Рабочая программа дисциплины (модуля)*

Функциональный анализ

Направление подготовки (специальность)

02.03.01 Математика и компьютерные науки

Направленность (профиль)

Топологические и аналитические методы исследования математических моделей

Присваиваемая квалификация (степень)

бакалавр

Форма обучения

очная

Год(ы) набора 2024

*Рабочая программа дисциплины (модуля) адаптирована для инклюзивного обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья

Челябинск 2024 г.

Содержание

1. ЦЕЛИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Дисциплина предназначена для знакомства студентов с основными тема-ми функционального анализа: вопросами сходимости в метрических пространствах, непрерывными отображениям и теорией линейных операторов.

Результаты обучения по дисциплине направлены на достижение индикаторов, соответствующих компетенций: ОПК-1

ОПК-1.1. Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук

ОПК-1.2. Демонстрирует умения решать типовые задачи, формулируемые в рамках математических и (или) естественных наук

ОПК-1.3. Имеет навыки использования основных понятий, теорем, законов математики и (или) естественных наук для решения задач профессиональной деятельности

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОПОП

Цикл (раздел) ОПОП:	Б1.О.21

2.1 Требования к предварительной подготовке обучающегося:

Математический анализ

Дифференциальные уравнения

Комплексный анализ

2.2 Дисциплины и практики, для которых освоение данной дисциплины (модуля) необходимо как предшествующее:

Полугруппы операторов (научный семинар)

Вариационное исчисление и методы оптимизации

Дополнительные главы уравнений с частными производными

Подготовка к сдаче и сдача государственного экзамена

3. КОМПЕТЕНЦИИ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

ОПК-1: Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности

Знать:

Обладает базовыми знаниями, полученными в области функционального анализа.

Уметь:

Решать используя методы функционального анализа типовые задачи, формулируемые в рамках математических и естественных наук в профессиональной деятельности.

Владеть:

Техникой применения методов функционального анализа для решения задач в профессиональной деятельности.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен

3.1	**Знать:**
3.1.1	определение обратных операторов, их свойства и признаки существования;
3.1.2	- методы решения линейных операторных уравнений;
3.1.3	- фундаментальные теоремы функционального анализа;
3.1.4	- основные правила построения метрических и нормированных пространств;
3.1.5	- понятие сепарабельного пространства, ограниченного и предкомпактного множества, а также компакта;
3.1.6	- нормы линейного оператора и функционала;
3.1.7	- признаки сходимости рядов и последовательностей;
3.1.8	- определение, примеры, свойства и применение сопряжённого пространства и оператора;

3.1.9	- понятие спектра линейного оператора, его свойства и применение.
3.2	**Уметь:**
3.2.1	вычислять пределы последовательностей в метрических пространствах;
3.2.2	- находить нормы ограниченных опера-торов;
3.2.3	- исследовать различные свойства множеств и функций в метрических пространствах;
3.2.4	- продолжать линейный функционал с подпространства на всё пространство с сохранением свойства его линейности и нормы;
3.2.5	- исследовать поточечную сходимость последовательности операторов;
3.2.6	- разлагать в ряд Фурье по ортонормальным системам в гильбертовом пространстве;
3.2.7	- исследовать слабую сходимость последовательностей в нормированных пространствах;
3.2.8	- находить спектры компактных и самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.
3.3	**Владеть:**
3.3.1	методами решения прикладных и классических задач анализа на основе фундаментальных теорем.

4. ОБЪЕМ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Общая трудоемкость	**7 ЗЕТ**
Часов по учебному плану : 252 в том числе : аудиторные занятия : 132 самостоятельная работа : 75,5 часов на контроль : 27 контактная работа: 149,5 ИКР: 17,5	Виды контроля в семестрах: экзамены 6 зачеты 5

5. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Код занятия	Наименование разделов и тем /вид занятия/	Семестр / Курс	Часов	Литература
	Раздел 1. Основные понятия и теоремы о полных метрических пространствах			
1.1	Метрические пространства /Лек/	5	2	Л1.2 Л1.3 Л1.1 Л1.4 Э1 Э2
1.2	Полные метрические пространства /Лек/	5	2	Л1.3 Л1.1 Л1.4 Э1 Э2
1.3	Принцип Банаха о неподвижной точке /Лек/	5	2	Л1.3 Л1.1 Л1.4 Э1 Э2
1.4	Теория предкомпактности множеств в метрических пространствах /Лек/	5	4	Л1.3 Л1.1 Л1.4 Э1 Э2
1.5	Метрические пространства, аксиоматика /Пр/	5	2	Л1.3 Л1.1 Л1.4Л2.1 Э1 Э2
1.6	Сходимость последовательностей в метрических пространствах /Пр/	5	2	Л1.3 Л1.1 Л1.4Л2.1 Э1 Э2
1.7	Полные метрические пространства /Пр/	5	4	Л1.3 Л1.1 Л1.4Л2.1 Э1 Э2
1.8	Принцип Банаха о неподвижной точке /Пр/	5	6	Л1.3 Л1.1 Л1.4Л2.1 Э1 Э2
1.9	Теория предкомпактности множеств в метрических пространствах /Пр/	5	2	Л1.3 Л1.1 Л1.4Л2.1 Э1 Э2

