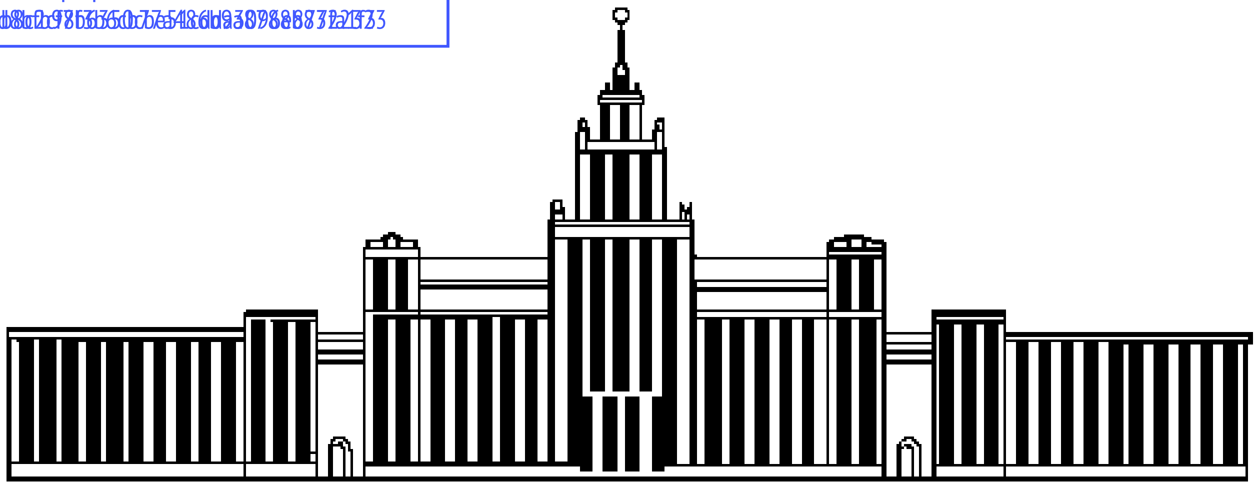
МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ



ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

53(07)
К476

А.А. Замышляева, Н.А. Манакова,
Е.В. Бычков, О.Н. Цыпленкова

КЛАССИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Учебное пособие

Челябинск
2020

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Южно-Уральский государственный университет
Кафедра уравнений математической физики
Кафедра прикладной математики и программирования

53(07)

К476

А.А. Замышляева, Н.А. Манакова,
Е.В. Бычков, О.Н. Цыпленкова

КЛАССИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Учебное пособие

Челябинск
Издательский центр ЮУрГУ
2020

УДК [530.1:510](075.8)
К-476

Одобрено
учебно-методической комиссией
Института естественных и точных наук

Рецензенты: д.физ.-мат.н, профессор С.И. Кадченко,
д.физ.-мат.н, профессор Т.Г. Сукачева

К-476 Классические модели математической физики: учебное пособие / А.А. Замышляева, Н.А. Манакова, Е.В. Бычков, О.Н. Цыпленкова. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2020. – 158 с.

Учебное пособие предназначено для студентов высших учебных заведений, и соответствует ФГОС ВО по направлениям 01.03.01 "Математика", 01.03.02 "Прикладная математика и информатика", 01.03.03 "Математика и механика", 01.03.04 "Прикладная математика", 02.03.01 "Математика и компьютерные науки". В учебном пособии рассматриваются классические модели математической физики первого и второго порядка, а также методы их исследования, содержатся задания для самостоятельного решения.

УДК [530.1:510](075.8)

Оглавление

Введение

Создание математических моделей различных физических процессов и построение методов решения физических задач является предметом математической физики. Постановка задач математической физики заключается в построении математических моделей, описывающих основные закономерности изучаемых физических явлений. Это моделирование состоит в выводе уравнений, которым удовлетворяют величины, характеризующие данный процесс. При этом исходят из основных физических законов, которые учитывают наиболее существенные черты явления, отвлекаясь от второстепенных характеристик. Многие задачи механики и физики приводят к исследованию дифференциальных уравнений с частными производными. В ряде случаев приходится иметь дело с интегральными и интегро-дифференциальными уравнениями. Однако в этом пособии мы будем рассматривать именно дифференциальные уравнения, как наиболее часто встречающиеся в задачах математической физики. Например, при изучении различных видов волн – упругих, звуковых, электромагнитных, а также других колебательных явлений используется так называемое волновое уравнение. Процессы распространения тепла и явления диффузии описываются уравнением теплопроводности. При рассмотрении установившегося теплового состояния в изотропном теле мы приходим к уравнению Пуассона. Ряд установившихся процессов, в частности таких, как потенциальное движение несжимаемой жидкости или потенциал стационарного электрического тела, приводят к уравнению Лапласа. Уравнения, указанные выше, являются дифференциальными уравнениями в частных производных второго порядка и называются уравнениями математической физики. Многочисленные задачи физики и техники приводят к сравнительно небольшому числу типов дифференциальных уравнений с частными производными. Чаще всего встречаются уравнения, содержащие частные производные второго порядка, причем линейные по этим производным. Следует отметить, что в отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений, общее решение которых зависит от произвольных постоянных, общее решение дифференциальных уравнений с частными производными зависит от произвольных функций.

Среди уравнений с частными производными особым образом выделяются уравнения математической физики (хотя иногда эти два термина отождествляются). К ним относят те уравнения, которые возникли, при исследовании конкретных физических, химических и др. процессов и явлений. Так, при исследовании малых поперечных колебаний однородной струны, было получено одномерное волновое уравнение. При исследовании явления теплопроводности в однородном стержне, было получено параболическое уравнение. В результате исследования стационарных процессов распределения тепла и распределения электрического заряда были получены уравнения эллиптического типа. Эти три класса (гиперболические, параболические и эллиптические уравнения) составляют основу уравнений математической физики.

Первая часть учебного пособия посвящена уравнениям первого порядка, задаче Коши для них, и методу ее решения; а также классификации уравнений второго порядка, и методам приведения уравнений к их каноническим формам. Во второй главе рассматриваются уравнения гиперболического типа. Приводятся вывод уравнения малых поперечных колебаний однородной струны; методы решения начальных задач для волновых уравнений – метод характеристик, формулы Даламбера, Пуассона, Кирхгофа, метод спуска и метод разделения переменных для решения начально-краевых задач. Третья глава начинается с вывода уравнений распространения тепла в стержне, диффузии газа в пористой среде и постановки начальных и начально-краевых задач. Затем рассматривается принцип максимума и доказывается ряд теорем на его основе; решается методом Фурье начально-краевая задача, выводится формула Пуассона для решения начальной задачи. В конце главы рассматриваются фундаментальные решения параболического уравнения. Четвертая глава посвящена уравнениям эллиптического типа. Глава начинается с задач, приводящих к уравнениям эллиптического типа с краевыми условиями. Рассматривается оператор Лапласа в различных системах координат, а также краевые задачи для различных областей; решения методом Фурье и методом функции Грина. Формулируется принцип максимума для уравнений эллиптического типа.

1. Уравнения в частных производных первого и второго порядков

1.1. Уравнения в частных производных первого порядка

Уравнение в частных производных первого порядка с n независимыми переменными может быть записано в виде

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_n, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0. \tag{1.1.1}$$

Линейное однородное уравнение в частных производных первого порядка имеет вид

$$L \equiv a_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + a_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0, \tag{1.1.2}$$

где $a_1, a_2, \dots, a_n$ – известные функции независимых переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, о гладкости которых можно судить по ходу проводимых операций, u – неизвестная функция. Напишем систему обыкновенных дифференциальных уравнений, соответствующую уравнению (1.1.2)

$$\frac{dx_1}{a_1} = \frac{dx_2}{a_2} = \dots = \frac{dx_n}{a_n}. \tag{1.1.3}$$

Полагая одну из переменных, например, x_n в качестве независимой, от системы (1.1.3), можно перейти к системе

$$\frac{dx_1}{dx_n} = \frac{a_1}{a_n},\ \frac{dx_2}{dx_n} = \frac{a_2}{a_n},\ \dots,\ \frac{dx_{n-1}}{dx_n} = \frac{a_{n-1}}{a_n}. \tag{1.1.4}$$

При этом необходимо предполагать, что $a_n \neq 0$ в некоторой окрестности точки $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, а также непрерывность $a_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $i = 1, 2, \dots, n$ в этой окрестности. Если же $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$ обращают в нуль функцию a_n, то в качестве независимой переменной берем такую x_i, чтобы соответствующая функция a_i не обращалась в нуль в некоторой окрестности точки $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$. Те точки, в которых обращаются в нуль все функции a_i, называются особыми точками системы (1.1.3). Общий интеграл системы (1.1.3) записывается в виде

$$\begin{gathered} \psi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1,\ \psi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_2,\ \dots, \\ \psi_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_{n-1}. \end{gathered} \tag{1.1.5}$$

Аналитическое условие того, чтобы каждый из этих интегралов или вообще любое соотношение вида

$$\psi(x_1, x_2, \dots, x_n) = c$$

являлось общим интегралом системы (1.1.4), получается следующим образом: вдоль интегральной кривой системы функция ψ сохраняет постоянное значение, следовательно, ее полный дифференциал, взятый вдоль этой кривой, равен нулю:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial\psi}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial\psi}{\partial x_n}dx_n = 0.$$

Но вдоль интегральной кривой dx_i, в силу уравнения (1.1.3), пропорциональны значениям функций a_i. Следовательно, вдоль каждой интегральной кривой имеем:

$$\begin{gathered} a_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial\psi}{\partial x_1} + a_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial\psi}{\partial x_2} + \cdots + \\ + a_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial\psi}{\partial x_n} = 0. \end{gathered} \tag{1.1.6}$$

Это равенство справедливо вдоль любой интегральной кривой $\psi_i = c_i$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Так как через каждую точку рассматриваемой области проходит интегральная кривая, то отсюда следует, что соотношение (1.1.6) для левой части первого интеграла выполняется тождественно. И, обратно, всякая функция ψ, удовлетворяющая тождественно уравнению (1.1.6), дает первый интеграл, если ее приравнивать к произвольному постоянному.

Пример 1.1.1

$$(z-y)^2\frac{\partial u}{\partial x} + z\frac{\partial u}{\partial y} + y\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

Перепишем уравнение в симметрической форме:

$$\frac{dx}{(z-y)^2} = \frac{dy}{z} = \frac{dz}{y}.$$

Два последних члена этих равенств дают интегрируемое выражение

$$ydy - zdz = 0,$$

откуда находим первый интеграл

$$y^2 - z^2 = c.$$

Чтобы найти еще один первый интеграл, воспользуемся свойством равных дробей и запишем соотношение

$$\frac{dy - dz}{z - y} = \frac{dx}{(z-y)^2},$$

$$dx + (z - y)(dz - dy) = 0,$$

откуда первый интеграл

$$2x - 2yz + (z - y)^2 = c.$$

Благодаря делению на $(y - z)^2$ потеряно семейство решений, зависящее от одного параметра: $x = c, y = z$, которое не существует, если за независимую переменную взять x.

Данный пример показывает, что задача интегрирования уравнения (1.1.2) и системы уравнений (1.1.3) суть эквивалентные задачи.

Теорема 1.1.1. *Левая часть любого первого интеграла системы уравнений (1.1.3) есть решение уравнения (1.1.2), и наоборот, всякое решение уравнения (1.1.2), приравненное произвольной постоянной, дает первый интеграл системы (1.1.3).*

Следуя задаче определения наиболее общей функции, удовлетворяющей уравнению (1.1.2), заметим, что если $f(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k)$ – некоторая дифференцируемая функция своих аргументов, которые, в свою очередь, являются дифференцируемыми функциями независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то

$$\begin{gathered} L(f(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k)) = a_1 \left[\frac{\partial f}{\partial \varphi_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial \varphi_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial \varphi_k} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1} \right] + \\ + a_2 \left[\frac{\partial f}{\partial \varphi_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial \varphi_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial \varphi_k} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_2} \right] + \ldots + \\ + a_n \left[\frac{\partial f}{\partial \varphi_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} + \frac{\partial f}{\partial \varphi_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial \varphi_k} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_n} \right]. \end{gathered} \tag{1.1.7}$$

Пусть теперь

$$\begin{gathered} \psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1, \\ \psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_2, \\ \ldots, \\ \psi_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = c_n \end{gathered} \tag{1.1.8}$$

– некоторая система (независимых) интегралов системы уравнений (1.1.3), определенная в некоторой области D.

Согласно теореме 1.1.1 ψ_1, ψ_2, $\ldots$, ψ_{n-1} являются частными решениями уравнений (1.1.2), т.е. мы имеем тождества

$$L(\psi_1) = 0, L(\psi_2) = 0, \ldots, L(\psi_{n-1}) = 0. \tag{1.1.9}$$

Возьмем теперь произвольную (дифференцируемую) функцию

$$u = F(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}). \tag{1.1.10}$$

В силу свойства (1.1.7), будем иметь тождество

$$L(F) = 0.$$

Таким образом, выражение (1.1.10) является решением уравнения (1.1.2).

Следовательно, решение уравнения (1.1.2) может содержать произвольные функции. Остается показать, что решение уравнения (1.1.10) является общим решением уравнения (1.1.3), а также выяснить какие дополнительные данные нужно ввести, чтобы из бесконечного множества решений, задаваемых равенством (1.1.10), выделить одно единственное решение. Докажем, что формула (1.1.10), где F – произвольная дифференцируемая функция своих аргументов, дает общее решение уравнения (1.1.2).

Пусть какое-нибудь решение уравнения (1.1.2) области D есть $u = \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то есть

$$a_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \ldots + a_n \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} \equiv 0. \tag{1.1.11}$$

Так как $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}$, по предположению, решения (1.1.2), то имеют место тождества (1.1.9):

$$a_1 \frac{\partial \psi_i}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial \psi_i}{\partial x_2} + \ldots + a_n \frac{\partial \psi_i}{\partial x_n} \equiv 0, \; i = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{1.1.12}$$

Система уравнений (1.1.11), (1.1.12) для определения функций $a_1, a_2, \ldots, a_n$ является линейной однородной. Она допускает не равные нулю решения и, следовательно, определитель этой системы равен нулю. Этот определитель – якобиан от функций $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}$. Итак, мы имеем

$$\frac{D(\Phi, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1})}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \equiv 0. \tag{1.1.13}$$

Отсюда, в силу теоремы о якобианах, следует, что между Φ, $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}$ существует функциональная зависимость, то есть для всех значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в рассматриваемой области имеет место равенство

$$G(\Phi, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}) = 0. \tag{1.1.14}$$

Заметим, что в функциональном определителе, стоящем в левой части равенства (1.1.13), заведомо один из миноров первой строки не равен тождественно нулю. В самом деле, если система имела начальные значения переменных

$$x_1 = x_1^0, x_2 = x_2^0, \ldots, x_n = x_n^0,$$

причем $a_n(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \neq 0$, то, в предположении, что в системе (1.1.3) x_n взято за независимое переменное, и первые интегралы имеют вид $\psi_i = x_i^0$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$ при значениях переменных, близких к начальным

$$\frac{D(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1})}{D(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})} \neq 0.$$

Отсюда следует, в силу той же теоремы о якобианах, что соотношение (1.1.14) может быть разрешено относительно функции Φ, и мы получаем

$$\Phi = F(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}).$$

Итак, всякое решение уравнения (1.1.2) задается, в окрестности точки $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ формулой (1.1.10), причем найденное решение является общим. Очевидно, что между любыми решениями $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ уравнения (1.1.2) существует функциональная зависимость $G(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n) = 0$. Если $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}$ независимы, то функция F в тождественный нуль не обращается в рассматриваемой области, так как уравнение может быть разрешено относительно ψ_n.

Пример 1.1.2. Найти общее решение уравнения

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0.$$

Запишем соответствующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \ldots = \frac{dx_1}{x_1}.$$

Независимая система ее первых интегралов есть

$$\frac{x_1}{x_n} = c_1, \frac{x_2}{x_n} = c_2, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n} = c_{n-1}, \quad x_n \neq 0.$$

Общее решение

$$f = F\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n}\right).$$

Пример 1.1.3. Решить уравнение $\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = 1.$

Составляем вспомогательную систему уравнений $dx = dy = dz$. Её первые интегралы имеют вид

$$x - y = c_1, \quad z - x = c_2.$$

Интеграл исходного уравнения

$$\Phi(x - y, z - x) = 0,$$

откуда $z = x + \phi(x - y)$.

1.2. Задача Коши для уравнений в частных производных первого порядка

Задача Коши для уравнения

$$L(u) \equiv a_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + a_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0 \qquad (1.2.1)$$

ставится следующим образом: фиксируется одна из n независимых переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, например, x_n и задается функция

$$u|_{x_n = x_n^0} = \varphi(x_1, x_2, \dots x_{n-1}). \qquad (1.2.2)$$

Задача, состоящая в нахождении решения уравнения (1.2.1), удовлетворяющего условию (1.2.2), называется задачей Коши.

Предполагается, что φ определена для значений $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ в окрестности $x_1^0, x_2^0, \dots, x_{n-1}^0$, причем точка $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ не является особой точкой для системы (1.1.3). Далее, допустим, что $a_n(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \neq 0$. При этих предположениях система уравнений

$$\begin{cases} \psi_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n^0) = \overline{\psi_1}, \\ \psi_2(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n^0) = \overline{\psi_2}, \\ \dots, \\ \psi_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n^0) = \overline{\psi_{n-1}}, \end{cases} \qquad (1.2.3)$$

где ψ_i являются независимыми интегралами системы (1.1.3), а $\overline{\psi_i}$ – новые переменные, может быть в окрестности точки $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ разрешена относительно $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$. Пусть соответствующие точки имеют вид

$$\begin{cases} x_1 = g_1(\overline{\psi_1}, \overline{\psi_2}, \dots, \overline{\psi_{n-1}}), \\ x_2 = g_2(\overline{\psi_1}, \overline{\psi_2}, \dots, \overline{\psi_{n-1}}), \\ \dots \\ x_{n-1} = g_{n-1}(\overline{\psi_1}, \overline{\psi_2}, \dots, \overline{\psi_{n-1}}). \end{cases} \qquad (1.2.4)$$

При этом когда $\overline{\psi_i}$ принимают значения

$$\overline{\psi}_i^0 = \psi_i(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0),$$

соответствующие функции g_i принимают значения x_i^0, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. При наличии частных производных у ψ_i, функции g_i также дифференцируемы. Искомое решения уравнения (1.1.2), удовлетворяющее начальному условию (1.2.2), есть

$$f = \varphi(g_1(\psi_1, \ldots, \psi_{n-1}), g_2(\psi_1, \ldots, \psi_{n-1}), \ldots, g_{n-1}(\psi_1, \ldots, \psi_{n-1})). \quad (1.2.5)$$

В самом деле, во-первых, выражение (1.2.5), являясь функцией от частных решений ψ_i, само является решением уравнения (1.2.1). Во-вторых, если положить $x_n = x_n^0$, то величины ψ_i обращаются в $\overline{\psi_i}$ в силу формул (1.2.3). Но, по формулам (1.2.4), $g_i(\overline{\psi_1}, \overline{\psi_2}, \ldots, \overline{\psi_{n-1}})$ равны величинам $x_i (i = 1, 2, \ldots, n-1)$, поэтому из формул (1.2.5) получаем при $x = x_n^0$

$$f = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}).$$

Из построения решения очевидно, что оно однозначно определено начальными данными (1.2.2).

Пример 1.2.1. Найти интегральную поверхность уравнения

$$x\frac{\partial z}{\partial y} - y\frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

проходящую через кривую $x = 0, z = y^2$.

Интегрируем систему уравнений

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{0}.$$

Откуда $z = c_1$, $x^2 + y^2 = c_2$, исключая x, y и z из уравнений $x^2 + y^2 = c_2$, $z = c_1$, $x = 0$, $z = y^2$, получаем $c_1 = c_2$, откуда $z = x^2 + y^2$.

Пример 1.2.2. Решить задачу Коши

$$y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad (1.2.6)$$

$$z|_{y=0} = \varphi(x). \quad (1.2.7)$$

Соответствующая система обыкновенных дифференциальных уравнений сводится к одному уравнению

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x}$$

и имеет общий интеграл $x^2+y^2=c$. Общее решение данного уравнения

$$z=\Phi(x^2+y^2),$$

где Φ – произвольная дифференцируемая функция. При $y=0$, $z=\Phi(x^2)=\varphi(x)$, откуда $\Phi(x)=\varphi(\sqrt{x})$, и, следовательно, $\Phi(x^2+y^2)=$ $=\varphi(\sqrt{x^2+y^2})$. Таким образом, решение задачи Коши

$$z=\varphi(\pm\sqrt{x^2+y^2}).$$

1.3. Классификация уравнений с частными производными второго порядка

Так исторически сложилось, что выделяют отдельно классификацию уравнений в частных производных второго порядка относительно функции двух независимых переменных (или, коротко говоря, уравнений в частных производных с двумя независимыми переменными) и классификацию уравнений в частных производных второго порядка с несколькими независимыми переменными.

Третий параграф главы будет посвящен уравнениям в частных производных второго порядка с двумя независимыми переменными как линейным, так и квазилинейным. Здесь изучаются основные типы уравнений: гиперболический, параболический и эллиптический, соответствующие им канонические формы и методы приведения к ним.

Четвертый параграф главы будет посвящен уравнениям в частных производных второго порядка с несколькими независимыми переменными, и мы рассмотрим только случай постоянных коэффициентов. Изучим основные типы: гиперболический, ультрагиперболический, параболический и эллиптический, соответствующие им канонические формы и алгоритм приведения к ним.

Определение 1.3.1. *Уравнением с частными производными второго порядка с двумя независимыми переменными x и y называется соотношение*

$$F(x,y,u,u_x,u_y,u_{xx},u_{xy},u_{yy})=0.$$

Аналогично записывается уравнения и для большего числа независимых переменных.

Рассмотрим уравнение в частных производных второго порядка относительно неизвестной функции в следующего вида:

$$a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+a_{22}u_{yy}+b_1u_x+b_2u_y+cu+f=0. \tag{1.3.1}$$

Определение 1.3.2. *Уравнение (1.3.1) называется линейным относительно старших производных, если* a_{11}, a_{12}, a_{22} *– функции переменных* x *и* y. *Если коэффициенты* a_{11}, a_{12}, a_{22} *зависят не только от* x *и* y, *а являются функциями* x, y, u, u_x, u_y, *то такое уравнение называется квазилинейным.*

Определение 1.3.3. *Уравнение (1.3.1) называется линейным, если оно линейно как относительно старших производных, так и относительно функции* $u(x, y)$ *и ее первых производных* u_x, u_y, *т.е.* a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, c, f *– функции только переменных* x *и* y.

Если коэффициенты a_{11}, a_{12}, a_{22} не зависят от x и y, то оно представляет собой линейное *уравнение с постоянными коэффициентами*, если $f(x, y) = 0$, то уравнение называется *однородным.*

Рассмотрим уравнение, линейное относительно старших производных. Поскольку нас интересует только главная (линейная его часть), остальные члены обозначим через Φ

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + \Phi = 0. \tag{1.3.2}$$

При помощи преобразования переменных

$$\xi = \varphi(x, y), \qquad \eta = \psi(x, y),$$

допускающего обратное преобразование, причем ξ и η дважды непрерывно дифференцируемые функции до второго порядка включительно, мы получаем новое уравнение, эквивалентное исходному. Построим ξ и η так, чтобы уравнение (1.3.2) с новыми переменными имело более простую форму. Преобразуя производные к новым переменным, получаем

$$\begin{gathered}
u_x = u_x(\xi, \eta) = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x, \\
u_y = u_y(\xi, \eta) = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y, \\
u_{xx} = u_{\xi\xi}(\xi_x)^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + \xi_{xx}u_\xi + u_{\eta\eta}(\eta_x)^2 + \eta_{xx}u_\eta, \\
u_{yy} = u_{\xi\xi}(\xi_y)^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + \xi_{yy}u_\xi + u_{\eta\eta}(\eta_y)^2 + \eta_{yy}u_\eta, \\
u_{xy} = u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi\xi_{xy} + u_\eta\eta_{xy}.
\end{gathered} \tag{1.3.3}$$

Подставим найденные производные (1.3.3) в уравнение (1.3.2) и получим

$$\bar{a}_{11}u_{\xi\xi} + 2\bar{a}_{12}u_{\xi\eta} + \bar{a}_{22}u_{\eta\eta} + \bar{\Phi} = 0, \tag{1.3.4}$$

где

$$\begin{gathered}
\bar{a}_{11} = a_{11}(\xi_x)^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}(\xi_y)^2, \\
\bar{a}_{12} = a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + a_{22}\xi_y\eta_y, \\
\bar{a}_{22} = a_{11}(\eta_x)^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}(\eta_y)^2,
\end{gathered}$$

а функция $\bar{\Phi}$ не зависит от производных второго порядка функции u.

Рассмотрим уравнение с частными производными первого порядка

$$a_{11}(z_x)^2 + 2a_{12}z_x z_y + a_{22}(z_y)^2 = 0. \tag{1.3.5}$$

Пусть $z = \varphi(x, y)$ – какое-нибудь частное решение этого уравнения. Если положить $\xi = \varphi(x, y)$, то коэффициент $\bar{a}_{11}$, очевидно, будет равен нулю. Таким образом, упомянутая выше задача связана с решением уравнения (1.3.5).

Лемма 1.3.1. *Если $z = \varphi(x, y)$ является частным решением уравнения (1.3.5), то соотношение $\varphi(x, y) = c$ представляет собой общий интеграл обыкновенного дифференциального уравнения*

$$a_{11}(dy)^2 - 2a_{12}dxdy + a_{22}(dx)^2 = 0. \tag{1.3.6}$$

Доказательство. Пусть $z = \varphi(x, y)$ удовлетворяет уравнению (1.3.5), тогда

$$a_{11}(\varphi_x)^2 + 2a_{12}\varphi_x\varphi_y + a_{22}(\varphi_y)^2 = 0. \tag{1.3.7}$$

Тождество (1.3.7) выполняется для всех x, y в той области, где задано решение. Соотношение $\varphi(x, y) = c$ является общим интегралом уравнения (1.3.7), если функция y, определенная из неявного соотношения $\varphi(x, y) = c$, удовлетворяет уравнению (1.3.7). Пусть $y = f(x, c)$ есть эта функция, тогда

$$\frac{dy}{dx} = -\left.\frac{\varphi_x(x, y)}{\varphi_y(x, y)}\right|_{y=f(x,c)}. \tag{1.3.8}$$

Преобразуем (1.3.6) к виду

$$a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2a_{12}\frac{dy}{dx} + a_{22} = 0. \tag{1.3.9}$$

Подставим (1.3.8) в (1.3.9) и получим

$$a_{11}\left(\frac{\varphi_y}{\varphi_x}\right)^2 + 2a_{12}\left(\frac{\varphi_y}{\varphi_x}\right) + a_{22} = 0.$$

Это выражение равно нулю при всех значениях x и y из области определения функции φ, а не только при $y = f(x, c)$. Таким образом, получили (1.3.6). □

Лемма 1.3.2. *Если $\varphi(x, y) = c$ представляет собой общий интеграл обыкновенного дифференциального уравнения (1.3.6), то функция $z = \varphi(x, y)$ удовлетворяет уравнению (1.3.5).*

Доказательство. Пусть $\varphi(x, y) = c$ – общий интеграл уравнения (1.3.6). Докажем, что

$$a_{11}\varphi_x^2 + 2a_{12}\varphi_x\varphi_y + a_{22}\varphi_y^2 = 0 \tag{1.3.10}$$

для любой точки (x, y). Пусть (x_0, y_0) – какая-нибудь фиксированная точка. Если мы докажем, что в ней выполняется (1.3.10), то в силу произвольности (x_0, y_0) будет следовать, что равенство (1.3.10) есть тождество и функция $z = \varphi(x, y)$ является решением (1.3.5).

Проведем через точку (x_0, y_0) интегральную кривую уравнения (1.3.6), полагая $\varphi(x_0, y_0) = c_0$. Тогда можно рассмотреть кривую $y = f(x, c_0)$. Очевидно, что $y_0 = f(x_0, c_0)$. Для всех точек этой кривой имеем

$$a_{11}\left(\frac{\varphi_y}{\varphi_x}\right)^2 + 2a_{12}\left(\frac{\varphi_y}{\varphi_x}\right) + a_{22} =$$

$$= \left[a_{11}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2 - 2a_{12}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right) + a_{22}\right]_{y=f(x,c_0)} = 0.$$

Полагая $x = x_0$, получим

$$a_{11}(\varphi_x(x_0, y_0))^2 + 2a_{12}\varphi_x(x_0, y_0)\varphi_y(x_0, y_0) + a_{22}(\varphi_y^2(x_0, y_0))^2 = 0.$$

$\square$

Определение 1.3.4. *Уравнение (1.3.6) называется характеристическим для уравнения (1.3.2), а его общие интегралы – характеристиками.*

Полагая $\xi = \varphi(x, y)$, где $\varphi(x, y) = \text{const}$ есть общий интеграл уравнения (1.3.6), мы обращаем в нуль коэффициент при $u_{\xi\xi}$. Если $\psi(x, y) = \text{const}$ является другим общим интегралом уравнения (1.3.7), независимым от $\varphi(x, y)$, то полагая $\eta = \psi(x, y)$, мы обратим в нуль также и коэффициент при $u_{\eta\eta}$.

Уравнение (1.3.7) распадается на два уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}, \tag{1.3.11}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}. \tag{1.3.12}$$

Определение 1.3.5. *Уравнение (1.3.2) называется в точке M уравнением гиперболического типа, если $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$ в точке M; эллиптического типа, если $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$ в точке M; параболического типа, если $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$ в точке M.*

Поскольку

$$\bar{a}_{12}^2 - \bar{a}_{11}\bar{a}_{22} = (a_{12}^2 - a_{11}a_{22})D^2,$$

$$D = \xi_x\eta_y - \eta_x\xi_y \neq 0,$$

$$D = \begin{vmatrix} \xi_x & \eta_x \\ \xi_y & \eta_y \end{vmatrix},$$

то при замене переменных тип уравнения не меняется. В различных точках плоскости $\mathbb{R}^2$ уравнение может принадлежать различным типам. Рассмотрим область G, во всех точках которой уравнение (1.3.2) имеет один и тот же тип. Тогда через каждую точку области G проходят две характеристики:

1) гиперболический тип – характеристики действительны и различны;

2) эллиптический тип – характеристики комплексны и различны;

3) параболический тип – характеристики действительны и совпадают между собой.

Рассмотрим более подробно характеристики уравнений каждого типа. Начнем с характеристик уравнений гиперболического типа.

1. Для уравнений гиперболического типа $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$. Решения (1.3.11) и (1.3.12) действительны и различны. Оба общих интеграла $\varphi(x, y) = c_1$ и $\psi(x, y) = c_2$ определяют действительные семейства характеристик.

Сделаем замену переменных

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y).$$

Тогда $\bar{a}_{11} = \bar{a}_{22} = 0$, а уравнение (1.3.5) примет вид

$$u_{\xi\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta), \quad \text{где} \quad \Phi = -\frac{\bar{F}}{2\bar{a}_{12}}. \tag{1.3.13}$$

Получили каноническую форму уравнений гиперболического типа.

Положим $\xi = \alpha + \beta$, $\eta = \alpha - \beta$, т.е. $\alpha = \dfrac{\xi + \eta}{2}$, $\beta = \dfrac{\xi - \eta}{2}$, где α и β – новые переменные. Тогда

$$u_\xi = (u(\alpha, \beta))'_\xi = \frac{1}{2}u_\alpha + \frac{1}{2}u_\beta;$$

$$u_\eta = (u(\alpha, \beta))'_\eta = \frac{1}{2}u_\alpha - \frac{1}{2}u_\beta;$$

$$u_{\xi\eta} = \frac{1}{4}u_{\alpha\alpha} - \frac{1}{4}u_{\alpha\beta} - \frac{1}{4}u_{\beta\beta} + \frac{1}{4}u_{\beta\alpha} = \frac{1}{4}(u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta}).$$

Подставляя полученные частные производные в уравнение (1.3.13), получим

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = \Phi_1 \quad (\Phi_1 = 4\Phi).$$

Корректность. Для того чтобы было возможно введение новых переменных ξ и η через функции φ и ψ, нужно убедиться в независимости этих функций. Таким образом, необходимо показать, что

$$\begin{vmatrix} \xi_x & \eta_x \\ \xi_y & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0.$$

Докажем от противного. Пусть

$$\begin{vmatrix} \xi_x & \eta_x \\ \xi_y & \eta_y \end{vmatrix} = 0$$

в некоторой точке M. Тогда $\varphi_x\psi_y = \psi_x\varphi_y$ или $\dfrac{\varphi_x}{\varphi_y} = \dfrac{\psi_x}{\psi_y}$, но $\dfrac{\varphi_x}{\varphi_y} \neq \dfrac{\psi_x}{\psi_y}$ из формул (1.3.11), (1.3.12). При этом мы считаем, что $a_{11} \neq 0$, что не является ограничением общности.

