 10$ м. Найдите угловую скорость, которую будет иметь платформа, если человек будет двигаться по окружности радиусом $r = 5$ м вокруг оси вращения со скоростью

$v' = 4\ \frac{км}{ч}$ относительно платформы. Платформу можно считать однородным диском, а человека – точечной массой.

| *Дано* | *Решение* |
|---|---|
| $m = 60$ кг;<br>$M = 100$ кг;<br>$R = 10$ м;<br>$r = 5$ м;<br>$v' = 4\ \frac{км}{ч} = 1{,}1\ \frac{м}{с}$.<br>ω – ? | На примере предыдущей задачи мы убедились, что для системы человек – платформа момент внешних сил относительно вертикальной оси равен нулю, и к системе применим закон сохранения момента импульса: |

$$\overrightarrow{L_1} = \overrightarrow{L_2}, \qquad (1)$$

где $\overrightarrow{L_1}$ и $\overrightarrow{L_2}$ – начальный и конечный момент импульса системы человек – платформа, соответственно, до движения человека и при движении человека по платформе. Так как до начала движения человека система покоилась, то ее момент импульса

$$\overrightarrow{L_1} = 0, \qquad (2)$$

Подставляя условие (2) в уравнение (1), получаем

$$\overrightarrow{L_2} = 0. \qquad (3)$$

Это означает, что в условиях данной задачи в любой момент времени момент импульса системы человек – платформа равен нулю. Чтобы обеспечить нулевое значение момента импульса системы, момент импульса платформы $\overrightarrow{L_П}$ должен быть направлен противоположно моменту импульса человека $\overrightarrow{L_Ч}$, т. е. платформа будет вращаться в сторону, противоположную движению человека (рис. 15).

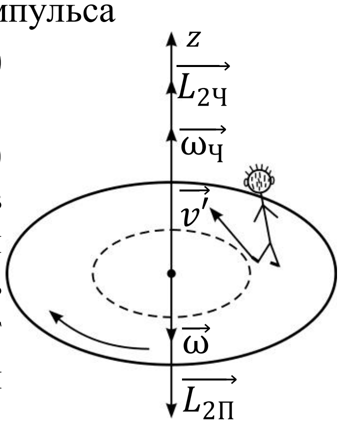



Рис. 15

Свяжем систему отсчета с Землей и запишем выражение для момента импульса системы человек – платформа:

$$\overrightarrow{L_2} = \overrightarrow{L_{2П}} + \overrightarrow{L_{2Ч}}\,.$$

Перейдем от векторной записи к скалярной:

$$L_2 = L_{2Ч} - L_{2П}\,. \qquad (4)$$

Учтем, что $L_2 = 0$, тогда равенство (4) принимает следующий вид:

$$L_{2Ч} - L_{2П} = 0\,. \qquad (5)$$

Здесь момент импульса человека рассчитываем как для материальной точки:

$$L_Ч = I_Ч\omega_Ч = mr^2\omega_Ч = mv_Ч r, \qquad (6)$$

а $L_П$ платформы – как диска:

$$L_П = I_П\omega = \frac{MR^2}{2}\omega\,. \qquad (7)$$

С учетом формул (6) и (7) уравнение (5) принимает следующий вид:

$$mv_Ч r - \frac{MR^2}{2}\omega = 0\,. \qquad (8)$$

В уравнении (8) скорости человека и платформы указываются в одной системе отсчета, например, связанной с Землей, и условно принятой за неподвижную систему отсчета. В задаче дана скорость человека $\vec{v'}$ относительно движущейся платформы. Согласно закону сложения скоростей в классической механике, скорость тела $\vec{v}$ в системе, принятой за неподвижную, равна векторной сумме скоростей: скорости тела относительно движущейся системы $\vec{v'}$ и скорости самой системы, в данном случае равной $\vec{v_{\text{П}}}$:

$$\vec{v_{\text{Ч}}} = \vec{v'} + \vec{v_{\text{П}}},$$

или, в проекции на направление движения человека, получаем

$$v_{\text{Ч}} = v' - v_{\text{П}}. \tag{9}$$

Здесь под $v_{\text{П}}$ следует понимать линейную скорость тех точек платформы, по которым идет человек; эта скорость

$$v_{\text{П}} = \omega r. \tag{10}$$

С учетом формул (9) и (10) уравнение (8) принимает следующий вид:

$$mr(v' - \omega r) - \frac{MR^2}{2}\omega = 0,$$

или

$$mv'r - \left(\frac{MR^2}{2} + mr^2\right)\omega = 0. \tag{11}$$

Запись ЗСМИ в виде уравнения (11) показывает, что человек участвует в двух движениях: движение «вперед» по платформе со скоростью $v'$ и вместе с платформой, вращающейся с угловой скоростью ω, человек «откатывается назад». Из уравнения (11) определяем скорость вращения платформы:

$$\omega = \frac{mv'r}{\frac{MR^2}{2} + mr^2}.$$

Вычисляем величину ω по этой формуле:

$$\omega = \frac{60\ \text{кг}\cdot 1{,}1\ \frac{\text{м}}{\text{с}}\cdot 5\ \text{м}}{\frac{100\ \text{кг}\cdot 10^2\ \text{м}^2}{2} + 60\ \text{кг}\cdot 5^2\ \text{м}^2} = 5{,}1\cdot 10^{-2}\ \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

## 3.4. Механические колебания

***Задача 16.*** Пружинный маятник жесткостью $k = 2\cdot 10^3\ \frac{\text{Н}}{\text{м}}$ совершает гармонические колебания. Масса груза $m = 50$ г, максимальная скорость груза $v_{\max} = 20\frac{\text{м}}{\text{с}}$. Определите циклическую частоту ω, период $T$ и амплитуду колебаний $A$.

***Дано***

$k = 2\cdot 10^3\ \frac{\text{Н}}{\text{м}}$;

$m = 50\ \text{г} = 5\cdot 10^{-2}$ кг;

$v_{\max} = 20\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

$\omega - ?\quad T - ?\quad A - ?$

***Решение***

Циклическая частота ω колебаний пружинного маятника определяется формулой

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \tag{1}$$

где $k$ – жесткость пружины; $m$ – масса груза.

Вычисляем частоту $\omega = \sqrt{\frac{2\cdot10^3\ \frac{\text{Н}}{\text{м}}}{5\cdot10^{-2}\ \text{кг}}} = \sqrt{4\cdot10^4\ \text{с}^{-2}} = 2\cdot10^2\ \text{с}^{-1}$.

Период колебаний связан с циклической частотой формулой $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Вычисляем период колебаний $T = \frac{2\cdot3{,}14}{2\cdot10^2\ c^{-1}} = 3{,}1\cdot10^{-2}$ с.

Амплитуду колебаний определим, рассчитывая полную механическую энергию груза, совершающего колебания:

$$E = E_{\text{кин}} + E_{\text{п}}. \qquad (2)$$

При колебаниях груза по закону $x = A\cos\omega t$ происходит превращение кинетической энергии в потенциальную, причем, в крайних положениях груза, когда смещение $x = A$, скорость груза $v = 0$ и величина $E_{\text{кин}} = \frac{mv^2}{2} = 0$. Следовательно, согласно равенству (2), полная механическая энергия груза

$$E = E_{\text{Пmax}} = \frac{kA^2}{2},\ \text{так как}\ \ x_{\max} = A. \qquad (3)$$

При движении груза из крайнего положения потенциальная энергия переходит в кинетическую энергию и в положении равновесия смещение $x = 0$ и потенциальная энергия $E_{\text{П}} = \frac{kx^2}{2} = 0$. При этом полная механическая энергия равна максимальной кинетической энергии груза:

$$E = E_{\text{Кmax}} = \frac{mv_{\max}^2}{2}. \qquad (4)$$

Приравняем значения полной механической энергии груза, определяемой формулами (3) и (4):

$$\frac{kA^2}{2} = \frac{mv_{\max}^2}{2}. \qquad (5)$$

Из соотношения (5) выразим определяемую амплитуду колебаний груза

$$A = \sqrt{\frac{m}{k}}\,v_{\max};\ \text{с учетом формулы (1) получаем}\ A = \frac{v_{\max}}{\omega}.$$

Вычисляем: $A = \frac{20\ \frac{\text{м}}{\text{с}}}{2\cdot10^2\ \text{с}^{-1}} = 0{,}10\ \text{м} = 10\ \text{см}$.

***Задача 17.*** Частица массой $m = 1$ г совершает гармонические колебания по закону $x = 5\cos\frac{\pi}{3}t$, см. Определите период колебаний $T$, максимальную скорость частицы $v_{\max}$ и ее механическую энергию $E$.

***Дано***

$m = 1\ \text{г} = 1\cdot10^{-3}$ кг;

$x = 5\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$, см.

$T - ?\quad v_{\max} - ?\quad E - ?$

***Решение***

Запишем закон гармонических колебаний частицы в виде:

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0). \qquad (1)$$

Сравнивая с заданным уравнением движения

$$x = 5\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right),\ \text{см}, \qquad (2)$$

видим, что циклическая частота колебаний $\omega = \frac{\pi}{3}$ с$^{-1}$. Период колебаний связан с циклической частотой формулой

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Подставляя в эту формулу найденное значение частоты, вычисляем:

$$T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}\ \text{с}^{-1}} = 6\ \text{с}.$$

Скорость движения частицы определяем как первую производную от смещения $x(t)$:

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = \dot{x}(t) = 5\frac{\pi}{3}\left(-\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)\right).$$

Получили гармонический закон колебаний величины скорости в виде

$$v_x = v_{\max}\ \sin\omega t,$$

где амплитуда скорости частицы $v_{\max} = \frac{5\pi\cdot 10^{-2}}{3}\ \frac{\text{м}}{\text{с}} = 5{,}2\cdot 10^{-2}\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Полная механическая энергия $E$ частицы, совершающей гармонические колебания (см. решение задачи 16) выражается формулой:

$$E = E_{\text{К}} + E_{\text{П}} = E_{\text{Кmax}}, \quad \text{или} \quad E = \frac{m v_{\max}^2}{2}.$$

Вычисляем величину механической энергии колеблющейся частицы:

$$E = \frac{1\cdot 10^{-3}\ \text{кг}\left(5{,}2\cdot 10^{-2}\ \frac{\text{м}}{\text{с}}\right)^2}{2} = 1{,}4\cdot 10^{-6}\ \text{Дж} = 1{,}4\ \text{мкДж}.$$

***Задача 18.*** Материальная точка (МТ) массой $m$=10 г совершает гармонические колебания по закону $x(t) = 10\ \cos\left(\frac{\pi}{24}t\right)$, см. Определите амплитуду $A$ колебаний МТ, модуль ее скорости $v$ и силу $F$, действующую на МТ в момент времени $t_1 = 8$ с.

***Дано***

$m$=10 г= $1\cdot 10^{-2}$ кг;

$x(t) = 10\ \cos\left(\frac{\pi}{24}t\right)$, см;

$t_1 = 8$ с.

$A - ?\ \ v(t_1) - ?\ \ F(t_1) - ?$

***Решение***

Запишем закон гармонических колебаний МТ в виде

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0) \qquad (1)$$

и сравним с заданным законом движения:

$$x(t) = 10\ \cos\left(\frac{\pi}{24}t\right),\ \text{см}. \qquad (2)$$

Из сопоставления уравнений (1) и (2) видим, что амплитуда колебаний $A = 10$ см.

Скорость МТ найдем как первую производную от зависимости координаты от времени $x(t)$, представленной уравнением (2):

$$v_x(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 10\cdot\frac{\pi}{24}\left(-\sin\left(\frac{\pi}{24}t\right)\right),\ \frac{\text{см}}{\text{с}}. \qquad (3)$$

Вычислим по уравнению (3) значение скорости в момент времени $t_1 = 8$ с:

$$v_x(t_1) = 10\text{ см}\cdot\frac{\pi}{24}\text{с}^{-1}\left(-\sin\left(\frac{\pi\text{ с}^{-1}\cdot 8\text{ с}}{24}\right)\right) = \frac{5\pi}{12}\left(-\sin\frac{\pi}{3}\right)\frac{\text{см}}{\text{с}} = -\frac{5\pi\sqrt{3}}{12\cdot 2}\frac{\text{см}}{\text{с}} = -1{,}1\ \frac{\text{см}}{\text{с}}.$$

Знак «минус» – отрицательная проекция скорости на ось $x$, означает, что вектор скорости $\vec{v}$ колеблющейся материальной точки в момент времени $t_1$ направлен противоположно оси $x$.

Силу, действующую на МТ, найдем по закону динамики движения – по второму закону Ньютона:

$$ma_x = F_x. \tag{4}$$

Для определения ускорения материальной точки (точнее, его проекции на ось $x$) используем определительную формулу:

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x(t)}{\mathrm{d}t},$$

где зависимость $v_x(t)$ представлена уравнением (3); дифференцируя его, получаем проекцию ускорения на ось $x$, как функцию времени:

$$a_x(t) = -\frac{10\pi}{24}\cdot\frac{\pi}{24}\cos\left(\frac{\pi}{24}t\right),\ \frac{\text{см}}{\text{с}^2}. \tag{5}$$

Подставляя выражение (5) в формулу закона динамики (4), находим закон изменения силы при гармонических колебаниях МТ в виде:

$$F_x(t) = -m\left(\frac{\pi}{24}\right)^2\cdot 10\cdot 10^{-2}\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}\cos\left(\frac{\pi}{24}t\right). \tag{6}$$

С учетом закона колебаний (2) уравнение (6) запишем в следующем виде:

$$F_x(t) = -m\omega^2 x. \tag{7}$$

Уравнения (6) и (7) показывают, что упругая (или подобная ей сила) изменяется с течением времени по гармоническому закону, как и величина смещения МТ от положения равновесия.

Вычисляем величину проекции силы, действующей на колеблющуюся МТ в момент времени $t_1$:

$$F_x(t_1) = -1\cdot 10^{-2}\text{ кг}\cdot\left(\frac{3{,}14}{24}\right)^2\cdot 10^{-1}\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}\cos\left(\frac{\pi\cdot 8\text{ с}}{24\text{ с}}\right) = 8{,}6\cdot 10^{-6}\text{ Н} = 8{,}6\text{ мкН}.$$

ЧАСТЬ 2

# МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

## 4. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Молекулярная физика (МФ) и термодинамика (ТД) изучают строение и свойства вещества. *Вещество* – это макроскопическая система, состоящая из большого числа частиц: от $10^5$ до $10^{23}$ и более.

В молекулярно-кинетической теории (МКТ) используется модель *идеальный газ*, согласно которой

1) суммарный объем молекул мал по сравнению с объемом сосуда,
2) молекулы движутся хаотически и не взаимодействуют друг с другом,
3) соударения молекул между собой и со стенкой сосуда – абсолютно упругие.

Реальные газы при низких давлениях (до $10^6 \div 10^7$ Па) и высоких температурах ($T > 200$ К) по своим свойствам близки к идеальному газу. Наиболее точно модели идеального газа соответствуют разреженные газы, особенно в условиях вакуума.

### 4.1. Молекулярная физика

#### 4.1.1. Основные параметры и уравнение состояния идеального газа

Уравнение состояния идеального газа – это уравнение Клапейрона–Менделеева:

$$pV = \frac{m}{M}RT, \tag{1}$$

где $p = \frac{F_\perp}{S}$ – давление газа, равное силе $F_\perp$, с которой молекулы при ударах действуют по нормали на стенку сосуда площадью $S = 1$ м$^2$; $V$ – объем сосуда; $m$ и $M$ – масса газа и молярная масса (масса одного моля); $\frac{m}{M} = \nu$ – количество вещества, оно измеряется числом молей $\nu$, которое равно также $\nu = \frac{N}{N_A}$, где $N$ – число молекул газа; $N_A$ – число Авогадро; $R = 8{,}31\ \frac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}}$ – молярная газовая постоянная; $T$ – термодинамическая температура, измеряется в кельвинах (К), $T = 273 + t,$℃, где $t$ – температура по Международной практической шкале, измеряется в градусах Цельсия (℃).