1.10	Основные понятия и теоремы о полных метрических пространствах /Ср/	5	21,1	Л1.3 Л1.1 Л1.4 Э1 Э2
	Раздел 2. Линейные операторы на нормированных пространствах. Гильбертовы пространства			
2.1	Линейные нормированные пространства (ЛНП) /Лек/	5	4	Л1.3 Л1.1 Л1.4 Э1 Э2
2.2	Пространство линейных ограниченных операторов /Лек/	5	2	Л1.3 Л1.1 Л1.4 Э1 Э2
2.3	Теория гильбертовых пространств /Лек/	5	6	Л1.3 Л1.1 Л1.4 Э1 Э2
2.4	Линейные нормированные пространства /Пр/	5	6	Л1.3 Л1.1 Л1.4 Э1 Э2
2.5	Вычисление норм линейных операторов в различных пространствах /Пр/	5	6	Л1.3 Л1.1 Л1.4 Э1 Э2
2.6	Евклидовы, эрмитовы и предгильбертовы пространства. /Пр/	5	2	Л1.3 Л1.1 Л1.4Л2.1 Э1 Э2
2.7	Линейные операторы на нормированных пространствах. Гильбертовы пространства /Ср/	5	24	Л1.3 Л1.1 Л1.4Л2.1 Э1 Э2
	Раздел 3. Основные теоремы функционального анализа			
3.1	Теорема Хана-Банаха /Лек/	5	4	Л1.3 Л1.1 Л1.4 Э1 Э2
3.2	Теорема Банаха-Штейнгауза /Лек/	5	4	Л1.3 Л1.1 Л1.4 Э1 Э2
3.3	Теорема Банаха об обратном операторе /Лек/	5	4	Л1.3 Л1.1 Л1.4 Э1 Э2
3.4	Основные теоремы функционального анализа /Пр/	5	4	Л1.3 Л1.1 Л1.4Л2.1 Э1 Э2
3.5	Основные теоремы функционального анализа /Ср/	5	24	Л1.3 Л1.1 Л1.4 Э1 Э2
	Раздел 4. Дальнейшие свойства гильбертовых пространств			
4.1	Теоремы о ближайших элементах в гильбертовом пространстве /Лек/	6	4	Л1.3 Л1.1 Л1.4 Э1 Э2
4.2	Дальнейшие свойства гильбертовых пространств /Пр/	6	4	Л1.3 Л1.1 Л1.4Л2.1 Э1 Э2
4.3	Дальнейшие свойства гильбертовых пространств /Ср/	6	2	Л1.3 Л1.1 Л1.4
	Раздел 5. Общие свойства сопряженных пространств, сопряженные операторы			
5.1	Теоремы об отождествлении элементов и о замыкании подпространств /Лек/	6	4	Л1.3 Л1.1 Л1.4 Э1 Э2
5.2	О слабой сходимости последовательностей элементов в ЛНП /Лек/	6	2	Л1.3 Л1.1 Л1.4 Э1 Э2
5.3	Свойства сопряженных пространств /Пр/	6	4	Л1.3 Л1.1 Л1.4Л2.1 Э1 Э2
5.4	Слабая сходимость в ЛНП /Пр/	6	2	Л1.3 Л1.1 Л1.4Л2.1 Э1 Э2
5.5	Связь слабой, сильной и поточечной сходимости в конкретных ЛНП /Пр/	6	4	Л1.3 Л1.1 Л1.4Л2.1 Э1 Э2
5.6	Общие свойства сопряженных пространств /Ср/	6	2,4	Л1.3 Л1.1 Л1.4

	Раздел 6. Спектральные вопросы теории линейных операторов. Альтернатива Фредгольма			
6.1	Теория Рисса для линейных уравнений с компактным оператором. /Лек/	6	4	Л1.3 Л1.1 Л1.4 Э1 Э2
6.2	Линейные уравнения с компактным оператором. /Лек/	6	4	Л1.3 Л1.1 Л1.4 Э1 Э2
6.3	Признаки разрешимости уравнения, использующие сопряженный оператор /Лек/	6	8	Л1.3 Л1.1 Л1.4 Э1 Э2
6.4	Конечномерные подпространства в ЛНП /Пр/	6	4	Л1.3 Л1.1 Л1.4Л2.1 Э1 Э2
6.5	Компактные операторы на ЛНП /Пр/	6	4	Л1.3 Л1.1 Л1.4Л2.1 Э1 Э2
6.6	Линейные операторные уравнения на банаховых пространствах /Пр/	6	2	Л1.3 Л1.1 Л1.4Л2.1 Э1 Э2
6.7	Изоморфизмы банаховых пространств /Пр/	6	2	Л1.3 Л1.1 Л1.4Л2.1 Э1 Э2
6.8	Спектры линейных ограниченных операторов /Пр/	6	6	Л1.3 Л1.1 Л1.4 Э1 Э2
6.9	Спектральные вопросы теории линейных операторов. Альтернатива Фредгольма /Ср/	6	2	Л1.3 Л1.1 Л1.4 Э1 Э2
	Раздел 7. Экзамен			
7.1	/Экзамен/	6	27	Л1.3 Л1.1 Л1.4
	Раздел 8. Иная контактная работа			
8.1	Иная контактная работа /ИКР/	5	6,9	Л1.4
8.2	Иная контактная работа /ИКР/	6	10,6	Л1.4
	Раздел 9. Самосопряженные операторы в Гильбертовом пространстве			
9.1	Самосопряженные операторы и их свойства /Лек/	6	2	
9.2	Спектр самосопряженного оператора /Лек/	6	2	
9.3	Спектральные разложения компактного самосопряженного оператора /Лек/	6	2	

6. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

6.1. Перечень видов оценочных средств

Контрольная работа,
зачет,
Экзаменационная контрольная работа.