2. Для уравнений параболического типа $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$. Уравнения (1.3.11) и (1.3.12) имеют один общий интеграл $\varphi(x,y) = c$. Первая новая переменная будет $\xi = \varphi(x,y)$, а $\eta = \psi(x,y)$ необходимо выбрать из условия независимости, т.е. их якобиан должен быть отличен от нуля. Получим

$$\bar{a}_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 = |a_{12} = \sqrt{a_{11}a_{22}}| = (\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\xi_y)^2 = 0.$$

$$\begin{aligned} \bar{a}_{12} &= a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + a_{22}\xi_y\eta_y = \\ &= (\sqrt{a_{11}})^2\xi_x\eta_x + \sqrt{a_{11}a_{22}}\xi_x\eta_y + \sqrt{a_{11}a_{22}}\xi_y\eta_x + (\sqrt{a_{22}})^2\xi_y\eta_y = \\ &= \sqrt{a_{11}}\xi_x(\sqrt{a_{11}}\eta_x + \sqrt{a_{22}}\eta_y) + \sqrt{a_{22}}\xi_y(\sqrt{a_{11}}\eta_x + \sqrt{a_{22}}\eta_y) = \\ &= (\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\xi_y)(\sqrt{a_{11}}\eta_x + \sqrt{a_{22}}\eta_y) = 0. \end{aligned} \tag{1.3.14}$$

Тогда

$$u_{\eta\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$$

– каноническая форма уравнений параболического типа $\quad (\Phi = -\dfrac{\bar{F}}{\bar{a}_{22}})$.

3. Для уравнений эллиптического типа $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$, общие интегралы (1.3.11), (1.3.12) комплексно-сопряженные функции $\varphi(x,y) = c_1$ и $\bar{\varphi}(x,y) = c_2$. Тогда новые переменные введем следующим образом

$$\alpha = \frac{\varphi + \bar{\varphi}}{2}, \quad \beta = \frac{\varphi - \bar{\varphi}}{2i}.$$

Сделаем замену, обозначив $u = u(\alpha, \beta)$, в уравнении (1.3.2), получим $a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 = a_{11}(\alpha_x + i\beta_x)^2 + 2a_{12}(\alpha_x + i\beta_x)(\alpha_y + i\beta_y) + a_{22}(\alpha_y + i\beta_y)^2 = a_{11}\alpha_x^2 + 2i\alpha_x\beta_x a_{11} - a_{11}\beta_x^2 + 2a_{12}(\alpha_x\alpha_y + i\alpha_x\beta_y + i\beta_x\alpha_y - \beta_x\beta_y) + a_{22}(\alpha_y^2 - \beta_y^2 + 2i\alpha_y\beta_y) = (a_{11}\alpha_x^2 + 2a_{12}\alpha_x\alpha_y + a_{22}\alpha_y^2) - (a_{11}\beta_x^2 + 2a_{12}\beta_x\beta_y + a_{22}\beta_y^2) + 2i(a_{11}\alpha_x\beta_x + (\alpha_x\beta_y + \beta_x\alpha_y)a_{12} + a_{22}\alpha_y\beta_y) = 0$, т.е. $\bar{a}_{11} = \bar{a}_{22}$ и $\bar{a}_{12} = 0$. Таким образом, получим каноническую форму уравнения эллиптического типа

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = \Phi(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta) \quad \left(\Phi = -\frac{\bar{F}}{\bar{a}_{22}}\right).$$

Данное преобразование имеет место только в том случае, если коэффициенты уравнения (1.3.2) – аналитические функции.

Задания для самостоятельного решения

1. Привести к каноническому виду уравнение:

$$u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 5u_x = 0.$$

2. Привести к каноническому виду уравнение:

$$u_{xx} + 4u_{xy} + 5u_{yy} + u_x - 5u_y = 0 = 0.$$

3. Привести к каноническому виду уравнение: $u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} + u = 0$.

4. При каких $(x, y, z) \subset \mathbb{R}^3$ уравнение

$$u_{xy} + (3x + y - z)u_{xz} + (3x - y + z)u_{yz} = 0$$

является гиперболическим?

5. а) Определить тип уравнения

$$u_{xx} - 2\alpha u_{xy} - 3\alpha^2 u_{yy} + \alpha u_y + u_x = 0 \qquad (1.3.15)$$

в зависимости от действительного параметра α.

б) Привести уравнение (1.3.15) к канонической форме.

в) Найти общее решение этого уравнения.

1.4. Классификация уравнений второго порядка со многими независимыми переменными

Рассмотрим линейное уравнение с действительными коэффициентами

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + cu + f = 0. \qquad (1.4.1)$$

Здесь $a_{ij} = a_{ji}$, b_i, c, f являются функциями переменных x_1, x_2, ..., x_n.

Введем новые независимые переменные ξ_k, полагая $\xi_k = \xi_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(k = \overline{1,n})$. Тогда первая производная имеет вид $u_{x_i} = \sum\limits_{k=1}^{n} u_{\xi_k}\alpha_{ik}$, где $\alpha_{ik} = \dfrac{\partial \xi_k}{\partial x_i}$, а вторая производная

$$u_{x_i x_j} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} u_{\xi_k \xi_l}\alpha_{ik}\alpha_{jl} + \sum_{k=1}^{n} u_{\xi k}(\xi_k)_{x_i x_j}.$$

Подставим выражение для производных в уравнение (1.4.1), получим

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \bar{a}_{kl}u_{\xi_k\xi_l} + \sum_{k=1}^{n} \bar{b}_k u_{\xi_k} + cu + f = 0,$$

где $\bar{a}_{kl} = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_{ik}\alpha_{jl}$, $\bar{b}_k = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i\alpha_{ik} + \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}(\xi_k)_{x_i x_j}$.

Рассмотрим квадратичную форму

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^0 y_i y_j, \tag{1.4.2}$$

коэффициенты которой равны значениям коэффициентов a_{ij} исходного уравнения в точке $M_0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$.

Производя над переменными y линейное преобразование $y_i = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\eta_k$, получим для квадратичной формы новое выражение

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \bar{a}_{kl}^0 \eta_k\eta_l, \text{ где } \quad \bar{a}_{kl}^0 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^0\alpha_{ik}\alpha_{jl}.$$

Таким образом, коэффициенты главной части уравнения изменятся аналогично коэффициентам квадратичной формы при линейном преобразовании. Как известно, выбором соответствующего линейного преобразования можно привести матрицу $(a_{ij}^0)_{i,j=1}^n$ квадратичной формы к диагональному виду, в котором

$$|\bar{a}_{ii}^0| = 1 \text{ или } |\bar{a}_{ii}^0| = 0 \ (i = \overline{1,n}); \quad \bar{a}_{ij}^0 = 0 \ (i \neq j,\ i, j = \overline{1,n}).$$

Согласно закону инерции, число положительных, отрицательных и равных нулю коэффициентов $\bar{a}_{ii}^0$ в каноническом виде квадратичной формы инвариантно относительно линейного преобразования.

Определение 1.4.1. *Назовем уравнение (1.4.1) в точке M уравнением эллиптического типа, если все n коэффициентов $\bar{a}^0_{ii}$ одного знака; гиперболического типа (или нормального гиперболического типа), если $n-1$ коэффициент $\bar{a}^0_{ii}$ имеют одинаковый знак, а один коэффициент противоположен им по знаку; ультрагиперболического типа, если среди $\bar{a}^0_{ii}$ имеется m коэффициентов одного знака и $n-m$ коэффициентов противоположного $(m, n-m>1)$; параболического типа, если хотя бы один из коэффициентов $\bar{a}^0_{ii}$ равен нулю.*

Выбирая новые независимые переменные ξ_i так, чтобы в точке M_0 $\alpha_{ik}=\dfrac{\partial \xi_k}{\partial x_i}=\alpha^0_{ik}$, где α^0_{ik} – коэффициенты преобразования, приводящее квадратичную форму (1.4.2) к каноническому виду (например, полагая $\xi_k=\sum \alpha^0_{ik}x_i$), получим в точке M_0 уравнение в зависимости от типа приводящееся к одной из следующих канонических форм:

- эллиптический тип

$$u_{x_1x_1}+u_{x_2x_2}+\ldots+u_{x_nx_n}+\Phi=0;$$

- гиперболический тип

$$u_{x_1x_1}=\sum_{i=2}^{n} u_{x_ix_i}+\Phi;$$

- ультрагиперболический тип

$$\sum_{i=1}^{m} u_{x_ix_i}=\sum_{i=m+1}^{n} u_{x_ix_i}+\Phi, \quad m>1,\, n-m>1;$$

- параболический тип

$$\sum_{i=1}^{n-m}(\pm u_{x_ix_i})+\Phi=0, \quad m>0.$$

Таким образом, если уравнение (1.4.1) в некоторой точке M принадлежит к определенному типу, то его можно привести к соответствующей канонической форме в этой точке.

Задания для самостоятельного решения

1. Определить тип уравнения

$$3u_{xx}+4u_{yy}+5u_{zz}+4u_{xy}-4u_{yz}+2u_x-u_y+xy=0.$$

2. Найти общее решение уравнения

$$u_{xx}+2u_{xy}+2u_{xz}+u_{yy}+2u_{yz}+u_{zz}-u=0.$$

2. Волновые математические модели

Процессы распространения волн различной природы моделируются гиперболическими уравнениями математической физики. Волной будем называть процесс распространения начального возмущения. В качестве примера рассмотрим математическую модель малых поперечных колебаний однородной струны. В этой главе представим вывод уравнения колебаний струны, рассмотрим начальные и смешанные задачи для него. Найдем решение задачи Коши для полученного уравнения методом Даламбера, рассмотрим метод характеристик и метод продолжения. Решение смешанной задачи для уравнения колебаний струны получим методом разделения переменных. Рассмотрим задачи для двухмерного и трехмерного волнового уравнения. Получим формулу Кирхгофа и из нее выведем методом спуска формулу Пуассона (для гиперболического уравнения) и формулу Даламбера. Будет рассмотрен физический смысл формул Даламбера, Пуассона и Кирхгофа.

2.1. Вывод уравнения колебаний струны. Постановка начальных и начально-краевых задач

Под струной понимается длинное тело, длина которого значительно превосходит ширину и толщину. Пусть конечные точки струны закреплены, а сама струна туго натянута. Предположим, что все точки струны движутся перпендикулярно ее положению равновесия и в каждый момент времени струна лежит в одной и той же плоскости (см. рис. 1). Выберем в этой плоскости прямоугольную систему координат xOu. Обозначим через $u = u(x,t)$ отклонение струны от положения

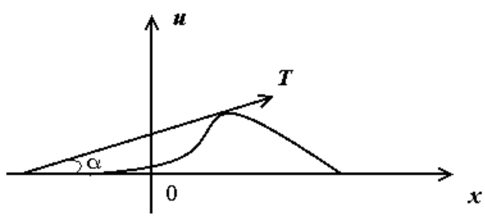


Рис. 1. Профиль струны

равновесия в точке x в момент времени t . Тогда:

- $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ – угловой коэффициент касательной к струне в точке с абсциссой x;

- $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ – мгновенная скорость перемещения точек струны в момент времени t;
- $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ – ускорение движения точки струны в момент времени t.

Кроме того, введем следующие модельные предположения:

1. Будем считать, что струна абсолютно гибкая, т.е. не сопротивляется изгибу. В силу этого сила натяжения, заменяющая действие удаленной части, направлена по касательной к струне.

2. Струна предполагается упругой и подчиняется закону Гука: изменение величины силы натяжения пропорционально изменению длины струны.

3. Струна однородна. Обозначим через ρ ее линейную плотность.

4. На струну в плоскости колебания действуют внешние силы параллельные оси Ou. Силы непрерывно распределены вдоль струны и могут меняться с течением времени. Величину силы, направленной вверх, будем считать положительной, вниз – отрицательной. Обозначим через $g(x,t)$ плотность распределения данных сил.

5. Силами сопротивления среды, в которой колеблется струна, мы пренебрегаем.

6. Пусть α острый угол между осью Ox и касательным вектором к профилю струны. Будем считать колебания струны малыми, т.е. $\alpha^2 \approx 0$.

В силу сделанных предположений имеют место следующие эквивалентности при $\alpha \to 0$:

$$\cos\alpha \approx 1, \quad \sin\alpha \approx \alpha, \quad \sin\alpha \approx \mathrm{tg}\alpha, \quad \mathrm{tg}\alpha \approx \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \approx 0.$$

Найдем длину элемента струны M_1M_2 (см. рис. 2)

$$\breve{M_1 M_2} = \int\limits_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\, dx \approx x_2 - x_1.$$

Следовательно, при натяжении длина струны не увеличивается.

Пусть струна натянута, обозначим через T_1 и T_2 модули силы натяжения, действующей по направлению касательных проведенных в точках с абсциссами x и $x+\Delta x$. В силу первого модельного предположения сумма проекций сил натяжения на ось Ox равна нулю:

$$-T_1\cos\alpha_1 + T_2\cos\alpha_2 = 0, \ \cos\alpha \approx 1.$$

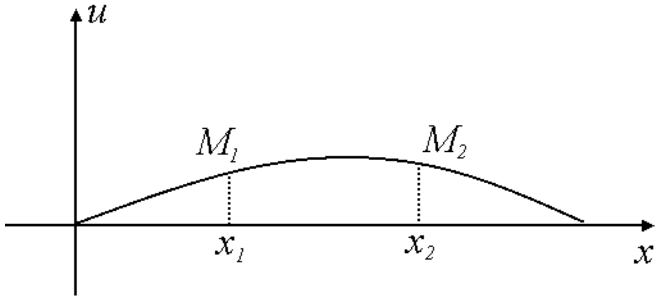


Рис. 2. Профиль струны

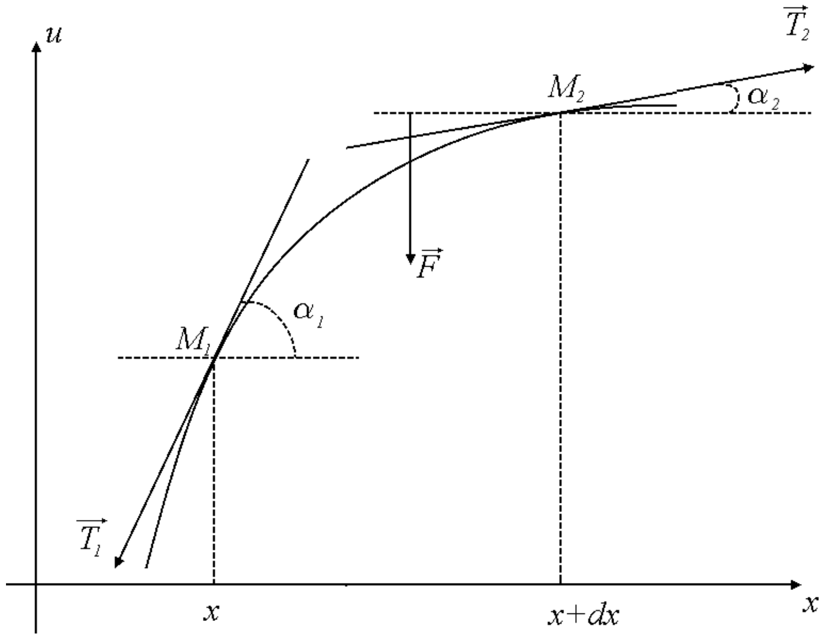


Рис. 3. Профиль струны

Итак, в силу закона Гука и того, что мы пренебрегаем изменением длины любого участка струны получаем, что $T_1 = T_2 = T$. Выделим бесконечно малый участок струны M_1M_2, проектируемый в отрезок $[x, x + \Delta x]$. Вычислим сумму проекций сил натяжения на ось Ou (см. рис. 3):

$$
\begin{aligned}
&-T\sin\alpha_1 + T\sin\alpha_2 = T(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1),\\
&\sin\alpha_2 \approx \operatorname{tg}\alpha_2 \approx u_x'(x+dx,t),\\
&\sin\alpha_1 \approx \operatorname{tg}\alpha_1 \approx u_x'(x,t),\\
&T(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1) = T\left[u_x'(x+dx,t) - u_x'(x,t)\right] = T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx.
\end{aligned}
$$

Равнодействующая внешних сил, приложенная к участку M_1M_2 в момент времени t,

$$F \approx g(x,t)\ \overset{\smile}{M_1M_2} = g(x,t)dx.$$

Далее воспользуемся вторым законом Ньютона (произведение массы на ускорение равно сумме всех действующих сил), получим равенство

$$m = \rho\, \smile{M_1M_2} = \rho dx \Rightarrow \rho dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx + g(x,t)dx.$$

Итак, получили уравнение малых поперечных колебаний струны (или, коротко, уравнение колебаний струны)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho}g(x,t), \quad a^2 = \frac{T}{\rho}. \tag{2.1.1}$$

Полученное уравнение является одномерным представителем волновых уравнений.

Уравнения

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + f(x,y,t),\ u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + f(x,y,z,t)$$

являются двумерным и трехмерным волновыми уравнениями, они описывают колебания мембраны (тонкая плоская пленка, не сопротивляющаяся изгибу и сдвигу) и колебания газа в ограниченном объеме, соответственно.

Рассмотрим однородное (т.е. без учета внешнего воздействия) уравнение колебаний струны и найдем его решение в цилиндре $\Omega \times (0,T)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \text{где } a^2 = \text{const}, \quad u(x,t) \in C^{2,2}(\Omega;(0,T)). \tag{2.1.2}$$

Введем новые переменные

$$\begin{cases} \xi = x - at, \\ \eta = y + at, \end{cases}$$

и сделаем замену $u = u(\xi,\eta)$. Вычислим

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial u}{\partial \xi}(-a) + \dfrac{\partial u}{\partial \eta}a, & \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}a^2 - 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta \xi}a^2 + \dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}a^2, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial u}{\partial \xi} + \dfrac{\partial u}{\partial \eta}, & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta \xi} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}. \end{cases} \tag{2.1.3}$$

Подставляя (2.1.3) в (2.1.2), получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}a^2 - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi}a^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}a^2 - a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right) = -4a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi}.$$

Тогда
$$\frac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\xi} = 0.$$
Так как $\dfrac{\partial}{\partial\eta}\left(\dfrac{\partial u}{\partial\xi}\right) = 0$, то $\dfrac{\partial u}{\partial\xi} = \alpha(\xi)$, где $\alpha(\xi)$ – функция, не зависящая от η. Следовательно, $u = \int \alpha(\xi)d\xi = \alpha_1(\xi) + \beta(\eta)$, здесь $\beta(\eta)$ – функция, не зависящая от ξ. Тогда
$$u(x,t) = F_1(x - at) + F_2(x + at) \tag{2.1.4}$$
– общее решение уравнения колебаний струны (2.1.2), т.е. любые решения (2.1.2) имеют вид (2.1.4) и обратно: для любых функций $F_1 \in C^2(\mathbb{R})$ и $F_2 \in C^2(\mathbb{R})$ функция $u(x,t)$, определяемая формулой (2.1.4), является решением (2.1.2).

Для однозначного определения неизвестной функции $u(x,t)$ необходимо задать **начальные и/или граничные условия**. На каждом из концов отрезка может быть задано одно из трех граничных условий:

1. Граничное условие первого рода (условие Дирихле[1]) – конец струны движется по заданному закону:
$$u(0,t) = \mu(t).$$

2. Граничное условие второго рода (условие Неймана[2]) – задается сила закрепления конца струны:
$$u_x(0,t) = \nu(t).$$

3. Граничное условие третьего рода (условие Робина[3]) – говорит о том, что на закрепленный конец струны со стороны внешней среды действует нагрузка $\nu(t)$, пропорциональная отклонению (h – коэффициент упругости) и противоположно ему направленная:
$$u_x(0,t) = h(u(0,t) - \nu(t)).$$

Граничные условия могут отсутствовать в постановке задачи, например, в том случае если струна очень длинная и поведение на концах не влияют на исследуемый участок. Информация о начальной форме $\phi(x)$

[1]Иоганн Петер Густав Лежён Дирихле (13 февраля 1805, Дюрен – 5 мая 1859, Гёттинген) — немецкий математик.

[2]Карл Готфрид Нейман (7 мая 1832, Кёнигсберг – 27 марта 1925, Лейпциг) — немецкий математик.

[3]Виктор Густав Робин (17 мая 1855, Париж – 20 ноября 1897, Париж) – французский математик.

струны или о начальной скорости $\psi(x)$ движения точек струны должна присутствовать для однозначного определения решения уравнения колебаний струны. Данная информация выражается в начальных условиях (условиях Коши[4])

$$u(x,0) = \phi(x),$$
$$u_t(x,0) = \psi(x).$$

Замечание 2.1.1. Если функции $\nu(t)$ и $\mu(t)$ из первого и второго граничного условия равны нулю, то соответствующее условие называют однородным.

Постановка начально-краевых задач

Найти функцию $u(x,t)$, определенную в области $0 \le x \le l$, $t \ge 0$ и, удовлетворяющую:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + g(x,t), \quad \text{при} \quad 0 < x < l,\ t > 0,$$

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(l,t) = \mu_2(t), \quad t \le 0,$$
$$u(x,0) = \phi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 \le x \le l.$$

Наличие и начальных условий, и граничных условий первого рода говорит о том, что перед нами первая начально-краевая задача. Заменяя граничные условия первого рода на условия второго и третьего рода, мы получим, соответственно, вторую и третью начально-краевую задачу.

Если заданный режим движения на концах струны не оказывает влияния на поведение исследуемого участка струны (такое возникает, когда струна достаточно длинная), имеет смысл поставить только задачу Коши:

Найти функцию $u(x,t)$, определенную в области $x \in \mathbb{R}$, $t \ge 0$ и удовлетворяющую:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + g(x,t), \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0,$$

$$u(x,0) = \phi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Задания для самостоятельного решения

1. Дана задача Коши на плоскости (x,t) с данными на характеристике $\{t = x\}$ для волнового уравнения

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad u|_{t=x} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=x} = \psi(x).$$

[4]Огюстен Луи Коши (21 августа 1789, Париж — 23 мая 1857, Со) — французский математик и механик.

Придумать такие гладкие функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$, чтобы данная задача не имела решения.

2. Привести пример функций $\varphi, \psi \in C^2(\mathbb{R})$ таких, что задача Коши

$$u_{xx} + 5u_{xy} - 6u_{yy} = 0, \quad u|_{y=6x} = \varphi(x), \quad u_y|_{y=6x} = \psi(x)$$

а) имела бы решение (единственно ли это решение?),

б) не имела бы решений.

2.2. Начальная задача для уравнения колебаний струны. Формула Даламбера

Найдем решение задачи Коши для однородного уравнения колебаний струны

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \ x \in \mathbb{R}, \ t > 0, \tag{2.2.1}$$

$$u(x,0) = \phi(x), \ x \in \mathbb{R}, \tag{2.2.2}$$

$$u_t(x,0) = \psi(x), \ x \in \mathbb{R}, \tag{2.2.3}$$

где $\phi(x)$ и $\psi(x)$ – заданные функции.

Общее решение (2.1.4) уравнения (2.2.1) подставим в (2.2.2), (2.2.3) и получим

$$\begin{cases} F_1(x) + F_2(x) = \phi(x), \\ -aF_1'(x) + aF_2'(x) = \psi(x). \end{cases}$$

Проинтегрируем второе уравнение на промежутке $[0, x]$

$$\int\limits_0^x \left[-aF_1'(s) + aF_2'(s)\right] ds = -aF_1(x) + aF_1(0) + aF_2(x) - aF_2(0) = \int\limits_0^x \psi(s) ds.$$

Тогда

$$\begin{cases} F_1(x) + F_2(x) = \phi(x), \\ -F_1(x) + F_2(x) = \dfrac{1}{a}\displaystyle\int\limits_0^x \psi(s) ds + C, \text{ где } C = F_2(0) - F_1(0). \end{cases}$$

Найдем функции F_1 и F_2

$$F_1(z_1) = \frac{\phi(z_1)}{2} - \frac{1}{2a}\int\limits_0^{z_1} \psi(s) ds - \frac{C}{2}, \text{ где } \ x = z_1,$$

$$F_2(z_2) = \frac{\phi(z_2)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_0^{z_2} \psi(s)ds + \frac{C}{2}, \text{ где } x = z_2.$$

Подставим найденные функции $F_1(z_1)$ и $F_2(z_2)$ в (2.1.4) с учетом того, что $z_1 = x - at$, а $z_2 = x + at$, получим

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\phi(x+at) + \phi(x-at)\right] + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(s)ds. \qquad (2.2.4)$$

Формула (2.2.4) называется формулой Даламбера[5] решения задачи Коши для однородного уравнения малых колебаний бесконечной струны.

Теорема 2.2.1. *(о существовании и единственности) Пусть $\phi \in C^2(\mathbb{R})$ и $\psi \in C^1(\mathbb{R})$. Тогда существует единственное решение $u \in C_1^{2,2}(\mathbb{R}, [0,+\infty))$ задачи (2.2.1) – (2.2.3).*

Доказательство. Для доказательства существования решения нужно убедиться, что функция $u(x,t)$, заданная формулой (2.2.4) удовлетворяет (2.2.1) – (2.2.3). Для этого вычислим

$$\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(s)ds = \psi(x+at) - \psi(x-at),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(s)ds = \psi'(x+at) - \psi'(x-at),$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(s)ds = a\psi(x+at) + a\psi(x-at),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(s)ds = a^2\psi'(x+at) - a^2\psi'(x-at).$$

Подставим найденные производные в (2.2.1) – (2.2.3) и получим верное тождество. Из предположения $\phi \in C^2(\mathbb{R})$ и $\psi \in C^1(\mathbb{R})$ функция $u(x,t)$, также будет класса $C^{2,2}$. Единственность следует из построения решения. □

Решение задачи Коши (2.2.2), (2.2.3) для неоднородного уравнения колебаний струны

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t) \qquad (2.2.5)$$

[5] Жан Лерон Даламбер (Д'Аламбер) (16 ноября 1717, Париж – 29 октября 1783, Париж) — французский учёный-энциклопедист, широко известен как философ, математик и механик.

имеет вид

$$u(x,t)=\frac{\phi(x+at)+\phi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(s)ds+$$
$$+\frac{1}{2a}\int\limits_0^t\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(s,\tau)d\tau ds. \tag{2.2.6}$$

Идея решения та же, что и в случае линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений, т.е. решение (2.2.2), (2.2.3), (2.2.5) есть сумма общего решения однородного уравнения с ненулевыми начальными условиями (2.2.4) и частного решения неоднородного уравнения с нулевыми начальными условиями. Убедимся, что

$$u_1(x,t)=\frac{1}{2a}\int\limits_0^t\left[\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)d\xi\right]d\tau \tag{2.2.7}$$

является решением задачи

$$u_{1tt}=a^2u_{1xx}+f(x,t),\quad t\geq 0,\ x\in\mathbb{R}, \tag{2.2.8}$$
$$u_1(x,0)=0, \tag{2.2.9}$$
$$u_{1t}(x,0)=0. \tag{2.2.10}$$

Найдем производные:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}=\frac{1}{2a}\int\limits_0^t\left[af(x+a(t-\tau),\tau)+af(x-a(t-\tau),\tau)\right]d\tau,$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}=\frac{1}{2a}\left((af(x,t)+af(x,t))+\int\limits_0^t\left[a^2f'(x+a(t-\tau),\tau)-\right.\right.$$
$$\left.\left.-a^2f'(x-a(t-\tau),\tau)\right]d\tau\right),$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}=\frac{1}{2a}\int\limits_0^t\left[f(x+a(t-\tau),\tau)-f(x-a(t-\tau),\tau)\right]d\tau,$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}=\frac{1}{2a}\int\limits_0^t\left[f'(x+a(t-\tau),\tau)-f'(x-a(t-\tau),\tau)\right]d\tau.$$

Подставив найденные производные в (2.2.8), получим тождество. Условия (2.2.9) и (2.2.10): $u_1(x,0)=0$, $\left.\dfrac{\partial}{\partial t}u_1(x,t)\right|_{t=0}=0$ также выполняются.

Таким образом, мы доказали, что (2.2.6) является решением задачи (2.2.2), (2.2.3), (2.2.5). Единственность следует из построения.

Задания для самостоятельного решения

1. Рассмотрим задачу Коши для волнового уравнения

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \ \ (a = \text{const} > 0), \quad u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x).$$

Доказать, что если в этой задаче $\varphi(x)$, $\psi(x)$ – полиномы, то решение $u(x,t)$ тоже полином. Какова его степень?

2. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \ (x > 0, t > 0), \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad u(0,t) = 0. \end{cases}$$

2.3. Метод распространяющихся волн

Функция $u(x,t)$, определяемая формулой (2.2.4), описывает процесс распространения начального отклонения и начальной скорости. Если зафиксировать $t = t_0$, то $u(x,t_0)$ представляет профиль струны в момент времени t_0. Зафиксируем $x = x_0$, получим $u(x_0,t)$, представляющую процесс движения одной точки.

Начнем с функции $F_1(x - at)$ и построим графики этой функции (см. рис. 4) при возрастающих значениях $t = t_1$, $t = t_2$, $t = t_3$ и т.д. Второй

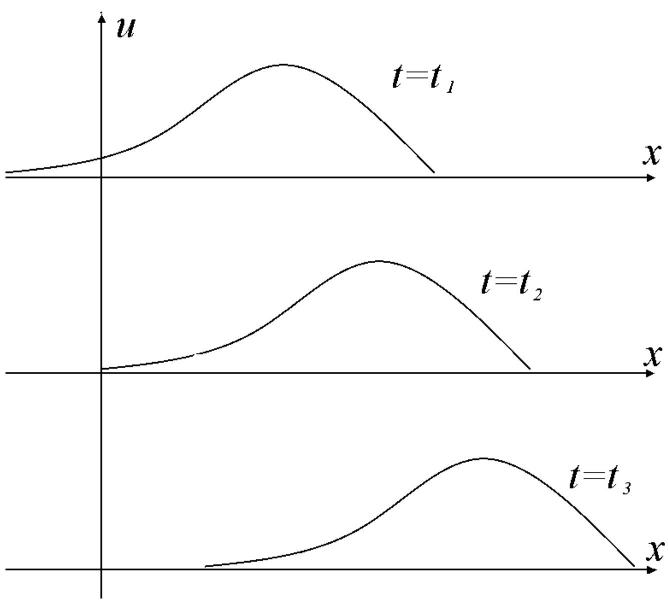


Рис. 4. Распространение бегущей волны

график сдвинут относительно первого на величину $a(t_2-t_1)$, третий – на величину $a(t_3-t_1)$. При этом если мысленно перемещаться вправо вдоль струны с постоянной скоростью a, то отклонение струны будет казаться все время постоянным. Действительно, начав движение, скажем, в точке x_0 и переместившись за время t в точку x, будем иметь $x = x_0 + at$ или $x-at = x_0$. Но тогда $u(x,t) = F_1(x-at) = F_1(x_0+at-at) = F_1(x_0)$. Таким образом, наблюдатель будет видеть тот же профиль, что и в начальный момент времени. Процесс передвижения отклонения по струне называется волной. При этом коэффициент $a = \sqrt{\dfrac{T_0}{\rho}}$ определяет скорость распространения волны. Второе слагаемое $F_2(x + at)$ будет представлять тот же процесс, но только волна будет распространяться со скоростью a влево. Общий случай является результатом наложения обоих случаев (суперпозицией двух волн $F_1(x - at)$ и $F_2(x + at)$), где

$$F_1(x-at) = \frac{1}{2}\phi(x-at) - \Psi(x-at),$$
$$F_2(x+at) = \frac{1}{2}\phi(x+at) + \Psi(x+at),$$
$$\Psi(z) = \frac{1}{2a}\int\limits_0^z \psi(s)ds.$$

Для выявления характера (2.2.4) удобно пользоваться плоскостью состояний (фазовой плоскостью) $u(x,t)$. Прямые $x - at = \mathrm{const}$ и $x + at = \mathrm{const}$ являются характеристиками уравнения (2.2.1). Функция $u = F_1(x-at)$ вдоль характеристики $x-at = c$ сохраняет постоянное значение, функция $u = F_2(x+at)$ постоянна вдоль $x+at = c$. Предположим, что $F_1(x) \neq 0$, только для $x \in [x_1, x_2]$ и $F_1(x) = 0, x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty)$. Проведем характеристики $x - at = x_1$ и $x + at = x_2$ через точки плоскости $(x_1; 0), (x_2; 0)$, они разбивают плоскость на три области (см. рис. 5). Функция $u = F_1(x - at)$ отлична от нуля только в области II, где $x_1 < x - at < x_2$ и характеристики $x - at = x_1$ и $x - at = x_2$ являются передним и задним фронтом распространяющейся направо волны. Аналогично можно построить фазовую плоскость и для второй функции.