Связь физических постоянных:

$$R = N_A\, k, \tag{2}$$

где $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}\ \frac{1}{\text{моль}}$ – число Авогадро, это число молекул в одном моле вещества; $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$ – постоянная Больцмана.

Введем параметр состояния газа $n = \frac{N}{V}$ – *концентрация молекул* (их число в единице объема), и уравнение состояния идеального газа (1) запишем в виде:

$$p = nkT. \tag{3}$$

Концентрация молекул связана с плотностью газа ρ: $\rho = nm_0$ , где $m_0$ – масса одной молекулы; по определению плотность вещества $\rho = \frac{m}{V}$, а из уравнения состояния *плотность идеального газа*

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{pM}{RT}. \qquad (4)$$

### 4.1.2. Средняя энергия молекулы газа. Внутренняя энергия идеального газа

Молекулы газа, совершая хаотическое движение, в соударениях изменяют свою скорость, поэтому в газе есть молекулы с различными скоростями в интервале от 0 до ∞ (но следует иметь в виду, что даже большие скорости молекул $v < c$, равной $3 \cdot 10^8\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$). Соответственно, и кинетические энергии молекул газа различны. Поэтому вводят средние характеристики молекул. Согласно закону Больцмана о равномерном распределении энергии молекул по степеням свободы, средняя энергия молекулы ⟨ε⟩ зависит от температуры газа $T$ следующим образом:

$$\langle\varepsilon\rangle = \frac{i}{2} k\, T, \qquad (5)$$

где $i$ – суммарное число степеней свободы молекулы газа:

$$i = i_{\text{пост}} + i_{\text{вращ}} + 2i_{\text{колеб}}\ .$$

Для молекул при невысоких температурах ($T < 1000$ К) величина $i_{\text{колеб}} = 0$. Число степеней свободы молекулы связано с числом атомов в молекуле и ее структурой (см. таблицу).

Таблица

| Газ | Одноатомный (He, Ne, Ar и др.) | Двухатомный ( $N_2$, $O_2$, CO и др.) | Трех- и многоатомный ($H_2O$, $CH_4$, $NH_3$ и др.) |
|---|---|---|---|
| $i_{\text{пост}}$ | 3 | 3 | 3 |
| $i_{\text{вращ}}$ | – | 2 | 3 |
| $i$ | 3 | 5 | 6 |

Внутренняя энергия идеального газа $U$ – это функция состояния газа, равная сумме кинетических энергий всех молекул, так как для невзаимодействующих молекул идеального газа $E_{\text{пот}} = 0$. Таким образом, величина внутренней энергии

$$U = N\langle\varepsilon\rangle;$$

так как число молекул $N = \nu N_A$, то *внутренняя энергия идеального газа*

$$U = \frac{m}{M}\frac{i}{2} RT, \qquad (6)$$

где $m$ и $M$ – масса газа и молярная масса; $R$ – молярная газовая постоянная.

### 4.1.3. Распределение молекул идеального газа по скоростям – закон Максвелла

Закон Максвелла описывается функцией $f(v)$:

$$f(v) = \frac{\mathrm{d}N_v}{N \cdot \mathrm{d}v}.$$

Здесь $f(v)$ – *функция распределения молекул по скоростям;* она равна доле молекул, имеющих скорости в единичном интервале $\mathrm{d}v \approx \Delta v = 1\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$ вблизи данной скорости $v$. Закон распределения молекул идеального газа по скоростям имеет следующий вид:

$$f(v) = Av^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right), \tag{7}$$

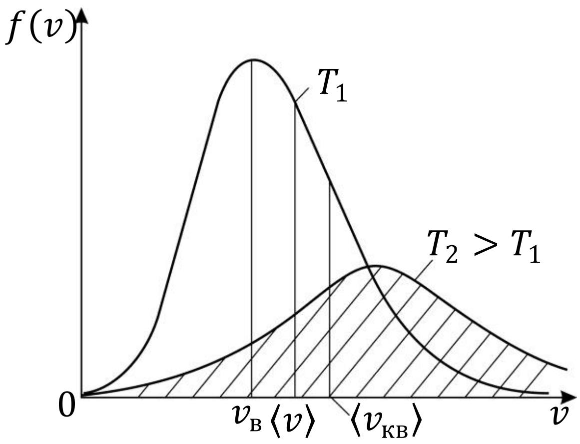



Рис. 16

где $A$ – постоянная, не зависящая от скорости; $m$ – масса молекулы. На графике (рис. 16) функция (7) имеет вид кривой с максимумом.

Площадь под кривой функции $f(v)$

$$S = \int_0^\infty f(v)\mathrm{d}v = \int_0^N \frac{\mathrm{d}N_v}{N} = \frac{N}{N} = 1,$$

т. е. величина $S$ одинакова при любой температуре газа. На оси скоростей (см. рис. 16) $v_\text{в}$ – *наиболее вероятная скорость молекулы*, она соответствует максимуму кривой распределения. Из условия максимума функции $f(v)$ получена величина

$$v_\text{в} = \sqrt{\frac{2k\,T}{m}}, \quad \text{или} \quad v_\text{в} = \sqrt{\frac{2R\,T}{M}}, \tag{8}$$

*Средняя квадратичная скорость* молекулы определяется по величине средней кинетической энергии поступательного движения молекулы (см. формулу (5)):

$$\langle \varepsilon_\text{пост} \rangle = \frac{3}{2}kT = \frac{m\langle v^2 \rangle}{2}; \quad \langle v_\text{кв} \rangle = \sqrt{\langle v^2 \rangle}; \quad \rightarrow \quad \langle v_\text{кв} \rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m}}. \tag{9}$$

*Средняя скорость молекулы* $\langle v \rangle$ (средняя арифметическая скорость) определяется с помощью закона статистического распределения $f(v)$:

$$\langle v \rangle = \int_0^\infty v f(v)\mathrm{d}v; \quad \rightarrow \quad \langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi M}}. \tag{10}$$

Сравнивая средние значения скоростей молекулы с учетом формул (8), (9) и (10), получаем соотношения, справедливые для молекул идеального газа и удобные в расчетах:

$$v_\text{в} = \sqrt{\frac{2R\,T}{M}}; \quad \langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi M}} = 1{,}13 v_\text{в}; \quad \langle v_\text{кв} \rangle = \sqrt{\frac{3R\,T}{M}} = 1{,}22 v_\text{в}. \tag{11}$$

### 4.1.4. Явления переноса: диффузия, внутреннее трение, теплопроводность

Переход вещества из неравновесного состояния (в котором давление $p$, температура $T$, плотность ρ и концентрация $n$ разные в различных точках объема) в равновесное состояние (с одинаковыми по объему значениями $p$, $T$, ρ, $n$) сопровождается переносом массы молекул, их энергии и импульса молекул.

*<u>Диффузия</u>* – перенос массы в область с меньшей плотностью ρ и концентрацией молекул $n$.

Уравнение диффузии (закон Фика):

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = -D\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}x}S, \tag{12}$$

где $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$ – поток массы, или скорость переноса массы; $D$ – *коэффициент диффузии*; $\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}x}$ – градиент плотности, он показывает быстроту изменения плотности в направлении переноса (вдоль оси $x$), знак "$-$" показывает, что перенос массы происходит в направлении уменьшения плотности, т. е. $\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}x} < 0$; $S$ – площадь, через которую происходит перенос массы.

МКТ дает для коэффициента диффузии следующую формулу:

$$D = \frac{1}{3}\langle v\rangle\langle l\rangle, \tag{13}$$

где $\langle v\rangle$ – средняя скорость хаотического движения молекул (см. формулу (10)); $\langle l\rangle$ – средняя длина свободного пробега молекулы газа:

$$\langle l\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}, \quad \text{где} \quad n = \frac{p}{kT}. \tag{14}$$

Здесь $d$ – эффективный диаметр молекулы газа.

*<u>Внутреннее трение (вязкость)</u>* – при движении тела в среде (в газе или в жидкости) тело увлекает прилежащие слои газа и при этом тормозится, так как отдает молекулам газа часть своего импульса. При этом сила внутреннего трения между двумя слоями газа (жидкости), согласно закону Ньютона,

$$F_{\text{сопр}} = -\eta\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}S, \tag{15}$$

где η – динамическая вязкость (вязкость) газа; $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ – градиент скорости направленного движения слоев газа.

*Вязкость идеального газа*, согласно МКТ:

$$\eta = \frac{1}{3}\langle v\rangle\langle l\rangle\rho, \tag{16}$$

где ρ – плотность газа. В соответствии с формулой (16) вязкость газа не зависит от его плотности, так как длина свободного пробега молекул $\langle l\rangle \sim \frac{1}{n} \sim \frac{1}{\rho}$.

<u>*Теплопроводность*</u> – явление выравнивания температур путем переноса энергии молекулами (передача энергии происходит при соударениях молекул). Перенос энергии в виде теплоты описывается уравнением Фурье:

$$\frac{Q}{\Delta t} = -K\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}S, \tag{17}$$

где $\frac{Q}{\Delta t}$ – поток теплоты; $K$ – теплопроводность газа; $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}$ – градиент температуры, знак величины $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} < 0$ , поэтому в уравнении (17) есть знак "$-$", чтобы поток теплоты был положителен при переносе энергии в направлении убывания температуры.

*Теплопроводность* $K$, согласно анализу явления в МКТ, описывается формулой

$$K = \frac{1}{3}\langle v\rangle\langle l\rangle\rho c_V, \tag{18}$$

где $c_V = \frac{iR}{2M}$ – удельная теплоемкость газа при постоянном объеме.

Формулы (13), (16) и (18) связывают коэффициенты переноса с характеристиками теплового движения молекул. Из этих формул вытекают простые соотношения между коэффициентами:

$$\eta = \rho D; \quad K = c_V\eta.$$

Следует отметить, что все коэффициенты переноса, а следовательно, и скорости всех процессов переноса выражаются через длину свободного пробега молекул $\langle l\rangle$, а формула (14) для этой величины выведена путем расчета среднего числа столкновений молекулы с другими молекулами. Но ***в вакууме*** молекул так мало, что пробег молекулы происходит практически без соударений с другими молекулами – от одной стенки сосуда к другой. При этом длина свободного пробега равна расстоянию между стенками сосуда и становится существенно больше, чем величина $\langle l\rangle$ при атмосферном давлении. Соответственно в вакууме изменяется и скорость всех рассмотренных выше процессов переноса: скорость диффузии увеличивается, а сила внутреннего трения и теплопроводность газа *в условиях вакуума* уменьшаются пропорционально давлению газа.

## 4.2. Термодинамика

### 4.2.1. Первое начало термодинамики. Работа газа и теплота

Известны две формы обмена энергией термодинамической системы с окружающей средой: теплота $Q$ – энергия, переданная путем теплообмена, и работа $A$ – характеристика процесса, в котором изменяется объем газа.

<u>*Первое начало термодинамики*</u> – это *закон сохранения и превращения энергии* в тепловых процессах:

$$Q = \Delta U + A. \tag{19}$$

Согласно первому закону ТД, ***подведенное тепло идет на приращение внутренней энергии системы и на совершение системой работы против внешних сил.***

Для элементарного процесса уравнение (19) принимает вид:

$$\delta Q = \mathrm{d}U + \delta A, \tag{19 а}$$

где $\delta Q$ – бесконечно малое количество теплоты; $\delta A$ – элементарная работа; $\mathrm{d}U$ – бесконечно малое приращение внутренней энергии. Символ δ вместо d означает, что $\delta Q$ и $\delta A$ не являются полными дифференциалами величин $Q$ и $A$ – эти величины являются характеристиками процесса, т. е. они зависят от процесса перехода газа из состояния 1 в состояние 2.

Элементарная работа $\delta A = p\mathrm{d}V$, где $\mathrm{d}V$ – приращение объема газа. Полная работа газа вычисляется путем интегрирования:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p\mathrm{d}V, \tag{20}$$

а) в изобарном процессе ($p =$const) работа $A = p(V_2 - V_1)$;

б) в изохорном процессе ($V =$const; $\mathrm{d}V = 0$) величина $A = 0$;

в) в изотермическом процессе ($T =$const) $A = \int_{V_1}^{V_2} p\mathrm{d}V$, где $p = \frac{m}{M}\frac{RT}{V}$, тогда $A = \frac{m}{M}RT\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$;

г) в адиабатном процессе ($\delta Q = 0$) из формулы 1-го закона ТД (19) следует, что $A = -\Delta U = \frac{m}{M}\frac{i}{2}R(T_1 - T_2)$.

Бесконечно малое количество теплоты

$$\delta Q = \frac{m}{M}C_M\mathrm{d}T, \tag{21}$$

где $C_M$ – молярная теплоемкость (количество теплоты, необходимое для нагрева 1-го моля вещества на 1 К); $C_M = cM$, где $c$ – удельная теплоемкость газа; $M$ – его молярная масса.

*<u>В изохорном процессе</u>* ($\delta A = 0$) и, согласно первому закону ТД (19а), имеем

$$\delta Q_V = \mathrm{d}U = \frac{m}{M}\frac{i}{2}R\mathrm{d}T. \tag{22}$$

Сравнивая выражения (21) и (22), получаем формулу молярной теплоемкости идеального газа при постоянном объеме:

$$C_V = \frac{i}{2}R. \tag{23}$$

*<u>В изобарном процессе,</u>* согласно первому началу ТД: $Q_p = \Delta U + A_p$, – отсюда видим, что $Q_p > Q_V$, так как требуется дополнительное количество теплоты на совершение работы. Соответствующее соотношение молярных теплоемкостей

$$C_p = C_V + R; \text{ с учетом формулы (23) получаем } C_p = \frac{i+2}{2}R. \quad (24)$$

Используя формулы теплоемкостей (23) и (24), найдем отношение теплоемкостей – $C_p$ к $C_V$:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{i+2}{i}. \quad (25)$$

*Адиабатный процесс* происходит без теплообмена системы с окружающей средой ($Q = 0$). Уравнение адиабатного процесса (уравнение Пуассона):

$$pV^{\gamma} = \mathrm{const}, \text{ или } p_1V_1^{\gamma} = p_2V_2^{\gamma}. \quad (26)$$

Другие уравнения адиабатного процесса:

$$TV^{\gamma-1} = \mathrm{const}; \quad Tp^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \mathrm{const}.$$

В этих уравнениях показатель адиабаты

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{c_p}{c_V} = \frac{i+2}{i}.$$

### 4.2.2. Круговой процесс (цикл). Цикл Карно и его КПД

*Круговым процессом* называется процесс, в котором система, проходя через ряд состояний, возвращается в исходное состояние. На диаграмме $p - V$ круговой процесс изображается замкнутой кривой (1–2–1) (рис. 17).

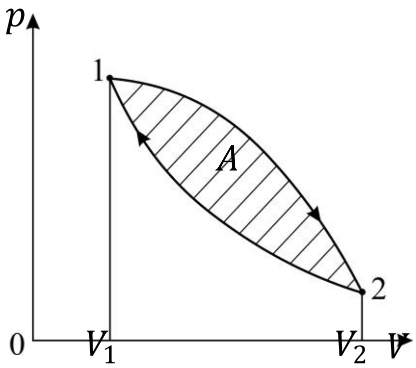


Рис. 17

Так как в цикле $U_1^{\text{нач}} = U_1^{\text{кон}}$, то $\Delta U = 0$ и первый закон ТД (19) принимает вид:

$$Q = A. \quad (27)$$

Работа за цикл $A = A_{12}^{\text{расш}} + A_{21}^{\text{сжат}} = S$, где $S$ – площадь внутри кривой цикла, показанной в координатах $p - V$ (см. рис. 17).

Согласно первому закону ТД (27) для цикла, в тепловой машине (в тепловом двигателе) работа совершается за счет теплоты, подведенной к газу:

$$A = Q_1 - Q_2, \quad (28)$$

где $Q_1$ – количество подведенной от нагревателя теплоты; $Q_2$ – количество теплоты, которое газ отдает холодильнику.