6.2. Типовые контрольные задания и иные материалы для текущей аттестации

Пример контрольной работы см. Приложение
Контрольные вопросы к зачету
1. Метрические и нормированные пространства
2. Примеры нормированных пространств. Пространства со скалярным произведением.
3. Топология метрического пространства
4. Предел последовательности в метрических пространствах. Критерии сходимости в различных пространствах
5. Предел функции и непрерывность. Сепарабельные метрические пространства.
6. Пополнение метрических пространств.
7. Теоремы о полных метрических пространствах
8. Компактные метрические пространства.
9. Критерии предкомпактности в конкретных пространствах. Свойства компактных пространств.
10. Линейные ограниченные операторы в нормированных пространствах. Вычисление норм линейных

ограниченных операторов и функционалов. Пространства линейных ограниченных операторов.
11. Общий вид линейных ограниченных функционалов в конкретных пространствах.
12. Основные принципы линейного функционального анализа. Теорема Хана-Банаха (о продолжении линейного функционала).
13 Обратный оператор. Теорема Банаха об обратном операторе
14. Теорема Банаха-Штейнгауза
15. Гильбертовы пространства. Ряды Фурье в гильбертовых пространствах.

6.3. Типовые контрольные вопросы и задания для промежуточной аттестации

Пример билета для экзаменационной контрольной работы

1. Теорема Хана-Банаха для нормированного пространства и следствия из нее
2. Доказать в бесконечномерном нормированном пространстве компактное множество нигде не плотное.
3. Может ли линейный компактный оператор в бесконечномерном ЛНП быть непрерывно обратимым?
4. Привести пример линейного плотно определенного оператора в ЛНП с пустым резольвентным множеством.

Вопросы к экзамену:

1. ЛНП всех непрерывных линейных функционалов. Следствие из теоремы о полноте про-странства L(X, Y), когда Y – банахово.
2. Процедура поиска норм линейного ограниченного оператора. Примеры.
3. Теорема Хана-Банаха, алгебраический вариант. Случай ЛНП.
4. Теорема Банаха-Штейнгауза.
5. Теорема Бэра.
6. Лемма Банаха о почти ограниченности линейного оператора на банаховом пространстве.
7. Теорема о линейной непрерывной биекции A: X ->Y банаховых пространств. Теорема о замкнутом графике.
8. Определение гильбертова пространства. Примеры.
9. Определение ортонормальной системы (ОНС). Ряд Фурье элемента x по данной ОНС. Примеры.
10. Теорема о минимальном свойстве сумм Фурье. Неравенство Бесселя.
11. Определение полной ОНС. Пример. Дальнейшие следствия теоремы из п. 12.
12. Отображение, относящее каждому элементу пространства последовательность его коэффициентов Фурье.
13. Доказать теорему об изоморфизме сепарабельных гильбертовых пространств.
14. Доказать теорему о проекции элемента на выпуклое замкнутое множество в гильбертовом пространстве.
15. Теорема о разложении гильбертово пространства в прямую сумму замкнутых линейных подпространств.
16. Описание сопряженного пространства к H. Теорема Рисса. Отождествление гильбертово пространства с его сопряженным.
17. Теорема о вложении X в своё второе сопряженное.
18. Определение слабой сходимости. Примеры.
19. Критерий слабой сходимости в пространстве непрерывных на отрезке функций с чебышовской нормой.
20. Общий вид линейных непрерывных функционалов на l_p. Признак слабой сходимости.
21. Лемма Рисса. Критерии компактности шара в нормированном пространстве.
22. Определение компактного линейного оператора. Примеры.
23. Определение сопряженного оператора. Примеры. Норма и непрерывность сопряженного оператора.
24. Линейные операторные уравнения. Необходимое условие разрешимости операторного уравнения с линейным ограниченным оператором и следствие из нее.
25. Теорема об условии разрешимости сопряжённого уравнения с компактным оператором.
26. Альтернатива Фредгольма.
27. Теорема о возмущении единичного оператора.
28. Определение регулярного значения и спектра замкнутого линейного оператора. Свойства резольвентного множества замкнутого линейного оператора. Классификация точек спектра.
29. Теорема о спектре компактного оператора. Примеры.
30. Самосопряженный ограниченный линейный оператор в гильбертовом пространстве. Примеры, простейшие свойства.
31. Теорема о свойстве спектра самосопряженного оператора на гильбертовом пространстве.
32. Теорема Гильберта-Шмидта, следствия из неё.

6.4. Критерии оценивания

На зачете студенту выдается теоретическая контрольная работа по изученному в 5 семестре материалу. Время,

отводимое на выполнение теоретической контрольной работы 120 минут.
Итоговый экзамен проводится в присутствии преподавателя и предполагает решение задач и развернутый, полный ответ на теоретические вопросы. Вопросы составляются с учётом материала, пройденного на практических занятиях и вынесенного на самостоятельную работу. Время, отводимое на выполнение итоговой работы, 120 минут.