Рассмотрим фиксированную точку (x_0, t_0) проведем через нее характеристики $x - at = x_0 - at_0$ и $x + at = x_0 + at_0$ (см. рис. 6). Значение функции $u(x,t) = F_1(x-at)+F_2(x+at)$ в точке $M_0(x_0, t_0)$ определяется

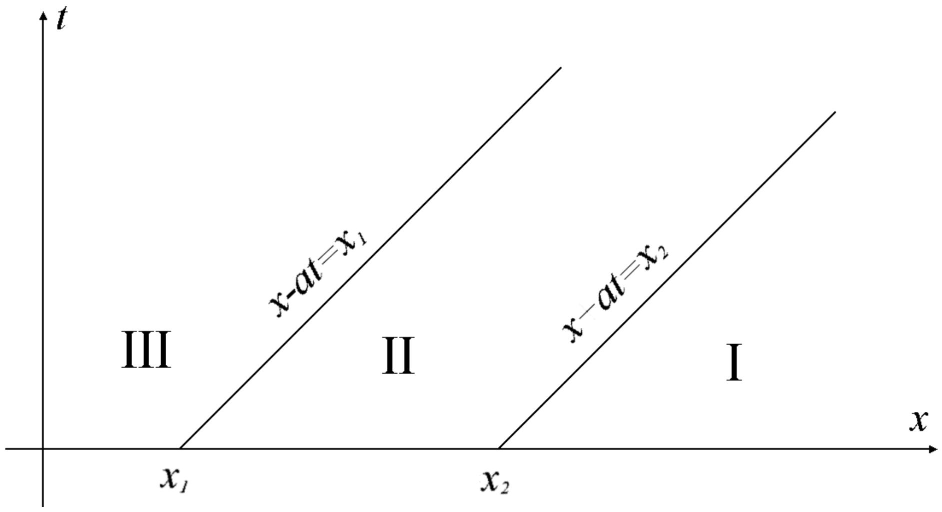


Рис. 5. Фазовая плоскость

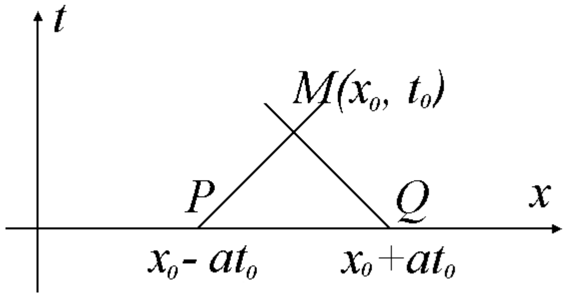


Рис. 6. Характеристический треугольник

значениями функций F_1 и F_2 в точках $P(x_0 - at_0, 0)$, $Q(x_0 + at_0, 0)$.

$$u(x_0, t_0) = \frac{\phi(x_0 - at_0, 0) + \phi(x_0 + a_t 0, 0)}{2} + \frac{1}{2a} \int\limits_{x_0 - at_0}^{x_0 + at_0} \psi(s) ds =$$

$$= u(M) = \frac{\phi(P) + \phi(Q)}{2} + \frac{1}{2a} \int\limits_{P}^{Q} \psi(s) ds.$$

Отклонение $u(x_0, t_0)$ точки x_0 в момент времени t_0 зависит от значений начальных отклонений в вершинах P и Q и от значения начальной скорости на стороне PQ. Начальные данные заданные вне PQ не оказывают влияния на значение функции $u(x,t)$ в точке M. Если начальные условия заданы не на всей бесконечной прямой, а на отрезке PQ, то они однозначно определяют решение внутри характеристического треугольника, основанием которого является отрезок PQ. Представим решение $u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t)$, где $u_1(x,t) = \dfrac{1}{2}[\phi(x - at) + \phi(x + at)]$,

$u_2(x,t) = \Psi(x+at) - \Psi(x-at) = \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(s)ds$. Если начальная скорость равна нулю ($\psi(x) = 0$), тогда $u = u_1(x,t)$ есть сумма правой и левой бегущей волны, форма каждой из которых есть $\dfrac{1}{2}\phi(x)$. Если $\phi(x) = 0$, то $u = u_2(x,t)$ представляет собой возмущение струны, создаваемое начальной скоростью.

Пример 2.3.1. Рассмотрим распространение начального отклонения, заданного в виде равнобедренного треугольника, при условии, что начальная скорость равна нулю. (Такой начальный профиль можно получить, если оттянуть струну в середине отрезка $[x_1, x_2]$). На рисунке 7 изображены положениея струны через промежутки $\Delta t = \dfrac{x_2 - x_1}{8a}$ в моменты времени $t_k = \Delta t k$, $k = \overline{0,5}$. Начиная с момента времени $t = t_0$,

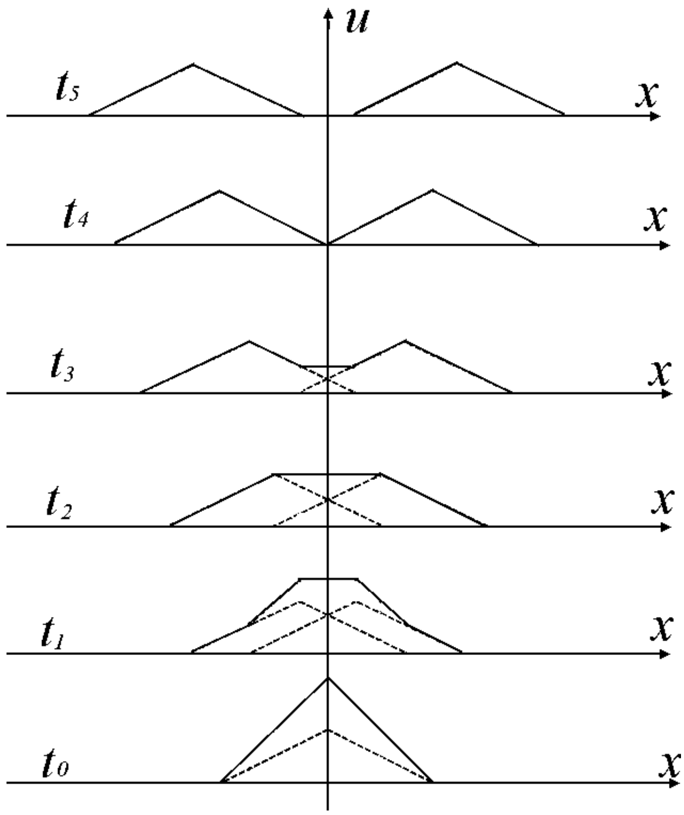


Рис. 7. Распространение начального отклонения

волны начинают расходиться: волна, заданная формулой, $\dfrac{1}{2}\phi(x+at)$ бежит влево, а волна, заданная формулой, $\dfrac{1}{2}\phi(x-at)$ – вправо. Там, где волны накладываются друг на друга (при t_0, t_1, t_2, t_3), они складываются, и сумма волн будет задавать профиль. Как только $t > \dfrac{x_2 - x_1}{a}$, волны разойдутся. Рассмотрим фазовую плоскость (x, t) (см. рис. 8). Проведем характеристики через точки $P(x_1, 0)$ и $Q(x_2, 0)$.

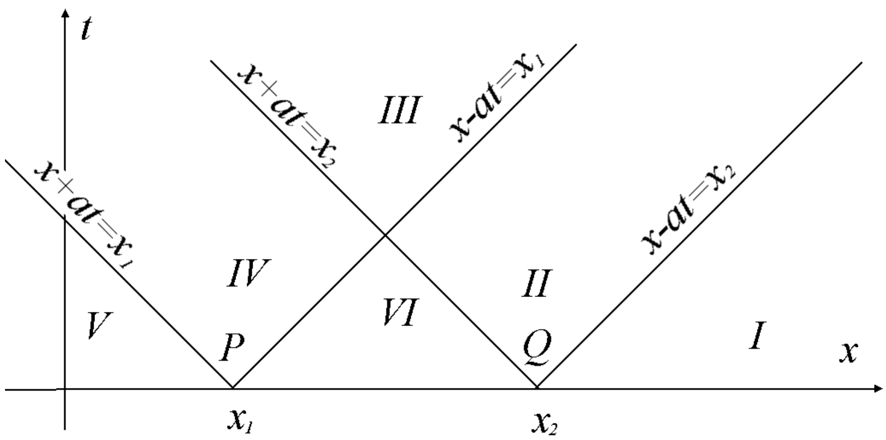


Рис. 8. Характеристический треугольник

В областях I, III, V отклонение равно нулю $u(x,t) \equiv 0$, т.к. характеристический треугольник для любой точки из этих областей не имеет общих точек с отрезком $[x_1, x_2]$, на котором заданы начальные условия. В области II решением является «правая» волна $u = \dfrac{1}{2}\phi(x - at)$; в области IV – «левая» волна $u = \dfrac{1}{2}\phi(x + at)$; в области VI решение есть сумма обеих волн

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\phi(x - at) + \phi(x + at)].$$

Задания для самостоятельного решения

1. Неограниченная струна возбуждена локальным начальным отклонением

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{h}{c}x + h, \ x \in [-c, 0], \\ -\dfrac{h}{c}x + h, \ x \in (0, c], \end{cases}$$

причем $\psi(x) = 0$. Нарисовать профиль струны в моменты времени $t_k = \frac{kc}{4a}$, где $k = \overline{0, 5}$.

2. Неограниченная струна возбуждена локальным начальным отклонением, имеющим вид квадратичной параболы $y = h\left(1 - \dfrac{x^2}{c^2}\right)$ при $x \in [-c, c]$, $\psi(x) = 0$. Нарисовать профиль струны в моменты времени $t_k = \frac{kc}{4a}$, $k = \overline{0, 5}$.

2.4. Полубесконечная струна и метод продолжения

Предположим, что струна в положении покоя располагается на положительной полуоси Ox и ее конец, находящийся в начале координат, неподвижно закреплен:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad t > 0, x \in (0, +\infty), \tag{2.4.1}$$

$$u(x, 0) = \phi(x), \tag{2.4.2}$$

$$u_t(x, 0) = \psi(x), \tag{2.4.3}$$

$$u(0, t) = 0. \tag{2.4.4}$$

Из условий (2.4.2) и (2.4.4) следует, что $\phi(0) = 0$. Решение уравнения (2.4.1) при условиях (2.4.2) – (2.4.4) может быть получено из формулы Даламбера. Допустим, что функции ϕ и ψ, определены при $x \geq 0$, доопределены произвольным образом при $x < 0$. Так как

$$u(0, t) = \frac{\phi(-at) + \phi(at)}{2} + \frac{1}{2a} \int\limits_{-at}^{at} \psi(s) ds, \tag{2.4.5}$$

то для того чтобы $u(0, t)$ было равно нулю при любом значении t, нужно чтобы при $x < 0$:

$$\phi(-x) = -\phi(x) \quad \text{и} \quad \psi(-x) = -\psi(x),$$

т.е. функции ϕ и ψ необходимо продолжить нечетным образом на всю числовую ось. Тогда функция вида

$$u(x, t) = \frac{\Phi(x - at) + \Phi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} \Psi(s) ds$$

определена для любых x, t и при $x \geq 0$ удовлетворяет (2.4.2) – (2.4.4), причем

$$\Phi(x) = \begin{cases} \phi(x), x > 0, \\ -\phi(-x), x < 0, \end{cases} \qquad \Psi(x) = \begin{cases} \psi(x), x > 0, \\ -\psi(-x), x < 0. \end{cases}$$

Возвращаясь к исходным функциям:

$$u(x, t) = \begin{cases} \dfrac{\phi(x + at) + \phi(x - at)}{2} + \dfrac{1}{2a} \displaystyle\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(s) ds, \quad t < \dfrac{x}{a}, x > 0, \\ \dfrac{\phi(x + at) - \phi(at - x)}{2} + \dfrac{1}{2a} \displaystyle\int\limits_{at-x}^{x+at} \psi(s) ds, \quad t > \dfrac{x}{a}, x > 0. \end{cases}$$

В области $t < \dfrac{x}{a}$ влияние граничного условия не сказывается, и выражение для $u(x,t)$ совпадает с формулой для бесконечной прямой.

Если конец струны, находящийся в начале координат, не жестко закреплен (свободный конец), возникает условие:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \tag{2.4.6}$$

тогда начальные данные необходимо продолжить четным образом:

$$\Phi(x) = \begin{cases} \phi(x), x > 0, \\ \phi(-x), x < 0, \end{cases} \qquad \Psi(x) = \begin{cases} \psi(x), x > 0, \\ \psi(-x), x < 0. \end{cases}$$

Возвращаясь к исходным функциям из начальных условий, получим

$$u(x,t) = \begin{cases} \dfrac{\phi(x+at)+\phi(x-at)}{2} + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(s)ds, \text{ если } t < \dfrac{x}{a},\ x > 0, \\ \dfrac{\phi(x+at)-\phi(at-x)}{2} + \dfrac{1}{2a}\left\{\displaystyle\int\limits_{0}^{x+at} \psi(s)ds + \int\limits_{0}^{at-x} \psi(s)ds\right\}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{если } t > \dfrac{x}{a}, x > 0. \end{cases}$$

Физическая интерпретация задачи с таким условием – это, например, продольные колебания упругого стержня со свободным концом, или колебания пружинного маятника.

Задания для самостоятельного решения

1. Найти решение задачи для волнового уравнения на полупрямой в случае однородного краевого условия первого рода:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t),\ x > 0,\ t > 0, \\ u(x,0) = 0,\ x \geq 0, \\ u_t(x,0) = 0,\ x \geq 0, \\ u(0,t) = 0,\ t \geq 0. \end{cases}$$

2. Найти решение задачи для волнового уравнения на полупрямой в случае однородного краевого условия первого рода:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t),\ x > 0,\ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x),\ x \geq 0, \\ u_t(x,0) = \psi(x),\ x \geq 0, \\ u(0,t) = 0,\ t \geq 0. \end{cases}$$

2.5. Корректность задачи Коши для уравнения колебаний струны

При исследовании математических моделей физических процессов Жак Адамар[6] ввел понятие корректности постановки математических задач.

Определение 2.5.1. *Математическая задача поставлена корректно, если*
1) решение задачи существует;
2) решение задачи единственно;
3) решение задачи непрерывно зависит от исходных данных.

Третье условие обусловлено тем, что начальные данные, полученые экспериментальным способом, при наличии ошибки измерения не сильно повлияют на решение.

Проверим корректно ли поставлена задача

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0,\ x \in \mathbb{R},\ t > 0, \tag{2.5.1}$$

$$u(x,0) = \phi(x),\ x \in \mathbb{R}, \tag{2.5.2}$$

$$u_t(x,0) = \psi(x),\ x \in \mathbb{R}, \tag{2.5.3}$$

где $\phi \in C^2(\mathbb{R})$ и $\psi \in C^1(\mathbb{R})$ – заданные функции.

Теорема 2.2.1 говорит о том, что решение задачи (2.5.1) – (2.5.3) существует и единственно, т.е. выполняются 1) и 2) условия корректности постановки математической задачи. Сформулируем и докажем теорему об устойчивости решения Даламбера или, другими словами, о непрерывной зависимости решения от начальных данных.

Теорема 2.5.1. *Каков бы ни был промежуток $[0, t_0]$ и какова бы ни была степень точности ε, найдется $\delta(\varepsilon, t_0)$ такое, что всякие два решения $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ уравнения $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$ в течение промежутка времени $[0, t_0]$ будут различаться между собой меньше, чем на ε:*

$$|u_1(x,t) - u_2(x,t)| < \varepsilon, \quad 0 \le t \le t_0,$$

если только начальные значения

$$u_1(x,0) = \phi_1(x), u_{1t}(x,0) = \psi_1(x),$$

$$u_2(x,0) = \phi_2(x), u_{2t}(x,0) = \psi_2(x),$$

[6]Жак Адамар (8 декабря 1865, Версаль – 17 октября 1963, Париж) – французский математик и механик.

отличаются меньше, чем на δ

$$|\phi_1(x,t) - \phi_2(x,t)| < \delta, \quad |\psi_1(x,t) - \psi_2(x,t)| < \delta.$$

Доказательство. По формуле Даламбера получим

$$|u_1(x,t) - u_2(x,t)| \leq \frac{|\phi_1(x+at) - \phi_2(x+at)|}{2} +$$

$$+\frac{|\phi_1(x-at) - \phi_2(x-at)|}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} |\psi_1(s) - \psi_2(s)| ds \leq$$

$$\leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2a}(x + at - x + at) = \delta + \frac{\delta at}{2a} = \delta + \delta t \leq \delta(1 + t_0).$$

Выбрав δ по правилу $\delta = \dfrac{\varepsilon}{1+t_0}$, тем самым мы докажем требуемое. □

Таким образом, задача (2.5.1) – (2.5.3) поставлена корректно. Часто в приложениях возникают некорректно поставленные задачи. Например, математическая модель, описывающая процесс разрушения, будет заведомо некорректной, поскольку нарушится условие существования. Адамар одним из первых представил примеры некорректно поставленных задач, которые называются примерами Адамара.

Задания для самостоятельного решения

1. Каким двум условиям должна удовлетворять корректно поставленная по Адамару краевая (начально-краевая) задача для уравнений с частными производными?

2. Приведите примеры корректно поставленных задач.

3. Возможна ли некорректная постановка классической задачи Коши?

4. Показать, что задача

$$\begin{cases} u_{tt} + u_{xx} = 0, \\ u|_{t=0} = \varphi_0(x) = 0, \quad u_t|_{t=0} = \psi_0 = \dfrac{1}{n^k}\sin nx \end{cases}$$

некорректна.

2.6. Метод разделения переменных для модели свободных колебаний струны

Основная идея метода Фурье заключается в разделении переменных, поэтому данный метод также носит название "метод разделения переменных". Данный метод предложен Фурье[7] при исследовании математической теории теплопроводности и впоследствии получил его имя. Метод

[7]Барон Жан-Батист Жозеф Фурье (21 марта 1768, Осер, Франция – 16 мая 1830, Париж), французский математик и физик.

Фурье является универсальным и может быть применен к решению большого класса задач. Начнем его изучение с задачи о свободных колебаниях струны, закрепленной на обоих концах:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx},\ t > 0,\ x \in (0, l), \tag{2.6.1}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x),\ u_t(x, 0) = \psi(x), \tag{2.6.2}$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0. \tag{2.6.3}$$

Будем искать частные решения задачи (2.6.1) – (2.6.3) в виде

$$u(x, t) = X(x)T(t), \tag{2.6.4}$$

где $X(x)$ – функция, зависящая только от x, а $T(t)$ – только от t (далее аргументы будем опускать). Дифференцируя выражение (2.6.4) дважды по x и по t, получим

$$u_{xx} = X''T, \quad u_{tt} = XT''.$$

Подставим полученные выражения в (2.6.1), получим

$$XT'' = a^2 XT''.$$

Поделим последнее уравнение на a^2XT в предположении, что $X(x) \neq 0$ $\forall x \in (0, l)$ и $T(t) \neq 0$ $\forall t \in (0, +\infty)$, получим

$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X}. \tag{2.6.5}$$

Для того чтобы функция (2.6.4) была решением уравнения (2.6.1), равенство (2.6.5) должно выполняться при всех значениях x, t ($t > 0, 0 < x < l$). Левая часть (2.6.5) зависит только от t и не может изменяться при изменении x. Поэтому, если зафиксировать t и менять x, левая часть, а следовательно, и правая будут сохранять постоянное значение. Рассуждая аналогично, можно прийти к выводу, что и правая часть, а следовательно, и левая не может меняться при изменении t, следовательно

$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = \lambda, \quad \lambda = \mathrm{const}. \tag{2.6.6}$$

Тогда

$$T'' - \lambda a^2 T = 0, \quad X'' - \lambda X = 0, \tag{2.6.7}$$

$$u(0, t) = X(0)T(t) = 0, \quad u(l, t) = X(l)T(t) = 0.$$

Если $T(t) = 0$, то и $u(x,t) = 0$ для любых x, t. Поэтому $X(0) = 0$, $X(l) = 0$. Таким образом у нас достаточно данных чтобы сформулировать задачу для нахождении функции X. Требуется найти такие значения параметра λ, при которых существуют нетривиальные решения задачи

$$\begin{cases} X'' - \lambda X = 0, \\ X(0) = X(l) = 0, \end{cases} \tag{2.6.8}$$

а также найти эти решения. Такая задача называется задачей Штурма – Лиувилля. Значения параметра λ называются собственными значениями, а решения задачи – собственными функциями (однородной задачи Дирихле для оператора Лапласа на отрезке). Рассмотрим три случая в зависимости от параметра λ:

Первый случай. Пусть $\lambda > 0$. Уравнение (2.6.8) примет вид:

$$X'' = \lambda X. \tag{2.6.9}$$

Составим характеристическое уравнение

$$k^2 = \lambda,$$

корни которого равны

$$k = \pm\sqrt{\lambda}.$$

Тогда общее решение уравнения (2.6.9) имеет вид

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}.$$

Используя условия $X(0) = X(l) = 0$, найдем

$$X(0) = C_1 + C_2 = 0, \quad X(l) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}l} + C_2 e^{\sqrt{-\lambda}l} = 0,$$

$$\begin{aligned} &C_1 = -C_2, \\ &C_1(e^{\sqrt{\lambda}l} - e^{-\sqrt{\lambda}l}) = 0, \\ &C_1 = 0, C_2 = 0. \end{aligned}$$

В итоге получается, что в рассматриваемом случае существует только тривиальное решение $X(x) \equiv 0$.

Второй случай. Пусть $\lambda = 0$, тогда уравнение (2.6.8) примет вид:

$$X''(x) = 0.$$

Его общее решение имеет вид

$$X(x) = C_1 x + C_2.$$

Используя условия $X(0) = X(l) = 0$, найдем

$$\begin{aligned}&X(0) = C_2 = 0, \quad X(l) = C_1 l + C_2 = 0,\\&C_1 = C_2 = 0.\end{aligned}$$

В итоге получается, что в рассматриваемом случае существует только тривиальное решение $X(x) \equiv 0$.

Третий случай. Пусть $\lambda < 0$. Уравнение (2.6.8) примет вид

$$X''(x) = \lambda X.$$

Составим характеристическое уравнение

$$k^2 = \lambda,$$

корни которого равны

$$k = \pm i\sqrt{-\lambda}.$$

Тогда общее решение уравнения (2.6.9) имеет вид

$$X(x) = C_1 \cos\sqrt{-\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{-\lambda}x.$$

Используя условия $X(0) = X(l) = 0$, найдем

$$\begin{aligned}&X(0) = C_1 = 0, \quad X(l) = C_1\cos\sqrt{-\lambda}l + C_2\sin\sqrt{-\lambda}l = 0,\\&C_2\sin\sqrt{-\lambda}l = 0,\\&\sin\sqrt{-\lambda}l = 0,\\&\sqrt{-\lambda}l = n\pi,\\&\lambda_n = -\left(\tfrac{\pi n}{l}\right)^2,\ n \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Таким образом, мы нашли собственные значения λ_n, а также существуют нетривиальные решения задачи (2.6.8)

$$X_n(x) = C_n \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right),\ n \in \mathbb{N}, \tag{2.6.10}$$

где C_n – произвольные постоянные.

Определение 2.6.1. *Система функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$, ..., $\varphi_n(x)$, ... называется ортонормированной на отрезке $[a, b]$, если интеграл от произведения любых двух различных функций системы равен нулю, т.е. выполнено условие ортогональности*

$$\int\limits_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx = 0, \quad m \neq n,$$

но интеграл от квадрата функции равен 1, т.е. выполнено условие нормировки

$$\int_a^b \varphi_n^2(x)dx = 1, \quad \forall n.$$

Покажем, что система функций (2.6.10) ортогональна (положим константы C_n равными единице)

$$\int_0^l \sin\left(\frac{\pi m}{l}x\right)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^l \left[\cos\frac{\pi(m-n)x}{l} - \cos\frac{\pi(m+n)x}{l}\right]dx =$$

$$= |m \neq n| = \left[\frac{l}{\pi(m-n)}\sin\frac{\pi(m-n)x}{l} - \frac{l}{\pi(m+n)}\sin\frac{\pi(m+n)x}{l}\right]\Bigg|_0^l = 0.$$

Пусть $m = n$, найдем значения C_n при которых система функций (2.6.10) будет нормированной

$$C_n^2\int_0^l \sin^2\left(\frac{\pi n}{l}x\right)dx = \frac{C_n^2}{2}\int_0^l \left(1 - \cos\left(2\frac{\pi n}{l}x\right)\right)dx = \frac{C_n^2}{2}l.$$

Из условия нормировки

$$\frac{C_n^2}{2}l = 1.$$

Отсюда следует, что при $C_n = \sqrt{\dfrac{2}{l}}$ система функций X_n будет нормированной.

Вернемся к первому уравнению (2.6.7). В нем положим $\lambda = \lambda_n = -\left(\dfrac{\pi n}{l}\right)^2$. Каждому собственному значению λ_n будет соответствовать функция T_n, определяемая уравнением

$$T_n'' + \left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 T_n = 0.$$

Общее решение получившегося уравнения имеет вид

$$T_n(t) = A_n\cos\frac{\pi n a t}{l} + B_n\sin\frac{\pi n a t}{l}, \tag{2.6.11}$$

где A_n, B_n – произвольные константы. Тогда

$$u_n(x,t) = \left(A_n\cos\frac{n\pi a t}{l} + B_n\sin\frac{n\pi a t}{l}\right)C_n\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Обозначим C_nA_n через a_n, B_nD_n через b_n, получим

$$u_n(x,t) = \left(a_n \cos\frac{n\pi at}{l} + b_n \sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l} \qquad (2.6.12)$$

– частные решения уравнения (2.6.1), удовлетворяющие граничным условиям (2.6.3), называемые собственными функциями задачи. Соответствующие им колебания струны называются собственными колебаниями.

Возьмем сумму решений (2.6.12)

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi at}{l} + b_n \sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}. \quad (2.6.13)$$

Найдем условия, при которых функция (2.6.13) будет решением задачи (2.6.1) – (2.6.3).

Будем подбирать произвольные постоянные a_n и b_n так, чтобы функция (2.6.13) удовлетворяла начальным условиям (2.6.2):

$$u(x,t)|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{l} = \varphi(x). \qquad (2.6.14)$$

Предположим, что ряд (2.6.13) можно почленно дифференцировать по t. Тогда

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{n\pi a}{l}a_n \sin\frac{n\pi at}{l} + b_n\frac{n\pi a}{l}\cos\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}, \\ u_t(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n\frac{n\pi a}{l}\sin\frac{n\pi x}{l} = \psi(x). \end{aligned} \qquad (2.6.15)$$

Формулы (2.6.14) и (2.6.15) показывают, что величины a_n и $b_n\frac{n\pi a}{l}$ являются коэффициентами разложения функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в ряды Фурье по синусам на интервале $(0,l)$. Из теории рядов Фурье известно, что произвольная кусочно-непрерывная и кусочно-дифференцируемая функция $F(x)$, заданная в промежутке $-l \le x \le l$ разлагается в ряд Фурье единственным образом.

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{\pi n}{l}x + b_n \sin\frac{\pi n}{l}x\right),$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} F(x)\cos\frac{\pi n}{l}x dx, \quad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} F(x)\sin\frac{\pi n}{l}x dx.$$

Если $F(x)$ – нечетная, то $a_n = 0$ и

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\pi n}{l} x.$$

Если $F(x)$ задана на промежутке $0 \le x \le l$, то ее можно продолжить нечетным образом на $-l \le x \le l$ и разложить в ряд Фурье. Таким образом, коэффициенты a_n и b_n в (2.6.14), (2.6.15) находятся по формулам

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx, \quad b_n = \frac{2}{\pi n a} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx.$$

Формула (2.6.13) показывает, что в моменты времени $t = \frac{2l}{a}$, $t = \frac{4l}{a}$, $t = \frac{6l}{a}, \ldots$ струна возвращается в свое первоначальное положение; это означает, что колебания струны незатухающие и периодические с периодом $T = \frac{2l}{a}$ (мы пренебрегли силами трения).

Задания для самостоятельного решения

1. Решить задачу

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \ x \in (0, l), \ t > 0, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, \\ u(x,0) = \frac{4h}{l^2} x(x-l), \\ u_t(x,0) = 0. \end{cases}$$

2. Решить задачу

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \ x \in (0, l), \ t > 0, \\ u(0,t) = u_x(l,t) = 0, \\ u(x,0) = \frac{hx}{l}, \ h = \mathrm{const}, \\ u_t(x,0) = 0. \end{cases}$$

2.7. Обоснование метода разделения переменных

В предыдущем параграфе было найдено формальное решение задачи

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \ t > 0, \ x \in (0, +\infty), \tag{2.7.1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \ u_t(x,0) = \psi(x), \tag{2.7.2}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0 \tag{2.7.3}$$

в виде ряда

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi a t}{l} + b_n \sin \frac{n\pi a t}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l}, \tag{2.7.4}$$

где

$$a_n = \frac{2}{l} \int\limits_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx, \quad b_n = \frac{2}{\pi n a} \int\limits_0^l \psi(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx. \tag{2.7.5}$$

Докажем теорему о том, что полученный ряд действительно является решением. Доказательство основывается на признаке Вейерштрасса[8] и теореме Стеклова[9].

Теорема 2.7.1. *(Признак К. Вейерштрасса) Пусть существует последовательность a_n такая, что для любого $x \in X$ выполняется неравенство $|u_n(x)| \le a_n$, кроме того, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится на множестве X абсолютно и равномерно.*

Теорема 2.7.2. *(Теорема В.А. Стеклова) Функция $f \in C^2[a,b]$, удовлетворяющая условиям $f(a) = f(b) = 0$, разлагается в сходящийся ряд Фурье по ортогональной системе собственных функций $\{y_n(x)\}$ задачи Штурма – Лиувилля, то есть*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x), \quad c_n = \frac{(f, y_n)}{(y_n, y_n)},$$

где скалярное произведение $(\cdot,\cdot)$ и ортогональность системы функций понимаются в смысле гильбертова пространства $L^2[a,b]$.

Рассмотрим условия существования решения задачи (2.7.1) – (2.7.3). В дальнейшем, опираясь на классическую теорию рядов Фурье, мы ослабим условия на функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.

Теорема 2.7.3. *Пусть функции $\varphi \in C^4[0,l]$, $\psi \in C^3[0,l]$, $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, $\varphi''(0) = \varphi''(l) = 0$, $\psi(0) = \psi(l) = 0$, $\psi''(0) = \psi''(l) = 0$. Тогда*

[8] Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс (31 октября 1815, Остенфельд – 19 февраля 1897, Берлин), немецкий математик.

[9] Владимир Андреевич Стеклов (28 декабря 1863, Нижний Новгород — 30 мая 1926, Гаспра), русский математик и механик.

для любого $T > 0$ ряд (2.7.4) равномерно сходится в прямоугольнике $\Pi = \{0 \le x \le l, 0 \le t \le T\}$, а его сумма $u(x,t)$ дважды непрерывно дифференцируемая функция в Π и удовлетворяет задаче (2.7.1) – (2.7.3).