*Термический коэффициент полезного действия* для кругового процесса (КПД тепловой машины):

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}, \text{ или } \eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}. \quad (29)$$

*Для цикла Карно*, состоящего из четырех обратимых процессов (рис. 18): изотермического расширения 1–2, адиабатного расширения 2–3, изотермического сжатия 3–4 и адиабатного сжатия 4–1, – величина термического КПД

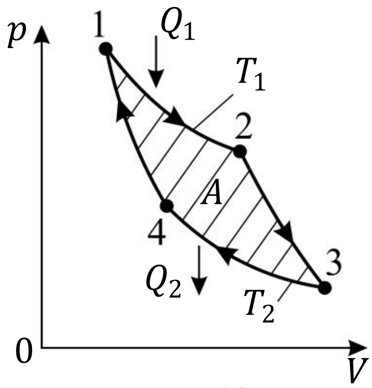


Рис. 18

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}, \text{ или } \eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}, \qquad (30)$$

где $T_1$ – температура нагревателя; $T_2$ – температура холодильника.

Сравнивая формулы (29) и (30), видим, что для обратимого *цикла Карно* выполняется равенство

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1}.$$

### 4.2.3. Энтропия. Второе начало термодинамики. Расчет приращения энтропии

Энтропия – это такая функция состояния термодинамической системы, дифференциал которой

$$\mathrm{d}S = \frac{\delta Q^{\text{обр}}}{T}. \qquad (31)$$

Здесь $\frac{\delta Q^{\text{обр}}}{T}$ – приведенное количество теплоты, где $\delta Q^{\text{обр}}$ – бесконечно малое количество теплоты, сообщаемое телу при температуре $T$. Из формулы (31) следует, что единица измерения энтропии – 1 $\frac{\text{Дж}}{\text{К}}$.

*Второе начало термодинамики*, как *закон возрастания энтропии*:

$$\mathrm{d}S \geq 0.$$

***Энтропия замкнутой термодинамической системы возрастает*** *($dS > 0$)*, ***если в системе идут необратимые процессы, и не изменяется*** *($dS = 0$)* ***при равновесии.*** *Замкнутой* является термодинамическая система, которая не обменивается энергией с окружающей средой, т. е. для нее $A = 0$ и $Q = 0$.

*Энтропия незамкнутой системы* может изменяться любым образом (убывать, возрастать, оставаться постоянной) в соответствии с формулой (31); например, если $Q < 0$, т. е. система отдает теплоту, то и $\Delta S < 0$, что означает уменьшение энтропии системы, но при $Q > 0$ величина $\Delta S > 0$ и энтропия системы возрастает.

Энтропия является *аддитивной величиной*: энтропия системы равна сумме энтропий тел, входящих в систему. Например, энтропия смеси двух газов, а также ее приращение $\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2$, – равно сумме приращений энтропии первого и второго компонентов смеси.

В соответствии с определительной формулой (31) для адиабатного процесса ($\delta Q = 0$) имеем $\mathrm{d}S = 0$, т. е. $S = \text{const}$; следовательно, обратимый адиабатный процесс протекает при постоянной энтропии. Поэтому *адиабатный процесс* называют *изоэнтропийным.*

Расчет приращения энтропии $\Delta S_{1-2}$ при переходе системы из состояния 1 в состояние 2 ведется путем суммирования бесконечно малых приращений $\mathrm{d}S$ с учетом формулы (31):

$$\Delta S_{1-2} = \int_1^2 \mathrm{d}S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q^{\text{обр}}}{T}, \tag{32}$$

где величина $\delta Q$, согласно формуле (21):

$$\delta Q = \frac{m}{M} C_M \mathrm{d}T.$$

*В изобарном процессе* приращение энтропии

$$\Delta S_{1-2} = \frac{m}{M} C_p \int_{T_1}^{T_2} \frac{\mathrm{d}T}{T} = \frac{m}{M} \frac{(i+2)}{i} R \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right). \tag{33}$$

*В изохорном процессе* аналогично:

$$\Delta S_{1-2} = \frac{m}{M} C_V \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right), \text{ где } C_V = \frac{i}{2} R. \tag{34}$$

*В изотермическом процессе*, с учетом первого закона ТД в виде $Q = A$ и формулы для работы, находим

$$\Delta S_{1-2} = \frac{1}{T} \int_1^2 \delta Q = \frac{Q}{T} = \frac{A}{T} = \frac{m}{M} R \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right).$$

*При фазовых переходах*, протекающих при постоянной температуре $T$, в соответствии с формулой (32), получаем

$$\Delta S = \frac{Q}{T}, \tag{35}$$

где $Q$ – теплота фазового перехода. Например, для плавления льда

$$\Delta S_{\text{пл}} = \frac{Q_{\text{пл}}}{T_{\text{пл}}}; \text{ здесь } Q_{\text{пл}} = m\lambda,$$

где λ – удельная (на 1 кг массы) теплота плавления льда.

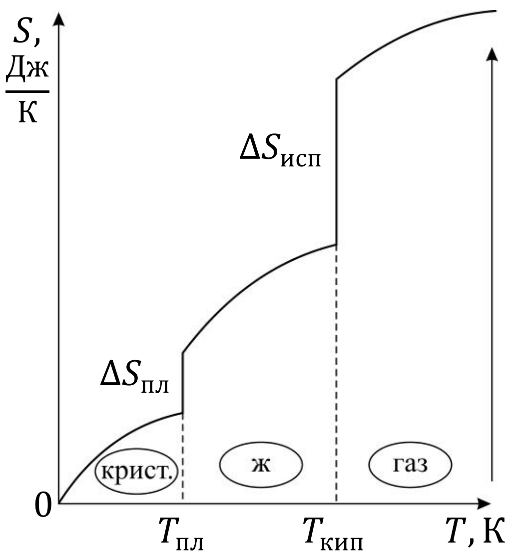


Рис. 19

Результаты расчета по формулам (34) и (35) показаны на графике (рис. 19). График зависимости $S = f(T)$ начинается практически в точке (0;0), так как *третье начало термодинамики* (теорема Нернста–Планка) утверждает, что энтропия всех тел стремится к нулю при приближении температуры $T \to 0$ К. В направлении, показанном стрелкой (справа от графика $S = f(T)$), по мере возрастания температуры происходит увеличение энтропии вещества. При этом увеличивается объем системы и с увеличением температуры возрастает скорость движения молекул. Следовательно, растет хаотичность («беспорядок») как в расположении молекул в объеме вещества, так и в движении молекул.

## 5. РЕКОМЕНДАЦИИ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПО РАЗДЕЛУ «МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА»

1. Текст задачи следует внимательно прочитать, чтобы выяснить, какое физическое явление или процесс рассматривается в задаче. Полезно сделать схематический рисунок или график процесса.

2. Ознакомьтесь с основными формулами для данного явления. Выпишите законы и формулы, которые можно использовать при решении данной задачи.

3. Запишите краткое условие задачи, выбирая для обозначения заданных и искомых величин символы, которые использованы в формулах.

4. Задачу следует решать, как правило, в общем виде, чтобы получить расчетную формулу определяемой величины.

5. Вычисление определяемой величины начинайте с подстановки в расчетную формулу значений величин. При этом полезно записывать и единицы измерения физических величин, чтобы убедиться, что все величины взяты в единицах СИ. Если определяемых величин несколько, то вывод расчетной формулы для следующей начинайте, *закончив вычисление предыдущей определяемой величины.*

6. Полезно выполнять проверку расчетной формулы на совпадение единиц измерения левой и правой части равенства. Несовпадение единиц указывает на ошибку в расчетной формуле.

7. Вычисления и запись результата делайте с точностью до двух или трех (не более) значащих цифр. Незначащие нули записывайте в виде сомножителя $10^{\pm n}$ . При этом, если показатель степени $n$ соответствует приставке, то используйте её: например, $p = 150\ 000$ Па $= 1{,}5 \cdot 10^5$ Па $=$ $150$ кПа; $\eta = 0{,}0000175\ \frac{\text{кг}}{\text{м·с}} = 1{,}75 \cdot 10^{-5}\ \frac{\text{кг}}{\text{м·с}}$. Помните, что точность результата вычислений не может быть выше, чем точность исходных данных.

## 6. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

### 6.1. Молекулярная физика

### Методика решения задач

1. Выписываем заданные в условии задачи величины, не забывая при этом вычислять термодинамическую температуру $T = \left(273 + t,\ ^\circ\text{C}\right)$ К, а давление газа выражаем в паскалях ($1$ Па $= 1\ \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$): 1 мм рт. ст.=133 Па; 1 атм=1,013$\cdot\ 10^5$ Па.

2. Если в расчетной формуле определяемая величина выражается через независимые характеристики молекул и параметры газа (например, при расчете теплопроводности, вязкости и коэффициента диффузии газов), то желательно вычислить отдельно характеристики молекул, чтобы конечная формула была не слишком громоздкой. К тому же при таких промежуточных расчетах можно проконтролировать правильность вычисляемых величин (см. п. 3).

3. Для проверки правильности вычисляемых величин сравните их по порядку величины со следующими значениями: при температуре $T =$

300 К средняя скорость молекул воздуха ($O_2$ и $N_2$) имеет порядок $10^2\ \frac{м}{с}$, а для «лёгких» молекул $H_2$ и He – $10^3\ \frac{м}{с}$; с увеличением температуры скорость молекул увеличивается, так как $\langle v\rangle \sim \sqrt{T}$. Средняя энергия одной молекулы при $T = 300$ К – весьма малая величина, ее порядок $10^{-20}$ Дж, а с ростом температуры она увеличивается пропорционально $T$. Средняя длина свободного пробега молекул при давлении газа $p = 100$ кПа имеет порядок $10^{-7}$ м, но при уменьшении давления она возрастает: $\langle l\rangle \sim \frac{1}{p}$ . Число молекул, содержащихся в 1 $м^3$ любого газа (или концентрация молекул) при нормальных условиях: $n_0 \equiv N_L = 2{,}68 \cdot 10^{25}\ м^{-3}$ (число Лошмидта). Плотность воздуха при нормальных условиях $\left(p = 10^5\ Па,\ T = 273\ К\right)$ $\rho = 1{,}29\ \frac{кг}{м^3}$, но она изменяется пропорционально давлению газа и обратно пропорционально его температуре. Вязкость воздуха при нормальных условиях по порядку величины $\eta \approx 10^{-5}$ Па · с.

***Задача 19.*** В сосуде находится смесь азота массой $m_1 = 14$ г и гелия массой $m_2 = 8$ г при температуре 27 ℃ и давлении $p = 2 \cdot 10^6$ Па. Определите: 1) количество молей смеси ν, 2) молярную массу смеси газов $M$, 3) объем сосуда $V$, 4) концентрацию молекул каждого газа $n_1$ и $n_2$, 5) среднюю энергию молекулы каждого компонента смеси $\langle \varepsilon_1\rangle$ и $\langle \varepsilon_2\rangle$, 6) скорости молекул каждого газа: а) наиболее вероятную $v_в$, б) среднюю квадратичную $\langle v_{кв}\rangle$, в) среднюю арифметическую скорость $\langle v\rangle$.

***Решение***

Газ при этих параметрах можно считать идеальным и использовать все законы и формулы молекулярно-кинетической теории идеального газа.

1) Количество газа ν (число молей смеси), как и масса, является *аддитивной величиной*,– равной сумме числа молей компонентов смеси:

$$\nu = \nu_1 + \nu_2,$$

здесь $\nu_i = \frac{m_i}{M_i}$, где $m_i$ и $M_i$ – соответственно, масса и молярная масса $i$-го компонента смеси.

Вычисляем: $\nu = \frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2} = \frac{14\cdot 10^{-3}\ кг}{28\cdot 10^{-3}\ \frac{кг}{моль}} + \frac{8\cdot 10^{-3}\ кг}{4\cdot 10^{-3}\ \frac{кг}{моль}} = 2{,}5$ моль.

2) Найдем молярную массу $M$ газовой смеси из формулы для числа молей смеси:

$$\nu = \frac{m_{см}}{M} = \frac{m_1 + m_2}{M} \quad \rightarrow \quad M = \frac{m_1 + m_2}{\nu}.$$

Вычисляем молярную массу газовой смеси:

$$M = \frac{(14+8)\cdot 10^{-3}\ кг}{2{,}5\ моль} = 8{,}8 \cdot 10^{-3}\ \frac{кг}{моль}.$$

***Дано***

$N_2$: $m_1 = 14 \cdot 10^{-3}$ кг;
$M_1 = 28 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$;
He: $m_2 = 8 \cdot 10^{-3}$ кг;
$M_2 = 4 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$;
$T = 273 + 27\ ℃ = 300$ К;
$p = 2 \cdot 10^6$ Па.

1) $\nu - ?$ 2) $M - ?$ 3) $V - ?$
4) $n_1 - ?$ $n_2 - ?$
5) $\langle\varepsilon_1\rangle - ?$ $\langle\varepsilon_2\rangle - ?$
6) $v_{\text{в}1} - ?$ $v_{\text{в}2} - ?$
$\langle v_{\text{кв}1}\rangle - ?$ $\langle v_{\text{кв}2}\rangle - ?$
$\langle v_1\rangle - ?$ $\langle v_2\rangle - ?$

3) Объем газа $V$ найдем из уравнения состояния идеального газа:

$$pV = \nu RT; \quad \rightarrow \quad V = \frac{\nu RT}{p}.$$

Вычисляем объем, занимаемый газом:

$$V = \frac{2{,}5\ \text{моль} \cdot 8{,}31\ \frac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}} \cdot 300\ \text{К}}{2 \cdot 10^6\ \text{Па}} = 3{,}12 \cdot 10^{-3}\ \text{м}^3.$$

4) Концентрация $i$-го компонента газа $n_i = \frac{N_i}{V}$; где $N_i$ – число молекул данного компонента, равное $N_i = \nu_i N_A$; здесь $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}\ \frac{1}{\text{моль}}$ – число Авогадро.

Вычисляем концентрации компонентов газовой смеси:

$$n_1 = \frac{\nu_1 N_A}{V} = \frac{0{,}5\ \text{моль} \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23}\ \text{моль}^{-1}}{3{,}12 \cdot 10^{-3}\ \text{м}^3} = 0{,}96 \cdot 10^{26}\ \frac{1}{\text{м}^3};$$

$$n_2 = \frac{\nu_1 N_A}{V} = \frac{2\ \text{моль} \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23}\ \text{моль}^{-1}}{3{,}12 \cdot 10^{-3}\ \text{м}^3} = 3{,}8 \cdot 10^{26}\ \frac{1}{\text{м}^3}.$$

5) Средняя энергия молекулы $\langle\varepsilon\rangle = \frac{i}{2}kT$, где $i$ – число степеней свободы молекулы газа; для двухатомной молекулы азота $i_1 = 5$, а для одноатомной молекулы гелия $i_2 = 3$; $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$ – постоянная Больцмана. Вычисляем среднюю энергию молекул

азота: $\langle\varepsilon_1\rangle = \frac{5}{2} \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \frac{\text{Дж}}{\text{К}} \cdot 300\ \text{К} = 1{,}0 \cdot 10^{-20}$ Дж;

гелия: $\langle\varepsilon_2\rangle = \frac{3}{2} \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \frac{\text{Дж}}{\text{К}} \cdot 300\ \text{К} = 0{,}62 \cdot 10^{-20}$ Дж.

6) Рассчитываем скорости молекул компонентов газа – азота и гелия.

а) Наиболее вероятная скорость $v_{\text{в}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}$;

для молекулы азота $v_{\text{в}1} = \sqrt{\frac{2 \cdot 8{,}31\ \frac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}} \cdot 300\ \text{К}}{28 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}}}} = 422\ \frac{\text{м}}{\text{с}} = 4{,}2 \cdot 10^2\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$;

для молекулы гелия $v_{\text{в}2} = \sqrt{\frac{2 \cdot 8{,}31\ \frac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}} \cdot 300\ \text{К}}{4 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}}}} = 1116\ \frac{\text{м}}{\text{с}} = 1{,}1 \cdot 10^3\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Видим, что молекулы с малой массой имеют большую скорость – при одинаковой температуре газа.