Балльно-рейтинговая система оценки знаний студента по дисциплине в 5 семестре

Оценка студента в 5 семестре определяется количеством и уровнем выполненных работ, а также числом посещенных лекционных и семинарских занятий.
Балл, выставляемый за посещение лекционных занятий, пропорционален отношению числа фактически посещенных занятий к их полному числу. Максимальный балл за посещаемость лекционных занятий равен 10. Аналогичная система действует для оценивания посещаемости семинарских занятий.
Оставшиеся 80 баллов учащийся набирает в результате выполнения еженедельных контрольных работ. Работы выполняются на семинарских занятиях очно. Число работ в семестре равно 16.
Каждая контрольная работа содержит три задания различного уровня сложности, оцениваемые в 3, 4 и 5 баллов соответственно. Учащийся имеет возможность выбрать для решения одно из заданий. Таким образом, полное число баллов за успешное выполнение всех заданий в семестре может варьироваться от 48-ми до 80 баллов, а полное число баллов с учетом посещаемости - от 68-ми до 100 баллов.
Оценка “зачет” в пятом семестре выставляется если учащийся набирает 50 и более баллов.

Балльно-рейтинговая система оценки знаний студента по дисциплине в 6 семестре
Оценка студента в 6 семестре определяется количеством и уровнем выполненных работ, числом посещенных лекционных занятий и результатом выполнения экзаменационной работы.
Балл, выставляемый за посещение лекционных занятий, пропорционален отношению числа фактически посещенных занятий к их полному числу. Максимальный балл за посещаемость лекционных занятий равен 10. Баллы за посещение семинарских занятий не начисляются.
50 баллов учащийся набирает в результате выполнения контрольных работ. Работы выполняются на семинарских занятиях очно. Число работ в семестре равно 10. Система начисления баллов за контрольные работы такая же, как в пятом семестре.
Экзаменационная работа состоит из четырех заданий: двух теоретических вопросов и двух задач. По теоретическим вопросам проводится собеседование. Задачи, предлагаемые на экзамене аналогичны задачам контрольных работ на 5 баллов, предлагавшимся в течение семестра. Каждое из заданий в экзаменационной работе оценивается в 10 баллов. На экзамене возможно повысить итоговый рейтинг на 5 баллов, решив одну дополнительную задачу. Критерии оценивания экзаменационной контрольной работы
Максимальный балл за экзаменационную контрольную работу — 20 баллов. Этот балл складывается из баллов, полученных за каждый вопрос в билете. В билете – 2 теоретических вопроса и 2 задачи.
Соответствие между оценкой по предмету в семестре и количеством набранных баллов следующее:
0-40 - неудовлетворительно
41-60 - удовлетворительно
61-80 - хорошо
81-100 отлично

7. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

7.1. Рекомендуемая литература

7.1.1. Основная литература

	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год	Ресурс
Л1.1	Кутузов А. С.	Введение в функциональный анализ: учебное пособие (https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=571413)	Москва, Берлин : Директ-Медиа, 2020	ЭБС
Л1.2	Люстерник, Л. А., Янпольский А. Р., Крейн С. Г.	Функциональный анализ: монография (https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=112181)	Москва : Наука, 1964	ЭБС
Л1.3	Дутикова Е. В.	Функциональный анализ: учебное пособие (http://library.csu.ru/rbooks2/view2? code=texts/007730/dutikovaev)	Миасс : [Геотур], 2019	ЭБС

	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год	Ресурс
Л1.4	Колмогоров А. Н., Фомин С. В.	Элементы теории функций и функционального анализа: учебник (https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=82563)	Москва : Физматлит, 2012	ЭБС

7.1.2. Дополнительная литература

	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год	Ресурс
Л2.1	Ревина С. В., Сазонов Л. И.	Функциональный анализ в примерах и задачах: учебное пособие (https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=240944)	Ростов-на-Дону : Южный федеральный университет, 2009	ЭБС

7.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет"

Э1	Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU (https://elibrary.ru/defaultx.asp?) eLIBRARY.RU : научная электронная библиотека : сайт. – Москва, 2000 – . – URL: https://elibrary.ru. – Режим доступа: для зарегистрир. пользователей. – Текст : электронный.
Э2	Справочник «Информио» (http://www.informio.ru/) ИНФОРМИО : электронный справочник [обеспечение всех типов образовательных учреждений нормативными, методическими, научнопрактическими материалами]. – URL: http://www.informio.ru/. – Режим доступа: для зарегистрир. пользователей ЧелГУ. – Текст : электронный.

7.3 Перечень информационных технологий

7.3.1 Программное обеспечение

MS Office365

LibreOffice

7.3.2 Профессиональные базы данных и информационно-справочные системы

Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU (https://elibrary.ru/defaultx.asp?) eLIBRARY.RU : научная электронная библиотека : сайт. – Москва, 2000 – – URL: https://elibrary.ru. – Режим доступа: для зарегистрир. пользователей. – Текст : электронный.

Справочник «Информио» (http://www.informio.ru/) ИНФОРМИО : электронный справочник [обеспечение всех типов образовательных учреждений нормативными, методическими, научнопрактическими материалами]. – URL: http://www.informio.ru/. – Режим доступа: для зарегистрир. пользователей ЧелГУ. – Текст : электронный.

8. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Для реализации дисциплины используются учебные аудитории для проведения лекционных занятий, занятий семинарского типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, а также помещения для самостоятельной работы.

Учебные аудитории укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения: проектором, экраном, магнитно-маркерной доской, маркером; с возможностью демонстрации электронных презентаций при уровне освещения, достаточном для работы с конспектом.

Для проведения лекционных и лабораторных занятий предлагаются наборы демонстрационного оборудования и учебно-наглядных пособий, аудитория оснащённая доской, проектором, компьютерами.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с подключением к сети "Интернет" и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду университета.

9. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Учебный курс строится таким образом, чтобы способствовать созданию у студента понятийно-теоретического ядра и развитию практического навыка решения математических задач.
Для успешного усвоения материала студенту необходимо использовать следующие формы обучения:
1. Лекционная форма, которая предполагает посещение и конспектирование лекций. Лекционные занятия могут проводиться как в классической форме, предполагающее устное изложение материала преподавателем и конспектированием материала студентам, так и форме семинара, студентам предлагается совместное решение теоретических задач при возможной помощи преподавателя. Кроме того, часть лекций сопровождается интерактивными материалами для лучшего понимания геометрической интерпретации материала.
2. Практическая форма занятий предполагает посещение их студентом, с предоставлением выполненного домашнего задания, и выполнение итого-во-зачётной контрольной работы.

3. Самостоятельная форма работы, предполагает кроме выполнения всех домашних работ, необходимость использования и изучения литературы по заданной теме. В случае затруднений при решении задач домашнего задания необходимо обратиться за помощью к лектору согласно расписания его консультаций, которое висит вблизи кафедры вычислительной математики.
В случае применения при обучении дисциплины электронного обучения, дистанционных образовательных технологий общение обучающихся и преподавателя осуществляется в режиме реального времени (чат), или отложенного времени (система дистанционного обучения Moodle, чаты, электронная почта).
Большую часть времени обучающиеся самостоятельно работают с учебно-методическими материалами. Студенты имеют возможность консультироваться с преподавателем по всем вопросам, возникающим в ходе самостоятельной работы посредством электронной почты, социальных сетей.
Доступ обучающегося к учебным ресурсам в режиме отложенного времени, самостоятельной работы осуществляется через сеть Интернет в удобном для него месте, времени и темпе.

При обучении инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья электронное обучение, дистанционные образовательные технологии предусматривают возможность приема-передачи информации в доступных для них формах.

Реализация дисциплины с применением электронного обучения, дистанционных образовательных технологий (далее – ЭО, ДОТ) осуществляется на основании «Положения о реализации основных и дополнительных образовательных программ с применением электронного обучения и дистанционных образовательных технологий в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Челябинский государственный университет», «Положения о порядке зачета обучающимися по основным профессиональным образовательным программам высшего образования в ФГБОУ ВО «ЧелГУ» результатов освоения в организациях, осуществляющих образовательную деятельность, учебных предметов, курсов, дисциплин (модулей), практик, дополнительных образовательных программ» посредством электронной информационно-образовательной среды ФГБОУ ВО «ЧелГУ». В исключительных случаях (форс-мажор и т.п.) при реализации образовательной деятельности с применением ЭО, ДОТ могут применять компоненты, не входящие в перечень электронной информационно- образовательной среды.

10. СПЕЦИАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ ОБУЧАЮЩИМИСЯ С ИНВАЛИДНОСТЬЮ И ОГРАНИЧЕННЫМИ ВОЗМОЖНОСТЯМИ ЗДОРОВЬЯ

Освоение дисциплины инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья осуществляется с использованием специальных технических средств и ассистивных информационных технологий, предоставляемых Ресурсным учебно-методическим центром по обучению инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья ЧелГУ по запросу обучающегося.
1. Мобильные специальные технические средства для лиц с нарушениями зрения: портативный компьютер с вводом/выводом шрифтом Брайля с синтезатором речи «ElBraile-W14J G2»; ноутбуки с программной экранного доступа NVDA; электронные увеличители для удаленного просмотра; видеоувеличители портативные; тифлоплеер; цифровые диктофоны.
2. Мобильные специальные технические средства для лиц с нарушениями слуха: система свободного звукового поля со встроенной совместимостью с FM-устройствами; радиоклассы «Сонет-РСМ» с передатчиком, заушным индуктором и индукционной петлей; система информационная для слабослышащих переносная «Исток» А2 со встроенным плеером – звуковым информатором; документ-камера; программируемые слуховые аппараты индивидуального пользования.
3. Ассистивные информационные технологии: программное обеспечение экранного доступа с синтезом речи NVDA; программы экранного увеличения; программы речевого синтеза для компьютеров и ноутбуков; программы речевого синтеза для мобильных устройств; экранная клавиатура; экранная лупа.
При необходимости для обучающихся с нарушениями зрения на рабочих местах для проведения практических или лабораторных занятий устанавливается специальное программное обеспечение (программа речевой навигации NVDA, речевые синтезаторы, экранные лупы).
В учебные аудитории обеспечивается беспрепятственный доступ для обучающихся инвалидов и обучающихся с ограниченными возможностями здоровья. В каждой аудитории, где обучаются инвалиды и лица с ограниченными возможностями здоровья, предусматривается соответствующее количество мест для обучающихся с учетом нарушений их здоровья.
Для освоения дисциплины инвалидам и лицам с ограниченными возможностями здоровья предоставляется доступ к печатным источникам, имеющимся в научной библиотеке ЧелГУ, с помощью специальных технических средств; доступ к электронным источникам, представленным в форме электронного документа в фонде научной библиотеки ЧелГУ или электронно-библиотечных системах, с помощью специальных технических и программных средств (рабочее место для незрячего пользователя с программным обеспечением экранного доступа с синтезом речи NVDA,