Доказательство. Достаточно доказать, что ряд (2.7.4) и ряды, полученные его почленным дифференцированием до второго порядка включительно, равномерно сходятся в полученном прямоугольнике. В этом случае выполнение краевых условий очевидно, т.к. им удовлетворяет каждый член ряда. В силу полноты системы функций $X_n = \sin\dfrac{\pi n x}{l}$, если ряд Фурье непрерывной функции сходится равномерно, то его сумма равна как раз этой функции. Интегрируя по частям, преобразуем коэффициенты ряда a_n :

$$a_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx = -\frac{2}{\pi n}\int\limits_0^l \varphi(x)d\left(\cos\frac{\pi n x}{l}\right) =$$

$$= -\frac{2}{\pi n}\varphi(x)\cos\frac{\pi n x}{l}\Big|_0^l + \frac{2}{\pi n}\int\limits_0^l \varphi'(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx =$$

$$= \frac{2l}{(\pi n)^2}\int\limits_0^l \varphi'(x)d\left(\sin\frac{\pi n x}{l}\right) = \frac{2l}{(\pi n)^2}\varphi'(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\Big|_0^l -$$

$$-\frac{2l}{(\pi n)^2}\int\limits_0^l \varphi''(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx = \frac{2l^2}{(\pi n)^3}\int\limits_0^l \varphi''(x)d\left(\cos\frac{\pi n x}{l}\right) =$$

$$= \frac{2l^2}{(\pi n)^3}\varphi''(x)\cos\frac{\pi n x}{l}\Big|_0^l - \frac{2l^2}{(\pi n)^3}\int\limits_0^l \varphi'''(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx =$$

$$= \frac{2l^3}{(\pi n)^4}\int\limits_0^l \varphi^{IV}(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx.$$

Обозначим через

$$a_n^{(4)} = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi^{IV}(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx,$$

отсюда следует

$$a_n = \left(\frac{l}{\pi n}\right)^4 a_n^{(4)}. \qquad (2.7.6)$$

Интегрируя по частям, преобразуем коэффициенты ряда b_n :

$$b_n = \frac{2}{\pi n a}\int\limits_0^l \psi(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx = -\frac{2l}{(\pi n)^2 a}\int\limits_0^l \psi(x) d\left(\cos\frac{\pi n x}{l}\right) =$$

$$= -\frac{2l}{(\pi n)^2 a}\psi(x)\cos\frac{\pi n x}{l}\Big|_0^l + \frac{2l}{(\pi n)^2 a}\int\limits_0^l \psi'(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx =$$

$$= \frac{2l^2}{(\pi n)^3 a}\int\limits_0^l \psi'(x) d\left(\sin\frac{\pi n x}{l}\right) = \frac{2l^2}{(\pi n)^3 a}\psi'(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\Big|_0^l -$$

$$-\frac{2l^2}{(\pi n)^3 a}\int\limits_0^l \psi''(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx = -\frac{2l^3}{(\pi n)^4 a}\int\limits_0^l \psi'''(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx.$$

Обозначим через

$$b_n^{(3)} = \frac{2}{al}\int\limits_0^l \psi'''(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx,$$

отсюда следует

$$b_n = -\left(\frac{l}{\pi n}\right)^4 b_n^{(3)}. \qquad (2.7.7)$$

При этом существуют константы $M_1 > 0$, $M_2 > 0$: $|a_n^{(4)}| < M_1$, $|b_n^{(3)}| < M_2$, так как $\varphi \in C^3[0,l]$, $\psi \in C^2[0,l]$. Подставим преобразованные коэффициенты (2.7.6) и (2.7.7) в ряд (2.7.4), получим

$$|u| \le \left(\frac{l}{\pi}\right)^4 \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\left(\left|a_n^{(4)}\cos\frac{a\pi n t}{l}\right| + \left|b_n^{(3)}\sin\frac{a\pi n t}{l}\right|\right)\left|\sin\frac{\pi n x}{l}\right| \le$$

$$\le 2M\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}, \quad M = \max\{M_1, M_2\}.$$

Таким образом, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$$

является мажорантой для (2.7.4). Значит по признаку Вейерштрасса ряд (2.7.4) сходится равномерно. Следовательно, функция $u(x,t)$ непрерывна как сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций. Рассмотрим функциональный ряд, полученный почленным дифференцированием по t ряда (2.7.4)

$$\sum_{n=1}^{\infty} -u'_{nt}(x,t) =$$
$$= -\left(\frac{l}{\pi}\right)^4 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^4 \left(a_n^{(4)} \frac{a\pi n}{l} \sin \frac{a\pi nt}{l} + b_n^{(3)} \frac{a\pi n}{l} \cos \frac{a\pi nt}{l}\right) \sin \frac{\pi nx}{l}.$$

Так как

$$|u_{nt}(x,t)| \le C\frac{1}{n^3},$$

то этот функциональный ряд сходится равномерно к функции $u_t(x,t)$ по признаку Вейерштрасса. Аналогично

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_{ntt}(x,t) =$$
$$= -\left(\frac{l}{\pi}\right)^4 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^4 \left(a_n^{(4)} \left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 \sin \frac{a\pi nt}{l} - b_n^{(3)} \left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 \cos \frac{a\pi nt}{l}\right) \times$$
$$\times \sin \frac{\pi nx}{l} = \left(\frac{al}{\pi}\right) \frac{1}{n^2} \left(-a_n^{(4)} \cos \frac{a\pi nt}{l} + b_n^{(3)} \sin \frac{a\pi nt}{l}\right) \sin \frac{\pi nx}{l},$$

$$|(u_n)_{tt}| \le C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

следовательно этот ряд по признаку Вейерштрасса сходится равномерно к функции $u_{tt}(x,t)$. Доказательство непрерывности $u_{xx}(x,t)$ аналогично.

Мы показали равномерную сходимость ряда (2.7.4) и рядов, полученных его почленным дифференцированием до второго порядка включительно. Из этого следует, что сумма ряда (2.7.4) является дважды непрерывно дифференцируемой функцией в рассматриваемом прямоугольнике, и его можно почленно дифференцировать до второго порядка включительно. Так как каждый член ряда (2.7.4) удовлетворяет однородному уравнению, то этому уравнению удовлетворяет и вся сумма $u(x,t)$. $\square$

Замечание 2.7.1. Можно получить более сильный результат нежели теорема 2.7.3, если использовать следующую лемму.

Лемма 2.7.1. *Если периодическая с периодом $2l$ функция F имеет k непрерывных производных, а $(k+1)$-я производная кусочно-непрерывна,* *тогда ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k(|a_n| + |b_n|),$$

где a_n, b_n – коэффициенты Фурье, сходится.

Задания для самостоятельного решения

1. Доказать теорему 2.7.1.
2. Получить результаты, основанные на замечании 2.7.1.

2.8. Стоячие волны

Выясним физический смысл частных решений $u_n(x,t)$, определяемых формулой (2.6.12), для этого преобразуем их, положив $a_n = F_n \sin\varphi_n$ и $b_n = F_n \cos\varphi_n$, получим

$$a_n \cos\frac{\pi nat}{l} + b_n \sin\frac{\pi nat}{l} = F_n\left(\sin\varphi_n \cos\frac{\pi nat}{l} + \cos\varphi_n \sin\frac{\pi nat}{l}\right),$$
$$a_n^2 + b_n^2 = F_n^2(\cos^2\varphi_n + \sin^2\varphi_n), \text{ тогда } F_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2},$$
$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\sin\varphi_n}{\cos\varphi_n} = \operatorname{tg}\varphi_n \Rightarrow \varphi_n = \operatorname{arctg}\frac{a_n}{b_n},$$

т.е.

$$\begin{gathered} u_n(x,t) = \left(a_n \cos\frac{\pi nat}{l} + b_n \sin\frac{\pi nat}{l}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) = \\ = F_n \sin\frac{n\pi x}{l}\sin\left(\frac{\pi nat}{l} + \varphi_n\right), \\ F_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \varphi_n = \operatorname{arctg}\frac{a_n}{b_n}. \end{gathered} \tag{2.8.1}$$

Из формулы (2.8.1) получаем, что все точки совершают гармонические колебания с одной и той же частотой $\omega_n = \dfrac{n\pi a}{l}$ и фазой φ_n. Амплитуда колебаний зависит от абсциссы x точки струны и равна $F_n \sin\left(\dfrac{n\pi x}{l}\right)$. При таком колебании все точки струны одновременно достигают своего максимального отклонения в ту или иную сторону и одновременно проходят положения равновесия. Такие колебания называются стоячими волнами.

Исследуем поведение струны при $n = 1$ (см. рис. 9). Амплитуда $F_1 \sin\left(\dfrac{\pi x}{l}\right)$ на концах струны $x = 0$, $x = l$ всегда равна нулю (концы жестко закреплены), а наибольшее отклонение F_1 достигается в точке

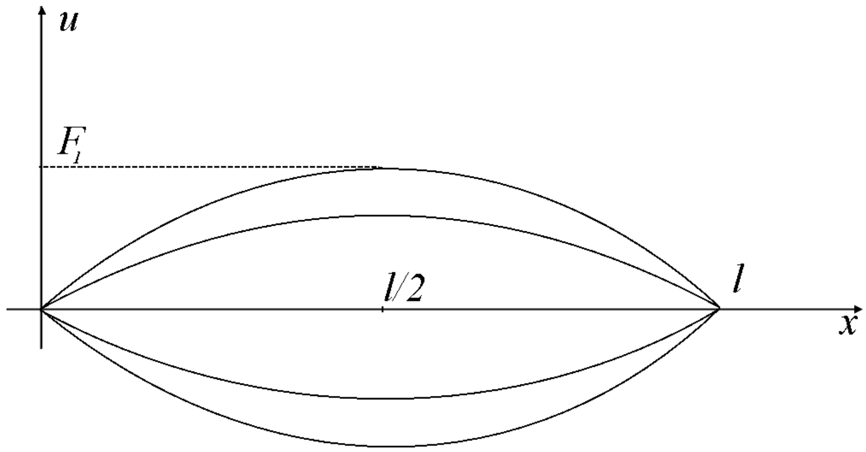


Рис. 9. Стоячие волны при $n = 1$

$x = \dfrac{l}{2}$. Профиль стоячей волны в любой момент времени представляет собой синусоиду $u_n(x,t) = c_n(t)\sin\dfrac{\pi n x}{l}$.

При $n = 2$ амплитуда равна $F_2 \sin\left(\dfrac{2\pi x}{l}\right)$ (см. рис. 10). Найдем неподвижные точки:

$$\sin\left(\frac{2\pi x}{l}\right) = 0,$$
$$\frac{2\pi x}{l} = \pi k, \; x = \frac{kl}{2}, \quad k = 0, 1, 2.$$

Точки, в которых будет достигаться наибольшее отклонение: $x = \dfrac{l}{4}$, $x = \dfrac{3l}{4}$.

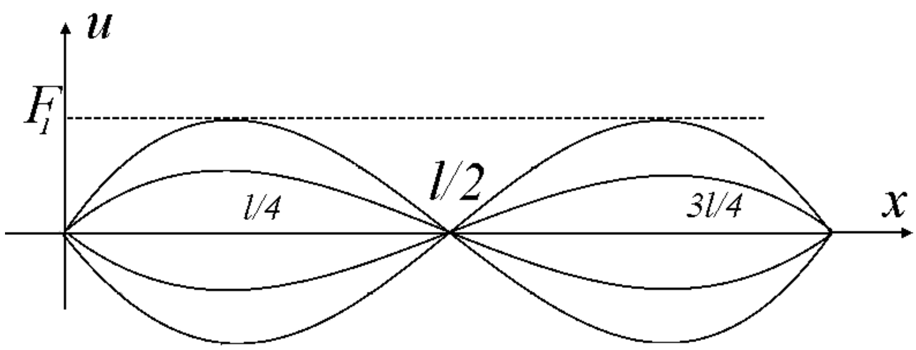


Рис. 10. Стоячие волны при $n = 2$

Стоячая волна будет иметь столько неподвижных точек, сколько корней имеет уравнение $\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) = 0$ на отрезке $[0, l]$ (таких точек будет $n+1$). Неподвижные точки называются *узлами стоячей волны*. Точки, в которых отклонение достигает максимума, называются *пучностями*. Каждая струна может иметь собственные колебания лишь строго определенных частот $\omega_k = \frac{\pi n a}{l}$. Эти частоты называются *собственными частотами струны*. Когда струна колеблется, она издает звук, высота которого возрастает с частотой колебаний. Если струна совершает собственные колебания, то самый низкий тон будет, когда частота равна $\omega_1 = \frac{\pi a}{l} = \frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{T_0}{\rho}}$. Тона соответствующие частотам ω_k называются *обертонами или гармониками*. Если струна совершает колебания, определяемые начальными условиями, то $u(x,t)$ представляет собой сумму отдельных гармоник.

Контрольные вопросы

1. Привидите примеры стоячей волны.
2. Почему метод Фурье называют методом стоячих волн?
3. Как зависит основная циклическая частота ω от натяжения N, от плотности ρ и от длины струны l?
4. Как зависит период колебаний T от циклической частоты ω?
5. Как с увеличением номера n меняется энергия гармоник?

2.9. Неоднородное уравнение колебаний струны

Рассмотрим неоднородное уравнение колебаний струны с начальными условиями и однородными граничными условиями Дирихле на отрезке $[0, l]$:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad 0 < x < l, \tag{2.9.1}$$

$$u(x,0) = \phi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{2.9.2}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad t > 0, \tag{2.9.3}$$

где $\phi(x)$, $\psi(x)$ и $f(x,t)$ – заданные функции. Будем искать решение задачи (2.9.1) – (2.9.3) в виде ряда Фурье

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin\frac{\pi n x}{l} \tag{2.9.4}$$

по собственным функциям ($X_n = \sin\frac{\pi n x}{l}$) однородной задачи Дирихле для оператора Лапласа Δ. Как находить собственные функции подробно описано в параграфе 2.6. Предположим, что функции $f(x,t)$ (рассматривая t как параметр), $\phi(x)$ и $\psi(x)$ можно представить в виде рядов

$$f(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin\frac{\pi n x}{l},\quad f_n(t)=\frac{2}{l}\int\limits_0^l f(\xi,t)\sin\frac{\pi n\xi}{l}d\xi,$$

$$\phi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\phi_n\sin\frac{\pi n x}{l},\qquad \phi_n=\frac{2}{l}\int\limits_0^l \phi(\xi)\sin\frac{\pi n\xi}{l}d\xi,$$

$$\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n\sin\frac{\pi n x}{l},\qquad \psi_n=\frac{2}{l}\int\limits_0^l \psi_n(\xi)\sin\frac{\pi n\xi}{l}d\xi.$$

Подставим (2.9.4) и полученные выше разложения в (2.9.1) (в случае равномерно сходящихся рядов), получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n''(t)\sin\frac{\pi n x}{l}+a^2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 T_n(t)\sin\frac{\pi n x}{l}-\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin\frac{\pi n x}{l}=0,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi n x}{l}\left[T_n''(t)+a^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 T_n(t)-f_n(t)\right]=0.$$

Равенство будет выполнено точно тогда, когда

$$T_n''(t)+a^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 T_n(t)-f_n(t)=0\quad\forall n\in\mathbb{N}.\tag{2.9.5}$$

Для полученного обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами найдем начальные условия, исходя из (2.9.2)

$$u(x,0)=\phi(x)\ \Rightarrow\ \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0)\sin\frac{\pi n x}{l}=\sum_{n=1}^{\infty}\phi_n\sin\frac{\pi n x}{l},$$

$$u_t(x,0)=\psi(x)\ \Rightarrow\ \sum_{n=1}^{\infty} T_n'(0)\sin\frac{\pi n x}{l}=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n\sin\frac{\pi n x}{l},$$

следовательно

$$T_n(0)=\phi_n,\quad T_n'(0)=\psi_n.\tag{2.9.6}$$

Функцию T_n найдем как сумму $T_n^{(1)}$ и $T_n^{(2)}$ ($T_n=T_n^{(1)}+T_n^{(2)}$), где $T_n^{(1)}$ – решение однородного уравнения с неоднородными начальными данными, $T_n^{(2)}$ – решение неоднородного уравнения с однородными начальными данными:

$$\begin{aligned}&T''^{(2)}_n(t)+\left(\frac{\pi n a}{l}\right)T_n^{(2)}=f_n(t),\\&T_n^{(1)}(0)=\phi_n,\quad T'^{(1)}_n(0)=\psi_n,\end{aligned}\tag{2.9.7}$$

$$\begin{aligned} &{T''}_n^{(1)}(t) + \left(\frac{\pi n a}{l}\right) T_n^{(1)} = 0, \\ &T_n^{(2)}(0) = 0, \quad {T'}_n^{(2)}(0) = 0. \end{aligned} \tag{2.9.8}$$

Решение задачи (2.9.8)

$$T_n^{(1)}(t) = \psi_n \frac{l}{\pi n a} \sin\frac{\pi n a t}{l} + \phi_n \cos\frac{\pi n a t}{l}.$$

Задачу (2.9.7) можно решить методом вариации произвольной постоянной, либо воспользоваться формулой

$$u(t) = \int\limits_0^t U(t-\tau) f(\tau) d\tau,$$

где $U(t)$ – решение однородного уравнения, соответствующего уравнению (2.9.7), с условиями $u'(0) = 1, u(0) = 0:$

$$T_n^{(2)} = \frac{l}{\pi n a} \int\limits_0^t \sin\left(\frac{\pi n a}{l}(t-\tau)\right) f_n(\tau) d\tau.$$

Таким образом, решение задачи (2.9.1) – (2.9.3):

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l}{\pi n a} \left(\int\limits_0^t \sin\left(\frac{\pi n a}{l}(t-\tau)\right) f_n(\tau) d\tau \right) \sin\frac{\pi n x}{l} d\tau +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\psi_n \frac{l}{\pi n a} \sin\frac{\pi n a t}{l} + \phi_n \cos\frac{\pi n a t}{l} \right) \sin\frac{\pi n x}{l}.$$

Задания для самостоятельного решения

1. Решить смешанную задачу для неоднородного волнового уравнения с нулевыми начальными и граничными условиями

$$\begin{aligned} &u_{tt} = u_{xx} + 65\mathrm{e}^{-8t} \sin t, \ x \in (0,\pi), t > 0, \\ &u(x,0) = u_t(x,0) = 0, \ x \in [0,\pi], \\ &u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \ t \geq 0. \end{aligned}$$

2. Решить смешанную задачу для неоднородного волнового уравнения с нулевыми начальными и граничными условиями

$$\begin{aligned} &u_{tt} = 9u_{xx} + 36\cos 18t \sin 6t, x \in (0,\pi), \ t > 0, \\ &u(x,0) = u_t(x,0) = 0, \ x \in [0,\pi], \\ &u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \ t \geq 0. \end{aligned}$$

2.10. Общая первая начально-краевая задача

Рассмотрим общую первую начально-краевую задачу для уравнения колебаний струны с начальными условиями и неоднородными краевыми условиями

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad 0 < x < l, \ t > 0, \tag{2.10.1}$$

$$u(x,0) = \phi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{2.10.2}$$

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(l,t) = \mu_2(t), \quad t \ge 0. \tag{2.10.3}$$

Введем новую неизвестную функцию $v(x,t)$, полагая: $u(x,t) = U(x,t) + {}$ ${}+v(x,t)$ так, что функция $v(x,t)$ представляет собой отклонение функции $u(x,t)$ от неизвестной функции $U(x,t)$. Функция $v(x,t)$ определяется как решение уравнения

$$v_{tt} = a^2 v_{xx} + \overline{f(x,t)}, \quad \overline{f(x,t)} = f(x,t) - [U_{tt} - a^2 U_{xx}]$$

с дополнительными условиями

$$\begin{aligned} v(x,0) &= \overline{\phi}(x), & \overline{\phi}(x) &= \phi(x) - U(x,0), \\ v_t(x,0) &= \overline{\psi}(x), & \overline{\psi}(x) &= \psi(x) - U_t(x,0), \\ v(0,t) &= \overline{\mu_1}(t), & \overline{\mu_1}(t) &= \mu_1(t) - U(0,t), \\ v(l,t) &= \overline{\mu_2}(t), & \overline{\mu_2}(t) &= \mu_2(t) - U(l,t). \end{aligned}$$

Выберем вспомогательную функцию $U(x,t)$ так, чтобы $\overline{\mu_1}(t) = 0$ и $\overline{\mu_2}(t) = 0$. Данное условие, например, будет выполняться, если положить

$$U(x,t) = \mu_1(t) + \frac{x}{l}\left[\mu_2(t) - \mu_1(t)\right].$$

Таким образом, общая краевая задача (краевая задача с неоднородными граничными условиями) для функции $u(x,t)$ сведена к краевой задаче для функции $v(x,t)$ с однородными граничными условиями.

Задания для самостоятельного решения

1. Найти функцию $u(x,t)$, описывающую вынужденные колебания струны, и функцию $u(x,\pi)$. Концы струны закреплены в точках $x = 0$ и $x = 1$, т.е. $u(0,t) = u(1,t) = 0$. Начальное смещение определяется функцией $\varphi(x) = \dfrac{\pi^3 x}{4}(x-1)$, начальная скорость – функцией $\phi(x) = \sin 3\pi x$.

2. Найти функцию $u(x,t)$, описывающую вынужденные колебания струны, и функцию $u(x,6)$. Концы струны закреплены в точках $x = 0$ и $x = 3$, т.е. $u(0,t) = u(3,t) = 0$. Начальное смещение определяется функцией $\varphi(x) = \dfrac{\pi^3 x}{9}(x-3)$, начальная скорость – функцией $\phi(x) = -\dfrac{5\pi^2}{3}$.

2.11. Уравнение колебаний в пространстве

Рассмотрим задачу Коши для уравнения колебаний в неограниченном пространстве $\mathbb{R}^3$ в случае трех независимых переменных $(M = M(x, y, z))$:

$$u_{tt} = a^2 \Delta u + f(M, t),\ t > 0,\ -\infty < x, y, z < +\infty, \tag{2.11.1}$$

$$u(M, 0) = \phi(M),\ u_t(M, 0) = \psi(M), \tag{2.11.2}$$

где $f(M), \phi(M), \psi(M)$ – заданные функции.

Определение 2.11.1. *Решением уравнения (2.11.1) при $t > 0$ будем называть функцию $u(M, t)$, непрерывную вместе со своими производными, входящими в уравнение (2.11.1), и удовлетворяющую уравнению.*

Рассмотрим подробно случай $f \equiv 0$. Найдем решение задачи (2.11.1), (2.11.2). Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – фиксированная точка пространства. Рассмотрим произвольную точку $M(x, y, z)$, найдем $r = r_{MM_0} = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$. Рассмотрим сферическую систему координат с центром в точке M_0 :

$$\begin{cases} x = r \sin\theta \cos\varphi + x_0, \\ y = r \sin\theta \sin\varphi + y_0, \\ z = r \cos\theta + z_0, \\ \varphi \in [0, 2\pi), \quad \theta \in [0, \pi], \quad r \in [0, +\infty). \end{cases}$$

Построим функцию (среднее значение на сфере)

$$\bar{u}(r, t) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint\limits_{S_r^{M_0}} u dS, \tag{2.11.3}$$

где $S_r^{M_0}$ – сфера радиуса r с центром в точке M_0 (см. рис. 11).

Для дальнейших преобразований нам понадобится теорема.

Теорема 2.11.1. *Пусть S – гладкая поверхность, не имеющая особых точек, заданная параметрическими уравнениями*

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v), \\ y = \psi(u, v), \\ z = \xi(u, v), \end{cases}$$

где $(u, v) \in \Omega$, и пусть функция $f(x, y, z)$ непрерывна на S. Тогда существует интеграл по площади поверхности от функции $f(x, y, z)$ и

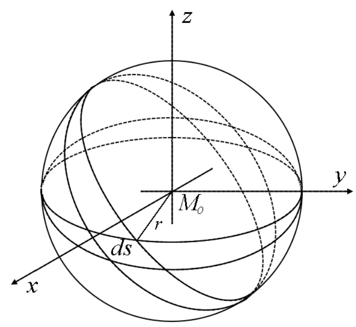


Рис. 11. Сфера

справедлива формула:

$$\iint_S f(x,y,z)ds = \iint_\Omega f(\varphi(u,v),\psi(u,v),\xi(u,v))\sqrt{EG-F^2}dudv,$$

$$\begin{cases} E = \varphi_u^2 + \psi_u^2 + \xi_u^2, \\ G = \varphi_v^2 + \psi_v^2 + \xi_v^2, \\ F = \varphi_u\varphi_v + \psi_u\psi_v + \xi_u\xi_v. \end{cases}$$

Применим сформулированную теорему 2.11.1 к преобразованию функции (2.11.3), где $\Omega = \{(\varphi,\theta) : 0 \le \varphi < 2\pi,\ 0 \le \theta \le \pi\}$, $ds = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi$, таким образом

$$\bar{u}(r,t) = \frac{1}{4\pi}\iint_\Omega u \sin\theta d\theta d\varphi.$$

Покажем, что $u(M_0,t_0) = \bar{u}(0,t_0)$. Действительно,

$$\bar{u}(0,t_0) = \frac{1}{4\pi}\int_0^\pi \left[\int_0^{2\pi} u(M_0,t_0)\sin\theta d\varphi\right] d\theta = \frac{1}{4\pi}\cdot 2\pi u(M_0,t_0)\int_0^\pi \sin\theta d\theta =$$
$$= \frac{1}{2}u(M_0,t_0)[-cos\theta]|_0^\pi = u(M_0,t_0),$$

устремляя t_0 к нулю ($t_0 \to 0$), получим $r \to 0$, т.к. $r = at$ и, следовательно, $M \to M_0$.

Покажем, что функция $v = r\bar{u}(r,t)$, обладающая сферической симметрией относительно точки M_0, удовлетворяет уравнению $v_{tt} = a^2 v_{rr}$. Для этого проинтегрируем уравнение (2.11.1) по объему шара $K_r^{M_0}$, ограниченного сферой $S_r^{M_0}$:

$$\iiint_{K_r^{M_0}} \Delta u dr = \frac{1}{a^2}\iiint_{K_r^{M_0}} u_{tt} dr. \tag{2.11.4}$$

Для дальнейших преобразований напомним формулу Грина:

$$\iiint\limits_{K_r^{M_0}} (u\Delta v - v\Delta u)dr = \iint\limits_{S_r^{M_0}} \left(u\frac{\partial v}{\partial \vec{n}} - v\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right) ds, \quad \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = (\operatorname{grad} v, \vec{n}^0),$$

где функции u и v имеют непрерывные частные производные до второго порядка включительно.

Рассмотрим левую часть соотношения (2.11.4). Применим формулу Грина при $v = 1$, $u = \bar{u}(r,t)$ (отметим, что нормаль к $S_r^{M_0}$ направлена по радиусу, т.е. $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \dfrac{\partial u}{\partial r}$) и получим

$$\iiint\limits_{K_r^{M_0}} \Delta u dr = \iint\limits_{S_r^{M_0}} \frac{\partial u}{\partial r} ds = \iint\limits_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial r} r^2 \sin\theta d\theta d\varphi = r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left[\iint\limits_{\Omega} u \sin\theta d\theta d\varphi \right] =$$
$$= 4\pi r^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial r}.$$

Рассмотрим правую часть соотношения (2.11.4):

$$\frac{1}{a^2} \iiint\limits_{K_r^{M_0}} u_{tt} dr = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\int\limits_0^r \rho^2 d\rho \left(\iint\limits_{\Omega} u \sin\theta d\theta d\varphi \right) \right] = \frac{4\pi}{a^2} \int\limits_0^r \bar{u}_{tt} \rho^2 d\rho.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{4\pi}{a^2} \int\limits_0^r \bar{u}_{tt} \rho^2 d\rho = 4\pi r^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial r}. \tag{2.11.5}$$

Левую и правую часть соотношения (2.11.5) продифференцируем по r и получим

$$\frac{4\pi r^2}{a^2} \bar{u}_{tt}(r,t) = \frac{\partial}{\partial r} \left(4\pi r^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} \right) = 4\pi 2r \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + 4\pi r^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial r^2},$$

$$\frac{r}{a^2} \bar{u}_{tt}(r,t) = 2\frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + r\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial r^2}.$$

Так как

$$v(r,t) = r\bar{u}(r,t), \text{ то } \bar{u}(r,t) = \frac{v(r,t)}{r},$$

тогда

$$\bar{u}_r = \left(\frac{v}{r} \right)_r = -\frac{v}{r^2} + \frac{1}{r} v_r,$$

$$\bar{u}_{rr} = \frac{2v}{r^3} - \frac{1}{r^2}v_r - \frac{v_r}{r^2} + \frac{1}{r}v_{rr},$$
$$\frac{r}{a^2}\bar{u}_{tt}(r,t) = 2\left(-\frac{v}{r^2} + \frac{1}{r}v_r\right) + r\left(\frac{2v}{r^3} - \frac{1}{r^2}v_r - \frac{v_r}{r^2} + \frac{1}{r}v_{rr}\right).$$

Приравнивая полученные производные, получим, что

$$\frac{1}{a^2}v_{tt} = v_{rr}.$$

Таким образом, задача Коши для уравнения (2.11.1) свелась к задаче Коши для полубесконечной струны с жестко закрепленным концом относительно неизвестной функции $v(r,t)$:

$$\begin{cases} v_{rr} = \dfrac{1}{a^2}v_{rr}, \\ v(r,0) = r\phi(r), \\ v_t(r,0) = r\psi(r), \\ v(0,t) = 0. \end{cases}$$

Тогда ее общее решение примет вид:

$$v(r,t) = f_1\left(t - \frac{r}{a}\right) + f_2\left(t + \frac{r}{a}\right)$$

и, следовательно,

$$\bar{u} = \frac{1}{r}f_1\left(t - \frac{r}{a}\right) + \frac{1}{r}f_2\left(t + \frac{r}{a}\right).$$

Из граничного условия $v(0,t) = 0$, следует, что $f_2(t) = -f_1(t) = f(t)$ для любых t. Тогда $u(M_0,t_0) = \bar{u}(0,t_0) = \dfrac{2}{a}f'(t)$, так как

$$\bar{u} = \frac{\left(-\dfrac{1}{r}f\left(t - \dfrac{r}{a}\right) + \dfrac{1}{r}f\left(t + \dfrac{r}{a}\right)\right)}{\dfrac{2r}{a}}\frac{2}{a} \to \frac{2}{a}f'(t) \text{ при } r \to 0.$$

Продифференцируем выражение

$$\bar{u} = \frac{1}{r}\left(f\left(t + \frac{r}{a}\right) - f\left(t - \frac{r}{a}\right)\right)$$

по t и r, получим

$$(r\bar{u})_r = v_r = \frac{1}{a}f'\left(t + \frac{r}{a}\right) + \frac{1}{a}f'\left(t - \frac{r}{a}\right),$$
$$(r\bar{u})_t = v_t = f'\left(t + \frac{r}{a}\right) - f'\left(t - \frac{r}{a}\right).$$

Отсюда $(r\bar{u})_r + \dfrac{1}{a}(r\bar{u})_t = \dfrac{2}{a}f'\left(t + \dfrac{r}{a}.\right)$ При $t = 0$, $r = at_0$ получим, что $\dfrac{2}{a}f'(t_0) = u(M_0, t_0)$. Таким образом,

$$(r\bar{u})_r + \frac{1}{a}(r\bar{u})_t = u(M_0, t_0). \tag{2.11.6}$$

Тогда

$$u(M_0, t_0) = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left\{r\iint\limits_{\Omega} u\sin\theta d\theta d\varphi\right\} + \frac{1}{a}\iint\limits_{\Omega} r\frac{\partial u}{\partial t}\sin\theta d\theta d\varphi\right]\Bigg|_{r=at_0,\ t=0}.$$

Пользуясь начальными условиями (2.11.2) для точки $M = M(x, y, z)$ и учитывая (2.11.6), получим *формулу Кирхгофа*[10]

$$u(M, t) = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left\{r\iint\limits_{S_r^M} ud\Omega\right\} + \frac{1}{a}\iint\limits_{S_r^M} r\frac{\partial u}{\partial t}d\Omega\right]\Bigg|_{r=at_0,\ t=0} =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial}{a\partial t_0}\left\{at_0\iint\limits_{S_{at_0}^M}\phi(P)d\Omega\right\} + \frac{at_0}{a}\iint\limits_{S_{at_0}^M}\psi(P)d\Omega\right].$$

Тогда

$$u(M, t) = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left\{t\iint\limits_{S_{at}^M}\phi(P)d\Omega\right\} + t\iint\limits_{S_{at}^M}\psi(P)d\Omega\right], \tag{2.11.7}$$

где $dS = (at)^2 d\Omega$, $S_{at}^M = S_{at}(M)$ – сфера радиуса at с центром в точке M. Формулу (2.11.7) можно записать в следующем виде:

$$u(M, t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(tM_{at}[\phi]\right) + tM_{at}[\psi], \tag{2.11.8}$$

$$M_{at}[J] = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S_{at}^M} J(P)d\Omega = \frac{1}{4a^2t^2\pi}\iint\limits_{S_{at}^M} J(P)dS.$$

Покажем единственность решения задачи (2.11.1), (2.11.2). Предположим, что существуют два решения u_1 и u_2, тогда $u = u_1 - u_2$ является решением задачи (2.11.1), (2.11.2) с нулевыми начальными данными. По формуле (2.11.7) найдем, что $u \equiv 0$, следовательно $u_1 \equiv u_2$.