б) Средняя квадратичная скорость молекулы $\langle v_{\text{кв}}\rangle = 1{,}22\ v_{\text{в}}$:

для азота $\langle v_{кв1}\rangle = 1{,}22 \cdot 4{,}2 \cdot 10^2\ \frac{м}{с} = 5{,}5 \cdot 10^2\,\frac{м}{с}$;

для гелия $\langle v_{кв2}\rangle = 1{,}22 \cdot 1{,}1 \cdot 10^3\ \frac{м}{с} = 1{,}34 \cdot 10^3\,\frac{м}{с}$.

в) Средняя арифметическая скорость молекулы $\langle v\rangle = 1{,}13 v_в$:

для азота $\langle v_1\rangle = 1{,}13 \cdot 4{,}2 \cdot 10^2\ \frac{м}{с} = 4{,}7 \cdot 10^2\,\frac{м}{с}$ ;

для гелия $\langle v_2\rangle = 1{,}13 \cdot 1{,}1 \cdot 10^3\ \frac{м}{с} = 1{,}24 \cdot 10^3\,\frac{м}{с}$.

***Задача 20.*** Термос высотой $h = 30$ см состоит из двух цилиндров, разделенных слоем воздуха. Радиус внешнего цилиндра $r_2 = 12{,}0$ см, радиус внутреннего – $r_1 = 11{,}0$ см. Давление воздуха между стенками термоса $p = 10^{-3}$ мм рт. ст.; молярная масса $M = 29\ \frac{г}{моль}$. Термос наполнен чаем, температура которого $t_1 = 90$ °C. Температура наружного воздуха $t_2 = 27$ °C. Какое количество теплоты переносится путем теплопроводности через боковую поверхность термоса за время $\Delta t =$ 1 мин? Эффективный диаметр молекул воздуха $d = 3 \cdot 10^{-10}$ м.

***Дано***

Воздух: $M = 29 \cdot 10^{-3}\ \frac{кг}{моль}$;

$r_2 = 12{,}0$ см;

$r_1 = 11{,}0$ см;

$h = 0{,}30$ м;

$T_1 = 273 + 90$ °C $= 363$ К;

$T_2 = 273 + 27$ °C $= 300$ К;

$p = 133 \cdot 10^{-3}$ Па $= 0{,}133$ Па;

$\Delta t = 1$ мин $= 60$ с;

$d = 3 \cdot 10^{-10}$ м.

$Q - ?$

***Решение***

Согласно уравнению Фурье для теплопроводности поток тепла

$$\frac{Q}{\Delta t} = -K\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}S, \qquad (1)$$

где ось $x$ направлена вдоль переноса энергии, т. е. по радиальному направлению.

Будем рассматривать перенос через боковую поверхность цилиндра, имеющего средний радиус $r = \frac{r_1+r_2}{2}$. Площадь этой боковой поверхности

$$S = 2\pi r h = \pi(r_1 + r_2)h. \qquad (2)$$

Градиент температуры

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} \approx \frac{\Delta T}{\Delta r} = \frac{T_2-T_1}{r_2-r_1}. \qquad (3)$$

Согласно МКТ, теплопроводность идеального газа определяется формулой

$$K = \frac{1}{3}\langle v\rangle\langle l\rangle\rho C_V. \qquad (4)$$

В этой формуле величины $\langle v\rangle, \langle l\rangle$, ρ зависят от температуры газа, которая изменяется от $T_1$ до $T_2$, поэтому найдем среднюю температуру газа $T = \frac{T_1+T_2}{2} = 332$ К, для которой будем вычислять указанные параметры. В уравнении (4) скорости молекул $O_2$ и $N_2$ близки по величине, так как молярные массы этих компонентов воздуха различаются несущественно; поэтому, используя величину молярной массы $M$ для воздуха, находим усредненную скорость молекул по формуле

$$\langle v\rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}.$$

Так как в уравнение (4) входит несколько независимых величин, вычислим их по отдельности. Средняя арифметическая скорость молекул воздуха

$$\langle v\rangle = \sqrt{\frac{8\cdot 8{,}31\ \frac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}}\cdot 332\ \text{К}}{3{,}14\cdot 29\cdot 10^{-3}\frac{\text{кг}}{\text{моль}}}} = 4{,}9\cdot 10^2\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Средняя длина свободного пробега молекул $\langle l\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\pi d^2 n}$ . Выразим концентрацию молекул $n$ через давление газа, используя уравнение состояния идеального газа: $p = nkT$. Тогда формула для длины свободного пробега принимает следующий вид:

$$\langle l\rangle = \frac{kT}{\sqrt{2}}\frac{1}{\pi d^2 p}.$$

Вычисляем: $\langle l\rangle = \frac{1{,}38\cdot 10^{-23}\ \frac{\text{Дж}}{\text{К}}\cdot 332\ \text{К}}{1{,}4\cdot 3{,}14\cdot 9\cdot 10^{-20}\ \text{м}^2\cdot 0{,}133\ \text{Па}} = 0{,}086\ \text{м} = 8{,}6\ \text{см}.$

Сравним эту величину $\langle l\rangle$ с расстоянием $(r_2 - r_1) = 1$ см, которое пролетают молекулы в радиальном направлении от цилиндрической стенки радиусом $r_1$ к стенке радиусом $r_2$. Видим, что величина $\langle l\rangle > (r_2 - r_1)$. Такое состояние газа является высоким вакуумом для данного сосуда: в нем молекулы будут пролетать практически без соударений друг с другом от стенки внутреннего цилиндра к внешнему цилиндру. Следовательно, длина свободного пробега молекул

$$\langle l\rangle = r_2 - r_1 = 1\ \text{см} = 1\cdot 10^{-2}\ \text{м}.$$

Плотность воздуха найдем, выражая ее из уравнения состояния идеального газа:

$$pV = \frac{m}{M}RT; \quad \rightarrow \quad \rho = \frac{m}{V} = \frac{pM}{RT}.$$

Вычисляем плотность воздуха: $\rho = \frac{0{,}133\ \text{Па}\cdot 29\cdot 10^{-3}\ \frac{\text{кг}}{\text{моль}}}{8{,}31\ \frac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}}\cdot 332\ \text{К}} = 1{,}4\cdot 10^{-6}\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$

Заметим, что так как заданное в условии задачи давление воздуха $p = 0{,}133$ Па $\approx \frac{10^5}{10^6}$ Па, т. е. в $10^6$ раз меньше, чем при нормальных условиях, то и плотность воздуха должна быть в $\sim 10^6$ раз меньше, чем $\rho = 1{,}29\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$. Следовательно, величина плотности воздуха, находящегося между стенками термоса, определена верно.

Удельная теплоемкость воздуха при постоянном объеме

$$c_V = \frac{iR}{2M}.$$

Так как молекулы воздуха $O_2$ и $N_2$ – двухатомные, то число степеней свободы этих молекул $i = 5$. Вычисляем

$$c_V = \frac{5 \cdot 8{,}31\ \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}}{2 \cdot 29 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{кг}}{\text{моль}}} = 0{,}72 \cdot 10^3\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}.$$

Вычислим теплопроводность воздуха по формуле (4), подставляя найденные значения величин:

$$K = \frac{1}{3} 4{,}9 \cdot 10^2\ \frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot 10^{-2}\ \text{м} \cdot 1{,}4 \cdot 10^{-6}\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot 0{,}72 \cdot 10^3\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}} = 1{,}6 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}.$$

Сравнивая полученную величину $K$ с теплопроводностью воздуха при нормальных условиях, равной $2{,}4 \cdot 10^{-2}\ \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$, видим, что теплопроводность воздуха в условиях вакуума на порядок (т. е. примерно в 10 раз) меньше. Следовательно, и поток тепла, переносимый через вакуумный слой воздуха, будет в ~10 раз меньше, чем при атмосферном давлении.

Запишем расчетную формулу для количества переносимой теплоты $Q$, выражая ее из уравнения (1) с учетом формул (2) и (3):

$$Q = -K \frac{(T_2 - T_1)}{(r_2 - r_1)} \pi (r_1 + r_2) h \Delta t.$$

Вычисляем определяемую величину $Q$:

$$Q = 1{,}6 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}} \cdot \frac{(363 - 300)\ \text{К} \cdot 3{,}14 (11 + 12) 10^{-2}\ \text{м} \cdot 0{,}3\ \text{м} \cdot 60\ \text{с}}{(12 - 11) \cdot 10^{-2}\ \text{м}} = 1{,}3 \cdot 10^2\ \text{Дж}.$$

***Задача 21.*** Для некоторого состояния водорода измерены величины коэффициента диффузии $D$ и вязкости газа $\eta$: $D = 1{,}2 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{м}^2}{\text{с}}$; $\eta = 8{,}0\ \text{мкПа} \cdot \text{с}$. Найдите для этого состояния газа его плотность $\rho$, концентрацию молекул $n$, среднюю длину свободного пробега молекул $\langle l \rangle$ и их среднюю арифметическую скорость $\langle v \rangle$.

***Решение***

Запишем формулы МКТ для коэффициентов переноса: коэффициент диффузии

$$D = \frac{1}{3} \langle v \rangle \langle l \rangle; \tag{1}$$

вязкость газа

$$\eta = \frac{1}{3} \langle v \rangle \langle l \rangle \rho. \tag{2}$$

| ***Дано*** | |
|---|---|
| $H_2$: $M = 2 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$; $d = 2{,}3 \cdot 10^{-10}$ м; $D = 1{,}2 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{м}^2}{\text{с}}$; $\eta = 8{,}0 \cdot 10^{-6}$ Па · с. | |
| 1) $\rho - ?$ $n - ?$ 2) $\langle l \rangle - ?$ 3) $\langle v \rangle - ?$ | |

1) Сравнивая формулы (1) и (2), видим, что

$$\eta = D\rho.$$

Из этого выражения определим плотность газа $\rho$
при данных условиях:

$$\rho = \frac{\eta}{D}.$$

Вычисляем величину плотности водорода:

$$\rho = \frac{8 \cdot 10^{-6}\ \text{Па} \cdot \text{с}}{1{,}2 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{м}^2}{\text{с}}} = 0{,}67 \cdot 10^{-2}\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Концентрация молекул – это их число в единице объема, а плотность – масса этих молекул, находящихся в единице объема. Отсюда следует, что плотность газа $\rho = nm_0$, где $m_0$ – масса одной молекулы; ее найдем, используя массу моля газа и число молекул в одном моле, равное числу Авогадро: $m_0 = \frac{M}{N_A}$. Тогда концентрация молекул

$$n = \frac{\rho}{m_0} = \frac{\rho \cdot N_A}{M}.$$

Вычисляем концентрацию молекул водорода:

$$n = \frac{0{,}67 \cdot 10^{-2}\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}}{2 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{кг}}{\text{моль}}} \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23}\ \frac{1}{\text{моль}} = 2 \cdot 10^{24}\ \frac{1}{\text{м}^3}.$$

2) Длина свободного пробега молекул

$$\langle l \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\pi d^2 n},$$

где $d$ - эффективный диаметр молекулы газа.
Вычисляем длину свободного пробега молекул водорода при данных условиях:

$$\langle l \rangle = \frac{1}{1{,}4 \cdot 3{,}14 \cdot 2{,}3^2 \cdot 10^{-20}\ \text{м}^2 \cdot 2 \cdot 10^{24}\ \frac{1}{\text{м}^3}} = 2{,}1 \cdot 10^{-6}\ \text{м}.$$

3) Скорость молекул газа зависит от его температуры, которая неизвестна в условии задачи. Но по формуле (1) для коэффициента диффузии можно определить среднюю скорость молекул

$$\langle v \rangle = \frac{3D}{\langle l \rangle}.$$

Вычисляем среднюю арифметическую скорость молекул водорода:

$$\langle v \rangle = \frac{3 \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{м}^2}{\text{с}}}{2{,}1 \cdot 10^{-6}\ \text{м}} = 1{,}7 \cdot 10^{3}\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

***Задача 22.*** Пространство между двумя коаксиальными цилиндрами заполнено газом. Радиусы цилиндров $R_1 = 5{,}0$ см и $R_2 = 5{,}2$ см, их высота $h = 25$ см. Внешний цилиндр вращается с частотой $n = 1200\ \frac{\text{об}}{\text{мин}}$. Для того, чтобы внутренний цилиндр оставался неподвижным, к нему приложена касательная сила $F_\tau = 4{,}5$ мН. Определите вязкость газа, находящегося между цилиндрами.

***Дано***

$R_1 = 5{,}0$ см;

$R_2 = 5{,}2$ см;

$h = 0{,}25$ м;

$n = 1200\ \frac{\text{об}}{\text{мин}} = 20\ \frac{\text{об}}{\text{с}}$;

$F_\tau = 4{,}5$ мН $= 4{,}5 \cdot 10^{-3}$ Н.

$\eta$ – ?

***Решение***

При вращении внешнего цилиндра слой воздуха вблизи цилиндра увлекается им и приобретает практически такую же линейную скорость $U$, как и скорость точек цилиндра:

$$U_2 = \omega R_2 = 2\pi n R_2.$$

Благодаря внутреннему трению в газе импульс направленного движения со скоростью $U$ передается соседним слоям газа и через них – внутреннему цилиндру. Для того, чтобы он не вращался, т. е. чтобы его момент импульса был $L_1 = 0$, а его приращение $\mathrm{d}L_1 = 0$, в соответствии с уравнением динамики вращательного движения: $\mathrm{d}L = M\mathrm{d}t$, – необходимо равенство нулю величины $M$ – момента всех сил, приложенных к цилиндру. Следовательно, силу вязкости $F$, действующую на цилиндр со стороны газа, необходимо компенсировать касательной силой $F_\tau$ (рис. 20): $\vec{F_\tau} = -\vec{F}$, – а модули этих сил равны, т. е.

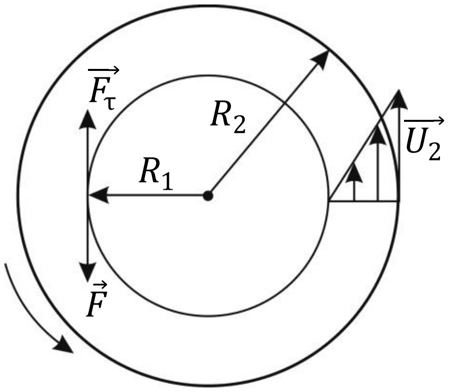


Рис. 20

$$F = F_\tau. \tag{1}$$

Согласно закону Ньютона, сила вязкости

$$F = \eta \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} S, \tag{2}$$

где $\eta$ – вязкость газа; $\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}R}$ – градиент скорости движения слоев газа (ось $x$ направлена вдоль радиуса цилиндров); $S$ – площадь боковой поверхности внутреннего цилиндра, на который действует сила $F$. Учитывая малую величину зазора между цилиндрами, примем, что скорость $U$ изменяется с расстоянием вдоль радиуса цилиндров по линейному закону: от $U_1 = 0$ до $U_2$. Тогда модуль градиента скорости слоев газа

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}R} \approx \frac{\Delta U}{\Delta R} = \frac{U_2 - U_1}{R_2 - R_1} = \frac{U_2}{R_2 - R_1} = \frac{2\pi n R_2}{R_2 - R_1}. \tag{3}$$

Площадь боковой поверхности внутреннего цилиндра

$$S = 2\pi R_1 h. \tag{4}$$

Определяемую величину вязкости газа выразим из уравнения (2):

$$\eta = \frac{F}{S\,\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}}. \tag{5}$$

Подставим в это уравнение величины, согласно формулам (1), (3) и (4). При этом равенство (5) превращается в следующую расчетную формулу:

$$\eta = \frac{F_\tau (R_2 - R_1)}{(2\pi)^2 n R_2 R_1 h}. \quad (6)$$

Вычисляем вязкость газа

$$\eta = \frac{4{,}5 \cdot 10^{-3}\ \text{Н}\ (5{,}2 - 5{,}0) 10^{-2}\ \text{м}}{4 \cdot 3{,}14^2 \cdot 20\ \text{с}^{-1} \cdot 5{,}2 \cdot 10^{-2}\ \text{м} \cdot 5{,}0 \cdot 10^{-2}\ \text{м} \cdot 0{,}25\ \text{м}} = 1{,}8 \cdot 10^{-5}\ \text{Па} \cdot \text{с}.$$

***Задача 23.*** Определите внутреннюю энергию $U$ водорода массой $m = 4$ г, а также среднюю кинетическую энергию $\langle \varepsilon \rangle$ молекулы этого газа при температуре $T = 500$ К.