рабочее место с компьютерным роллером и клавиатурой Clevy с большими кнопками и с разделяющей клавиши накладкой).
Учебно-методические материалы для обучающихся из числа инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья предоставляются в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации:
Для лиц с нарушениями зрения:
- в печатной форме увеличенным шрифтом,
- в форме электронного документа,
- в форме аудиофайла,
- в печатной форме шрифтом Брайля.
Для лиц с нарушениями слуха:
- в печатной форме,
- в форме электронного документа.
Для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата:
- в печатной форме,
- в форме электронного документа,
- в форме аудиофайла.
Данный перечень может быть конкретизирован в зависимости от контингента обучающихся.
Для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья освоение дисциплины может быть частично или полностью осуществлено с использованием дистанционных образовательных технологий.
При проведении процедуры оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья по дисциплине обеспечивается выполнение следующих дополнительных требований в зависимости от индивидуальных особенностей, обучающихся:
а) доступная форма предоставления инструкции по порядку проведения процедуры оценивания (устно, в письменной форме, в письменной форме шрифтом Брайля, устно с использованием услуг сурдопереводчика);
б) доступная форма предоставления заданий оценочных средств (в печатной форме, в печатной форме увеличенным шрифтом, в печатной форме шрифтом Брайля, в форме электронного документа, задания зачитываются ассистентом, задания предоставляются с использованием сурдоперевода);
в) доступная форма предоставления ответов на задания (письменно на бумаге, набор ответов на компьютере, письменно шрифтом Брайля, с использованием услуг ассистента, устно).
При проведении процедуры оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья предусматривается использование технических средств, необходимых им в связи с их индивидуальными особенностями. Эти средства могут быть предоставлены ЧелГУ или могут использоваться собственные технические средства. При необходимости инвалидам и лицам с ограниченными возможностями здоровья предоставляется дополнительное время для подготовки ответа на задания, процедура оценивания результатов обучения по дисциплине может проводиться в несколько этапов.
Проведение процедуры оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья допускается с использованием дистанционных образовательных технологий.

Контрольная работа №1

3 балла

На множестве $X = \{a, b, c\}$ определена табличная функция $\rho(x, y)$. Задает ли она метрику на X?

	a	b	c
a	0	1	2
b	1	0	3
c	2	3	0

4 балла

Проверить, является ли метрикой на $X = \left\{x \in R : -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right\}$ функция

$$\rho(x, y) = |\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y|$$

5 баллов

Проверить, является ли метрикой на R функция

$$\rho(x, y) = \ln(1 + |x - y|)$$

Контрольная работа №2

3 балла. Найти норму элемента $x = (2, 2, 1)$ в пространстве l_2^3.

4 балла. Найти норму элемента $x(t) = \sin(t)$ в пространстве $L^1[0, \pi]$.

5 баллов. Задает ли матрица A скалярное произведение в R^3, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Контрольная работа №3

3 балла. Указать внутренние, граничные, изолированные, предельные точки множества $M \in \mathbb{R}$, если $M = \{x \in \mathbb{R} : x \in [0, 2/3) \cup (2/3, 1] \cup \{3/2\}\}$. Построить замыкание $\bar{M}$.

4 балла. Попадет ли точка x в открытый шар $B(r, y)$, если $x(t) = t(1-t) \in C[0, 1]$, $B(r, y) \subset C[0, 1]$, $\quad y(t) = t, \quad r = 1$.

5 баллов. Будет ли замкнутым множество решений уравнения $x' = at + b, \quad x(0) = c$, в $C[0, 1]$ с произвольными параметрами $a, b, c \in \mathbb{R}$?

Контрольная работа №4

3 балла. Показать, что на множестве трехмерных векторов $x \in \mathbb{R}^3$ евклидова норма $\|x\|$ эквивалентна норме $\|x\|_1 = \max\{2|x_1|, |x_2|, 3|x_3|\}$. Привести примеры констант a, b в неравенстве $a\|x\|_1 \leqslant \|x\| \leqslant b\|x\|_1$

4 балла. Будут ли эквивалентными / сильно эквивалентными метрики $\rho_1(x, y)$ и $\rho_2(x, y)$ на пространстве X, если $\rho_1(x, y) = |x - y|$, $\quad \rho_2(x, y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$, $\quad X = [0, 1]$?

5 баллов. Сходится ли последовательность $x_n(t)$ в $C[0, 1]$, если $x_n(t) = \sum\limits_{s=0}^{n} (-1)^s \frac{t^{2s+1}}{(2s+1)!}$?