[10]Густав Роберт Кирхгоф (12 марта 1824, Кёнигсберг – 17 октября 1887, Берлин) – немецкий физик.

В случае неоднородного уравнения $u_{tt} = a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})+f(x,y,z,t)$ и начальных условий (2.11.2) формула Кирхгофа примет вид

$$u(x,y,z,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4a^2t\pi}\iint\limits_{S_{at}^M}\phi(P)dS\right) + \frac{1}{4a^2t\pi}\iint\limits_{S_{at}^M}\psi(P)dS+$$

$$+\frac{1}{4a^2t\pi}\iiint\limits_{K_{at}^M}\frac{f\left(\xi,\eta,\zeta,t-\dfrac{|r|}{a}\right)}{|r|}d\xi d\eta d\zeta,$$

где $|r| = \sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}$.

Задания для самостоятельного решения

1. Используя формулу Кирхгофа, найти решение задачи Коши для волнового уравнения в пространстве:

$$\begin{aligned} &u_{tt} = 5(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}),\\ &u|_{t=0} = 3x^2+2y^2+4z^2,\\ &u_t|_{t=0} = 0. \end{aligned}$$

2. Используя формулу Кирхгофа, найти решение задачи Коши для волнового уравнения в пространстве:

$$\begin{aligned} &u_{tt} = 4(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}),\\ &u|_{t=0} = y^2-x^2+6z^2,\\ &u_t|_{t=0} = 0. \end{aligned}$$

2.12. Исследование формулы Кирхгофа

Покажем, что функция $u(M,t)$, определенная формулой Кирхгофа (2.11.7), задает решение задачи (2.11.1), (2.11.2), если $\phi \in C^3(\mathbb{R}^3)$, $\psi \in C^2(\mathbb{R}^3)$.

Теорема 2.12.1. *Пусть $\psi \in C^2(\mathbb{R}^3)$. Тогда*

$$u(M,t) = \frac{1}{4\pi a^2 t}\iint\limits_{S_{at}^M}\psi(M)ds = u_\psi \tag{2.12.1}$$

является решением задачи

$$u_{tt} = a^2\Delta u, \tag{2.12.2}$$

$$u(M,0) = 0, \tag{2.12.3}$$

$$u_t(M,0) = \psi(M), M = M(x,y,z). \tag{2.12.4}$$

Доказательство. Пусть α, β, γ направляющие косинусы радиус-вектора $\vec{r}$ точки $P(\xi, \eta, \zeta)$, лежащей на сфере S_{at}^M радиуса at с центром в точке $M(x, y, z)$. Введем новые переменные ξ, η, ζ :

$$\begin{cases} \xi = x + at\alpha, \\ \eta = y + at\beta, \\ \zeta = z + at\gamma, \end{cases}$$

где

$$\alpha = \cos(r, x) = \cos(n, x) = \sin\theta\cos\varphi,$$

$$\beta = \cos(r, y) = \cos(n, y) = \sin\theta\sin\varphi,$$

$$\zeta = \cos(r, z) = \cos(n, z) = \cos\theta.$$

Тогда от интеграла по сфере S_{at}^M перейдем к интегралу по единичной сфере S_1 $(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1)$. Тогда получим, что $dS_1 = \dfrac{dS}{a^2t^2}$. Сделав замену переменных и положив $\psi(x + at\alpha, y + at\beta, z + at\gamma) = \psi(\xi, \eta, \zeta)$, получим

$$u_\psi(x, y, z, t) = \frac{t}{4\pi}\iint\limits_{S_1} \psi(\xi, \eta, \zeta) dS_1.$$

Вычислим

$$\Delta u_\psi = \frac{t}{4\pi}\iint\limits_{S_1} (\psi_{\xi\xi} + \psi_{\eta\eta} + \psi_{\zeta\zeta}) dS_1 = \frac{t}{4\pi}\iint\limits_{S_1} \Delta\psi dS_1.$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = a(\psi_\xi\alpha + \psi_\eta\beta + \psi_\zeta\gamma) = a\frac{\partial\psi}{\partial r},$$

$$\frac{\partial u_\psi}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S_1} \psi dS_1 + \frac{at}{4\pi}\iint\limits_{S_1} \frac{\partial\psi}{\partial r} dS_1 = \frac{u_\psi}{t} + \frac{v}{t},$$

где

$$v = \frac{at^2}{4\pi}\iint\limits_{S_1} \frac{\partial\psi}{\partial r} dS.$$

Вычислим

$$\begin{aligned} &\left(t\frac{\partial u_\psi}{\partial t}\right)_t = tu_{\psi_{tt}} + u_{\psi_t} = u_{\psi_t} + t\left(\frac{u_\psi}{t} + \frac{v}{t}\right)_t = \\ &= u_{\psi_t} + t\left(-\frac{u_\psi}{t^2} + \frac{u_{\psi_t}}{t} + \frac{v_t}{t} - \frac{v}{t^2}\right) = u_{\psi_t} - \frac{u_\psi}{t} + u_{\psi_t} + v_t - \frac{v}{t} = \\ &= 2u_{\psi_t} - \left(\frac{u_\psi}{t} + \frac{v}{t}\right) + v_t = 2u_{\psi_t} - u_{\psi_t} + v_t = u_{\psi_t} + v_t. \end{aligned}$$

Отсюда получим, что

$$u_{tt} = \frac{v}{t}.$$

По формуле Грина, положив $v = 1, u = \psi$, получим

$$v = \frac{1}{4\pi a} \iint\limits_{S_{at}^M} \frac{\partial \psi}{\partial r} dS = \frac{1}{4\pi a} \iiint\limits_{S_{at}^M} (\psi_{\xi\xi} + \psi_{\eta\eta} + \psi_{\zeta\zeta}) d\xi d\eta d\zeta =$$

$$= \frac{1}{4\pi a} \int\limits_0^{at} \rho^2 d\rho \int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_0^{\pi} \Delta\psi \sin\theta d\theta,$$

где K_{at}^M – шар радиуса at, S_{at}^M – сфера радиуса at с центром в точке $M(x, y, z)$. Применив формулу дифференцирования интеграла зависящего от параметра, получим, что

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{S_{at}^M} \Delta\psi dS = a^2 t \Delta u_\psi.$$

Поскольку $u_{\psi_{tt}} = \dfrac{v_t}{t}$, следовательно $u_{\psi_{tt}} = a^2 \Delta u_\psi$. Таким образом, функция u_ψ, полученная по формуле (2.12.1), удовлетворяет уравнению (2.12.2).

Покажем, что u_ψ удовлетворяет начальным условиям $u_\psi(M, 0) = 0$, где

$$u_\psi = tM_{at}[\psi] = \frac{1}{4\pi a^2 t^2} \iint\limits_{S_{at}^M} \psi dS = \frac{t}{4\pi} \iint\limits_{S_1} \psi(\xi, \eta, \zeta) dS_1.$$

Так как функция ψ непрерывна, то

$$\lim_{t \to 0} \frac{u_\psi}{t} = \psi(M)$$

и

$$\lim_{t \to 0} \frac{v}{t} = 0, \left(v = \frac{at^2}{4\pi} \iint\limits_{S_1} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right).$$

Тогда

$$\frac{\partial u_\psi}{\partial t} = \frac{1}{t} u_\psi + \frac{v}{t} \to \psi(M) \text{ при } t \to 0.$$

□

Замечание. Нетрудно убедиться, что функция $\dfrac{\partial u_\phi}{\partial t}$, где $u_\phi = tM_{at}[\phi]$ также удовлетворяет уравнению (2.12.2), если $\phi \in C^3(\mathbb{R}^3)$.

И, аналогично, получим, что

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_\phi) \to \phi(M), \text{ при } t \to 0.$$

Так как $u_\phi = tM_{at}[\phi]$, следовательно $\dfrac{\partial u_\phi}{\partial t} = 0$, при $t = 0$.

Таким образом, $u = u_\psi + \dfrac{\partial}{\partial t}(u_\phi)$, где u_ϕ, u_ψ – решения задач

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \\ u(x,0) = 0, \\ u_t(x,0) = \psi(x), \end{cases} \quad \begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \\ u(x,0) = \phi(x), \\ u_t(x,0) = 0. \end{cases}$$

Задания для самостоятельного решения

1. Используя формулу Кирхгофа, найти решение задачи Коши для волнового уравнения в пространстве:

$$\begin{aligned} &u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}, \\ &u|_{t=0} = 0, \\ &u_t|_{t=0} = (x - y + z)^2. \end{aligned}$$

2. Используя формулу Кирхгофа, найти решение задачи Коши для волнового уравнения в пространстве:

$$\begin{aligned} &u_{tt} = 3(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}), \\ &u|_{t=0} = 0, \\ &u_t|_{t=0} = (x + y - z)^2. \end{aligned}$$

2.13. Метод спуска

Рассмотрим задачу (2.11.1), (2.11.2). Ее решение имеет вид

$$u(M,t) = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(t\iint\limits_{S_{at}^M}\phi(P)d\Omega\right) + t\iint\limits_{S_{at}^M}\psi(P)d\Omega\right]. \qquad (2.13.1)$$

Зная решение трехмерной задачи, найдем формулу решения для двумерной и одномерной задач при условии, что начальные функции

$$\phi = \phi(x,y), \ \psi = \psi(x,y),$$

$$\phi = \phi(x), \ \psi = \psi(x),$$

или соответственно. Во-первых, найдем решение задачи Коши для двумерного волнового уравнения:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}), \\ u(x, y, 0) = \phi(x, y), \\ u_t(x, y, 0) = \psi(x, y). \end{cases} \tag{2.13.2}$$

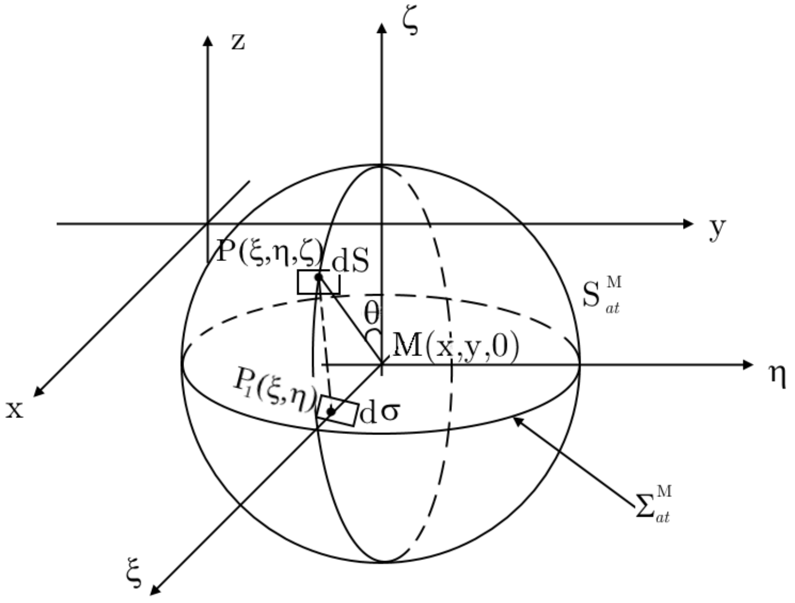


Рис. 12. Замена переменных

В силу независимости начальных данных от z, интегрирование по верхней полусфере можно заменить интегрированием по кругу Σ_{at}^M, граница которого – окружность, полученная пересечением сферы S_{at}^M и плоскости $z = 0$. Точка P лежит на сфере S_{at}^M. Обозначим через P_1 ее проекцию на плоскость O_{xy} (см. рис. 12). Перейдем к сферической системе координат:

$$\begin{cases} \xi = x + at \sin\theta \cos\phi, \\ \eta = y + at \sin\theta \sin\phi, \\ \zeta = at \cos\theta. \end{cases}$$

Найдем элементы площади $d\sigma = \cos\theta dS$, следовательно $ds = \dfrac{d\sigma}{\cos\theta}$. Вычислим

$$\rho = |MP_1| = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}.$$

Тогда

$$\cos\theta = \frac{|PP_1|}{|PM|} = \frac{\sqrt{\zeta^2 + (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 - \rho^2}}{\sqrt{\zeta^2 + (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} = \frac{\sqrt{a^2t^2 - \rho^2}}{at},$$

$$d\Omega = \frac{dS}{a^2t^2} = \frac{d\sigma}{\cos\theta a^2 t^2} = \frac{d\sigma at}{a^2t^2\sqrt{a^2t^2-\rho^2}} = \frac{d\sigma}{at\sqrt{a^2t^2-\rho^2}}.$$

Подставляя в формулу (2.13.1), получим формулу Пуассона[11]:

$$u(x,y,t) = \frac{1}{2\pi a}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\iint\limits_{\Sigma_{at}^M} \frac{\phi(\xi,\eta)d\xi d\eta}{\sqrt{a^2t^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}}\right)+\right.$$

$$\left.+\iint\limits_{\Sigma_{at}^M} \frac{\psi(\xi,\eta)d\xi d\eta}{\sqrt{a^2t^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}}\right]. \tag{2.13.3}$$

В случае неоднородного уравнения

$$u_{tt} = a^2(u_{xx}+u_{yy}) + f(x,y,t)$$

формула Пуассона примет вид

$$u(x,y,t) = \frac{1}{2a\pi}\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{\Sigma_{at}^M}\frac{\phi(\xi,\eta)}{\sqrt{a^2t^2-|r|^2}}d\xi d\eta + \frac{1}{2a\pi}\iint\limits_{\Sigma_{at}^M}\frac{\psi(\xi,\eta)}{\sqrt{a^2t^2-|r|^2}}d\xi d\eta +$$

$$+\frac{1}{2a\pi}\int\limits_0^t\iint\limits_{\Sigma_{a(t-\tau)}}\frac{f(\xi,\eta,\tau)}{\sqrt{a^2(\tau-t)^2-|r|^2}}d\xi d\eta d\tau,$$

где $|r| = \sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}$, $\xi = (\xi,\eta)$.

Во-вторых, найдем решение задачи Коши для одномерного волнового уравнения

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \\ u(x,0) = \phi(x), \\ u_t(x,0) = \psi(x). \end{cases} \tag{2.13.4}$$

Пусть точка $P_2(\xi,0,0)$ – проекция точки $P(\xi,\eta,\zeta)$, расположенной на сфере S_{at} с центром в точке $M(x,0,0)$. Введем новую систему координат (ξ,η,ζ) с центром в точке $M(x,0,0)$:

$$\begin{cases} \xi = x + at\cos\theta, \\ \eta = at, \\ \zeta = at. \end{cases}$$

[11]Симеон Дени Пуассон (21 июня 1781, Питивье, Франция – 25 апреля 1840, Со, Франция) – французский математик, механик и физик.

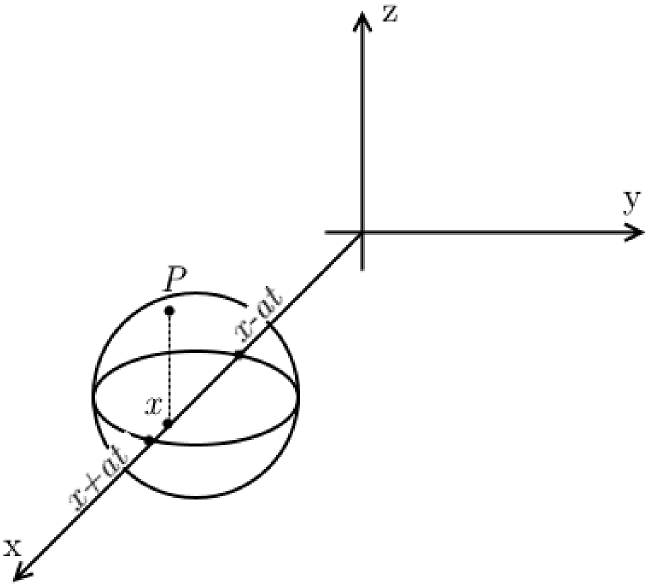


Рис. 13. Замена переменных

Тогда

$$dS = (at)^2 d\Omega,$$

$$d\xi = -at\sin\theta d\theta.$$

Подставим в формулу (2.13.1), получим

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left(t\int\limits_{0}^{2\pi} d\phi \int\limits_{x+at}^{x-at}\phi(\xi)\frac{r^2\sin\theta(-d\xi)}{a^3t^3\sin\theta}\right) +$$

$$+\frac{1}{4\pi}t\int\limits_{0}^{2\pi} d\phi \int\limits_{x+at}^{x-at}\psi(\xi)\frac{r^2\sin\theta(-d\xi)}{a^3t^3\sin\theta} =$$

$$= \frac{1}{2a}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(-\int\limits_{x+at}^{x-at}\phi(\xi)d\xi\right) - \int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi\right].$$

В итоге пришли к уже известной нам формуле Даламбера:

$$u(x,t) = \frac{\phi(x-at)+\phi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi.$$

Задания для самостоятельного решения

1. Используя формулу Пуассона, найти решение задачи Коши для волнового уравнения на плоскости:

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy},$$
$$u|_{t=0} = 0,$$
$$u_t|_{t=0} = (x+y)^2.$$

2. Используя формулу Пуассона, найти решение задачи Коши для волнового уравнения на плоскости:

$$u_{tt} = 4(u_{xx} + u_{yy}),$$
$$u|_{t=0} = 0,$$
$$u_t|_{t=0} = (2x+y)^2.$$

2.14. Физическая интерпретация формулы Пуассона

Рассмотрим задачу Коши для волнового уравнения в пространстве:

$$u_{tt} = a^2 \Delta u,\ t > 0,\ -\infty < x, y, z < +\infty,$$
$$u(x,y,z,0) = \phi(x,y,z),$$
$$u_t(x,y,z,0) = \psi(x,y,z).$$

Как известно ее решение имеет вид

$$u(M,t) = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(t\iint\limits_{S_{at}} \phi(P)d\Omega\right) + t\iint\limits_{S_{at}} \psi(P)d\Omega_P\right]. \qquad (2.14.1)$$

Пусть начальные данные отличны от нуля и положительны только в ограниченной области T_0. Рассмотрим изменение состояния функции $u(M_0,t)$ в точке M_0, лежащей вне области T_0. Обозначим через d – расстояние от точки M_0 до ближайшей точки области T_0, D – расстояние от точки M_0 до наиболее удаленной точки области T_0 (см. рис. 14), $S_{at}^{M_0}$ – сфера радиуса at с центром в точке M_0.

Рассмотрим поведение функции u в точке M_0:

1) Пусть $t < t_1 = \frac{d}{a}$, тогда $S_{at}^{M_0} \cap T_0 = \emptyset$. Интегралы в формуле (2.14.1) равны нулю $u(M_0,t) \equiv 0$. До точки M_0 возмущение еще не дошло.

2) Пусть $t_1 = \frac{d}{a}, t_2 = \frac{D}{a}, t_1 < t < t_2$, тогда $S_{at}^{M_0} \cap T_0 \neq \emptyset$, $u(M_0,t) \neq 0$. Точка M_0 находится в возбужденном состоянии.

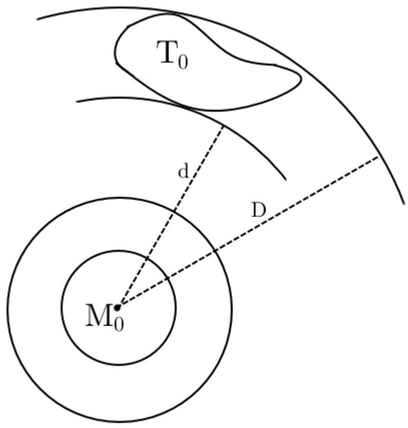


Рис. 14. Положение точки M_0

3) Пусть $t > t_2$, тогда $S_{at}^{M_0} \cap T_0 = \emptyset$. Функция $u(M_0, t) \equiv 0$, возмущение прошло точку M_0. Сферы S_{at_2} и S_{at_1} являются передним и задним фронтом волны.

Замечание. При распространении локального возмущения в трехмерном пространстве явления последействия отсутствует. Таким образом, имеет место

Принцип Гюйгенса[12]: Начальное возмущение, локализованное в пространстве, вызывает в каждой точке M_0 пространства, действие локализованное во времени.

Рассмотрим задачу Коши для двумерного волнового уравнения:

$$
\begin{aligned}
&u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}),\ t > 0,\ -\infty < x, y < +\infty,\\
&u(x, y, 0) = \phi(x, y),\\
&u_t(x, y, 0) = \psi(x, y),
\end{aligned}
$$

ее решение имеет вид

$$
u(x, y, t) = \frac{1}{2\pi a}\left[\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{\Sigma_{at}^{M}} \frac{\phi(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{a^2t^2 - \rho^2}} + \iint\limits_{\Sigma_{at}^{M}} \frac{\psi(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{a^2t^2 - \rho^2}}\right].
$$

Пусть начальное возмущение задано в области $T_0 \subset \mathbb{R}^2$. Рассмотрим изменения состояния $u(M_0, t)$ в точке $M_0 \notin T_0$:

1) Пусть $t < t_1 = \dfrac{d}{a}$, где d – расстояние от M_0 до ближайшей точки из T_0, $\Sigma_{at_0}^{M_0}$ – круг радиуса at_0 с центром в точке M_0, тогда $u(M_0, t) \equiv 0$ до точки M_0 возмущение еще не дошло.

[12]Христиан Гюйгенс ван Зёйлихем (14 апреля 1629, Гаага – 8 июля 1695, Гаага), нидерландский механик, физик, математик, астроном и изобретатель.

2) Пусть $t_1 < t$, тогда $u(M_0, t) \neq 0$. С момента времени $t = t_1$ в точке M_0 возникает возмущение, которое сначала возрастает, а затем, начиная с некоторого момента, постепенно убывает до нуля (при $t \to \infty$).

Замечание. Влияние начальных возмущений, локальных на плоскости, не локализовано во времени и характеризуется длительно продолжающимся последствием. Принцип Гюйгенса не выполняется.

Задания для самостоятельного решения

1. Используя формулу Пуассона, найти решение задачи Коши для волнового уравнения на плоскости:

$$\begin{aligned} &u_{tt} = 4(u_{xx} + u_{yy}), \\ &u|_{t=0} = y^2 - x^2, \\ &u_t|_{t=0} = 0. \end{aligned}$$

2. Используя формулу Пуассона, найти решение задачи Коши для волнового уравнения на плоскости:

$$\begin{aligned} &u_{tt} = \frac{1}{9}(u_{xx} + u_{yy}), \\ &u|_{t=0} = 3x^2 + 2y^2, \\ &u_t|_{t=0} = 0. \end{aligned}$$

3. Модели теплопроводности

3.1. Вывод уравнения теплопроводности на отрезке

Рассмотрим металлический стержень, боковая поверхность которого теплоизолирована (т.е. через поверхность стержня не происходит теплообмена с внешней средой). В линейной задаче теплопроводности стер-

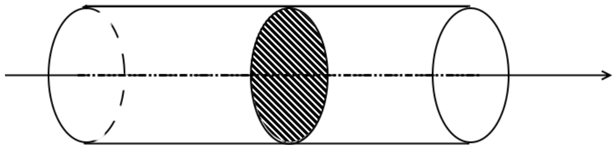


Рис. 15. Стержень

жень предполагается настолько тонким, что в каждый момент времени температура всех точек данного поперечного сечения стержня будет одной и той же. Если стержень в начальный момент времени неравномерно нагрет, то благодаря теплопроводности в нем будет происходить передача тепла от более нагретых частей к менее нагретым. Ось стержня примем за ось абсцисс. Функция, описывающая распространения тепла будет функцией двух переменных $u(x,t)$. Если зафиксировать t, то $u(x,t)$ описывает распределения тепла в стержне, зависимость температуры точек стержня от их расстояния до начала координат, $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ – скорость изменения температуры в направлении оси абсцисс. Если зафиксировать x, то $u(x,t)$ выражает закон изменения температуры в данном сечении с течением времени.

Физические предпосылки:

1. Количество тепла, которое необходимо сообщить однородному телу, чтобы повысить его температуру на Δu, равно

$$c\rho V\Delta u, \tag{3.1.1}$$

где V – объем тела, ρ – плотность, c – удельная теплоемкость.

2. Количество тепла, протекающего через поперечное сечение стержня за момент времени Δt (тепловой поток), пропорционален площади сечения, скорости изменения температуры в направлении перпендикулярном сечению и промежутку времени Δt, т.е. равно

$$-kS\frac{\partial u}{\partial x}\Delta t, \tag{3.1.2}$$

где k – коэффициент теплопроводности, S – площадь поперечного сечения. Знак $''-''$ в (3.1.2) объясняется тем, что величину теплового потока мы будем считать положительной, когда передача осуществляется в направлении оси Ox. Если $\dfrac{\partial u}{\partial x} > 0$, то это означает, что с возрастанием x температура повышается, а так как тепло переходит от более нагретых частей к менее нагретым, то тепловой поток будет направлен в сторону уменьшения x.
3. Коэффициент теплопроводности будем считать постоянным.

Выделим участок стержня, ограниченный поперечными сечениями с абсциссами x и $x + \Delta x$. Составим уравнение теплового баланса. По формуле (3.1.2) количество тепла, проходящее через поперечное сечение с абсциссой x за Δt, равно

$$-kS\frac{\partial u}{\partial x}\Delta t.$$

Найдем количество тепла проходящего через сечение стержня с абсциссой $x + \Delta x$, используя разложение в ряд Тейлора по малому параметру:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x,$$

бесконечно малые более высоких порядков отброшены. Таким образом, количество тепла ΔQ сообщенного выбранному участку за Δt им Δx

$$\Delta Q = -kS\frac{\partial u}{\partial x}\Delta t + kS\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x\right)\Delta t = kS\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x\Delta t,$$

разность величин входящего и выходящего потоков. С другой стороны, за время Δt температура выбранного участка изменилась на $\dfrac{\partial u}{\partial t}\Delta t$, поэтому

$$\Delta Q = c\rho S\Delta x\frac{\partial u}{\partial t}\Delta t, \quad V = S\Delta x, \quad \Delta u = \frac{\partial u}{\partial t}\Delta t.$$

Получим

$$kS\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x\Delta t = c\rho S\Delta x\frac{\partial u}{\partial t}\Delta t,$$

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a^2 = \frac{k}{c\rho} \tag{3.1.3}$$

– уравнение теплопроводности для однородного стержня без тепловых источников, a – коэффициент теплопроводности.

Предположим теперь, что в некоторых участках стержня может возникать или поглощаться тепло (т.е. имеются тепловые источники). Выделение (поглощение) тепла характеризуется функцией плотности тепловых источников $F(x,t)$: на малом участке стержня $[x, x+\Delta x]$ за малый промежуток времени Δt выделяется (поглощается) количество тепла равное

$$F(x,t)\Delta t \Delta x \tag{3.1.4}$$

с точностью до бесконечно малых более высокого порядка ($F(x,t) < 0$ – поглощение тепла). Таким образом, получим неоднородное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x,t), \quad g(x,t) = \frac{1}{c\rho S} F(x,t). \tag{3.1.5}$$

Пример. При пропускании через стержень постоянного электрического тока в нем будет выделяться тепло, причем $F(x,t) = \text{const} = I^2 R$, где I – сила тока, R – сопротивление единицы длины стержня. Тогда при составлении уравнения баланса получим

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{S} I R^2.$$

Задания для самостоятельного решения

1. Вывести уравнение теплопроводности в тонкой проволоке, нагреваемой постоянным электрическим током, если на ее поверхности происходит конвективный теплообмен по закону Ньютона с окружающим воздухом, имеющим температуру T. Привести примеры различных материалов, из которых может быть изготовлена проволока.

2. Вывести уравнение теплопроводности для ограниченного горящего стержня. Левый конец имеет температуру окружающей среды, правый конец стержня горит, причем фронт горения распространяется с постоянной скоростью v_0 и имеет температуру горения $f(t)$.

3.2. Вывод уравнения теплопроводности в пространстве

Рассмотрим неравномерно нагретое тело. Пусть температура в каждой точке (x,y,z) в момент времени t определяется функцией $u(x,y,z,t)$. В любой момент времени t функция u задает скалярное поле – поле температуры. Если зафиксировать момент времени $t = T$, то совокупность точек, в которых температура принимает одно и тоже фиксированное значение $u(x,y,z,T) = c$, образует изотермическую поверхность (поверхность уровня). Направление наибольшей скорости изменения температуры u совпадает с направлением градиента функции u $\overrightarrow{\mathrm{grad}}u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$. В точках изотермической поверхности градиент направлен по нормали к этой поверхности в сторону увеличения значения функции u: $|\overrightarrow{\mathrm{grad}}u| = \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}$. Обобщая формулу (3.1.2), получим, что величина теплового потока через малый участок $\Delta\sigma$ изотермической поверхности за время Δt равна

$$\Delta Q = -k\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\Delta\sigma\Delta t, \tag{3.2.1}$$

k – коэффициент теплопроводности, который мы будем считать постоянным. В теории теплопроводности доказывается, что формула (3.2.1) для теплового потока справедлива для любых поверхностей.

Так как

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = (\overrightarrow{\mathrm{grad}}u, \vec{n}),$$

получим, что

$$\Delta Q = -k(\overrightarrow{\mathrm{grad}}u, \vec{n})\Delta\sigma\Delta t.$$

Обозначим $\vec{A} = -k\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}u$ – вектор теплового потока, $A_n = -k(\overrightarrow{\mathrm{grad}}u, \vec{n})$ – проекция $\vec{A}$ на внешнюю нормаль. Тогда ΔQ есть поток вектора $\vec{A}$ через элемент поверхности площади $\Delta\sigma$ за время Δt:

$$\Delta Q = A_n\Delta\sigma\Delta t.$$

Если в теле выделить некоторую часть, ограниченную замкнутой поверхностью S (см. рис. 16), то поток тепла через эту замкнутую поверхность за время Δt равен

$$\Delta Q = \Delta t \oiint\limits_S A_n d\sigma. \tag{3.2.2}$$

Поток Q будет положителен, если выбранная часть тела теряет тепло, и отрицательным, если поглощает. Применим к формуле (3.2.2) теорему Гаусса – Остроградского

$$\Delta t \oiint\limits_S A_n d\sigma = \iiint\limits_V \mathrm{div}\vec{A}dv,$$

где V – часть тела ограниченная поверхностью S, $\mathrm{div}\vec{A} = -k\ \mathrm{div}\overrightarrow{\mathrm{grad}}u =$ $= -k\Delta u$. Таким образом, количество тепла Q_1, приобретенное выделенной частью тела за счет прохождения теплового потока, будет равно (оно

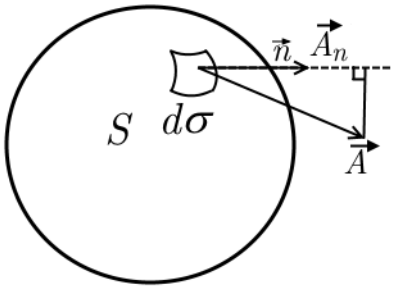


Рис. 16. Элемент площади поверхности

противоположно по знаку Q)

$$Q_1 = \Delta t \iiint\limits_V k\Delta u dv. \qquad (3.2.3)$$

Предположим, что в теле имеются тепловые источники, плотность которых характеризуется функцией $F(x, y, z, t)$. Тогда за промежуток времени Δt в выделенной части тела выделится тепло Q_2, равное (с точностью до бесконечно малых величин высшего порядка)

$$Q_2 = \Delta t \iiint\limits_V F(x, y, z, t) dv. \qquad (3.2.4)$$

Общее количество тепла сообщенное выделенной части тела V, равно $Q_1 + Q_2$. Теперь подсчитаем это тепло иначе. Учитывая изменение температуры в точках тела, лежащего внутри поверхности S :

$$u(x, y, z, t + \Delta t) - u(x, y, z, t) = \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t.$$

Поэтому элементу объема Δv для такого изменения температуры потребуется количество тепла равное

$$c\rho \Delta v \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t,$$

где c – удельная теплоемкость, ρ – плотность, а всему объему

$$Q_3 = \Delta t \iiint\limits_V c\rho \frac{\partial u}{\partial t} dv. \qquad (3.2.5)$$

Тогда $Q_3 = Q_1 + Q_2$

$$\Delta t \iiint\limits_V c\rho \frac{\partial u}{\partial t} dv = \Delta t \iiint\limits_V k\Delta u dv + \Delta t \iiint\limits_V F(x, y, z, t) dv,$$

$$\iiint\limits_V \left(c\rho\frac{\partial u}{\partial t} - k\Delta u - F(x,y,z,t) \right) dv = 0. \tag{3.2.6}$$

Равенство (3.2.6) должно выполняться для любой части тела V. В предположении, что все слагаемые непрерывные функции.