***Дано***

$H_2 : M = 2 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$;

$m = 4 \cdot 10^{-3}$ кг;

$T = 500$ К.

$U - ?\ \ \langle \varepsilon \rangle - ?$

***Решение***

Внутренняя энергия идеального газа зависит от количества вещества, равного числу молей $\nu = \frac{m}{M}$, от числа степеней свободы молекулы газа $i$ и от его термодинамической температуры $T$, согласно уравнению:

$$U = \frac{m}{M} \frac{i}{2} RT. \quad (1)$$

Для двухатомной молекулы водорода число степеней свободы $i = 5$.

Вычислим значение $U$ по уравнению (1):

$$U = \frac{4 \cdot 10^{-3}\ \text{кг}}{2 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{кг}}{\text{моль}}} \frac{5}{2} \cdot 8{,}31\ \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \cdot 500\ \text{К} = 20775\ \text{Дж} = 20{,}8\ \text{кДж}.$$

Средняя энергия одной молекулы $\langle \varepsilon \rangle$, согласно закону Больцмана о равномерном распределении энергии по степеням свободы молекулы:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{i}{2} kT, \quad (2)$$

где $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$ – постоянная Больцмана.

Вычисляем значение $\langle \varepsilon \rangle$ по формуле (2):

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{5}{2}\ 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \frac{\text{Дж}}{\text{К}}\ 500\ \text{К} = 1{,}7 \cdot 10^{-20}\ \text{Дж}.$$

***Задача 24.*** Определите среднюю квадратичную скорость $\langle v_{\text{кв}} \rangle$ молекулы газа, находящегося в сосуде объемом $V = 5$ л под давлением $p = 200$ кПа. Масса газа $m = 0{,}3$ г.

***Дано***

$V = 5\ \text{л} = 5 \cdot 10^{-3}\ \text{м}^3$;

$p = 200\ \text{кПа} = 2 \cdot 10^5$ Па;

$m = 3 \cdot 10^{-4}$ кг.

$\langle v_{\text{кв}} \rangle - ?$

***Решение***

Средняя квадратичная скорость молекулы, по определению

$$\langle v_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{\langle v^2 \rangle}. \quad (1)$$

Величину среднего значения квадрата скорости находят из формулы среднего значения энергии поступательного движения молекулы:

$$\langle \varepsilon_{пост} \rangle = \frac{m_0 \langle v^2 \rangle}{2}. \qquad (2)$$

С другой стороны, согласно закону о равномерном распределении энергии по степеням свободы молекулы:

$$\langle \varepsilon_{пост} \rangle = \frac{i_{пост}}{2} kT = \frac{3}{2} kT. \qquad (3)$$

Приравнивая величину $\langle \varepsilon_{пост} \rangle$ по формулам (2)

$$\langle v^2 \rangle = \frac{3kT}{m_0} = \frac{3RT}{M}. \qquad (4)$$

Подставляя величину $\langle v^2 \rangle$ из формулы (4) в определительную формулу (1), имеем

$$\langle v_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{3RT}{M}}. \qquad (5)$$

Параметры газа: давление $p$, объем $V$ и термодинамическая температура $T$, – связаны уравнением состояния идеального газа:

$$pV = \frac{m}{M} RT; \quad \rightarrow \quad \frac{RT}{M} = \frac{pV}{m}. \qquad (6)$$

С учетом соотношения параметров газа (6) уравнение (5) преобразуется в расчетную формулу средней квадратичной скорости молекулы газа:

$$\langle v_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{3pV}{m}}.$$

Вычисляем: $\langle v_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{3 \cdot 2 \cdot 10^5 \text{ Па} \cdot 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3}{3 \cdot 10^{-4} \text{ кг}}} = 3{,}2 \cdot 10^3 \ \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

***Задача 25.*** Для азота, находящегося при температуре $T = 200$ К, определите среднюю кинетическую энергию поступательного движения молекулы $\langle \varepsilon_{пост} \rangle$, среднюю энергию ее вращательного движения $\langle \varepsilon_{вращ} \rangle$ и среднее значение полной кинетической энергии молекулы $\langle \varepsilon \rangle$, а также молярную внутреннюю энергию газа $U_M$.

| ***Дано*** | ***Решение*** |
|---|---|
| $N_2$: $T = 200$ К.<br>1) $\langle \varepsilon_{пост} \rangle$ – ?<br>$\langle \varepsilon_{вращ} \rangle$ – ? $\langle \varepsilon \rangle$ – ?<br>2) $U_M$ – ? | 1) Согласно закону Больцмана о равномерном распределении энергии по степеням свободы молекулы, на каждую поступательную и вращательную степень свободы молекулы приходится одинаковая энергия $\langle \varepsilon_1 \rangle = \frac{1}{2} kT$, где $k$ – постоянная Больцмана; $T$ – термодинамическая температура. Следовательно, |

$$\langle \varepsilon_{пост} \rangle = \frac{i_{пост}}{2} kT \quad \text{и} \quad \langle \varepsilon_{вращ} \rangle = \frac{i_{вращ}}{2} kT. \qquad (1)$$

Двухатомная молекула азота имеет $i_{\text{пост}} = 3$ и $i_{\text{вращ}} = 2$, а полное число степеней свободы молекулы азота равно их сумме: $i = i_{\text{пост}} + i_{\text{вращ}} = 5$, так как при $T = 200$ К величина $i_{\text{кол}} = 0$. Тогда среднее значение полной кинетической энергии молекулы

$$\langle\varepsilon\rangle = \frac{i}{2}kT. \qquad (2)$$

Вычисляем средние значения кинетической энергии молекулы азота по формулам (1) и (2):
энергия поступательного движения

$$\langle\varepsilon_{\text{пост}}\rangle = \frac{3}{2}\ 1{,}38\cdot10^{-23}\ \frac{\text{Дж}}{\text{К}}\cdot 200\ \text{К} = 4{,}14\cdot10^{-21}\ \text{Дж};$$

энергия вращательного движения

$$\langle\varepsilon_{\text{вращ}}\rangle = \frac{2}{2}\ 1{,}38\cdot10^{-23}\ \frac{\text{Дж}}{\text{К}}\cdot 200\ \text{К} = 2{,}76\cdot10^{-21}\ \text{Дж};$$

полная кинетическая энергия молекулы, по свойству аддитивности энергии

$$\langle\varepsilon\rangle = \langle\varepsilon_{\text{пост}}\rangle + \langle\varepsilon_{\text{вращ}}\rangle = (4{,}14 + 2{,}76)\cdot10^{-21}\ \text{Дж} = 0{,}690\cdot10^{-20}\ \text{Дж};$$

и по формуле (2): $\langle\varepsilon\rangle = \frac{5}{2}\ 1{,}38\cdot10^{-23}\ \frac{\text{Дж}}{\text{К}}\cdot 200\ \text{К} = 0{,}690\cdot10^{-20}\ \text{Дж}.$

Видим, что результаты обоих расчетов одинаковы.

2) Молярная внутренняя энергия газа – это энергия одного моля вещества. В формуле

$$U = \nu\frac{i}{2}RT,\ \text{полагаем } \nu = 1\ \text{моль; тогда } U_M = \frac{i}{2}RT.$$

Вычисляем: $U_M = \frac{5}{2}\ 8{,}31\ \frac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}}\ 200\ \text{К} = 4\ 155\ \frac{\text{Дж}}{\text{моль}} = 4{,}16\ \frac{\text{кДж}}{\text{моль}}.$

## 6.2. Термодинамика

### Методика решения задач с помощью законов термодинамики

1. При использовании первого закона термодинамики: $Q = \Delta U + A$, – а также при вычислении работы газа $A$ и количества переданной теплоты $Q$ нужно обращать внимание на знаки величин.

Количество теплоты положительно (т. е. $Q > 0$), если система получает энергию в виде теплоты; при этом, согласно определительной формуле $\delta Q = \nu C_M \mathrm{d}T$, величина приращения температуры $\mathrm{d}T > 0$, т. е. температура газа увеличивается.

Аналогично определяется знак приращения внутренней энергии $\Delta U = \nu\frac{i}{2}R(T_2 - T_1)$; из этой формулы следует, что $\Delta U > 0$, если $T_2 > T_1$, т. е. приращение внутренней энергии положительно (величина $U$ возрастает), если при переходе газа из 1-го состояния во 2-е увеличивается температура газа. И наоборот, если $T_2 < T_1$, т. е. температура газа понижается, то величина $\Delta U < 0$, так как внутренняя энергия газа уменьшается.

Знак работы следует из определительной формулы для элементарной работы газа $\delta A = p\mathrm{d}V$; так как давление газа $p > 0$, то знак работы $\delta A$ совпадает со знаком приращения объема. Величина $\delta A > 0$, если $\mathrm{d}V > 0$ (объем газа увеличивается в ходе процесса), т. е. работа газа $A$ *положительна при расширении газа***.** И наоборот, при $\mathrm{d}V < 0$ (объем уменьшается) работа $\delta A < 0$, т. е. *при сжатии работа газа отрицательна;* в этом случае внешние силы совершают положительную работу.

2. Полезно, а в ряде задач и необходимо изображать график процесса в координатах $p - V$, контролируя изменение параметров газа с помощью уравнения состояния идеального газа

$$pV = \nu RT, \text{ или } \frac{pV}{T} = \text{const}.$$

Из последнего уравнения объединенного газового закона легко получить газовые законы для изопроцессов:

1) *изотермический* процесс ($T$ =const): $pV = \text{const}$, или $p_1V_1 = p_2V_2$;

2) *изобарический* процесс ($p$ =const): $\frac{V}{T} = \text{const}$, или $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$;

3) *изохорический* процесс ($V$ =const): $\frac{p}{T} = \text{const}$, или $\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$ .

Графики этих процессов показаны на рис. 21, 22 и 23.

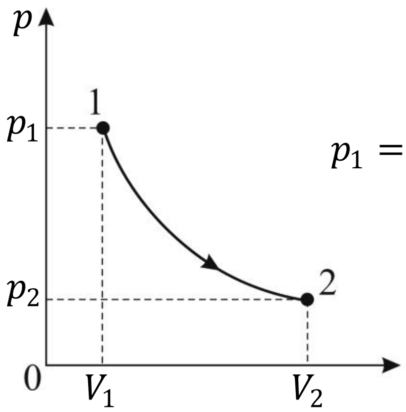



Рис. 21. График изотермы: (1–2) – расширение газа

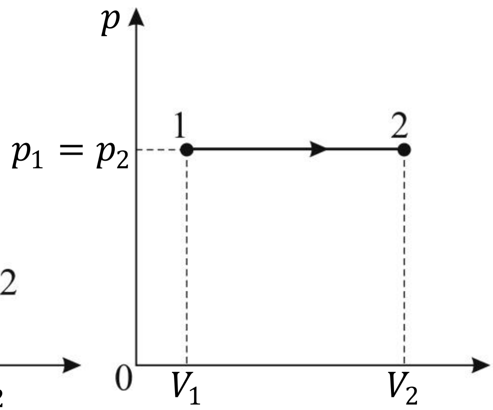



Рис. 22. График изобары: расширение газа при нагреве

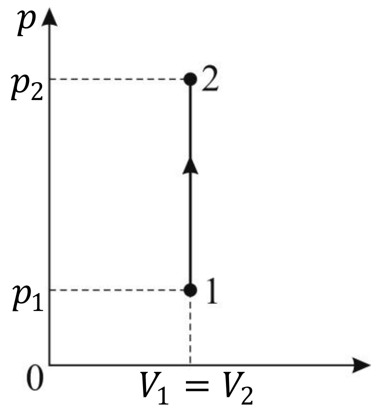



Рис. 23. График изохоры: (1–2) – нагрев газа

4) уравнение *адиабатного процесса* ($Q = 0$):

$$pV^{\gamma} = \text{const}, \text{или } pV_1^{\gamma} = p_2V_2^{\gamma}.$$

Так как показатель адиабаты $\gamma > 1$, то кривая адиабатного процесса идет круче, чем изотерма (рис. 24), в уравнении которой показатель степени параметра $V$ равен единице. При расширении газа из начального состояния

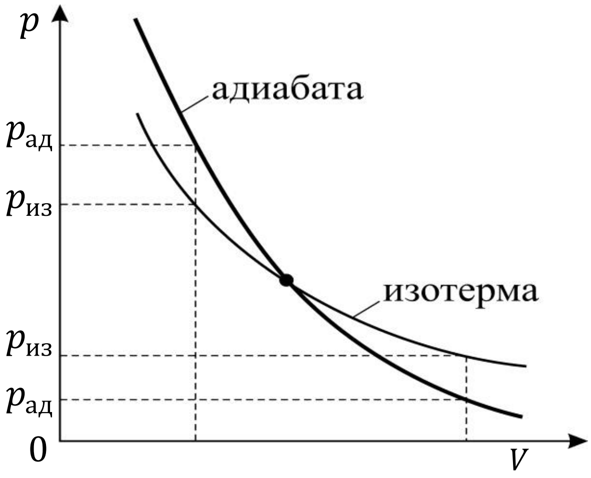


Рис. 24. Графики изотермического и адиабатного процесса

1 адиабата идет ниже изотермы и при одинаковом объеме $V$ давление газа $p_{ад} < p_{из}$; тогда, в соответствии с уравнением состояния идеального газа $pV = \nu RT$, его температура $T_{ад} < T_{из}$, т. е. адиабатное расширение газа сопровождается его охлаждением. Аналогично анализируя параметры состояния газа при сжатии, видим, что давление газа $p_{ад} > p_{из}$; соответственно температура газа $T_{ад} > T_{из}$, значит, при адиабатном сжатии газ нагревается.

***Задача 26.*** При изотермическом расширении кислорода массой $m = 0{,}1$ кг при температуре $T = 300$ К его объем увеличился в два раза. Определите 1) совершенную газом работу $A$, 2) изменение внутренней энергии газа $\Delta U$, 3) количество теплоты $Q$, полученное газом.

***Дано***

$O_2$: $M = 32 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$;
$m = 0{,}1$ кг;
$T = 300$ К;
$T = \text{const}$;
$\frac{V_2}{V_1} = 2$.