Контрольная работа №5

3 балла. Приблизить элемент $x_0 = (\sqrt{2}, \sqrt{5}, 1)$ метрического пространства $X = \langle \mathbb{R}^3, \|\cdot\| \rangle$ с нормой $\|x\| = |x_1| + 3|x_2| + 2|x_3|$ точкой из счетного всюду плотного множества $Y = \mathbb{Q}^3$ с точностью не хуже $\varepsilon = 0.1$.

4 балла. Приблизить элемент $x_0 = \left\{\frac{\sqrt{5}}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ метрического пространства $X = l_2$ точкой из счетного всюду плотного подмножества $Y \subset X$ конечных последовательностей с рациональными коэффициентами с точностью не хуже $\varepsilon = 0.5$.

5 баллов. Приблизить элемент $x_0 = \pi \sin(t)$ метрического пространства $X = C[0, 1]$ точкой из счетного всюду плотного множества Y многочленов с рациональными коэффициентами с точностью не хуже $\varepsilon = 0.1$.

Контрольная работа №6

3 балла. Является ли множество $M = \{x \in \mathbb{R} : x \in [0, 2/3) \cup (2/3, 1] \cup \{3/2\}\} \subset \mathbb{R}$ полным метрическим пространством с метрикой $\rho(x, y) = |x - y|$? Если нет, построить его пополнение.

4 балла. Будет ли непрерывным оператор $A : C^1[0, 1] \to C[0, 1]$, действующий по правилу $Ax(t) = x(t)$?

5 баллов. Пусть $\alpha = (\alpha_n)$ монотонно возрастающая ограниченная последовательность положительных чисел. Будет ли полным пространство сходящихся последовательностей c_α с метрикой $\rho(\xi, \eta) = \sup\limits_n (\alpha_n |\xi_n - \eta_n|)$

Контрольная работа №7

3 балла. Выполнено ли для системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 = 0,32x_1 - 0,18x_2 + 0,02x_3 + 0,21x_4 + 1,83 \\ x_2 = 0,16x_1 + 0,12x_2 - 0,14x_3 + 0,27x_4 - 0,65 \\ x_3 = 0,37x_1 + 0,27x_2 - 0,02x_3 - 0,24x_4 + 2,23 \\ x_4 = 0,12x_1 + 0,21x_2 - 0,18x_3 + 0,25x_4 - 1,13 \end{cases}$$

достаточное условие сходимости итерационного метода поиска решения? Оценить число итераций для получения приближенного решения с точностью $\epsilon = 0.001$

4 балла. Методом Ньютона построить итерационную схему для решения уравнения

$$f(x) = x^3 - 1.5x^2 + 0.5x = 0.$$

Оценить число итераций, которое потребуется для определения корня уравнения при $x > 0.9$ с точностью $\epsilon = 0.01$, если известно, что при данных значениях x отношение $\frac{ff''}{(f')^2} > -0.2$ и монотонно возрастает.

5 баллов. Обосновать применимость метода сжимающих отображений для поиска решения уравнения

$$x(t) = \frac{1}{10}\int_0^1 e^{t-s}x(s)ds + e^t$$

в пространстве $C[0,1]$. Найти решение этого уравнения.

Контрольная работа №8

3 балла. Построить ε-сеть для множества $M \subset C[0,1]$, если $\varepsilon = 0.1$,

$M = \{x(t) \in C[0,1] : \quad x(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2, a_i \in [0,1]\}$

4 балла. Является ли предкомпактным в $C[0,1]$ множество M, состоящее из элементов $M = \{x_\alpha(t) \in C[0,1], \quad x_\alpha(t) = \sin(\alpha t), \quad \alpha \in \mathbb{R}\}$?

5 баллов. Является ли предкомпактным в $C[0,1]$ множество решений уравнения $\dot{x}(t) + x(t) = at, \quad x(0) = 0$, если $a \in [1,2]$?

Контрольная работа №9

3 балла. Найти норму матричного оператора $A : \mathbb{R}^3_1 \to \mathbb{R}^3_1$, если

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

4 балла. Найти норму оператора $A : C[0,1] \to C[0,1]$, если

$$(Ax)(t) = \int\limits_0^1 (t + e^\tau)^2 \, x(\tau) d\tau$$

5 баллов. Найти норму оператора $A : C[0,1] \to C[0,1]$, если

$$(Ax)(t) = \int\limits_0^1 (1-t)t \sin(2\pi\tau) x(\tau) d\tau$$

Контрольная работа №10

3 балла. Найти норму функционала $f : C[-1,1] \to \mathbb{R}$ для $f(x) = \int\limits_{-1}^{1} tx(t)dt$

4 балла. Для пары последовательностей операторов $A_n : l_2 \to l_2$, $B_n : l_2 \to l_2$ установить характер сходимости, если

$A_n = \left(x_1, \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n}{n+1}} x_2, \ldots, \left(\frac{m}{m+1}\right)^{\frac{n}{n+1}} x_m, \ldots\right)$

$B_n = \left(x_1, \frac{2}{3}x_2, \ldots, \frac{n}{n+1}x_n, 0, \ldots\right)$

5 баллов. Для пары последовательностей операторов $A_n : D \subset C[0,1] \to C[0,1]$, $B_n : D \subset C[0,1] \to C[0,1]$ с областью определения $D = \{x(t) \in C[0,1] : x(0) = 0\}$ установить характер сходимости, если $(B_n x)(t) = T_n^0(t)x(t), \quad A_n = tB_n$

$$T_n^0 = \begin{cases} nt, \quad t \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ -nt + 2, t \in \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right] \\ 0, t > \frac{2}{n} \end{cases}$$