Действительно, если предположить, что в точке $M(x,y,z)$ равенство (3.2.6) нарушено, т.е., например, $c\rho\dfrac{\partial u}{\partial t} - k\Delta u - F(x,y,z,t) > 0$, то в силу непрерывности этой функции это же неравенство будет соблюдаться и в некоторой окрестности точки M. Но тогда бы интеграл по этой области был бы величиной положительной. Отсюда получим

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t} - k\Delta u - F(x,y,z,t) = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\Delta u - f(x,y,z,t), \quad a^2 = \frac{k}{c\rho},\ f = \frac{F}{c\rho} \tag{3.2.7}$$

– уравнение теплопроводности в пространстве.

Если тепловые источники внутри тела отсутствуют, то уравнение (3.2.7) будет однородным. Данное уравнение, выведено в предположении, что все физические величины постоянны.

Задания для самостоятельного решения

1. Вывести уравнение теплопроводности в цилиндре радиуса R и длины h, нагреваемой постоянным электрическим током, если на ее поверхности происходит конвективный теплообмен по закону Ньютона с окружающим воздухом, имеющим температуру T. Привести примеры различных материалов, из которых может быть изготовлен цилиндр.

2. Вывести уравнение остывания однородного металлического шара радиуса R, нагретого до температуры T.

3.3. Вывод одномерного уравнения диффузии

Уравнения, которые были получены в предыдущем параграфе, описывают также процессы диффузии. Как теплопроводность, так и диффузия относятся к процессам переноса. В случая уравнения теплопроводности осуществляется перенос энергии, в случае уравнения диффузии – вещества. Сущность процессов переноса заключается в стремление системы достигнуть равновесного состояния. В состоянии теплового равновесия температура во всех точках системы одинакова. При отклонении температуры от равновесного значения возникает движение теплоты в таких направлениях, которые позволяют сделать температуру всех частей системы одинаковой. Связанный с этим движением перенос тепла называется теплопроводностью. Аналогично, если среда неравномерно заполнена газом, то имеет место диффузия его из мест с большей концентрацией в места с меньшей концентрацией. Это же явление наблюдается в растворах, если концентрация растворенного вещества не постоянна. Пусть газ находится в полой трубке или трубке, заполненной пористой средой. Предположим, что концентрация газа в каждом нормальном сечении (сечении плоскостью перпендикулярной оси симметрии) трубки постоянна. Через $u(x,t)$ обозначим концентрацию газа в сечении с абсциссой x в момент времени t. Для выделенного участка трубки (x_1, x_2) составим уравнение баланса массы. Пусть $Q = Q(x_1, x_2, t_1, t_2)$ изменение массы участка трубки за время от t_1 до t_2, произошедшее за счет изменения концентрации. По определению концентрации,

$$Q = \int\limits_{x_1}^{x_2} c(x)S(x)[u(x,t_2) - u(x,t_1)]dx,$$

где $S(x)$ площадь поперечного сечения трубки, $c(x)$ – коэффициент пористости, т.е. отношение объема пор к полному объему $S(x)dx$. Если трубка полая, то $c(x) = 1$. Изменение массы Q складывается из массы газа, поступившего через торцы трубки $x = x_1$ и $x = x_2$:

$$Q_1 = \int\limits_{t_1}^{t_2} S(x_1)q(x_1,t)dt \quad \text{и} \quad Q_2 = \int\limits_{t_1}^{t_2} S(x_2)q(x_2,t)dt,$$

а также массы, поступившей за счет внутренних источников:

$$Q_0 = \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{x_1}^{x_2} S(x)F(x,t)dxdt.$$

Через $q(x,t)$ обозначено количество вещества, диффундирующее в единицу времени через единичную площадку сечения, перпендикулярного оси x. Аналогом закона Фурье в теории теплопроводности является закон диффузии, который называется законом Нернста:

$$q = -D\frac{\partial u}{\partial x}, \tag{3.3.1}$$

где D – коэффициент диффузии. Таким образом, уравнение баланса массы на участке (x_1, x_2) за время (t_1, t_2) имеет вид:

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} c(x)S(x)[u(x,t_2) - u(x,t_1)]dx = \int\limits_{t_1}^{t_2} [S(x_2)q(x_2,t)dt - S(x_1)q(x_1,t)]\, dt +$$

$$+ \int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_{x_1}^{x_2} S(x)F(x,t)dxdt.$$

Пользуясь теоремой о среднем значении интеграла, запишем предыдущее равенство через приращения

$$c(x)S(x)\frac{u(x_4,t_2) - u(x_4,t_1)}{\Delta t}\Delta x\Delta t = \frac{S(x_2)q(x_2,t_4) - S(x_1)q(x_1,t_4)}{\Delta x}\Delta x\Delta t +$$

$$+S(x_3)F(x_3,t_3)\Delta x\Delta t,$$

где x_3, x_4, t_3, t_4 – промежуточные точки интервалов (x_1, x_2) и (t_1, t_2). В предположении о постоянстве площади поперечного сечения, воспользовавшись теоремой о конечных приращениях, получим

$$c(x)Su_t(x_4,t_5)\Delta x\Delta t = S(x)q_x(x_5,t_4)\Delta x\Delta t +$$

$$+S(x_3)F(x_3,t_3)\Delta x\Delta t.$$

Переходя к пределу при $x_3, x_4, x_5 \to x,\ t_3, t_4, t_5 \to t$, и с учетом (3.3.1) получим уравнение диффузии в дифференциальном виде:

$$c\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial u}{\partial x}\right) + F(x,t).$$

Если коэффициенты диффузии и пористости постоянны, то приходим к уравнению диффузии с постоянными коэффициентами:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t),$$

где $a^2 = \dfrac{D}{c}$, $f(x,t) = \dfrac{F(x,t)}{c}$.

Аналогом закона Ньютона конвективного теплообмена является закон диффузии через полунепроницаемую перегородку $q = -\Lambda(u - u_0(t))$. В процессах диффузии плотность источников вещества может быть пропорциональна концентрации, причем коэффициент пропорциональности может быть как больше нуля, так и меньше нуля. Например, для неустойчивого газа частицы вещества распадаются, а в процессах цепных реакций размножаются. Если частицы вещества распадаются, причем скорость распада в каждой точке пропорциональна концентрации, то уравнение диффузии имеет вид

$$u_t = Du_{xx} - \beta_1 u.$$

Если размножаются, причем скорость размножения в каждой точке пропорциональна концентрации, то уравнение диффузии имеет вид

$$u_t = Du_{xx} + \beta_2 u.$$

Здесь D – коэффициент диффузии, $\beta_1 > 0, \beta_2 > 0$ – коэффициенты распада и размножения соответственно.

Задания для самостоятельного решения

1. Вывести уравнение диффузии в неподвижной среде, предполагая, что поверхностями равной концентрации в каждый момент времени t являются плоскости, перпендикулярные к оси x. Написать граничные условия, если:
а) на граничных плоскостях $x = 0$ и $x = l$ концентрация диффундирующего вещества поддерживается равной 0;
б) граничные плоскости не проницаемы.

2. Вывести уравнение диффузии неустойчивого газа в неподвижной среде, предполагая, что поверхностями равной концентрации в каждый момент времени t являются плоскости, перпендикулярные к оси x. Причем скорость распада газа пропорциональна концентрации.

3.4. Постановка начально-краевых задач

Для выделения единственного решения уравнения теплопроводности (диффузии)

$$u_t = a^2 u_{xx}$$

необходимо к уравнению добавить начальное условие

$$u(x, 0) = \phi(x),$$

где $\phi(x)$ – начальное распределение температуры (распределение диффундирующего вещества) и граничные условия, которые могут быть различны в зависимости от физических условий на границах:

1. Если на границе $x = l$ задана температура (концентрация), то мы получим граничное условие I рода $u(l, t) = \mu_1(t)$, где $\mu_1(t)$ – функция

температуры (концентрации) зависящая от времени, заданная в промежутке $0 < t < T$, в течении которого изучается процесс.

2. Если на границе задана величина теплового потока (потока диффундирующего вещества), то мы получим граничное условие II рода $\dfrac{\partial u}{\partial x}(l,t) = \nu(t)$, где $\nu(t)$ – функция, задающая тепловой поток. Если поток равен нулю, то говорят, что конец теплоизолирован (не проницаем для диффундирующего вещества).

3. Если на границе происходит теплообмен (диффузия), то мы получим граничное условие III рода $\dfrac{\partial u}{\partial x}(l,t) = \lambda(u(l,t) - Q(t))$, где $Q(t)$ – известная функция температуры окружающей среды (концентрация диффундирующего вещества в окружающей среде). Предполагается, что процесс теплообмена на границе тела с окружающей средой происходит по закону Ньютона. Этот закон состоит в том, что поток тепла через единицу поверхности в единицу времени пропорционален разности температур тела и окружающей среды, где λ – коэффициент теплообмена. В случае математической модели диффузии граничные плоскости являются полунепроницаемыми, причем диффузия через эти плоскости происходит по закону, подобному закону Ньютона конвективного теплообмена, где λ – коэффициент проницаемости.

Первая начально-краевая задача состоит в отыскании решения $u(x,t)$ параболического уравнения и формулируется следующим образом:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \le T, \\ u(x,0) = \phi(x), \quad 0 \le x \le l, \\ u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(l,t) = \mu_2(t), \quad 0 \le t \le T, \end{cases}$$

где $\phi(x), \mu_1(t), \mu_2(t)$ известные функции. Аналогично ставятся и другие задачи с различными комбинациями граничных условий.

Решением первой краевой задачи будем называть функцию $u(x,t)$ обладающую следующими свойствами:

1) $u(x,t)$ определена и непрерывна вместе с первыми производными в замкнутой области $0 \le x \le l$, $0 \le t \le T$;

2) $u(x,t)$ удовлетворяет параболическому уравнению в области $0 < x < l$, $0 < t \le T$;

3) $u(x,t)$ удовлетворяет начальному и граничному условию, т.е. $u(x,0) = \phi(x)$, $u(0,t) = \mu_1(t)$, $u(l,t) = \mu_2(t)$, где $\phi(x)$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ – непрерывные функции, удовлетворяющие условиям сопряжения $\phi(0) = \mu_1(0)$, $\phi(l) = \mu_2(0)$, необходимым для условия непрерывности $u(x,t)$ в замкнутой области.

Для уравнения параболического типа может быть поставлена только начальная задача, например в том случае, когда тело достаточно большое и/или рассматривается короткий промежуток времени в этих условиях граничный режим не сильно влияет на искомую функцию. Определяющее значение имеет только начальное распределение температуры (концентрации вещества) и уравнение (исследуемый процесс). Таким образом, приходим к задаче Коши для параболического уравнения, которая формулируется следующим образом: найти ограниченное решение параболического уравнения в неограниченной области

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < t \le T, x \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = \phi(x), x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Если исследуемый участок тела находится вблизи одного конца и далеко от другого, то в этом случае процесс практически определяется условием на ближайшей границе и начальным распределением. Таким образом, приходим к начально-краевой задачи для уравнения параболического типа, заданного на полубесконечной прямой:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x + \infty, \quad 0 < t \le T, \\ u(x,0) = \phi(x), \quad 0 \le x \le +\infty, \\ u(0,t) = \mu_1(t), \quad 0 \le t \le T. \end{cases}$$

Задания для самостоятельного решения

1. На боковой поверхности стержня происходит конвективный теплообмен по закону Ньютона со средой, температура которой является функцией времени. Пренебрегая деформацией изотермических поверхностей, поставить задачу об определении температуры. Если концы стержня поддерживаются при постоянной температуре

2. Поставить краевую задачу об остывании тонкого кольца, на поверхности которого простоит конвективный теплообмен с внешней средой, имеющим постоянную температуру. Неравномерностью распределения температуры по толщине кольца пренебречь.

3.5. Принцип максимального значения

Теорема 3.5.1. *Если функция $u(x,t)$, определенная и непрерывная в замкнутой области $0 \le t \le T$ и $0 \le x \le l$, удовлетворяет уравнению теплопроводности*

$$u_t = a^2 u_{xx}, \tag{3.5.1}$$

в точках области $\{0 < x < l, 0 < t \leq T\}$, *то максимальное и минимальное значение функции* $u(x,t)$ *достигается или в начальный момент, или в точках границы* $x = 0, x = l$, *т.е.* $\{(x,t):\ t = 0, x \in [0,l], x = l, t \in [0,T]\} = G$.

Доказательство. 1. Функция $u(x,t) = \mathrm{const}$ удовлетворяет уравнению (3.5.1) и достигает своего максимального и минимального значения в любой точке, что не противоречит условиям теоремы.

2. В случае функции отличной от постоянной, проведем доказательство методом от противного. Обозначим $M = \max\limits_{G} u(x,t)$. Допустим, что в некоторой точке $(x_0,t_0)(0 < x_0 < l, 0 < t_0 \leq T)$ функция $u(x,t)$ достигает своего максимального значения, т.е. $u(x_0,t_0) = M + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Так как в точке (x_0,t_0) функция $u(x,t)$ достигает своего максимального значения, то $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0,t_0) = 0$ и $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0,t_0) \leq 0$.

С другой стороны, функция $u(x_0,t)$ достигает своего максимального значения при $t = t_0$, тогда если $t_0 = T$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x_0,t_0) \geq 0$, и если $t_0 < T$, то $\dfrac{\partial u}{\partial t}(t_0) = 0$.

Сравнивая знаки правой и левой части уравнения (3.5.1), мы видим, что они различны или могут равняться нулю.

Рассмотрим функцию $v(x,t) = u(x,t) + k|t - t_0|$, k – некоторая константа.

$$v(x_0,t_0) = u(x_0,t_0) = M + \varepsilon, \quad \text{и } k|t - t_0| < kT.$$

Выберем k так, чтобы $kT < \dfrac{\varepsilon}{2}$, тогда $k < \dfrac{\varepsilon}{2T}$. Тогда максимальное значение $v(x,t)$, при $t = 0$, или $x = 0$, или $x = l$ не будет превосходить $v(x,t) \leq M + \dfrac{\varepsilon}{2}$. В силу непрерывности функции она будет достигать своего максимального значения в некоторой точке (x_1,t_1)

$$v(x_1,t_1) \geq v(x_0,t_0) = M + \varepsilon,$$

поэтому $t_1 > 0$, $0 < x_1 < l$, так как при $t = 0$, или $x = 0$, или $x = l$ имеет место неравенство $v(x,t) \leq M + \varepsilon$. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_1,t_1) \geq 0 \text{ и } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_1,t_1) \leq 0.$$

Отсюда получим

$$\begin{aligned} &u_{xx}(x_1,t_1) = v_{xx}(x_1,t_1) \leq 0, \\ &u_t(x_1,t_1) = v_t(x_1,t_1) + k \geq k > 0. \end{aligned}$$

Отсюда получим

$$u_t(x_1, t_1) - a^2 u_{xx}(x_1, t_1) \geq k > 0.$$

Таким образом, уравнение (3.5.1) не удовлетворяется во внутренней точке (x_1, t_1). Тем самым доказали, что решение $u(x,t)$ уравнения (3.5.1) не может принимать значений, превосходящих наибольшее значение функции $u(x,t)$ на границе. (Аналогично доказывается вторая часть теоремы о минимуме). □

Физический смысл принципа максимума заключается в следующем: Если температура на границе в начальный момент времени не превосходит некоторого значения M, то при отсутствии источников тепла внутри тела не может создаваться температура большая M.

Задания для самостоятельного решения

1. Доказать принцип минимального значения.

2. Вывести уравнение теплопроводности для ограниченного горящего стержня. Левый конец имеет температуру окружающей среды, правый конец стержня горит, причем фронт горения распространяется с постоянной скоростью v_0 и имеет температуру горения $f(t)$.

3.6. Теорема единственности

Теорема 3.6.1. *(о единственности решения смешанной задачи для уравнения теплопроводности) Решение задачи*

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < T, \\ u(x,0) = \phi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \\ u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(l,t) = \mu_2(t), \quad 0 \leq t \leq T \end{cases} \tag{3.6.1}$$

единственно.

Доказательство. Используем метод от противного. Пусть существует два решения задачи (3.6.1): $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$, функции определены и непрерывны в замкнутой области $\{0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq l\}$. Построим вспомогательную функцию $v = u_1 - u_2$, которая будет непрерывна и определена в той же области. В силу линейности операции дифференцирования функция v удовлетворяет задаче

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < T, \\ v(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \\ v(0,t) = 0, \quad v(l,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \end{cases} \tag{3.6.2}$$

Теперь к функции v применим принцип максимума, т.е. она достигает своего максимального значения или при $t = 0$, или при $x = 0$, или при $x = l$, но из (3.6.2) следует, что функция на рассматриваемом множестве равна нулю, следовательно функция равна нулю и во всей области, т.е.

$$v(x,t) \equiv 0 \Rightarrow u_1(x,t) = u_2(x,t).$$

Таким образом, приходим к противоречию с предположением о существовании двух решений. Следовательно, решение единственно. □

Следствие 1. Если два решения $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ уравнения теплопроводности удовлетворяют условиям $u_1(x,0) \le u_2(x,0)$ для любых $x \in [0,l]$, $u_1(0,t) \le u_2(0,t)$ и $u_1(l,t) \le u_2(l,t)$ для любых $t \in [0,T]$, то $u_1(x,t) \le u_2(x,t), \forall (x,t) : 0 \le t \le T, 0 \le x \le l$.

Доказательство. Построим вспомогательную функцию $v = u_1 - u_2$, которая будет непрерывна и определена в той же области. В силу линейности операции дифференцирования функция v удовлетворяет уравнению и начальным и граничным условиям:

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < T, \\ v(x,0) \le 0, \quad 0 \le x \le l, \\ v(0,t) \le 0, \quad v(l,t) \le 0, \quad 0 \le t \le T. \end{cases}$$

Функция v удовлетворяет условиям при которых установлен принцип максимума, согласно нему, получим $v(x,t) \le 0$, следовательно $u_1(x,t) \le u_2(x,t)$ (в противном случае функция v могла бы принимать положительные значения). □

Следствие 2. Если три решения $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ и $u_3(x,t)$ уравнения теплопроводности удовлетворяют условиям $u_1(x,0) \le u_2(x,0) \le u_3(x,0)$ $\forall x \in [0,l]$, $u_1(0,t) \le u_2(0,t) \le u_3(0,t)$ и $u_1(l,t) \le u_2(l,t) \le u_3(l,t)$ $\forall t \in [0,T]$, то $u_1(x,t) \le u_2(x,t) \le u_3(x,t)$, $\forall (x,t) : 0 \le t \le T, 0 \le x \le l$.

Доказательство основано на применении следствия 2 попарно к функциям $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ и $u_2(x,t)$, $u_3(x,t)$.

Следствие 3. Если для двух решений $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ уравнения теплопроводности имеет место неравенство $|u_1(x,t) - u_2(x,t)| \le \varepsilon$, для $t = 0, x = 0, x = l$, то $|u_1(x,t) - u_2(x,t)| \le \varepsilon$, для всех $(x,t) : 0 \le x \le l$, $0 \le t \le T$.

Следствие 3 устанавливает непрерывную зависимость решения от начальных данных (начального и граничного условий).

На основе принципа максимума можно доказать

Теорема 3.6.2. *(о единственности решения начальной задачи для уравнения теплопроводности) Пусть $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ – непрерывные, ограниченные по всей области изменения переменных (x,t) функции, удовлетворяющие уравнение теплопроводности $u_t = a^2u_{xx}$ $(-\infty < x < \infty,$ $t > 0)$ и условию $u(x,0) = \phi(x)(-\infty < x < \infty)$, причем ϕ – непрерывна и ограниченна. Тогда решение задачи единственно.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$, где $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ – непрерывные, ограниченные по всей области изменения переменных (x,t) функции, удовлетворяющие уравнению теплопроводности. По построению v – ограниченная, непрерывная функция во всей области и удовлетворяет уравнению теплопроводности. Тогда существует такое M, что $|u_1(x,t)| \le M$ и $|u_2(x,t)| \le M$ для всех (x,t) таких, что $-\infty < x < \infty, t \ge 0$. Тогда $|u_1(x,t) - u_2(x,t)| \le 2M$, причем v удовлетворяет условию $v(x,0) = 0$. Рассмотрим область $|x| \le L$ и функцию $V(x,t) = \dfrac{4M}{L^2}(\dfrac{x^2}{2} + a^2t^2)$. Функция V непрерывная и удовлетворяет уравнению теплопроводности:

$$V_{xx} = \frac{4M}{L^2}, \quad V_t = \frac{4Ma^2}{L^2} \Rightarrow V_t = a^2V_{xx}.$$

При этом

$$V(x,0) = \frac{4M}{L^2}\left(\frac{x^2}{2}\right) \ge |v(x,0)| = 0, \tag{3.6.3}$$

$$V(\pm L,t) = \frac{4M}{L^2}\left(\frac{L^2}{2} + a^2t^2\right)2M \ge |v(\pm L,t)|. \tag{3.6.4}$$

Для ограниченной области $\{(x,t) : |x| \le L, 0 \le t \le T\}$ справедлив принцип максимума. Применив следствие 2 (§3.5) для функции $u_1(x,t) = -V(x,t)$, $u_2(x,t) = v(x,t)$, $u_3(x,t) = V(x,t)$ и учитывая (3.6.4), получим, что

$$-\frac{4M}{L^2}\left(\frac{x^2}{2} + a^2t^2\right) \le v(x,t) \le \frac{4M}{L^2}(\frac{x^2}{2} + a^2t^2).$$

Фиксируя (x,t) и устремляя $L \to \infty$, получим, что $v(x,t) \equiv 0$. Следовательно, $u_1 \equiv u_2$. □

Задания для самостоятельного решения

1. Привести доказательство следствия 2.
2. Привести доказательство следствия 3.

3.7. Метод разделения переменных для уравнения теплопроводности

Рассмотрим первую смешанную задачу для однородного уравнения теплопроводности

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \phi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \\ u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad 0 \leq t, \end{cases} \tag{3.7.1}$$

причем с однородными граничными условиями. Техника метода Фурье не меняется по сравнению с задачами для уравнений гиперболического типа. Решение будем искать в виде произведения $u(x,t) = X(x)T(t)$. Подставим в уравнение теплопроводности и разделим на a^2XT, получим

$$\frac{T'}{a^2T} = \frac{X''}{X} = \lambda. \tag{3.7.2}$$

Параметр λ должен быть такой, что $\lambda = c^2 \leq 0$ по двум причинам. Первая – физический смысл, вторая при $\lambda > 0$ нет не тривиальных решений. Составим задачу Штурма – Лиувилля относительно функции X

$$\begin{cases} X'' - \lambda X = 0, \\ X(0) = X(l) = 0. \end{cases} \tag{3.7.3}$$

Решение задачи (3.7.4) имеет вид

$$\begin{aligned} &X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \ n \in \mathbb{N} \\ &\lambda_n = -\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2. \end{aligned}$$

Затем найдем решение уравнения относительно функции T

$$T_n' + \left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 T_n = 0, \tag{3.7.4}$$

оно имеет вид

$$T_n(t) = c_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t}.$$

Таким образом, общее решение задачи (3.7.1) приобретает вид

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right). \tag{3.7.5}$$

Функция $u(x,t)$ удовлетворяет граничным условиям так как им удовлетворяет каждое слагаемой ряда. Используем начальное условие для определения коэффициентов c_n

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) = \phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right).$$

$$c_n = \phi_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \phi(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx.$$

Функция ϕ должна удовлетворять условиям $\phi(0) = \phi(l) = 0, \phi \in C[0,l]$, т.е. допускать нечетное продолжение.

Задания для самостоятельного решения

1. Решить задачу методом Фурье

$$\begin{aligned} &u_t = 3u_{xx}, \quad 0 < x < l, 0 < t < T, \\ &u(x,0) = 2\cos(3x) - 2\cos(5x), \quad 0 \le x \le l, \\ &u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0 \quad 0 \le t \le T. \end{aligned}$$

2. Решить задачу методом Фурье

$$\begin{aligned} &u_t = 3u_{xx}, \quad 0 < x < l, 0 < t < T, \\ &u(x,0) = x(l-x), \quad 0 \le x \le l, \\ &u(0,t) = u_x(l,t) = 0 \quad 0 \le t \le T. \end{aligned}$$

3.8. Обоснование метода разделения переменных для уравнения теплопроводности

Решение первой смешанной задачу для однородного уравнения теплопроводности

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \phi(x), \quad 0 \le x \le l, \\ u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad 0 \le t, \end{cases} \tag{3.8.1}$$

полученное методом Фурье, имеет вид

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right). \tag{3.8.2}$$

Найдем условия при которых функция $c_n(x,t)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности в области $\{0 < x < l, t > 0\}$ и непрерывна на границе области ($t = 0$ или $x = 0$, или $x = l$). А также ряды при

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n}{\partial t}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}$$

сходятся равномерно $t \geq \bar{t} > 0$. Рассмотрим

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial t}\right| = \left|c_n \left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)\right| < \left|c_n \left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t}\right|,$$

где

$$c_n = \frac{2}{l}\left|\int\limits_0^l \phi(x) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx\right| \leq 2|\phi(\tilde{x})|, \tilde{x} \in [0, l], \phi(\tilde{x}) = \max_{[0,l]} \phi(x).$$

Функция ϕ ограниченна на отрезке $[0, l]$, т.е. $|\phi(x)| < M$. Следовательно, $|c_n| < 2M$. Таким образом, получим

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial t}\right| < 2M \left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t}, \forall t \geq \bar{t},$$

$$\left|\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}\right| < 2M \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t}, \forall t \geq \bar{t},$$

$$n^2 e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} < n^2 e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 \bar{t}}.$$

При этом существует n_0 такой, что $n^{-4} < e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 \bar{t}}$ $\forall n > n_0$, $t \geq \bar{t}$. Таким образом,

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial t}\right| < \frac{1}{n^2}, \quad \left|\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}\right| < \frac{1}{n^2},$$

следовательно ряды сходятся равномерно по признаку Вейерштрасса. И их можно дифференцировать в области $t \geq \bar{t} > 0$. В силу произвольности выбора $\bar{t}$ это имеет место $\forall t > 0$. Тем самым показано, что ряд (3.8.2) представляет собой функцию удовлетворяющую уравнению и дифференцируемую нужное число раз.

Если функция ϕ непрерывная, имеет кусочно-непрерывную производную и удовлетворяет условиям $\phi(0) = \phi(l) = 0$, то ряд

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)$$

определяет непрерывную функцию при $t \geq 0$. Ряд (3.8.2) сходится равномерно при $t \geq 0, 0 \leq x \leq l$, если учесть, что для непрерывной и кусочно-гладкой функции ϕ ряд из модулей коэффициентов ряда Фурье сходится, если $\phi(0) = \phi(l) = 0$.

Задания для самостоятельного решения

1. Можно ли решить следующую задачу методом Фурье

$$\begin{aligned}
&u_t = 3u_{xx}, \quad 0 < x < l, 0 < t < T,\\
&u(x,0) = x, \quad 0 \le x \le l,\\
&u(0,t) = u(l,t) = 0 \quad 0 \le t \le T.
\end{aligned}$$

2. Можно ли решить следующую задачу методом Фурье

$$\begin{aligned}
&u_t = 3u_{xx}, \quad 0 < x < 2, 0 < t < T,\\
&u(x,0) = \begin{cases} x^2, & 0 \le x \le 1,\\ (x-2)^2, & 1 < x \le 2,\end{cases}\\
&u(0,t) = u(2,t) = 0 \quad 0 \le t \le T.
\end{aligned}$$

3.9. Метод разделения переменных для уравнения теплопроводности на прямой

Требуется найти ограниченную функцию $u(x,t)$ $(t \ge 0, -\infty < x < \infty)$, удовлетворяющую уравнению теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \tag{3.9.1}$$

и начальному условию

$$u(x,0) = f(x), \quad -\infty < x < \infty, \tag{3.9.2}$$

где $f(x)$ – непрерывная ограниченная функция. Сделаем замену переменной $\tau = a^2 t$ и получим

$$u_\tau = u_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad \tau > 0, \tag{3.9.3}$$

$$u(x,0) = f(x), \quad -\infty < x < \infty. \tag{3.9.4}$$

Решим задачу (3.9.3), (3.9.4) методом разделения переменных, используя принцип суперпозиции. Пусть $u(\tau,x) = T(\tau)X(x)$, тогда

$$T'X = X''T \quad | : XT,$$

$$\frac{T'}{T} = c, \quad \frac{X''}{X} = c.$$

$T(\tau) = De^{c\tau}$ ни в одном сечении стержня, температура $u = XT$ не может неограниченно возрастать при $\tau \to \infty$, поэтому параметр с должен быть отрицателен. Положим $c = -\lambda^2$.

$$T(\tau) = De^{-\lambda^2\tau}.$$

Отсюда следует

$$X'' + \lambda^2 X = 0, \quad X(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x.$$

$$u(x,\tau) = (\alpha\cos(\lambda x) + \beta\sin(\lambda x))e^{-\lambda^2\tau}, \; \alpha = AD, \; \beta = BD. \tag{3.9.5}$$

Функция (3.9.5) является решением уравнения (3.9.3) при любом значении λ. Для каждого значения λ можно выбирать свои значения коэффициентов, т.е. $\alpha = \alpha(\lambda)$, $\beta = \beta(\lambda)$.

$$u_{(\lambda)}(x,\tau) = (\alpha(\lambda)\cos(\lambda x) + \beta(\lambda)\sin(\lambda x))e^{-\lambda^2\tau}, \tag{3.9.6}$$

решение зависящее от параметра λ, причем $-\infty < \lambda < \infty$. Функция

$$u(x,\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\alpha(\lambda)\cos(\lambda x) + \beta(\lambda)\sin(\lambda x))e^{-\lambda^2\tau}\,d\lambda, \tag{3.9.7}$$

также является решением уравнения (3.9.3), если производные можно вычислять под знаком интеграла. Подберем $\alpha(\lambda)$, $\beta(\lambda)$ так, чтобы функция (3.9.6) удовлетворяла уравнению (3.9.3) и условию (3.9.4):

$$u_\lambda(x,0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\alpha(\lambda)\cos(\lambda x) + \beta(\lambda)\sin(\lambda x))\,d\lambda = f(x). \tag{3.9.8}$$

Для этого разложим функцию $f(x)$ в интеграл Фурье:

1. Функция $f(x)$ разложима в интеграл Фурье в любом конечном интервале (в любой физической задаче $f(x)$ – начальное распределение температуры удовлетворяет данному условию).

2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx$ – сходится (означает конечность тепловой энергии стержня, так как тепловая энергия пропорциональна абсолютной температуре). Тогда $f(x)$ абсолютна интегрируемая функция на всей числовой оси.