1) $A - ?$ 2) $\Delta U - ?$
3) $Q - ?$

***Решение***

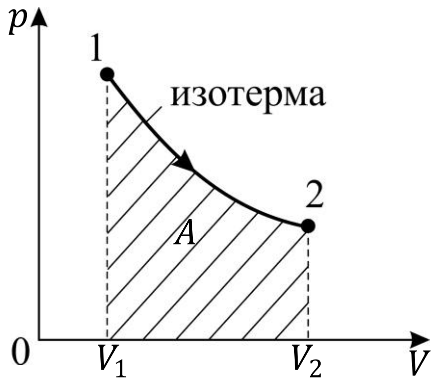


Рис. 25

1) Работа, совершенная газом, вычисляется по следующей формуле:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p\mathrm{d}V. \qquad (1)$$

Из графика процесса (рис. 25) видно, что по мере увеличения объема газа его давление снижается в соответствии с уравнением процесса $pV = \text{const}$. Следовательно, в формуле (1) под знаком интеграла содержатся две переменные: $p$ и $V$. Выразим давление $p$ через объем $V$ из уравнения состояния идеального газа

$$pV = \frac{m}{M} RT; \ \rightarrow \ p = \frac{m}{M}\frac{RT}{V}. \qquad (2)$$

Подставим выражение (2) в формулу (1), вынесем постоянные величины за знак интеграла и проинтегрируем:

$$A = \frac{m}{M}\,RT\int_{V_1}^{V_2}\frac{\mathrm{d}V}{V} = \frac{m}{M}\,RT(\ln V_2 - \ln V_1), \text{ или } A = \frac{m}{M}\,RT\ln\frac{V_2}{V_1}. \qquad (3)$$

Вычислим работу газа по формуле (3):

$$A = \frac{0{,}1\text{ кг}\cdot 8{,}31\,\frac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}}\cdot 300\text{ К}}{32\cdot 10^{-3}\,\frac{\text{кг}}{\text{моль}}}\ln 2 = 5\,400\text{ Дж} = 5{,}4\text{ кДж}.$$

2) Внутренняя энергия газа $U$ зависит от его температуры, а ее приращение

$$\Delta U = \frac{m}{M}\frac{i}{2}R\Delta T, \text{ так как } T_2 = T_1 = \text{const}, \text{ то } \Delta T = 0; \rightarrow \Delta U = 0.$$

3) Количество теплоты, полученной газом в изотермическом процессе, найдем по формуле первого закона термодинамики:

$$Q = \Delta U + A; \text{ с учетом того, что } \Delta U = 0, \text{ имеем } Q = A = 5{,}4\text{ кДж}.$$

***Задача 27.*** Какая доля $\omega_1$ количества теплоты $Q$, подводимого к идеальному газу в изобарном процессе, расходуется на увеличение внутренней энергии газа $\Delta U$ и какая доля $\omega_2$ – на работу $A$ расширения газа? Рассмотрите три случая: 1) газ одноатомный, 2) газ двухатомный, 3) газ трехатомный.

***Дано***

$p = \text{const}$;

$\omega_1 = \frac{\Delta U}{Q}$; $\omega_2 = \frac{A}{Q}$.

1) одноатомный газ: $\omega_1$–? $\omega_2$–?

2) двухатомный газ: $\omega_1$–? $\omega_2$–?

3) трехатомный газ: $\omega_1$–? $\omega_2$–?

***Решение***

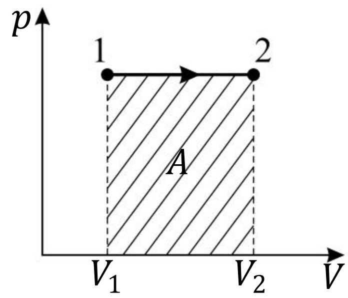



Рис. 26

График изобарного процесса представлен на рис. 26. Количество теплоты $Q$, поглощаемое газом при изобарном нагревании, определяется формулой

$$Q = \frac{m}{M}C_p\Delta T, \qquad (1)$$

где $C_p = \frac{i+2}{2}R$ – молярная теплоемкость газа при постоянном давлении. С учетом формулы для величины $C_p$ уравнение (1) принимает вид:

$$Q = \frac{i+2}{2}\,\frac{m}{M}R\Delta T. \qquad (2)$$

*Найдем долю энергии* $\omega_1$. Приращение внутренней энергии $\Delta U$ определим по формуле

$$\Delta U = \frac{i}{2}\,\frac{m}{M} R\Delta T. \tag{3}$$

Следовательно, доля подводимой энергии, которая идет на увеличение внутренней энергии газа, с учетом формул (2) и (3), после сокращения в отношении сомножителя $\left(\frac{m}{M} R\Delta T\right)$ представится формулой:

$$\omega_1 = \frac{\Delta U}{Q} = \frac{i}{i+2}. \tag{4}$$

*Найдем долю энергии* $\omega_2$. Работа, совершаемая газом при изобарном расширении, определяется следующим образом:

$$A = \int_1^2 p\mathrm{d}V = p\int_{V_1}^{V_2} \mathrm{d}V = p(V_2 - V_1) = p\Delta V. \tag{5}$$

В соответствии с полученной формулой (5) величина работы $A$ равна площади прямоугольника на графике процесса (см. рис. 24). Используем уравнение состояния идеального газа для состояний 1 и 2 в изобарном процессе:

$$pV_1 = \frac{m}{M} RT_1; \quad \text{и} \quad pV_2 = \frac{m}{M} RT_2.$$

Вычитая из второго уравнения первое, получаем связь приращений параметров газа в следующем виде:

$$p\Delta V = \frac{m}{M} R\Delta T. \tag{6}$$

С учетом выражения (6) формулу работы (5) запишем так:

$$A = \frac{m}{M} R\Delta T. \tag{7}$$

Рассчитаем долю энергии, которая расходуется на работу, используя формулы (2) и (7):

$$\omega_1 = \frac{A}{Q} = \frac{\frac{m}{M} R\Delta T}{\frac{m}{M}\frac{(i+2)}{2} R\Delta T} = \frac{2}{i+2}. \tag{8}$$

Привлекая первый закон термодинамики $Q = \Delta U + A$, найдем

$$\omega_1 + \omega_2 = \frac{\Delta U}{Q} + \frac{A}{Q} = \frac{\Delta U + A}{Q} = \frac{Q}{Q} = 1,$$

и проверим полученные формулы (4) и (8):

$$\omega_1 + \omega_2 = \frac{i}{i+2} + \frac{2}{i+2} = 1.$$

Следовательно, полученные расчетные формулы (4) и (8) верны.

Вычисляем по этим формулам значения $\omega_1$ и $\omega_2$:

1) одноатомный газ: число степеней свободы молекулы $i = 3$,

$$\omega_1 = \frac{3}{3+2} = 0{,}6; \quad \omega_2 = 1 - \omega_1 = 0{,}4;$$

2) двухатомный газ: $i = 5$,

$$\omega_1 = \frac{5}{5+2} = 0{,}71; \quad \omega_2 = 0{,}29;$$

3) трехатомный газ: $i = 6$,

$$\omega_1 = \frac{6}{6+2} = 0{,}75; \quad \omega_2 = 0{,}25.$$

***Задача 28.*** В сосуде под поршнем находится водород массой $m = 1$ г. Какое количество теплоты требуется для нагрева этого газа на $\Delta T = 10$ К? На какую высоту при этом поднимется поршень? Масса поршня $m_п = 1$ кг, его площадь $S = 10$ см$^2$. Воздух снаружи находится под давлением $p_0 = 100$ кПа.

***Дано***

$H_2$: $M = 2 \cdot 10^{-3}\ \frac{кг}{моль}$;

$m = 1 \cdot 10^{-3}$ кг;

$\Delta T = 10$ К;

$m_п = 1$ кг;

$S = 10\ см^2 = 10^{-3}\ м^2$;

$p_0 = 100 кПа = 10^5$ Па.

1) $Q - ?$ 2) $h - ?$

***Решение***

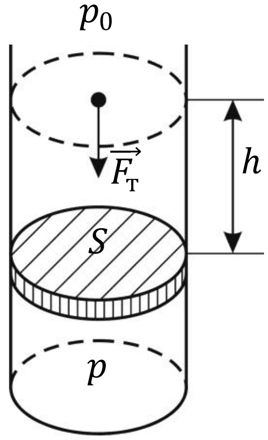


Рис. 27

Так как поршень над газом находится в состоянии покоя, то сила давления $F$ на поршень со стороны водорода (рис. 27) уравновешивается двумя силами – силой давления $F_0$ внешнего газа на поршень и силой тяжести поршня $F_т$:

$$F = F_0 + F_т, \text{ или } pS = p_0 S + mg.$$

Следовательно, давление водорода в цилиндре под поршнем

$$p = p_0 + \frac{mg}{S}.$$

При нагревании газа это равенство выполняется, так как нагрев в условиях свободного расширения газа происходит изобарно при давлении водорода

$$p = p_0 + \frac{mg}{S} = \text{const}. \qquad (1)$$

1) В изобарном процессе количество подведенной для нагрева газа теплоты определяется следующей формулой:

$$Q = \frac{m}{M} C_p \Delta T = \frac{m}{M} \frac{(i+2)}{2} R \Delta T. \qquad (2)$$

В этой формуле число степеней свободы двухатомной молекулы водорода $i = 5$. Вычисляем

$$Q = \frac{1 \cdot 10^{-3}\ кг}{2 \cdot 10^{-3}\ \frac{кг}{моль}} \cdot \frac{(5+2)}{2}\ 8{,}31\ \frac{Дж}{моль \cdot К} \cdot 10\ К = 145\ Дж = 1{,}4 \cdot 10^2\ Дж.$$

2) Найдем перемещение поршня $h$. Высота, на которую поднимется поршень, определяется приращением объема газа

$$\Delta V = Sh. \qquad (3)$$

Приращение объема газа $\Delta V = (V_2 - V_1)$ определим, записывая уравнение состояния идеального газа для двух состояний водорода – 1 и 2:

$$pV_1 = \frac{m}{M} RT_1; \quad \text{и} \quad pV_2 = \frac{m}{M} RT_2.$$

Вычитая из второго уравнения первое, получаем, что

$$p(V_2 - V_1) = \frac{m}{M} R(T_2 - T_1), \quad \text{или} \quad p\Delta V = \frac{m}{M} R\Delta T. \qquad (4)$$

Из уравнения (4) выразим величину приращения объема газа $\Delta V$:

$$\Delta V = \frac{m}{M} \frac{R\Delta T}{p}. \qquad (5)$$

Приравнивая значения $\Delta V$ по формулам (3) и (5) и учитывая выражение (1) для давления водорода, получим расчетную формулу определяемой величины $h$ в виде

$$h = \frac{m}{M} \frac{R\Delta T}{(p_0 S + mg)}. \qquad (6)$$

Вычислим перемещение поршня при нагреве газа по формуле (6):

$$h = \frac{1 \cdot 10^{-3}\ \text{кг}}{2 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{кг}}{\text{моль}}} \frac{8{,}31\ \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \cdot 10\ \text{К}}{\left(10^5\ \text{Па} \cdot 10^{-3}\ \text{м}^2 + 1\ \text{кг} \cdot 9{,}8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}\right)} = 0{,}38\ \text{м} = 38\ \text{см}.$$

***Задача 29.*** При адиабатном сжатии воздуха в цилиндрах двигателя внутреннего сгорания давление возрастает от значения $p_1 = 1 \cdot 10^5$ Па до величины $p_2 = 4 \cdot 10^6$ Па. Начальная температура воздуха $t_1 = 50$ °С. Определите температуру газа $T_2$ в конце сжатия.

***Дано***

$p_1 = 1 \cdot 10^5$ Па;

$p_2 = 4 \cdot 10^6$ Па;

$T_1 = 273 + 50\ °\text{C} = 323$ К.

$T_2 - ?$

***Решение***

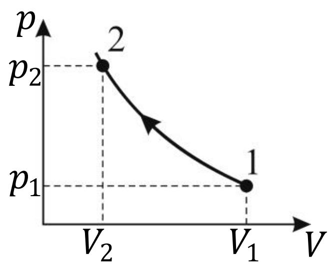



Рис. 28

В адиабатном процессе параметры газа связаны уравнением Пуассона:

$$pV^{\gamma} = \text{const}, \qquad (1)$$

и соответствующая кривая адиабатного сжатия приведена на рис. 28. Уравнение (1) запишем для двух состояний газа: 1 – в начале и 2 – в конце адиабатного сжатия воздуха:

$$p_1 V_1^{\gamma} = p_2 V_2^{\gamma}, \quad \text{или} \quad \frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma}. \qquad (2)$$

Выразим неизвестное отношение объемов через заданные параметры, используя уравнение состояния идеального газа, – оно справедливо для состояния газа в любом равновесном процессе:

$$p_1V_1 = \nu RT_1; \quad \text{и} \quad p_2V_2 = \nu\frac{m}{M}RT_2.$$

Выразим отношение $\frac{V_1}{V_2}$ делением первого уравнения на второе:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2}\,\frac{p_2}{p_1},$$

и подставим в уравнение адиабатного процесса (2):

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\gamma}\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\gamma}, \;\rightarrow\; \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\gamma} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\gamma-1},$$

затем определяем отношение температур

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}, \;\rightarrow\; T_2 = T_1\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}}. \qquad (3)$$

Вычислим показатель степени в уравнении (3). Сначала определим показатель адиабаты $\gamma$, учитывая, что двухатомные молекулы воздуха ($O_2$ и $N_2$) имеют $i = 5$ степеней свободы:

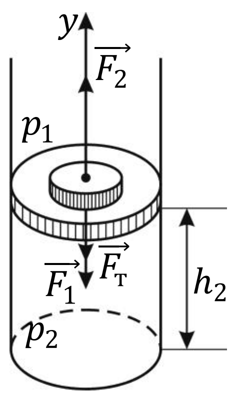
$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{i+2}{i} = \frac{5+2}{5} = 1{,}4.$$

Величина $\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) = 1 - \frac{1}{1{,}4} = 0{,}286.$

Вычисляем температуру воздуха в конце адиабатного сжатия по формуле (3):

$$T_2 = 323\text{ К}\left(\frac{4\cdot10^6\text{ Па}}{1\cdot10^5\text{ Па}}\right)^{0{,}286} = 323\text{ К}\,(40)^{0{,}286} = 928\text{ К} = 0{,}93\cdot10^3\text{ К}.$$

***Задача 30.*** В цилиндрическом сосуде высотой $h_1 = 25$ см и площадью основания $S = 10$ см$^2$ под невесомым поршнем площадью $S$ находится газ при нормальных условиях. Когда на поршень положили груз массой $m = 20$ кг, поршень опустился на $\Delta h = 13{,}4$ см. Считая сжатие газа адиабатным, найдите показатель адиабаты $\gamma$.

| ***Дано*** | ***Решение*** |
|---|---|
| $h_1 = 25$ см;<br>$S = 10$ см$^2 = 10^{-3}$ м$^2$;<br>$p_1 = 1{,}013\cdot10^5$ Па;<br>$T_1 = 273$ К;<br>$m = 20$ кг;<br>$\Delta h = 13{,}4$ см. |  |
| $\gamma - ?$ | Рис. 29 |

Запишем уравнение адиабатного процесса, связывающее параметры газа в начале и в конце сжатия:

$$p_1 V_1^{\gamma} = p_2 V_2^{\gamma}. \qquad (1)$$

График адиабаты приведен в решении предыдущей задачи (см. рис. 28). Представим уравнение (1) в виде, удобном для расчета величины $\gamma$:

$$\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma} = \frac{p_2}{p_1}.$$

Логарифмируя это равенство, получаем следующее выражение:

$$\gamma \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right) = \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right), \text{ откуда } \gamma = \frac{\ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)}{\ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right)}. \qquad (2)$$

Для определения давления $p_2$ запишем условие равновесия поршня в конце адиабатного сжатия газа (рис. 29):

$$\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_т} = 0, \qquad (3)$$

где $F_1 = p_1 S$ – сила давления внешнего газа на поршень (давление $p_1$ снаружи осталось таким же, каким было до помещения груза на поршень); $F_2 = p_2 S$ – сила давления газа, находящегося в сосуде; $F_т = mg$ – сила тяжести груза, помещенного на поршень.

Запишем проекцию уравнения (3) на ось $y$ (см. рис. 29), подставим значения сил и выразим давление $p_2$:

$$-F_1 + F_2 - mg = 0; \quad \rightarrow \quad p_2 = p_1 + \frac{mg}{S}.$$

Разделив последнее равенство на $p_1$, получим отношение давлений в виде:

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{mg}{p_1 S}. \qquad (4)$$

Определим объемы газа в состояниях 1 и 2:

$$V_1 = Sh_1; \; V_2 = Sh_2 = S(h_1 - \Delta h).$$

Запишем величину отношения объемов газа

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{h_1}{h_1 - \Delta h}. \qquad (5)$$

Подставим в формулу (2) значения отношений давлений и объемов газа в состояниях 1 и 2, используя выражения (4) и (5), и получим расчетную формулу величины $\gamma$:

$$\gamma = \frac{\ln\left(1 + \frac{mg}{p_1 S}\right)}{\ln\left(\frac{h_1}{h_1 - \Delta h}\right)}.$$

Вычислим показатель адиабаты газа:

$$\gamma = \frac{\ln\left(1 + \frac{20 \text{ кг} \cdot 9{,}8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}}{1{,}013 \cdot 10^5 \text{ Па} \cdot 10^{-3} \text{ м}^2}\right)}{\ln\left(\frac{25 \text{ см}}{(25 - 13{,}4) \text{ см}}\right)} = \frac{\ln(2{,}935)}{\ln(2{,}155)} = 1{,}40.$$

Полученное значение показателя адиабаты газа, находящегося в сосуде, равно величине $\gamma = 1{,}4 = \frac{14}{10} = \frac{7}{5} = \frac{i+2}{i}$. Следовательно, число степеней свободы молекулы газа $i = 5$ и адиабатный процесс происходил с двухатомным газом.