Контрольная работа №11

3 балла. Найти норму оператора $A : l_2 \to l_2 : \quad Ax = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \ldots)$, если $\lambda_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)}$

4 балла. Найти норму оператора $A : L_2[0, 2\pi] \to L_2[0, 2\pi]$, если

$$(Ax)(t) = \int\limits_0^{2\pi} \sin(2t)\sin(\tau)x(\tau)d\tau$$

5 баллов. Оператор $A : C[0, 1] \to C[0, 1]$ действует по правилу

$$(Ax)(t) = t(1-t)x(t)$$

Сходится ли ряд $\tilde{A} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}A^n}{n}$ в норме $\mathcal{L}(C[0, 1])$

Контрольная работа №12

3 балла. Является ли множество, задаваемое неравенством

$$p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x_n + \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2\right)^{1/2} \leqslant 1$$

выпуклым телом в вещественном пространстве суммируемых с квадратом последовательностей $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty$.

4 балла. В пространстве $\mathbb{R}_2^2$ на подпространстве $L = \{x \in \mathbb{R}_2^2 : 3x_1 - 2x_2 = 0\}$ задан линейный функционал $f_0(x) = 2x_1$. Найти продолжение $f(x)$ функционала $f_0(x)$ на все пространство с сохранением нормы. Однозначно ли такое продолжение?

5 баллов. На линейном комплексном пространстве $X = \mathbb{C}^2 = \{(z_1, z_2) : z_{1,2} \in \mathbb{C}\}$ задана полунорма $p(z) = 3|z_1| + 2|z_2|$. На подпространстве $L = \{z \in X : z = (z_1, 0)\}$ определен функционал $f_0(z_1) = (1-i)z_1$. Построить одно из возможных продолжений $f(z)$ функционала $f_0(z_1)$ на все пространство с сохранением неравенства $|f(z)| \leqslant p(z)$.

Контрольная работа №13

3 балла. Проверить, существует ли непрерывный обратный оператор к оператору $A : l_2 \to l_2$

$$Ax = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_1, x_4, x_5, \ldots).$$

4 балла. Пусть L - полное пространство непрерывно дифференцируемых на отрезке $[0, 1]$ функций, таких что $x(0) = 0$, с нормой $\|x\| = \max\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x(t)| + \max\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x'(t)|$. Доказать, что оператор A непрерывно обратим и найти A^{-1}, если $(Ax)(t) = x'(t) - 2tx(t)$.

5 баллов. Доказать, что оператор $A : C[0, 1] \to C[0, 1]$ непрерывно обратим, если $(Ax)(t) = x(t) - 2\sin(\pi t) \int\limits_0^t sx(s)ds$. Найти обратный оператор A^{-1}.

Контрольная работа №14

3 балла. Найти угол между элементами $x(t) = \sin(t)$ и $y(t) = t$ в пространстве $L_2[0,1]$.

4 балла. Найти элемент в $L \subset L_2[-1,1]$ ближайший к $x(t) = e^t$, если L — это линейная оболочка, натянутая на элементы $\{1, 3t^2 - 1\} \in L_2[-1,1]$.

5 баллов. Используя теорему Банаха-Штейнхауза показать, что последовательность функционалов $f_n : L_2[-1,1] \to R$ поточечно сходится к нулевому функционалу, если $f_n(x) = \int\limits_{-1}^{1} x(t)\cos(\pi n t)dt$.

Контрольная работа №15

3 балла. Представить элемент $x(t)$ комплексного пространства $L_2[-1,1]$ в виде суммы $x = u + v$, в которой u — проекция x на одномерное линейное подпространство $L \subset L_2[-1,1]$, а v — элемент из ортогонального дополнения $v \in L^{\perp}$, если $x(t) = 1 + e^{i\pi t}$, а L — линейная оболочка, натянутая на $x_0(t) = t + i$.

4 балла. Провести ортогонализацию элементов $x_1(t) = 1$, $x_2(t) = t$ и $x_3(t) = t^2$ в пространстве $L_2[-1,1]$.

5 баллов. Пусть $H_p[0,1]$ — гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(x,y) = \int\limits_0^1 x(t)y(t)p(t)dt$$

где «весовая функция» равна $p(t) = 1 + t$. Найти наилучшее приближение функции $x(t) = t$ элементами подпространства L, натянутого на элементы $u_1(t) = 1$, $u_2 = e^t$.

02.03.01 Топологические и аналитические методы исследования математических моделей, Математика и компьютерные науки, РПД Функциональный анализ, год набора 2024, форма обучения очная

Проректор по учебной работе	утверждено 21.02.24	А.А. Саламатов

Ученым советом математического факультета

Протокол заседания № 9 от 15.02.2024

Председатель Ученого совета математического факультета	согласовано	Е.А. Сбродова

Заседанием математического факультета

Протокол заседания № 7 от 25.01.2024

Заведующий кафедрой	согласовано	В. Н. Павленко
Автор (составитель)		В. Н. Павленко

Структура рабочей программы соответствует приказу ректора ФГБОУ ВО «ЧелГУ» от «13» апреля 2021 г. № 247-1