Тогда

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos(\lambda(\xi - x))d\xi = \\
&= |\cos(\lambda(\xi - x)) = \cos(\lambda\xi)\cos(\lambda x) + \sin(\lambda\xi)\sin(\lambda x)| = \\
&= \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos(\lambda\xi)d\xi\right)\cos(\lambda x) + \right. \\
&\left. + \left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\sin(\lambda\xi)d\xi\right)\sin(\lambda x)\right\} d\lambda.
\end{aligned}
\tag{3.9.9}
$$

Сравнивая результат, полученный в (3.9.9), с (3.9.8), получим

$$
\begin{aligned}
\alpha(\lambda) &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos(\lambda\xi)d\xi, \\
\beta(\lambda) &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\sin(\lambda\xi)d\xi.
\end{aligned}
\tag{3.9.10}
$$

При этом

$$
|\alpha(\lambda)| \le \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(\xi)|d\xi \le C, \quad |\beta(\lambda)| \le \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(\xi)|d\xi \le C.
$$

Подставим (3.9.10) в (3.9.7) и получим

$$
\begin{aligned}
u(x,r) &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\{\cos(\lambda x)\cos(\lambda\xi) + \sin(\lambda x)\sin(\lambda\xi)\}e^{-\lambda^2\tau}d\xi = \\
&= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos(\lambda(x-\xi))e^{-\lambda^2 r}\,d\xi,
\end{aligned}
\tag{3.9.11}
$$

которая удовлетворяет задаче (3.9.3), (3.9.4). Покажем, что функция $u(x,\tau)$, определяемая формулой (3.9.11), является решением уравнения (3.9.4) для любых x и $r \ge \tau_0 > 0$. Действительно, так как

$$
|u_\lambda| = |\cos(\lambda x)\cos(\lambda\xi) + \sin(\lambda x)\sin(\lambda\xi)|e^{-\lambda^2\tau} \le 2Ce^{-\lambda^2 r_0},
$$

$$
\left|\frac{\partial u_\lambda}{\partial r}\right| = \left|\cos(\lambda x)\cos(\lambda\xi) + \sin(\lambda x)\sin(\lambda\xi)|e^{-\lambda^2 r}\right| \le 2C\lambda^2 e^{-\lambda^2 r} \le 2C\lambda^2 e^{-\lambda^2 r_0},
$$

$$\left|\frac{\partial^2 u_\lambda}{\partial x^2}\right| \le 2C\lambda^2 e^{-\lambda^2\tau_0},$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2}\,d\lambda = \sqrt{\pi} \text{ (интеграл Пуассона)},$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2\tau_0}\,d\lambda = \frac{1}{\sqrt{\tau_0}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2}\,d\mu = \sqrt{\frac{\pi}{\tau_0}},$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2 r_0}\,d\lambda = \left|\begin{matrix} u=\lambda, & dv = \lambda e^{-\lambda^2 r_0}d\lambda, \\ du = d\lambda, & v = -\dfrac{1}{2\tau_0}e^{-\lambda^2\tau_0} \end{matrix}\right| =$$

$$= -\frac{\lambda}{2\tau_0}e^{-\lambda^2\tau_0}\Bigg|_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{2\tau_0}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2\tau_0}d\lambda = \frac{\sqrt{\pi r_0}}{2\tau_0^2}.$$

Тогда интегралы $\int\limits_{-\infty}^{\infty} u_\lambda(x,\tau)\,d\lambda$ $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{\partial^2 u_\lambda}{\partial x^2}(x,\tau)\,d\lambda$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{\partial u_\lambda}{\partial \tau}(x,\tau)\,d\lambda$ сходятся абсолютно и непрерывно по признаку Вейерштрасса. Поэтому функция $u(x,\tau)$ определенная формулой (3.9.11) действительно является решением уравнения (3.9.4) для всех $x, \tau > 0$.

Задания для самостоятельного решения

1. Доказать, что интегралы абсолютно и равномерно сходятся:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} u_\lambda(x,\tau)\,d\lambda,\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 u_\lambda}{\partial x^2}(x,\tau)\,d\lambda,\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u_\lambda}{\partial \tau}(x,\tau)\,d\lambda.$$

2. Разрешима ли задача Коши:

$$\begin{cases} u_t = 4u_{xx}, \quad t>0,\ x\in\mathbb{R}, \\ u(0,x) = x^2, \quad x\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

3.10. Формула Пуассона

Изменим порядок интегрирования в (3.9.11)

$$u(x,r) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cos(\lambda(x-\xi))e^{-\lambda^2 r}d\lambda\right\}d\xi. \qquad (3.10.1)$$

Прежде чем вычислять внутренний интеграл, сделаем замену

$$\lambda = \frac{\sigma}{\sqrt{r}},\ \sigma = \lambda\sqrt{r},\ d\lambda = \frac{d\sigma}{\sqrt{r}}.$$

Подставим и получим

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos\left(\frac{\sigma}{\sqrt{r}}(x-\xi)\right) e^{-\sigma^2}\frac{d\sigma}{\sqrt{r}} = \left| w = \frac{x-\xi}{\sqrt{r}} \right| =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{r}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos(\sigma w)e^{-\sigma^2}d\sigma = \frac{1}{\sqrt{r}}I(w),$$

где $I(w) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos(\sigma w)e^{-\sigma^2}d\sigma$. Тогда

$$I(0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma^2}d\sigma = \sqrt{\pi}.$$

$$I'_w(w) = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} \sigma\sin(\sigma w)e^{-\sigma^2}d\sigma = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin(\sigma w)de^{-\sigma^2} =$$
$$= \frac{1}{2}\sin(\sigma w)e^{-\sigma^2}\Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{w}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos(\sigma w)e^{-\sigma^2}d\sigma = -\frac{w}{2}I(w).$$

Составим задачу Коши для дифференциальное уравнение относительно функции $I(w)$

$$-\frac{w}{2}I(w) = I'(w), \quad I(0) = \sqrt{\pi},$$

и найдем общее решение

$$\frac{I'(w)}{I(w)} = -\frac{w}{2},$$
$$\ln(|I(w)|) = -\frac{w^2}{4} + \ln|C|,$$
$$I(w) = Ce^{-\frac{w^2}{4}}.$$

Определим значение константы c из начальных условий:

$$I(0) = C = \sqrt{\pi}.$$

Тогда решение задачи Коши примет вид

$$I(w) = \sqrt{\pi}e^{-\frac{w^2}{4}}.$$

Сделав обратную замену $w = \dfrac{x-\xi}{\sqrt{r}}$, получим

$$I(\xi) = \sqrt{\pi} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4r}}.$$

Подставим в формулу (3.10.1), получим решение задачи (3.9.3), (3.9.4)

$$u(x,r) = \frac{1}{2\sqrt{\pi r}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4r}}\, d\xi. \tag{3.10.2}$$

Подставим $r = a^2 t$, получим формулу Пуассона решения задачи Коши для уравнения теплопроводности на прямой (3.9.1), (3.9.2):

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}\, d\xi. \tag{3.10.3}$$

Задания для самостоятельного решения

1. Найти решение задачи Коши:

$$\begin{aligned} &u_t = 4u_{xx}, \quad t>0,\ x\in\mathbb{R},\\ &u(0,x) = e^{-x^2+x}, \quad x\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

2. Найти решение задачи Коши:

$$\begin{aligned} &u_t = 16u_{xx}, \quad t>0,\ x\in\mathbb{R},\\ &u(0,x) = e^{-4x^2-2x}, \quad x\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

3.11. Исследование формулы Пуассона

Введем функцию

$$\phi_\xi(x,r) = \frac{1}{2\sqrt{\pi r}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4r}}. \tag{3.11.1}$$

Так как интеграл в формуле (3.10.2) сходится равномерно, то можно вычислять производные под знаком интеграла. Вычислим их

$$\frac{\partial \phi_\xi(x,r)}{\partial r} = \left(\frac{1}{4r\sqrt{\pi r}} + \frac{(x-\xi)^2}{8r^2\sqrt{\pi r}} \right) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4r}},$$

$$\frac{\partial \phi_\xi(x,r)}{\partial x} = -\frac{(x-\xi)}{4r\sqrt{\pi r}} e^{-\frac{(x-xi)^2}{4r}},$$

$$\frac{\partial^2\phi_\xi(x,r)}{\partial x^2} = \left(\frac{1}{4r\sqrt{\pi r}} + \frac{(x-\xi)^2}{8r^2\sqrt{\pi r}}\right) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4r}}.$$

Отсюда получим, что

$$\frac{\partial\phi_\xi(x,r)}{\partial r} = \frac{\partial^2\phi_\xi(x,r)}{\partial x^2},$$

следовательно $\phi_\xi(x,r)$ является решение уравнения (3.9.4) при произвольно значении параметра ξ. Значит функция (3.10.2) действительно удовлетворяет уравнению (3.9.4).

Покажем, что функция $u(x,t) = \dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}\, d\xi$ удовлетворяет начальному условию, т.е.

$$\lim_{t\to 0} u(x,t) = f(x) \quad \forall x \in (-\infty, +\infty).$$

Введем новую переменную $\alpha = \dfrac{\xi - x}{2a\sqrt{t}}$, $\xi = 2a\alpha\sqrt{t} + x$, тогда

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(2a\alpha\sqrt{t} + x) e^{-\alpha^2}\, d\alpha.$$

Следовательно решение $u(x,t)$ будет ограничено при $t > 0$, если $|f(x)| \leq M \ \forall x$.

$$|u(x,t)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(2a\alpha\sqrt{t} + x) e^{-\alpha^2}\, d\xi \leq \frac{M}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2}\, d\alpha = M.$$

Представим

$$f(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2}\, d\alpha.$$

Тогда

$$u(x,t) - f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (f(2a\alpha\sqrt{t} + x) - f(x)) e^{-\alpha^2}\, d\alpha,$$

$$|u(x,t) - f(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(2a\alpha\sqrt{t} + x) - f(x)| e^{-\alpha^2}\, d\alpha.$$

В силу ограниченности функции $f(x)$, получаем

$$|f(2a\alpha\sqrt{t}+x)-f(x)|e^{-\alpha^2} \le 2Me^{-\alpha^2} \quad \forall x,\ \forall t,\ \forall \alpha.$$

В силу сходимости интеграла $\forall \varepsilon > 0\ \exists N$ такое, что

$$\frac{2M}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{N} e^{-\alpha^2}\, d\alpha \le \frac{\varepsilon}{3}, \quad \frac{2M}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-N}^{\infty} e^{-\alpha^2}\, d\alpha \le \frac{\varepsilon}{3}.$$

Таким образом,

$$|u(x,t)-f(x)| \le \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-N}^{N} |f(2a\alpha\sqrt{t}+x)-f(x)|e^{-\alpha^2}\, d\alpha.$$

В силу непрерывности функции $f(x)$ можно утверждать, что $\forall t$ достаточно близких к нулю и $|\alpha| \le N$ выполняется $|f(2a\alpha\sqrt{t}+x)-f(x)| \le \dfrac{\varepsilon}{3}$, получим

$$|u(x,t)-f(x)| \le \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-N}^{N} e^{-\alpha^2}\, d\alpha$$

усилим неравенство и получим

$$|u(x,t)-f(x)| \le \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2}\, d\alpha = \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Тем самым доказано $\forall x \lim\limits_{t\to 0} u(x,t) = f(x)$. Итак, доказано, что функция $u(x,t)$ определенная формулой (3.10.3) ограничена, удовлетворяет однородному уравнению теплопроводности (3.9.1) и начальному условию (3.9.2). Единственность решения следует из принципа максимума.

Задания для самостоятельного решения

1. Доказать единственность решения задачи Коши для однородного уравнения теплопроводности.

2. Привести примеры корректных и некорректных постановок задачи Коши для однородного уравнения теплопроводности.

3.12. Фундаментальное решение параболического уравнения

Функция $\varphi_\xi(x,t) = \dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}$ называется фундаментальным решением однородного параболического уравнения. В качестве начального распределения возьмем физический тепловой импульс. *Физическим* *тепловым импульсом* называется следующее начальное распределение температур (см. рис. 17)

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} u_0, & \text{если } |x - x_0| < \varepsilon, \\ 0, & \text{если } |x - x_0| > \varepsilon, \end{cases}$$

где $u_0 = \text{const}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$.

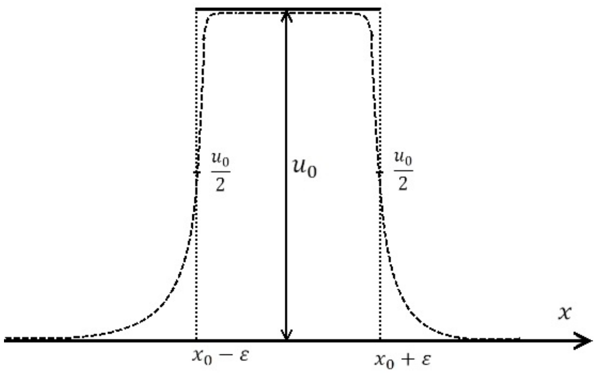


Рис. 17. Физический тепловой импульс

Такое начальное распределение температуры возникает, если в стержне, температура которого в каждой точке первоначально равна нулю, в момент $t = 0$ на множестве $x_0 - \varepsilon$ до $x_0 + \varepsilon$ внезапно подведено некоторое количество тепла (например, на мгновение поднесено высокотемпературное пламя). Полученное количество тепла θ_0 пропорционально площади прямоугольника, изображенного на рис. 17. Если S – площадь сечения стержня, то $2\varepsilon S$ – объем участка стержня, масса которого будет равна $2\varepsilon S\rho$, а количество теплоты $\theta_0 = 2\varepsilon S\rho c u_0$ (c – удельная теплоемкость, $Q = c\rho V \Delta u$).

С практической точки зрения очевидно, что температура не может представляться разрывной функцией $f_\varepsilon(x)$, но график температуры будет очень близок к графику $f_\varepsilon(x)$. Если разрывную функцию представить интегралом Фурье, то его значение в точках разрыва равно $\dfrac{u_0}{2}$, поэтому будем считать, что и температура в месте нагрева равна $\dfrac{u_0}{2}$. По формуле Пуассона (3.10.3) найдем

$$u(x,t) = \frac{u_0}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi.$$

Вычислим интеграл, применив к нему теорему о среднем значении

$$\int\limits_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} d\xi = 2\varepsilon e^{-\frac{(x-\tilde{\xi})^2}{4a^2t}}, \text{ где } \tilde{\xi} \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon),$$

тогда $u(x,t) = \dfrac{2\varepsilon u_0}{2h\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\tilde{\xi})^2}{4a^2t}}$, т.к. $2\varepsilon u_0 = \dfrac{\theta_0}{S\rho c}$. Предположим, что подведено количество тепла $\theta_0 = S\rho c$, тогда $u(x,t) = \dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\tilde{\xi})^2}{4a^2t}}$.

От физического теплового импульса перейдем к точечному (идеальному) тепловому импульсу, для этого устремим ε к нулю. Если $2\varepsilon u_0 = 1$, то при $\varepsilon \to 0$ имеем $u_0 \to +\infty$. Таким образом, при

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2t}} = \varphi_{x_0}(x,t),$$

получили фундаментальное решение при $\xi = x_0$. Точечный импульс является еще в большей мере абстракцией, чем физический тепловой импульс.

Итак, фундаментальное решение $\varphi_{x_0}(x,t)$ является решением задачи теплопроводности в бесконечном стержне при начальном распределении температуры $f(x) = \delta(x-x_0)$, где $\delta(x-x_0)$ – импульсная функция Дирака (δ-функция) такая, что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-x_0) dx = 1.$$

Рассмотрим, как распространяется тепло в стержне после точечного импульса. Исследуем графики фундаментального решения для разных значений $t > 0$ (см. рис. 18).

1. График $\varphi_{x_0}(x,t)$ симметричен относительно прямой $x = x_0$.

2. Максимум достигается при $x = x_0$:

$$\varphi_{x_0}(x_0,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}.$$

В каждый момент времени максимальная температура будет в той точке стержня, где был приложен импульс.

3. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{x_0}(x,t) dx = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2t}} dx = \left| \begin{array}{l} \dfrac{x-x_0}{2a\sqrt{t}} = \omega \\ dx = 2a\sqrt{t} d\omega \end{array} \right| =$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\omega^2} d\omega = \sqrt{\pi}\frac{1}{\sqrt{\pi}} = 1.$$

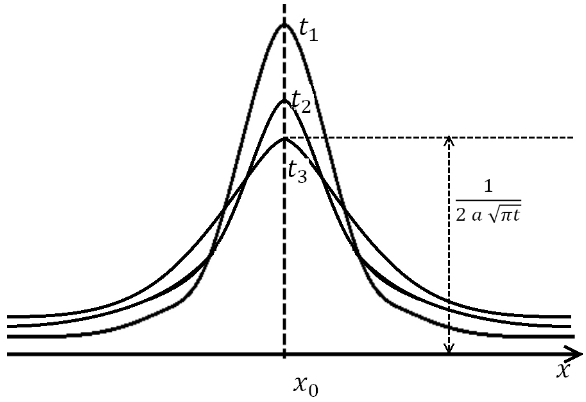


Рис. 18. График фундаментального решения в различные моменты времени

Площадь под каждой кривой равна 1, т.е. количество тепловой энергии, сообщенной стержню в начальный момент, остается неизменным с течением времени.

4. Зафиксируем x так, чтобы $x \neq x_0$, и вычислим предел, используя правило Лопиталя:

$$\lim_{t\to 0}\varphi_{x_0}(x,t) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2t}} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}}{e^{\frac{(x-x_0)^2}{4a^2t}}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\frac{t^{-\frac{3}{2}}}{2}}{\frac{(x-x_0)^2}{4a^2}t^{-2}e^{\frac{(x-x_0)^2}{4a^2t}}} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{4a\sqrt{\pi}}\sqrt{t}}{e^{\frac{(x-x_0)^2}{4a^2}}} = 0.$$

Аналогично, получим

$$\lim_{t\to\infty}\varphi_{x_0}(x,t) = 0.$$

Вычислим

$$\frac{\partial\varphi_{x_0}}{\partial t} = \left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2t}}\right)'_t = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2t}}\left(-\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}} + \frac{(x-x_0)^2}{4a^2t^{\frac{5}{2}}}\right) =$$

$$= \frac{1}{4a\sqrt{\pi}t^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2t}}\left(-1 + \frac{(x-x_0)^2}{2a^2t}\right).$$

Тогда, если $\dfrac{(x-x_0)^2}{2a^2t} - 1 = 0$, то $t_{max} = \dfrac{(x-x_0)^2}{2a^2}$.

Очевидно, что это точка максимума функции, при этом

$$\varphi_{x_0}(x,t_{max}) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi\frac{x-x_0}{2a^2}}}e^{-\frac{(x-x_0)^2 2a^2}{4a^2(x-x_0)^2}} = \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi(x-x_0)}} = U(x).$$

Таким образом, в каждой фиксированной точке $x \neq x_0$, функция $\varphi_{x_0}(x,t)$ (как функция времени) достигает своего максимального значения $U(x)$ и затем монотонно убывает при $t \to \infty$ (см. рис.19).

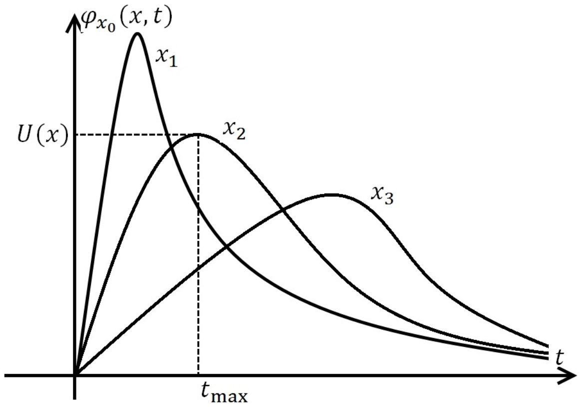


Рис. 19. График фундаментального решения для различных значений x

Задания для самостоятельного решения

1. В чем заключается физический смысл фундаментального решения уравнения теплопроводности?

2. Может ли однородное уравнение теплопроводности описывать процесс нагревания некоторого тела.

3.13. Неоднородное уравнение теплопроводности

Рассмотрим неоднородное уравнение теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \tag{3.13.1}$$

с условиями

$$u(x,0) = 0, \tag{3.13.2}$$

$$u(0,t) = 0, u(l,t) = 0. \tag{3.13.3}$$

Будем искать решение этой задачи в виде ряда Фурье по собственным функциям задачи Штурма – Лиувилля

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = X(l) = 0,$$

т.е. по собственным функциям $\sin\dfrac{\pi n}{l}x$:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin\frac{\pi n}{l}x, \tag{3.13.4}$$

будем считать t параметром.

Представим функцию $f(x,t)$ в виде ряда

$$f(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\sin\frac{\pi n}{l}x, \tag{3.13.5}$$

$$f_n(t)=\frac{2}{l}\int\limits_0^l f(\xi,t)\sin\frac{\pi n}{l}\xi d\xi.$$

Подставим (3.13.4), (3.13.5) в уравнение (3.13.1) и получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{du_n}{dt}(t)\sin\frac{\pi n}{l}x=-\sum_{n=1}^{\infty}a^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2u_n(t)\sin\frac{\pi n}{l}x+\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\sin\frac{\pi n}{l}x.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi n}{l}x\left(a^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2u_n(t)+\frac{du_n}{dt}(t)-f_n(t)\right)=0.$$

$$\frac{du_n}{dt}(t)+a^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2u_n(t)=f_n(t). \tag{3.13.6}$$

Подставив условие (3.13.2) в (3.13.4), получим

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(0)\sin\frac{\pi n}{l}x=0.$$

Отсюда следует, что

$$u_n(0)=0. \tag{3.13.7}$$

Тогда решение (3.13.6), (3.13.7) будет

$$u_n(t)=\int\limits_0^t e^{-a^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2(t-\tau)}f_n(\tau)d\tau.$$

Отсюда получим

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int\limits_0^t e^{-a^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2(t-\tau)}f_n(\tau)d\tau\right)\sin\frac{\pi n}{l}x=$$

$$=\int\limits_0^t\int\limits_0^l\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-a^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2(t-\tau)}\sin\frac{\pi n}{l}x\sin\frac{\pi n}{l}\xi f(\xi,\tau)d\xi d\tau.$$

Задания для самостоятельного решения

1. Найти решение задачи Коши:

$$u_t = 4u_{xx} + xt, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R},$$
$$u(x,0) = e^{-x^2-6x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

2. Найти решение задачи Коши:

$$u_t = 16u_{xx} + x^2 t, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R},$$
$$u(x,0) = e^{-4x^2+8x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

3.14. Общая первая краевая задача

Рассмотрим неоднородное уравнение теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \tag{3.14.1}$$

с условиями

$$u(x,0) = \varphi(x), \tag{3.14.2}$$

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(l,t) = \mu_2(t). \tag{3.14.3}$$

Введем новую неизвестную функцию $v(x,t)$ так, что

$$u(x,t) = V(x,t) + v(x,t). \tag{3.14.4}$$

Функция $v(x,t)$ будет определяться как решение уравнения

$$v_t - a^2 v_{xx} = \bar{f}(x,t),$$

$$\bar{f}(x,t) = f(x,t) - (V_t - a^2 V_{xx})$$

с дополнительными условиями

$$v(x,0) = \bar{\varphi}(x),\ \bar{\varphi}(x) = \varphi(x) - V(x,0),$$
$$v(0,t) = \bar{\mu}_1(t),\ \bar{\mu}_1(t) = \mu_1(t) - V(0,t),$$
$$v(l,t) = \bar{\mu}_2(t),\ \bar{\mu}_2(t) = \mu_2(t) - V(l,t).$$

Выберем $V(x,t)$ так, чтобы

$$\bar{\mu}_1(t) = 0, \quad \bar{\mu}_2(t) = 0,$$

представив функцию

$$U(x,t) = \mu_1(t) + \frac{x}{l}\left(\mu_2(t) - \mu_1(t)\right).$$

Таким образом, общая первая краевая задача для функции $u(x,t)$ сведена к краевой задаче для функции $v(x,t)$ при нулевых граничных условиях.

Данная схема решения задач при наличии неоднородностей в уравнении и граничных условиях не всегда удобна для представления искомой функции $u(x,t)$. Сложности, возникающие при нахождении вспомогательной функции $v(x,t)$, зависят от функции $V(x,t)$, от которой ищется отклонение.

В частности, для задач со стационарными неоднородностями удобнее выделять стационарное решение и искать отклонение от этого решения.

Задания для самостоятельного решения

1. Решите задачу методом Фурье

$$\begin{aligned} &u_t = 25u_{xx}, \quad 0 < x < l, 0 < t < T, \\ &u(x,0) = x(l-x), \quad 0 \le x \le l, \\ &u(0,t) = tu(l,t) = t^2 + 1 \quad 0 \le t \le T. \end{aligned}$$

2. Решите задачу методом Фурье

$$\begin{aligned} &u_t = 4u_{xx}, \quad 0 < x < 2,\ 0 < t < T, \\ &u(x,0) = \begin{cases} x^2, & 0 \le x \le 1, \\ (x-2)^2, & 1 < x \le 2, \end{cases} \\ &u(0,t) = 50,\ u(2,t) = t \quad 0 \le t \le T. \end{aligned}$$

4. Математические модели стационарного теплового поля

4.1. Стационарное тепловое поле. Постановка краевых задач

Распределение температуры нестационарного теплового поля удовлетворяет уравнению теплопроводности (см. гл. 3)

$$u_t = a^2 \Delta u. \tag{4.1.1}$$

Если момент времени зафиксирован или передача тепла не происходит, то температура в каждой точке тела не зависит от времени, а зависит только от координаты точки. Такое тепловое поле называется стационарным. Производная по t в левой части равенства (4.1.1) обращается в нуль, и мы приходим к уравнению Лапласа

$$\Delta u = 0. \tag{4.1.2}$$

При наличии источников тепла, чье излучение характеризуется функций f, внутри тела получаем неоднородное уравнение Лапласа (уравнение Пуассона)

$$\Delta u = f(x, y, z). \tag{4.1.3}$$

Рассмотрим тело T, ограниченное замкнутой поверхностью Σ. Необходимо найти функцию $u(x, y, z)$, удовлетворяющую внутри T уравнению (4.14.2) и граничному условию, которое может быть взято в одном из следующих видов:

I. Первая краевая задача – задача Дирихле:

$$u|_{\Sigma} = f_1.$$

II. Вторая краевая задача – задача Неймана:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Sigma} = f_2.$$

III. Третья краевая задача:

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial n} + hu\right)\right|_{\Sigma} = f_3.$$

Здесь f_1, f_2, f_3 – заданные функции, $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ – производная по направлению внешней нормали к поверхности Σ.

Задания для самостоятельного решения

1. Вывести уравнение стационарной диффузии: а) в покоящейся однородной изотропной среде, б) в однородной изотропной среде, движущейся с постоянной скоростью вдоль оси x.

2. Показать, исходя из уравнений Максвелла, что потенциал электростатического поля удовлетворяет уравнению Пуассона с правой частью, пропорциональной объемной плотности зарядов $\rho(x, y, z)$. Дать физическую интерпретацию краевых условий первого и второго рода.

4.2. Оператор Лапласа в полярных, цилиндрических и сферических координатах

Оператор Лапласа в двумерной декартовой системе координат имеет вид

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

а в трехмерной –

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

При решении задач математической физики, связанных с круглыми, цилиндрическими, сферическими телами, удобно перейти в соответствующую криволинейную систему координат. Опишем подробнее процесс получения вида оператора Лапласа в полярной системе координат. Введем полярную систему координат

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases} \tag{4.2.1}$$

Проведем замену переменных, считая $u = u(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$. Возьмем частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Поскольку $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, то

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r} = \cos\varphi, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{r} = \sin\varphi.$$

Так как

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{y}{x}, \tag{4.2.2}$$

то дифференцируя по x и по y обе части равенства (4.2.2) и получим

$$\frac{1}{\cos^2\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}, \quad \frac{1}{\cos^2\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{1}{x}.$$

Тогда

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \cos^2\varphi\frac{-y}{x^2} = \cos^2\varphi\frac{-r\sin\varphi}{r^2\cos^2\varphi} = -\frac{\sin\varphi}{r}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \cos^2\varphi\frac{1}{r\cos\varphi} = \frac{\cos\varphi}{r}.$$

Отсюда получим, что

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\cos\varphi + \frac{\partial u}{\partial\varphi}\left(-\frac{\sin\varphi}{r}\right), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\sin\varphi + \frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{\cos\varphi}{r}.$$

Вычислим вторую частную производную по переменной x

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x}.$$

Тогда

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\cos\varphi - \frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{\sin\varphi}{r}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\cos\varphi - \frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\varphi}\frac{\sin\varphi}{r} + \frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{\sin\varphi}{r^2},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial\varphi} &= \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\cos\varphi - \frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{\sin\varphi}{r}\right) = \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial\varphi\partial r}\cos\varphi - \sin\varphi\frac{\partial u}{\partial r} + \left(-\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\frac{\sin\varphi}{r}\right) - \frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{\cos\varphi}{r},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\cos\varphi - \frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\varphi}\frac{\sin\varphi}{r} + \frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{\sin\varphi}{r^2}\right)\cos\varphi + \\ &+ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi\partial r}\cos\varphi - \sin\varphi\frac{\partial u}{\partial r} + \left(-\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\frac{\sin\varphi}{r}\right) - \frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{\cos\varphi}{r}\right)\left(-\frac{\sin\varphi}{r}\right) = \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\cos^2\varphi - 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\partial\varphi}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r} + 2\frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r^2} + \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\sin^2\varphi}{r} + \frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\frac{\sin^2\varphi}{r^2}.\end{aligned}$$

Вычислим вторую частную производную по переменной y

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial y}.$$

Тогда

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\sin^2\varphi + 2\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\varphi}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r} - 2\frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r^2} + \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\cos^2\varphi}{r} + \frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\frac{\cos^2\varphi}{r^2}.$$

Составим выражение для оператора Лапласа и получим

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

Аналогично можно получить выражение оператора Лапласа в цилиндрической системе координат:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases} \tag{4.2.3}$$

Полагая $u = u(r, \varphi, z)$, получим

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Введем сферическую систему координат:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = r\cos\theta. \end{cases} \tag{4.2.4}$$

Здесь $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Проведя замену переменных $u = u(r, \varphi, \theta)$, получим выражение оператора Лапласа в сферических координатах

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

Задания для самостоятельного решения

1. Получить вид оператора Лапласа в цилиндрических координатах.
2. Получить вид оператора Лапласа в сферических координатах.

4.3. Гармонические функции

Дважды непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая уравнению Лапласа (4.1.2) на некотором открытом множестве, называется гармонической функцией. Гармонические функции обладают рядом интересных свойств. Рассмотрим некоторые из них. Пусть T – ограниченная область с гладкой границей Σ.

Теорема 4.3.1. *Если g – гармоническая функция в области T, то*

$$\oint\!\!\oint_S \frac{\partial g}{\partial n} d\sigma = 0, \tag{4.3.1}$$

где S – любая замкнутая поверхность, целиком лежащая в области T.

Доказательство. Для доказательства воспользуемся второй формулой Грина:

$$\oiint\limits_S \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) d\sigma = \iiint\limits_V (u\Delta v - v\Delta u)\, d\tau,$$

где V – объем, ограниченный поверхностью S. Подставим $u \equiv 1$. В качестве v рассмотрим гармоническую функцию g (т.е. $\Delta g = 0$). Тогда получим

$$\oiint\limits_S \frac{\partial g}{\partial n} d\sigma = 0.$$

□

Из формулы (4.3.1) получаем, что вторая краевая задача

$$\Delta u = 0 \text{ в Т},$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Sigma = f$$

может иметь решение только при условии $\iint\limits_\Sigma f d\sigma = 0$ (условие отсутствия источников внутри области T).

Теорема 4.3.2. *(Теорема о среднем значении) Если $u(M)$ – гармоническая функция в области T, а $M_0 \in T$, то*

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi a^2} \iint\limits_{\Sigma_a} u d\sigma = 0, \tag{4.3.2}$$

где Σ_a – сфера радиуса a с центром в точке M_0, целиком лежащая в области T.

Доказательство. Применим третью формулу Грина (для гармонической функции)

$$4\pi u(M_0) = \oiint\limits_{\Sigma_a} \left(\frac{1}{r_{M_0M}}\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{M_0M}}\right)\right) d\sigma.$$

к сфере Σ_a с центром в точке M_0 радиуса a. По теореме 4.3.1 получим, что

$$\oiint\limits_{\Sigma_a} \frac{\partial u}{\partial n} = 0.$$

Так как направление внешней нормали $\vec{n}$ совпадает с направлением радиуса, то следовательно

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{M_0M}}\right)\bigg|_{\Sigma_a} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r_{M_0M}}\right)\bigg|_{r_{M_0M}=a} = -\frac{1}{a^2},$$

где r_{M_0M} – расстояние от точки M_0 до точки M, принадлежащей шару, ограниченному сферой Σ_a. Таким образом, получим

$$4\pi u(M_0) = \oiint\limits_{\Sigma_a} (-u)\left(-\frac{1}{a^2}\right) d\sigma,$$

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi a^2} \oiint\limits_{\Sigma_a} u d\sigma.$$

□

Эта теорема утверждает, что значение гармонической функции в некоторой точке M_0 равно среднему значению этой функции на любой сфере Σ_a с центром в точке M_0, если сфера Σ_a не выходит из области гармоничности функции u.