***Задача 31.*** Идеальная тепловая машина работает по циклу Карно. Температура нагревателя $T_1 = 1000$ К, температура холодильника $T_2 = 250$ К. Определите термический КПД цикла η, работу газа при изотермическом расширении $A_1$ и работу $A$, которую совершает газ за один цикл, если при изотермическом сжатии совершена работа $A_2 = 50$ кДж.

***Дано***

$T_1 = 1000$ К;

$T_2 = 250$ К;

$A_2 = 50$кДж.

1) $\eta - ?$

2) $A_1 - ?$ $A - ?$

***Решение***

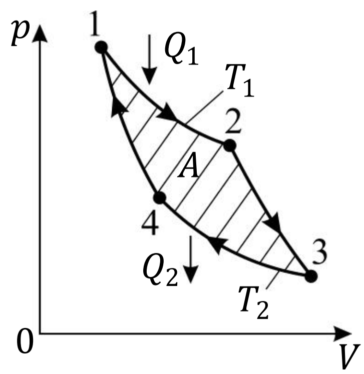



Рис. 30

1) Термический коэффициент полезного действия η идеальной тепловой машины, работающей по циклу Карно, не зависит от природы газа, совершающего работу, и определяется только температурами нагревателя ($T_1$) и холодильника ($T_2$):

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}. \quad (1)$$

Вычислим величину КПД: $\eta = 1 - \frac{250\ \text{К}}{1000\ \text{К}} = 0{,}75$, или $\eta = 75\%$.

2) С другой стороны, термический КПД любой тепловой машины, работающей циклически:

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}, \quad (2)$$

где $Q_1$ – количество теплоты, подведенной за цикл к газу от нагревателя, в данной задаче – при изотермическом расширении 1–2 (рис. 30); $Q_2$ – количество теплоты, отданной газом холодильнику при изотермическом сжатии 3–4.

Соотношение работы газа и количества теплоты в этих процессах соответствует первому закону термодинамики:

$$Q = A + \Delta U, \quad (3)$$

где $\Delta U$ – приращение внутренней энергии газа: $\Delta U = \nu \frac{i}{2} R \Delta T$. Так как в изотермических процессах $T = \text{const}$, то приращение температуры $\Delta T = 0$, следовательно, и $\Delta U = 0$. При этом уравнение (3) для изотермического процесса принимает следующий вид:

$$Q = A. \quad (4)$$

Запишем данную формулу первого закона термодинамики для процессов изотермического расширения 1–2 и изотермического сжатия 3–4 соответственно

$$Q_1 = A_1 \ \text{ и } \ Q_2 = A_2. \qquad (5)$$

Подставим эти величины $Q_1$ и $Q_2$ в формулу (2) для термического КПД:

$$\eta = 1 - \frac{A_2}{A_1}; \quad \rightarrow \quad \frac{A_2}{A_1} = 1 - \eta; \quad \rightarrow \quad A_1 = \frac{A_2}{1-\eta}.$$

Вычислим работу газа при изотермическом расширении:

$$A_1 = \frac{50 \text{ кДж}}{1-0{,}75} = 200 \text{ кДж}.$$

Для определения работы газа за весь цикл есть два способа:

а) с использованием формулы термического КПД:

$$\eta = \frac{A}{Q_1}; \ \rightarrow \ A = \eta Q_1 = \eta A_1 = 0{,}75 \cdot 200 \text{ Дж} = 150 \text{ Дж};$$

б) путем суммирования работы на всех участках цикла:

$$A = A_{1-2} + A_{2-3} + A_{3-4} + A_{4-1}. \qquad (6)$$

В этом равенстве величины работы сжатия $A_{3-4}$ и $A_{4-1}$ отрицательные. Способ «б», несомненно, более длительный, так как требуется показать, что в адиабатных процессах $A_{4-1} = -A_{2-3}$. Это несложно, если учесть, что в адиабатном процессе $Q = 0$, и первый закон термодинамики (3) имеет следующий вид:

$$A_{2-3} = -\Delta U_{2-3} = U_2 - U_2 = \nu \frac{i}{2} R(T_1 - T_2);$$

$$A_{4-1} = -\Delta U_{4-1} = U_4 - U_1 = \nu \frac{i}{2} R(T_2 - T_1).$$

Сравнивая полученные выражения для работы, видим, что $A_{4-1} = -A_{2-3}$. Учтем это равенство в формуле (6) и заменим $A_{1-2} = A_1$ и $A_{3-4} = A_2$:

$$A = A_1 + A_2 + (A_{2-3} - A_{2-3}) = A_1 + A_2 = (200 - 50) \text{ Дж} = 150 \text{ Дж}.$$

***Задача 32.*** Определите приращение энтропии $\Delta S$ при нагреве льда массой $m = 200$ г от температуры $t_1 = -13$ ℃, при плавлении льда, при нагреве полученной воды и превращении ее в пар при $t_2 = 100$ ℃.

***Дано***

$m = 0{,}2$ кг;

$T_1 = (273 - 13 \text{ ℃}) \text{ К} = 260 \text{ К};$

$T_{пл} = 273$ К;

$T_2 = (273 + 100 \text{ ℃}) \text{ К} = 373 \text{ К};$

$T_{кип} = T_2 = 373$ К.

$\Delta S - ?$

***Решение***

Приращение энтропии при переходе вещества из состояния 1 в состояние 2 определяется общей формулой:

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}, \qquad (1)$$

где $\delta Q$ – бесконечно малое количество теплоты, переданной веществу при температуре $T$ в обратимом процессе.

Величину $\delta Q$ можно представить двумя формулами: а) при нагреве (охлаждении) тела на бесконечно малое приращение температуры $dT$:

$$\mathrm{d}Q = mc\mathrm{d}T, \qquad (2)$$

где $c$ – удельная теплоемкость вещества; $m$ – его масса;

б) при фазовом превращении, протекающем при постоянной температуре:

$$\int_0^Q \delta Q = Q = mq, \qquad (3)$$

где $q$ — удельная теплота фазового перехода.

В зависимости от того, как рассчитывается величина $\delta Q$ в подинтегральном выражении в формуле (1), данный интеграл находится как сумма четырех слагаемых:

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3 + \Delta S_4. \qquad (4)$$

Здесь $\Delta S_1$ — увеличение энтропии при нагреве льда до температуры плавления; $\Delta S_2$ – приращение энтропии при плавлении льда; $\Delta S_3$ – увеличение энтропии при нагреве воды; $\Delta S_4$ – увеличение энтропии при превращении воды в пар.

Рассчитаем величины этих слагаемых приращения энтропии.

1) *Нагрев льда:*

$\Delta S_1 = \int_{T_1}^{T_{\text{пл}}} \frac{\mathrm{d}Q}{T}$; по формуле (2): $dQ = mc_{\text{л}}\mathrm{d}T$; $\Delta S_1 = mc_{\text{л}} \int_{T_1}^{T_{\text{пл}}} \frac{\mathrm{d}T}{T} = mc_{\text{л}}\ln\frac{T_{\text{пл}}}{T_1}$,

где $c_{\text{л}} = 2{,}09\ \frac{\text{кДж}}{\text{кг·К}}$ – удельная теплоемкость льда.

Вычисляем: $\Delta S_1 = 0{,}2\ \text{кг} \cdot 2{,}09 \cdot 10^3\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг·К}} \ln\left(\frac{273\ \text{К}}{260\ \text{К}}\right) = 20{,}4\ \frac{\text{Дж}}{\text{К}} = 0{,}020\ \frac{\text{кДж}}{\text{К}}$.

2) *Плавление льда* происходит при постоянной температуре, равной $T_{\text{пл}}$, которую выносим за знак интеграла:

$$\Delta S_2 = \frac{1}{T_{\text{пл}}} \int_0^{Q_{\text{пл}}} \mathrm{d}Q = \frac{Q_{\text{пл}}}{T_{\text{пл}}};\ \text{ по формуле (3): } Q_{\text{пл}} = mr; \quad \rightarrow \quad \Delta S_2 = \frac{mr}{T_{\text{пл}}},$$

где $r = 333\ \frac{\text{кДж}}{\text{кг}}$ – удельная теплота плавления льда.

Вычисляем: $\Delta S_2 = \frac{0{,}2\ \text{кг}\cdot 333\cdot 10^3\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг}}}{273\ \text{К}} = 0{,}244 \cdot 10^3\ \frac{\text{Дж}}{\text{К}} = 0{,}244\ \frac{\text{кДж}}{\text{К}}$.

3) *Нагрев воды:*

$$\Delta S_3 = \int_{T_{\text{пл}}}^{T_2} \frac{\mathrm{d}Q}{T},\ \text{ где }\ \mathrm{d}Q = mc_{\text{в}}\mathrm{d}T.$$

Расчет, аналогичный таковому для $\Delta S_1$, дает формулу

$$\Delta S_3 = mc_{\text{в}}\ln\frac{T_2}{T_{\text{пл}}},$$

где $c_{\text{в}}$ – удельная теплоемкость воды.

Молярная теплоемкость воды $C_M = 75{,}4\ \frac{\text{Дж}}{\text{моль·К}}$, вычислим ее удельную теплоемкость $c_{\text{в}} = \frac{C_M}{M} = \frac{75{,}4\ \frac{\text{Дж}}{\text{моль·К}}}{18\cdot 10^{-3}\ \frac{\text{кг}}{\text{моль}}} = 4{,}2\ \frac{\text{кДж}}{\text{кг·К}}$.

Вычисляем приращение энтропии

$$\Delta S_3 = 0{,}2\ \text{кг} \cdot 4{,}2 \cdot 10^3\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{К}} \ln\left(\frac{373\ \text{К}}{273\ \text{К}}\right) = 0{,}262\ \frac{\text{кДж}}{\text{К}}.$$

4) <u>*Превращение воды в пар,*</u> по условию задачи, происходит при температуре кипения: $T_{\text{кип}}$ при этом постоянна, поэтому расчет аналогичен таковому для $\Delta S_2$. Результат расчета:

$$\Delta S_4 = \frac{m\lambda}{T_{\text{кип}}}.$$

Здесь $\lambda = 2{,}26 \cdot 10^6\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг}}$ – удельная теплота парообразования воды.

Вычисляем приращение энтропии:

$$\Delta S_4 = \frac{0{,}2\ \text{кг}\cdot 2{,}26\cdot 10^6\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг}}}{373\ \text{К}} = 1212\ \frac{\text{Дж}}{\text{К}} = 1{,}21\ \frac{\text{кДж}}{\text{К}}.$$

Согласно выражению (4), суммируем приращения энтропии вещества в четырех последовательных процессах:

$$\Delta S = (0{,}020 + 0{,}244 + 0{,}262 + 1{,}21)\ \frac{\text{кДж}}{\text{К}} = 1{,}74\ \frac{\text{кДж}}{\text{К}}.$$

Сравнивая слагаемые в последнем выражении, отметим, что энтропия вещества существенно возрастает при фазовом переходе из кристаллического в жидкое состояние, но еще более она возрастает при превращении жидкости в пар.

***Задача 33.*** Определите изменение энтропии $\Delta S$ смеси, состоящей из гелия массой $m_1 = 8$ г и азота массой $m_2 = 28$ г, при переходе от объема $V_1 = 50$ л и давления $p_1 = 3 \cdot 10^5$ Па к объему $V_2 = 100$ л и давлению $p_2 = 1{,}5 \cdot 10^5$ Па.

***Дано***

He: $m_1 = 8\ \text{г} = 8 \cdot 10^{-3}$ кг;

$M_1 = 4 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$;

$N_2$: $m_2 = 28\ \text{г} = 28 \cdot 10^{-3}$ кг;

$M_2 = 28 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$;

$V_1 = 50\ \text{л} = 5{,}0 \cdot 10^{-2}\ \text{м}^3$;

$p_1 = 3 \cdot 10^5$ Па;

$V_2 = 100\ \text{л} = 0{,}1\ \text{м}^3$;

$p_2 = 1{,}5 \cdot 10^5$ Па.

$\Delta S - ?$

***Решение***

Приращение энтропии $\Delta S$ при переходе вещества из состояния 1 в состояние 2 определяется формулой

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}, \qquad (1)$$

где $\delta Q$ – бесконечно малое количество теплоты, переданной газу в обратимом процессе при температуре $T$. Величину $\delta Q$ для газа обычно выражают через молярную теплоемкость $C_M$ и бесконечно малое приращение температуры $\mathrm{d}T$:

$$\delta Q = \nu C_M \mathrm{d}T, \qquad (2)$$

где $\nu = \frac{m}{M}$ – число молей вещества.

Молярные теплоемкости идеального газа известны для двух процессов передачи теплоты: изобарного и изохорного – соответственно $C_p$ и $C_V$. Поэтому осуществим переход смеси газов из состояния 1 в состояние 2 изобарным расширением а-б и последующим изохорным охлаждением б-в (рис. 31). При этом определяемое приращение энтропии

$$\Delta S = S_{\text{в}} - S_{\text{а}} = (S_{\text{в}} - S_{\text{б}}) + (S_{\text{б}} - S_{\text{а}}) = \Delta S_{\text{б}-\text{в}} + \Delta S_{\text{а}-\text{б}}\,. \qquad (3)$$

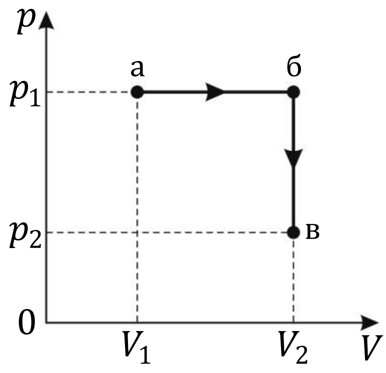



Рис. 31

В этих процессах молярные теплоемкости газа выражаются следующими формулами:

$$C_p = \frac{i+2}{2}R \quad \text{и} \quad C_V = \frac{i}{2}R, \qquad (4)$$

где $i$ – число степеней свободы молекулы газа. Величина $i_1 = 3$ для одноатомной молекулы гелия и $i_2 = 5$ для двухатомной молекулы азота. Соответственно, теплоемкости, а следовательно, и изменение энтропии этих компонентов смеси газов, согласно формулам (1), (2) и (4) вычисляются различно.

Таким образом, необходимо рассматривать данную смесь газов как термодинамическую систему, состоящую из двух частей (подсистем): 1-й – гелия и 2-й – азота. Согласно свойству аддитивности, приращение энтропии этой системы

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2. \qquad (5)$$

1) *В изобарном процессе* а–б вычисляем приращение энтропии $k$-го компонента смеси газов с использованием формул (1), (2) и (4):

$$\Delta S_{\text{а}-\text{б},k} = \int_{\text{а}}^{\text{б}} \frac{\delta Q}{T} = \int_{T_{\text{а}}}^{T_{\text{б}}} \frac{\nu_k C_{p,k}\,\mathrm{d}T}{T} = \nu_k C_{p,k} \int_{T_{\text{а}}}^{T_{\text{б}}} \frac{\mathrm{d}T}{T} = \nu_k \frac{i_k+2}{2} R\ln\left(\frac{T_{\text{б}}}{T_{\text{а}}}\right).$$

Так как, согласно уравнению изобарного процесса $\frac{T_{\text{б}}}{T_{\text{а}}} = \frac{V_{\text{б}}}{V_{\text{а}}} = \frac{V_2}{V_1}$, то

$$\Delta S_{\text{а}-\text{б},k} = \nu_k \frac{i_k+2}{2} R\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right). \qquad (6)$$

2) *В изохорном процессе* б–в таким же образом получаем

$$\Delta S_{\text{б}-\text{в},k} = \int_{\text{б}}^{\text{в}} \frac{\delta Q}{T} = \nu_k \frac{i_k}{2} R\ln\left(\frac{T_{\text{в}}}{T_{\text{б}}}\right) = \nu_k \frac{i_k}{2} R\ln\left(\frac{p_{\text{в},k}}{p_{\text{б},k}}\right), \qquad (7)$$

так как по уравнению изохорного процесса отношение $\frac{T_{\text{в}}}{T_{\text{б}}} = \frac{p_{\text{в},k}}{p_{\text{б},k}}$.

В формуле (7) величины $p_{\text{в},k}$ и $p_{\text{б},k}$ – парциальные давления $k$-го компонента смеси газов. Напомним, что парциальным называется такое давление компонента смеси, которое он оказывал бы, если бы он один занимал весь объем смеси при той же температуре. Запишем уравнение состояния идеального газа для каждого компонента смеси, используя величины парциального давления $p_1$ и $p_2$:

$$p_1 V = \nu_1 RT; \qquad (8)$$

$$p_2 V = \nu_2 RT. \qquad (9)$$

Сложим эти уравнения и учтем закон Дальтона для давления смеси идеальных газов: $p = p_1 + p_2$. При этом получаем

$$(p_1 + p_2)V = pV = (\nu_1 + \nu_2)RT. \qquad (10)$$

Используя уравнения (8) и (10), путем деления первого на второе находим отношение давлений $\frac{p_1}{p} = \frac{\nu_1}{\nu_1 + \nu_2} = C_1$, где $C_1$ – постоянная для данной смеси газов, следовательно, $p_1 = C_1 p$, т. е. парциальное давление каждого компонента смеси пропорционально давлению смеси газов. При этом

$$\frac{p_{\text{в},1}}{p_{\text{б},1}} = \frac{C_1 p_{\text{в}}}{C_1\, p_{\text{б}}} = \frac{p_{\text{в}}}{p_{\text{б}}}, \qquad (11)$$

т. е. *для каждого компонента* смеси отношение парциальных давлений, входящих в формулу (7), равно отношению давлений газовой смеси в состояниях *в* и *б*, так как аналогичное равенству (11) соотношение давлений можно получить и для второго компонента смеси – азота.

С учетом этого уравнение (7) для приращения энтропии $k$-го компонента смеси в изохорном процессе принимает следующий вид:

$$\Delta S_{\text{б}-\text{в},k} = \nu_k \frac{i_k}{2} R\ln\frac{p_{\text{в}}}{p_{\text{б}}} = \nu_k \frac{i_k}{2} R\ln\frac{p_2}{p_1}. \qquad (12)$$

С помощью уравнения (3): $\Delta S = \Delta S_{\text{б}-\text{в}} + \Delta S_{\text{а}-\text{б}}$, – используя равенства (6) и (12), получим расчетные формулы для каждого компонента смеси:

$$\Delta S_1 = \nu_1 \frac{i_1}{2} R\ln\frac{p_2}{p_1} + \nu_1 \frac{(i_1+2)}{2} R\ln\frac{V_2}{V_1} = \frac{\nu_1}{2} R\left(i_1 \ln\frac{p_2}{p_1} + (i_1+2)\ln\frac{V_2}{V_1}\right). \qquad (13)$$

Аналогично

$$\Delta S_2 = \frac{\nu_2}{2} R\left(i_2 \ln\frac{p_2}{p_1} + (i_2+2)\ln\frac{V_2}{V_1}\right). \qquad (14)$$

Здесь $\nu_1 = \frac{m_1}{M_1}$ и $\nu_2 = \frac{m_2}{M_2}$ – количество вещества первого и второго компонентов смеси.

Вычислим эти приращения энтропии компонентов смеси газа:

$$\Delta S_1 = \frac{8\cdot 10^{-3}\ \text{кг}\cdot 8{,}31\ \frac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}}}{4\cdot 10^{-3}\ \frac{\text{кг}}{\text{моль}}}\left(3\ \ln\left(\frac{1{,}5\cdot 10^5\ \text{Па}}{3\cdot 10^5\ \text{Па}}\right) + (3+2)\ \ln\left(\frac{100\ \text{л}}{50\ \text{л}}\right)\right) = 23{,}0\ \frac{\text{Дж}}{\text{К}};$$

$$\Delta S_2 = \frac{28\cdot 10^{-3}\ \text{кг}\cdot 8{,}31\ \frac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}}}{28\cdot 10^{-3}\ \frac{\text{кг}}{\text{моль}}}\left(5\ \ln\left(\frac{1{,}5\cdot 10^5\ \text{Па}}{3\cdot 10^5\ \text{Па}}\right) + (5+2)\ \ln\left(\frac{100\ \text{л}}{50\ \text{л}}\right)\right) = 11{,}5\ \frac{\text{Дж}}{\text{К}}.$$

Используя свойство аддитивности энтропии, найдем приращение энтропии смеси газов по уравнению (5), как сумму приращений энтропии двух частей системы – 1-го и 2-го компонентов смеси:

$$\Delta S = (23{,}0 + 11{,}5)\ \frac{\text{Дж}}{\text{К}} = 34{,}5\ \frac{\text{Дж}}{\text{К}}.$$

***Задача 34.*** Водород массой $m = 8$ г нагревают от $t_1 = 27\ °\text{C}$ до $t_2 = 227\ °\text{C}$: 1) изохорно, 2) изобарно, 3) адиабатно. Определите для этих процессов приращение энтропии $\Delta S$, приращение внутренней энергии $\Delta U$ и работу газа $A$.

***Дано***

$H_2$: $m = 8 \cdot 10^{-3}$ кг;

$M = 2 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$;

$T_1 = (273 + 27\ °\text{C})\ \text{К} = 300\ \text{К}$;

$T_2 = (273 + 227\ °\text{C})\ \text{К} = 500\ \text{К}$;

Нагрев: 1) изохорный,

2) изобарный, 3) адиабатный.

В процессах 1, 2 и 3:

$\Delta S - ?\quad \Delta U - ?\quad A - ?$

***Решение***

Внутренняя энергия идеального газа – *функция состояния*, зависящая от количества газа $\nu = \frac{m}{M}$, структуры молекул (число $i$) и от температуры газа:

$$U = \nu \frac{i}{2} RT.$$

Поэтому ее приращение

$$\Delta U = \nu \frac{i}{2} R\Delta T \qquad (1)$$

одинаково во всех трех процессах, так как в каждом процессе приращение температуры $\Delta T = T_2 - T_1 = 200$ К. Принимая, что число степеней свободы двухатомной молекулы водорода $i = 5$, вычисляем

$$\Delta U = \frac{8\cdot 10^{-3}\ \text{кг}}{2\cdot 10^{-3}\ \frac{\text{кг}}{\text{моль}}} \frac{5}{2} 8{,}31\ \frac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}} \cdot 200\ \text{К} = 1{,}7 \cdot 10^4\ \text{Дж} = 17\ \text{кДж}.$$

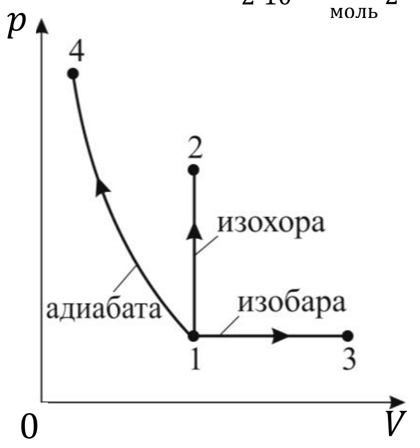



Рис. 32

Из графиков рассматриваемых процессов нагрева газа (рис. 32) видно, что параметры газа давление $p$ и объем $V$ в конечных состояниях 2, 3 и 4 различны во всех трех процессах. Потому энтропия газа, которая так же, как и внутренняя энергия, является функцией состояния, различна: $S_2 \neq S_3 \neq S_4$. Следовательно, и приращение энтропии $\Delta S$ будет различно в этих процессах.

1) *Изохорный нагрев газа* 1–2.

Приращение энтропии данного количества газа

$$\Delta S_{1-2} = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q_V}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{\nu C_V \,\mathrm{d}T}{T} = \nu C_V \ln\frac{T_2}{T_1}. \qquad (2)$$

Вычисляем величину $\Delta S_{1-2}$, полагая, что количество газа $\nu = \frac{m}{M}$, а молярная теплоемкость при постоянном объеме $C_V = \frac{i}{2} R$:

$$\Delta S_{1-2} = \frac{8\cdot 10^{-3}\ \text{кг}}{2\cdot 10^{-3}\ \frac{\text{кг}}{\text{моль}}} \frac{5}{2}\ 8{,}31\ \frac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}}\ \ln\left(\frac{500\ \text{К}}{300\ \text{К}}\right) = 42\ \frac{\text{Дж}}{\text{К}}.$$

Работа в изохорном процессе

$$A = \int_1^2 p\mathrm{d}V = 0, \text{ так как } \mathrm{d}V = 0 \text{ при } V = \mathrm{const}.$$

2) <u>*Изобарный нагрев газа* 1–3.</u>

Приращение энтропии газа

$$\Delta S_{1-3} = S_3 - S_1 = \int_1^3 \frac{\delta Q_p}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{\nu C_p \mathrm{d}T}{T} = \nu C_p \ln\frac{T_2}{T_1}, \qquad (3)$$

где $C_p$ – молярная теплоемкость газа при постоянном давлении:

$$C_p = \frac{i+2}{2}R.$$

Сравнивая выражения (2) и (3), видим, что

$$\frac{\Delta S_{1-3}}{C_p} = \nu\ln\frac{T_2}{T_1} = \frac{\Delta S_{1-2}}{C_V}; \quad \rightarrow \quad \Delta S_{1-3} = \frac{C_p}{C_V}\Delta S_{1-2} = \gamma\Delta S_{1-2}. \qquad (4)$$

где $\gamma = \frac{i+2}{i} = \frac{7}{5}$ – показатель адиабаты.

Вычислим приращение энтропии $\Delta S_{1-3}$ по формуле (4):

$$\Delta S_{1-3} = \frac{7}{5}\ 42\ \frac{\text{Дж}}{\text{К}} = 59\ \frac{\text{Дж}}{\text{К}}.$$

Работа в изобарном процессе

$$A = \int_1^3 p\mathrm{d}V = p(V_3 - V_1) = p\Delta V. \qquad (5)$$

Согласно уравнению состояния идеального газа $pV = \nu RT$, при $p = \mathrm{const}$ имеем $p\Delta V = \nu R\Delta T$. Подставляя эту величину произведения $p\Delta V$ в формулу (5), получаем расчетную формулу работы в изобарном процессе в следующем виде:

$$A = \nu R\Delta T. \qquad (6)$$

Сравнивая формулу работы (6) с формулой (1) для величины $\Delta U$, видим, что $\Delta U = \frac{i}{2}A$; следовательно, работа газа

$$A = \frac{2}{i}\Delta U = \frac{2}{5}\cdot 17\ \text{кДж} = 6{,}8\ \text{кДж}.$$

3) <u>*Адиабатный процесс* 1–4</u> происходит без теплообмена газа с окружающей средой: $Q = 0$ и $\delta Q = 0$. Соответственно получаем, что приращение энтропии

$$\Delta S_{1-4} = \int_1^4 \frac{\delta Q}{T} = 0.$$

Следовательно, *адиабатный процесс* протекает при неизменной энтропии газа: $S_1 = \mathrm{const}$, – это *изоэнтропийный* процесс.

Работу газа найдем из формулы первого закона термодинамики:

$$Q = A + \Delta U,$$

которая при $Q = 0$ дает величину работы $A = -\Delta U$. Согласно этой формуле $A = -17$ кДж; работа отрицательна, так как, в соответствии с графиком процесса (см. рис. 32), происходит *адиабатное сжатие* газа, которое сопровождается его нагревом.

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассматривая способы решения предложенных задач, видим, что большая часть задач по разделу «механика» решается с использованием законов сохранения.

В связи с этим отметим, что применение законов сохранения представляет собой единственный путь решения физических задач в тех случаях, когда неизвестен закон сил. Это относится к силам, возникающим при неупругой деформации тел, силам мышц человека, силе трения при движении человека, силе трения качения и другим.

Наряду с этим, применение законов сохранения эффективно в тех случаях, когда сила или момент силы изменяется при движении. В таких задачах использование законов динамики требует вычисления интегралов, содержащих более одной переменой, и потому является достаточно сложным. В то же время применение законов сохранения дает сравнительно простой и надежный путь решения.

Следует заметить, что динамические функции механической системы: импульс, момент импульса, механическая энергия, – сохраняются при выполнении определенных условий (замкнутость системы тел, консервативность сил взаимодействия и других). Поэтому выбору того или иного закона сохранения, например, при вращательном движении – ЗСМИ или ЗСМЭ, должен предшествовать анализ сил взаимодействия между телами механической системы и внешних сил.

При рассмотрении термодинамической системы, вычисляя теплоту, переданную газу, и совершенную им работу, в ряде задач использовали первое начало термодинамики – закон сохранения энергии в тепловых процессах.

Отметим, что, как показывают расчеты, выполненные в задачах, величины работы и теплоты различны в разных процессах, т. е. они действительно являются характеристиками процессов, в отличие от функций состояния системы – внутренней энергии и энтропии. Приращения этих величин зависят только от параметров начального и конечного состояния термодинамической системы.

Уравнение состояния идеального газа: уравнение Клапейрона–Менделеева, – является необходимым при решении большей части задач по разделу «Молекулярная физика и термодинамика».

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение ……………………………………………………………..3
Список рекомендуемой литературы …….……………………….……………5

**Часть 1**

**МЕХАНИКА**

1. Теоретическая часть
1.1 Кинематика поступательного и вращательного движения ..…………..6
1.2. Динамика поступательного движения ………………………………..7
1.3. Динамика вращательного движения ..…………………………..………8
1.4. Работа и механическая энергия ….……………………………......9
1.5. Законы сохранения ………………..…………………….…..…. . . . . .11
1.5.1. Закон сохранения импульса …...……..…………………………. . . . 11
1.5.2. Закон сохранения момента импульса ……….…………………..........12
1.5.3. Закон сохранения механической энергии ……..…………………..12
1.6. Механические колебания ……….……………………………............13
2. Рекомендации к решению физических задач ………..…..……………..14
3. Примеры решения задач
3.1. Кинематика поступательного и вращательного движения
План решения кинематических задач …..…………………………………15
3.2. Динамика поступательного и вращательного движения
План решения задач с помощью законов динамики …..…..……………..20
3.3. Законы сохранения
План решения задач с использованием законов сохранения: ЗСИ,
ЗСМИ и ЗСМЭ ……………………………………….……….............28
3.4. Механические колебания ……………………………………………41

**Часть 2**

**МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА**

4. Теоретическая часть ………………………………………………..........45
4.1. Молекулярная физика
4.1.1. Основные параметры и уравнение состояния идеального газа ..….45
4.1.2. Средняя энергия молекулы газа. Внутренняя энергия
идеального газа ………………………………………………………....46
4.1.3. Распределение молекул идеального газа по скоростям – закон
Максвелла ……………………………………………………………..47
4.1.4. Явления переноса: диффузия, внутреннее трение,

теплопроводность …………………………………………………………...48
4.2. Термодинамика
4.2.1. Первое начало термодинамики. Работа газа и теплота ………......49
4.2.2. Круговой процесс (цикл). Цикл Карно и его КПД ..………………….51
4.2.3. Энтропия. Второе начало термодинамики. Расчет приращения энтропии ……………………………………………………………...……...52
5. Рекомендации к решению задач по разделу «Молекулярная физика и термодинамика» …………….…………..…..……………...54
6. Примеры решения задач
6.1. Молекулярная физика
Методика решения задач ……………………………………………..........54
6.2. Термодинамика
Методика решения задач с помощью законов термодинамики ....……….64
Заключение ……..…………………………………………….….……………81