Замечание 4.3.1. При доказательстве теоремы 4.3.2 мы воспользовались формулой, при которой предполагается существование производной функции $u(M)$ на поверхности сферыΣ_a. Если функция $u(M)$ непрерывна в замкнутой области $T \cup \Sigma$, удовлетворяет уравнению $\Delta u = 0$ только во внутренних точках области T, то предшествующее заключение для сферы Σ_a, касающейся Σ, было бы необоснованным. Однако теорема 4.3.2 верна для любых $a < a_0$, и, переходя к пределу при $a \to a_0$, получаем

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi a_0^2} \oiint\limits_{\Sigma_{a_0}} u(M) d\sigma.$$

Для случая двух переменных справедлива аналогичная формула

$$u(M_0) = \frac{1}{2\pi a} \int\limits_{C_a} u ds,$$

где C_a – окружность радиуса a с центром в точке M_0, лежащая в области гармоничности функции u.

Установим связь между гармоническими функциями действительных переменных и аналитическими функциями комплексного переменного.

Пусть $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ – функция комплексного переменного $z = x + iy$, $u(x,y)$, $v(x,y)$ – вещественные функции.

Напомним несколько понятий из теории функций комплексного переменного.

Определение 4.3.1. *Если существует конечный предел* $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = f'(z)$, *то функция f называется голоморфной в окрестности точки z.*

Определение 4.3.2. *Если f голоморфна в каждой точке области D, то функция f называется голоморфной в области D.*

Замечание 4.3.2. Если функция f голоморфна в области D, то она также является аналитической в данной области.

Для того чтобы функция $f(z)$, определённая в некоторой области D комплексной плоскости, была дифференцируема в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ как функция комплексного переменного z, необходимо и достаточно, чтобы её вещественная и мнимая части, соответственно u и v, были дифференцируемы в точке (x_0, y_0) как функции вещественных переменных x и y и чтобы, кроме того, в этой точке выполнялись условия Коши — Римана:

$$\begin{cases} u_x = v_y, \\ u_y = -v_x. \end{cases} \tag{4.3.3}$$

Аналитическая в некоторой области D функция имеет в этой области производные всех порядков и разлагается в степенной ряд. Продифференцируем обе части первого уравнения системы (4.3.3) по x, а второго по y, получим

$$\begin{cases} u_{xx} = v_{yx}, \\ u_{yy} = -v_{xy}. \end{cases}$$

Если сложить уравнения этой системы, получим уравнение

$$u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

то есть

$$\Delta u = 0.$$

Аналогично, продифференцировав обе части первого уравнения системы (4.3.3) по y, а второго уравнение по x и, сложив результаты, получим

$$v_{xx} + v_{yy} = 0,$$

то есть

$$\Delta v = 0.$$

Таким образом, действительная и мнимая части аналитической функции удовлетворяют уравнению Лапласа, то есть являются гармоническими функциями.

Задания для самостоятельного решения

1. Выяснить, какие из перечисленных ниже функций являются гармоническими: $a)\, u = x^2 - 2y^2 + z^2$, $b)\, u = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y$, $c)\, u = xy$, $d)\, u = 1 - \sqrt{x^2 - y^2}$, $e)\, u = \ln(x^2 - xy + y^2)$.

2. Найти среднее значение функции $u = x^2 - 2y^2 + z^2$ на единичной сфере.

4.4. Принцип максимального значения

С принципом максимального значения мы встречались в главе 3. Поскольку уравнения параболического типа и уравнения эллиптического типа имеют одну и ту же физическую интерпретацию, то можно предположить, что и их решения будут обладать схожими свойствами. И это действительно так, формулировка принципа для уравнения эллиптического типа полностью повторяет формулировку для уравнения теплопроводности.

Теорема 4.4.1. *(Принцип максимального значения) Если функция $u(M)$, определенная и непрерывная в замкнутой области $T \cup \Sigma$, удовлетворяет уравнению $\Delta u = 0$ внутри T, то максимальное и минимальное значения функции $u(M)$ достигаются на поверхности Σ.*

Доказательство. Докажем методом от противного. Допустим, что функция $u(M)$ достигает максимального значения в некоторой внутренней точке M_0 области T так, что $u_0 = u(M_0) \geq u(M)$, где M – любая точка области T. Поскольку, по предположению, $u(M_0)$ есть наибольшее значение функции $u(M)$ в $T \cup \Sigma$, то $u(M)|_\Sigma \leq u(M_0)$. Воспользуемся формулой (4.3.2)

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi\rho^2} \iint\limits_{\Sigma_\rho} u(M) d\sigma \leq \frac{1}{4\pi\rho^2} \iint\limits_{\Sigma_\rho} u(M_0) d\sigma = u(M_0).$$

Здесь Σ_ρ – сфера радиуса ρ с центром в точке M_0 целиком, лежащая в замкнутой области $T \cup \Sigma$. Если предположить, что хотя бы в одной точке M сферы Σ_ρ $u(M) < u(M_0)$, то, очевидно, придем к противоречию: $u(M_0) < u(M_0)$. Таким образом, на всей поверхности Σ_ρ $u(M) \equiv u(M_0)$.

Обозначим через ρ_0^m расстояние от точки M_0 до поверхности Σ. Тогда, рассуждая аналогично, получим, что $u(M) \equiv u(M_0)$ для всех точек, лежащих внутри $\Sigma_{\rho_0^m}$. Отсюда следует, что в любой точке M^*, принадлежащей общей части $\Sigma_{\rho_0^m}$ и Σ $u(M^*) \equiv u(M_0)$.

Если область T односвязна и максимальное значение достигается хотя бы в одной внутренней точке M_0, то $u(M) \equiv u(M_0)$ во всей области. Пусть $M^{(0)}$ – какая-либо точка области T, отличная от M_0. Соединим точку $M^{(0)}$ с точкой M_0 ломаной линией L, длину которой обозначим через l. Пусть M_1 – последняя точка выхода линии L из $\Sigma_{\rho_0^m}$. В этой точке $u(M_0) = u(M_1)$. Опишем из этой точки сферу $\Sigma_{\rho_1^m}$ радиуса ρ_1^m, касающуюся Σ, и пусть M_2 – последняя точка выхода L из $\Sigma_{\rho_1^m}$; причем $u(M_2) = u(M_0)$ и т.д. Получим не более чем через $p = \left[\dfrac{l}{\rho^{(m)}}\right]$ шагов, где $\rho^{(m)}$ – минимальное расстояние L до Σ, что одна из сфер захватит точку $M^{(0)}$, откуда следует, что $u(M^{(0)}) = u(M_0)$. В силу произвольности точки $M^{(0)}$ и непрерывности $u(M)$ в замкнутой области $T \cup \Sigma$ заключаем, что $u(M) \equiv u(M_0)$ всюду, включая точки границы. Таким образом, только постоянная функция может достигать максимального значения во внутренней точке области.

Аналогично доказывается теорема для минимального значения. □

Следствие 1. *Если функции $u(M)$ и $U(M)$ непрерывны в замкнутой области $T \cup \Sigma$, гармоничны в T, и если $u(M) \le U(M)$ на Σ, то $u(M) \le U(M)$ всюду внутри T.*

Следствие 2. *Если функции $u(M)$ и $U(M)$ непрерывны в замкнутой области $T \cup \Sigma$, гармоничны в T, и если $|u(M)| \le U(M)$ на Σ, то $|u(M)| \le U(M)$ всюду внутри T.*

Доказательство. Функции $-U(M)$, $u(M)$, $U(M)$ удовлетворяют условиям $-U(M) \le u(M) \le U(M)$ на Σ. Применяя дважды следствие 1, получим, что $-U(M) \le u(M) \le U(M)$ всюду внутри T, следовательно, $|u(M)| \le U(M)$ внутри T. □

Следствие 3. *Для гармонической в T и непрерывной в $T \cup \Sigma$ функции $u(M)$ выполняется неравенство $|u(M)| \le \max\limits_{\Sigma} |u(M)|$ всюду в $T \cup \Sigma$.*

Доказательство. Положим $U(M) = \max\limits_{\Sigma} |u(M)|$ и воспользуемся следствием 2. □

Задания для самостоятельного решения

1. Доказать принцип минимального значения.
2. Доказать следствие 1.

4.5. Первая и вторая внутренние краевые задачи для уравнения Лапласа

Единственность и устойчивость решения первой краевой задачи

Пусть дана область T, ограниченная замкнутой поверхностью Σ, на которой задана некоторая непрерывная функция $f(M)$.

Определение 4.5.1. *Решением первой внутренней краевой задачи для уравнения Лапласа назовем функцию $u(M)$ такую, что:*

1) $u(M)$ определена и непрерывна в замкнутой области $T \cup \Sigma$, включая границу;

2) $u(M)$ удовлетворяет внутри области T уравнению $\Delta u = 0$;

3) $u(M)$ принимает на Σ заданные значения $f(M)$.

Теорема 4.5.1. *(Теорема о единственности решения) Первая внутренняя краевая задача для уравнения Лапласа не может иметь двух различных решений.*

Доказательство. Предположим, что существуют два различных решения u_1, u_2. Пусть $u = u_1 - u_2$. Тогда по построению получим, что

1) $\Delta u = 0$ внутри T;

2) u – непрерывная функция в замкнутой области $T \cup \Sigma$;

3) $u|_\Sigma = 0$.

Отсюда получим, что $u(M)$ – непрерывная и гармоническая в области T функция, которая равна нулю на границе Σ. Покажем, что $u \equiv 0$. В силу теоремы Вейерштрасса всякая непрерывная функция в замкнутой области достигает в ней своего максимального значения. Предположим, что найдется точка $P \in T$ такая, что $u(P) \neq 0$. Для определенности, пусть $u(P) > 0$. Тогда функция u достигает положительного максимального значения внутри области T, что невозможно в силу принципа максимального значения. Аналогично рассуждая, получим, что условие $u(M) < 0$ невозможно ни в одной точки области T. Следовательно, $u \equiv 0$ и $u_1 \equiv u_2$. □

Говорят, что задача устойчива, если малому изменению условий, определяющих решение задачи, соответствует малое изменение самого решения, то есть решение непрерывно зависит от начальных данных.

Теорема 4.5.2. *(Об устойчивости решения первой краевой задачи) Пусть u_1 и u_2 – непрерывные в замкнутой области $T \cup \Sigma$ и гармонические внутри области T функции, для которых $|u_1(M) - u_2(M)| \le \varepsilon$ при $M \in \Sigma$. Тогда $|u_1 - u_2| \le \varepsilon$ при $M \in T$.*

Доказательство теоремы основывается на следствии 2 параграфа 4.4, если в качестве функции U взять постоянную функцию, равную ε.

Таким образом, выполнено третье условие корректности постановки математической задачи.

Единственность решения второй краевой задачи

Вторая внутренняя краевая задача (внутренняя задача Неймана) для уравнения Лапласа имеет вид

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } T, \\ \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Sigma} = f, \end{cases} \tag{4.5.1}$$

где $\vec{n}$ – вектор внешней нормали к поверхности Σ.

Определение 4.5.2. *Решением второй краевой задачи будем называть гармоническую функцию u, непрерывную в области $T \cup \Sigma$ и удовлетворяющую на поверхности Σ условию $\frac{\partial u}{\partial n}\big|_{\Sigma} = f$.*

Теорема 4.5.3. *Решение второй внутренней краевой задачи (4.5.1) определяется с точностью до произвольной постоянной.*

Доказательство. Пусть u_1 и u_2 – две непрерывно дифференцируемые в $T \cup \Sigma$ функции, удовлетворяющие уравнению Лапласа в T и условию Неймана $\frac{\partial u_1}{\partial n}\big|_{\Sigma} = f(M)$, $\frac{\partial u_2}{\partial n}\big|_{\Sigma} = f(M)$. Тогда их разность $u = u_1 - u_2$ удовлетворяет задаче

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в T}, \\ \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Sigma} = 0. \end{cases}$$

Напомним формулу Гаусса–Остроградского

$$\iiint\limits_T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) d\tau = \iint\limits_{\Sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma) d\sigma$$

или в векторной записи, пусть $\vec{A} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$, тогда

$$\iiint\limits_T \operatorname{div}\vec{A} d\tau = \iint\limits_{\Sigma} (\vec{A}, \vec{n}) d\sigma.$$

Положим $P = u\dfrac{\partial v}{\partial x}$, $Q = u\dfrac{\partial v}{\partial y}$, $R = u\dfrac{\partial v}{\partial z}$, тогда

$$\iint\limits_{T} u\Delta v d\tau = \iint\limits_{\Sigma} u\frac{\partial v}{\partial n}d\sigma - \iiint\limits_{T} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right) d\tau.$$

Применив формулу Гаусса–Остроградского для случая $v = u$, при условии $\Delta u = 0$ и $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Sigma} = 0$, получим

$$\iiint\limits_{T} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right] d\tau = 0.$$

В силу непрерывности функции u и ее первых производных получим

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \text{ т.е. } u \equiv \text{const}.$$

□

Задания для самостоятельного решения

1. Является ли корректно поставленной первая краевая задача для уравнения Лапласа?

2. Докажите, что вторая внутренняя краевая задача для уравнения Лапласа устойчива.

4.6. Внешние краевые задачи для уравнения Лапласа. Теоремы единственности

Первая внешняя краевая задача. Случай трех переменных

Определение 4.6.1. *Функция $u(x, y, z)$ называется решением первой внешней краевой задачи (внешней задачи Дирихле), если она удовлетворяет условиям:*
1) $\Delta u = 0$ в бесконечной области T с границей Σ;
2) функция u всюду непрерывна, включая поверхность Σ;
3) $u|_{\Sigma} = f(x, y, z)$, где f – функция, заданная на поверхности Σ;
4) $u(M)$ равномерно стремится к нулю на бесконечности.

Рассмотрим пример первой внешней краевой задачи для уравнения Лапласа.

Пример 4.6.1. Пусть S_R сфера радиуса R с центром в начале координат, в области $r > R$ функция u удовлетворяет уравнению

$$\Delta u = 0,$$

при $r = R$ выполняется условие Дирихле

$$u|_{r=R} = f_0, \quad f_0 = \text{const}.$$

Можно привести множество функций, являющихся решением данной задачи, например:

$$u_1 = f_0, \quad u_2 = f_0 \frac{R}{r}, \quad u_3 = \alpha u_1 + \beta u_2.$$

Все три функции удовлетворяют условиям 1) – 3) определения 4.6.1, но только функция u_2 удовлетворяет условию 4) этого же определения. Данный пример иллюстрирует важность условия 4) для выделения среди множества решений единственного.

Теорема 4.6.1. *Первая внешняя краевая задача для уравнения Лапласа имеет единственное решение.*

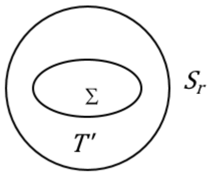


Рис. 20. Область решения

Доказательство. Докажем методом от противного. Пусть существует два различных решения u_1, u_2, удовлетворяющие условиям 1) – 4). Тогда их разность $u = u_1 - u_2$ также является решением первой краевой задачи с нулевыми краевыми условиями. Кроме того, для функции u выполняются условия 1) – 4) определения 4.6.1. В силу условия 4) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ R^+$ такое, что $|u(M)| < \varepsilon$ при $r \geq R^+$.

Рассмотрим сферу S_r радиуса $r \geq R^+$, лежащую в области T (см. рис. 20). Если точка $\overline{M}$ лежит внутри области T', заключенной между поверхностью Σ и сферой S_r, то $u(\overline{M}) < \varepsilon$, что следует из принципа максимального значения, примененного к области T'. В силу произвольности ε заключаем, что $u \equiv 0$ в области T', а также и во всей области T, в силу произвольности $r \geq R^+$.

$\square$

Первая внешняя краевая задача. Случай двух переменных

Определение 4.6.2. *Функция $u(x, y)$ называется решением первой внешней краевой задачи (внешней задачи Дирихле), если она удовлетворяет условиям:*

1) $\Delta u = 0$ *в бесконечной области* D *с границей, являющейся контуром* Γ*;*
2) функция и всюду непрерывна, включая контур Γ*;*
3) $u|_\Gamma = f(x, y)$*, где* f *– функция, заданная на контуре* Γ*;*
4) $u(M)$ *– ограничена в бесконечности, т.е.*

$$\exists N > 0 : |u(M)| \le N, \ \ \forall M \in D.$$

Теорема 4.6.2. *Первая внешняя краевая задача для уравнения Лапласа имеет единственное решение.*

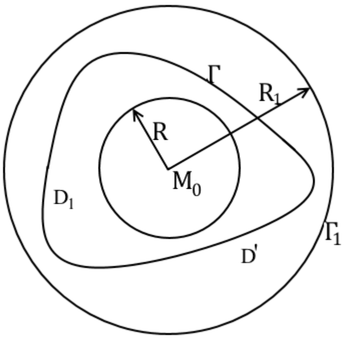


Рис. 21. Область решения

Доказательство. Докажем методом от противного. Пусть существует два различных решения u_1, u_2, удовлетворяющие условиям 1) – 4) определения 4.6.2. Тогда их разность $u = u_1 - u_2$ также является решением первой краевой задачи с нулевыми краевыми условиями. Кроме того, для нее выполняются условия 1) – 4) определения 4.6.2.

В силу условия 4) для каждой из функций u_1, u_2, справедливо $|u| \le N_3 = N_1 + N_2$, где $|u_1| \le N_1, |u_2| \le N_2$. Обозначим через D_1 область, лежащую внутри Γ и являющуюся дополнением к области D, так что $D \cup D_1$ – есть вся плоскость (см. рис. 21). Возьмем точку M_0 внутри D_1 и окружность радиуса R с центром в точке M_0, лежащую внутри D_1. Гармоническая функция $\ln \dfrac{1}{r_{M_0M}}$, где r_{M_0M} – расстояние между точками M и M_0, не имеет особенностей в области D, включая границу Γ.

Пусть Γ_1 – окружность с центром в точке M_0 радиуса R_1, содержащая целиком контур Γ, и D' – область, ограниченная кривыми Γ и Γ_1. Определим функцию $u_{R_1} = N_3 \dfrac{\ln(r_{M_0M}/R)}{\ln(R_1/R)}$. Функция u_{R_1} гармоническая, положительно определенная на D' и равная N_3 на окружности радиуса R_1.

Из принципа максимального значения следует, что u_{R_1} является мажорантой для $|u(M)|$ в области D', т.е.

$$|u(M)| < u_{R_1}(M) \text{ в } D'.$$

Фиксируем точку M и будем неограниченно увеличивать R_1, тогда $u_{R_1}(M) \to 0$ при $R_1 \to \infty$, что, в силу произвольности выбора точки M, доказывает единственность решения.

□

Пример 4.6.2. Покажем различие в постановках первой внешней краевой задачи для функции двух и трех переменных. Пусть дан шар радиуса R, на поверхности которого поддерживается постоянная температура u_0, и требуется определить стационарное распределение температуры во внешнем пространстве. Тогда решение $u = u_0\dfrac{R}{r}$ задачи для случая трех переменных обращается в нуль на бесконечности. Рассмотрим теперь двумерную задачу. Пусть на окружности радиуса R задано постоянное граничное значение $u|_{r=R} = f_0 = \text{const}$. В этом случае $u = f_0$ – есть единственное ограниченное решение и никакого решения, обращающегося в нуль на бесконечности, не существует.

Формула Грина для области, внешней к замкнутой поверхности

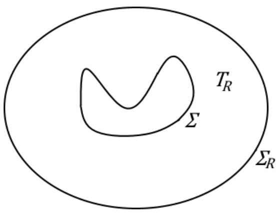


Рис. 22. Область T_R

Пусть T бесконечная область с границей Σ. Построим сферу S_R так, чтобы поверхность Σ лежала внутри нее (см. рис. 22). Обозначим через T_R область, ограниченную Σ и S_R. Функция u называется регулярной в бесконечно удаленной точке, если выполнены условия:

$$|u| < \frac{A}{R}; \quad \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| < \frac{A}{R^2}; \quad \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| < \frac{A}{R^2}; \quad \left|\frac{\partial u}{\partial z}\right| < \frac{A}{R^2}.$$

Применяя в области T_R формулу Грина к двум функциям u и v, регулярным в бесконечно удаленной точке (или в области S_R), получим

$$\iiint\limits_{T_R} u\Delta v d\tau = -\iiint\limits_{T_R} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right) d\tau + \iint\limits_{\Sigma} u\frac{\partial v}{\partial \vec{n}} d\sigma + \iint\limits_{S_R} u\frac{\partial v}{\partial \vec{n}} d\sigma.$$

Оценим интеграл по S_R, используя свойства регулярности функций u и v:

$$\left|\iint\limits_{S_R} u\frac{\partial v}{\partial n}d\sigma\right| = \left|\iint\limits_{S_R} u(v_x\cos\alpha + v_y\cos\beta + v_z\cos\gamma)d\sigma\right| \le \left|\iint\limits_{S_R} \frac{3A^2}{R^3}d\sigma\right| \le$$

$$\le \frac{3A^2}{R^3}4\pi R^2 = \frac{12\pi A^2}{R}.$$

Отсюда получим, что

$$\lim_{R\to\infty}\iint\limits_{S_R} u\frac{\partial v}{\partial n}d\sigma = 0.$$

Подынтегральное выражение, в интегралах по T_r, в силу регулярности функций u и v, убывает на бесконечности как $\frac{1}{R^4}$ при $R\to\infty$. Следовательно, существуют

$$\lim_{R\to\infty}\iiint\limits_{T_R} u\Delta v d\tau = \iiint\limits_{T} u\Delta v d\tau,$$

$$\lim_{R\to\infty}\iiint\limits_{T_R}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right)d\tau = \iiint\limits_{T}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right)d\tau.$$

Тогда получим

$$\iiint\limits_{T} u\Delta v d\tau = -\iiint\limits_{T}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right)d\tau + \iint\limits_{\Sigma} u\frac{\partial v}{\partial n}d\sigma. \quad (4.6.1)$$

Теорема 4.6.3. *Вторая внешняя краевая задача для уравнения Лапласа имеет единственное решение, регулярное на бесконечности.*

Доказательство. Пусть u_1 и u_2 – два решения задачи. Обозначим через $u = u_1 - u_2$. Очевидно, что $\Delta u = 0$, $\dfrac{\partial u}{\partial n} = 0$. Положив в формуле (4.6.1) $u = u, v = u$, получим

$$\iiint\limits_{T}(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)d\tau = 0.$$

Из непрерывности частных производных функции u следует, что $u_x = 0$, $u_y = 0$, $u_z = 0$, то есть$u = \text{const}$. Так как $u = 0$ на бесконечности, то $u \equiv 0$ во всех точках рассматриваемой области, то есть $u_1 \equiv u_2$. □

4.7. Сопряженные точки

Определение 4.7.1. *Две точки A и A^* называются сопряженными относительно плоскости (в пространстве) или прямой (на плоскости), если они симметричны относительно этой плоскости или прямой.*

Определение 4.7.2. *Точки A и A^* называются сопряженными относительно сферы или окружности, если они лежат на одном луче, исходящем из центра O сферы или окружности, и $|OA| \cdot |OA^*| = R^2$, где R – радиус сферы или окружности (произведение расстояний от сопряженных точек до центра окружности равно квадрату радиуса этой окружности).*

Пример 4.7.1. Пусть центр сферы совпадает с началом координат, тогда в пространстве точка $A(x_0, y_0, z_0)$ сопряжена с точкой $A^*\left(\frac{R^2}{r_0^2}x_0, \frac{R^2}{r_0^2}y_0, \frac{R^2}{r_0^2}z_0\right)$, где $r_0 = |OA| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$.

Действительно, обозначим координаты точки $A^*(x_0^*, y_0^*, z_0^*)$, тогда $r_0^* = \sqrt{x_0^{*2} + y_0^{*2} + z_0^{*2}} = |OA^*|$, $r_0 \cdot r_0^* = R^2$. Точки A и A^* лежат на одном луче (см. рис. 23), тогда

$$\frac{x_0^*}{x_0} = \frac{r_0^*}{r_0} = \frac{R^2}{r_0^2}, \quad \frac{y_0^*}{y_0} = \frac{R^2}{r_0^2}, \quad \frac{z_0^*}{z_0} = \frac{R^2}{r_0^2}.$$

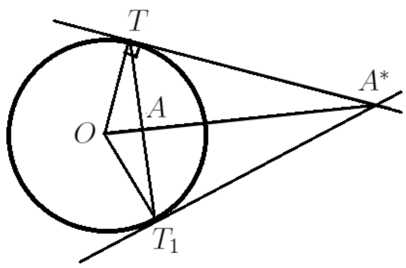


Рис. 23. Сопряженные точки

Поскольку TT_1 – хорда, проходящая через точку A, а прямая TT_1 перпендикулярна AA^*, и $OT \perp TA^*$, то треугольники $\triangle OTA$ и $\triangle OTA^*$ подобны ($\angle O$ – общий, $\angle OAT = \angle OTA^*$), тогда $\frac{|OA|}{|OT|} = \frac{|OT|}{|OA^*|}$. Получим, что $|OA| \cdot |OA^*| = = |OT|^2 = R^2$.

Задания для самостоятельного решения

1. Найти сопряженные точки для точек $A(2, -1, 3)$ и $B(1, -1, -2)$ относительно сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

2. Найти сопряженные точки для точек $A(2,3)$ и $B(-5,7)$ относительно окружности $(x-1)^2+(y-1)^2=9$.

3. Найти сопряженные точки для точек $A(2,4)$ и $B(-3,-2)$ относительно прямой $y=x-1$.

4. Найти сопряженные точки для точек $A(2,4,-2)$ и $B(-3,-2,1)$ относительно плоскости $2x+3y-z+3=0$.

4.8. Метод функции Грина для задачи Дирихле (трехмерный случай)

Рассмотрим формулу Гаусса – Остроградского

$$\oint\!\!\!\oint_S A_n d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} A\, dxdydz, \tag{4.8.1}$$

где S – гладкая замкнутая поверхность, ограничивающая тело V, $\vec{n}=\cos\alpha\vec{i}+\cos\beta\vec{j}+\cos\gamma\vec{k}$ – единичный вектор внешней нормали к S, $A_n=(\vec{A},\vec{n})$ – проекция вектора A на вектор $\vec{n}$.

Перейдем к выводу формул Грина. Пусть $u=u(x,y,z)$, $v=v(x,y,z)$ – непрерывно-дифференцируемые функции в замкнутой области $V\cup S$, имеющие непрерывные вторые производные внутри области V. Пусть

$$\vec{A}=u\,\overrightarrow{\operatorname{grad}}v-v\,\overrightarrow{\operatorname{grad}}u.$$

Тогда

$$A_n=u(\overrightarrow{\operatorname{grad}}v,\vec{n})-v(\overrightarrow{\operatorname{grad}}u,\vec{n}).$$

$$(\overrightarrow{\operatorname{grad}}v,\vec{n})=\frac{\partial v}{\partial n},\quad (\overrightarrow{\operatorname{grad}}u,\vec{n})=\frac{\partial u}{\partial n},$$

$$A_n=u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}.$$

Вычислим дивергенцию вектора $\vec{A}$:

$$\operatorname{div}\vec{A}=\operatorname{div}(u\,\overrightarrow{\operatorname{grad}}v-v\,\overrightarrow{\operatorname{grad}}u)=\operatorname{div}(u\,\overrightarrow{\operatorname{grad}}v)-\operatorname{div}(v\,\overrightarrow{\operatorname{grad}}u).$$

Так как

$$\operatorname{div}(u\,\overrightarrow{\operatorname{grad}}v)=\operatorname{div}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}\vec{i}+u\frac{\partial v}{\partial y}\vec{j}+u\frac{\partial v}{\partial z}\vec{k}\right)=u\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)+$$

$$+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}=u\triangle v+\overrightarrow{\operatorname{grad}}u\overrightarrow{\operatorname{grad}}v,$$

аналогично

$$\operatorname{div}(v\,\overrightarrow{\operatorname{grad}}u)=v\triangle u+\overrightarrow{\operatorname{grad}}v\,\overrightarrow{\operatorname{grad}}u,$$

тогда

$$\mathrm{div}\vec{A} = u\Delta v - v\Delta u.$$

Тогда из (4.8.1) получим *вторую формулу Грина:*

$$\oiint\limits_{S} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma = \iiint\limits_{V} (u\triangle v - v\triangle u) d\tau. \tag{4.8.2}$$

Область V ограниченна несколькими поверхностями. Вторая формула Грина применима и в этом случае, причем поверхностные интегралы следует брать по всем граничным поверхностям. Пусть W – область, ограниченная двумя гладкими непересекающимися поверхностями – снаружи замкнутой поверхностью S, изнутри замкнутой поверхностью S_1, лежащей целиком внутри S. Тогда

$$\oiint\limits_{S_1} A_{n_1} d\sigma + \oiint\limits_{S} A_n d\sigma = \iiint\limits_{W} \mathrm{div} A dV, \tag{4.8.3}$$

$$\oiint\limits_{S_1} \left(u\frac{\partial v}{\partial n_1} - v\frac{\partial u}{\partial n_1} \right) d\sigma + \oiint\limits_{S} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma = \iiint\limits_{W} (u\triangle v - v\triangle u) d\tau.$$

Введем определение функции Грина для трехмерного случая. В качестве

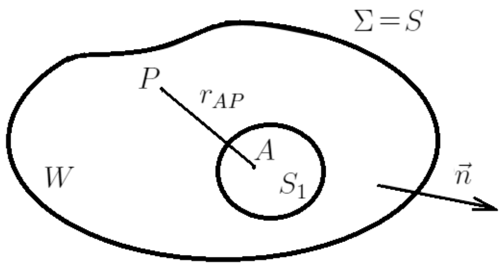


Рис. 24. Построение области W

поверхности S в формуле (4.8.3) возьмем границу Σ области T (для которой мы решаем задачу Дирихле). Выберем внутри Σ произвольную, но фиксированную точку $A(x_0, y_0, z_0)$, которую окружим сферой S_1 радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в точке A. При этом мы предположим, что сфера S_1 целиком лежит внутри Σ. Тогда между S_1 и Σ находится область W (см. рис. 24). Обозначим через $P(x, y, z)$ любую точку области W, отличную от A, и через r_{AP} – расстояние между точками A и P. Тогда его можно найти по формуле

$$r_{AP} = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}.$$

Рассмотрим функцию $w = \dfrac{1}{r_{AP}}$. Она является гармонической, т.е. удовлетворяет уравнению $\Delta w = 0$ всюду в W, кроме точки A. Покажем это. Найдем частные производные функции w:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{1}{r_{AP}}\frac{\partial r_{AP}}{\partial x},$$

$$\frac{\partial r_{AP}}{\partial x} = \frac{(x-x_0)}{r_{AP}}.$$

Тогда

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{(x-x_0)}{r_{AP}^3}.$$

Вычислим производные второго порядка

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{1}{(r_{AP})^3} + 3\frac{x-x_0}{r_{AP}^4}\frac{x-x_0}{1}\frac{\partial r_{AP}}{\partial x} = -\frac{1}{(r_{AP})^3} + 3\frac{(x-x_0)^2}{r_{AP}^5} =$$

$$= \frac{-r_{AP}^2 + 3(x-x_0)^2}{r_{AP}^5} = \frac{2(x-x_0)^2 - (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}{r_{AP}^5},$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{-(x-x_0)^2 + 2(y-y_0)^2 - (z-z_0)^2}{r_{AP}^5},$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{-(x-x_0)^2 - (y-y_0)^2 + 2(z-z_0)^2}{r_{AP}^5}.$$

Если сложить последние три равенства, получим

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0.$$

Значит функция w является гармонической в W. Обозначим через w_1 решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа $\Delta w_1 = 0$ в области T с краевым условием

$$w_1|_{\Sigma} = w|_{\Sigma}\,. \tag{4.8.4}$$

Функция w_1 непрерывна вместе с первыми производными в $T \cup \Sigma$, и имеет непрерывные вторые производные внутри T. Таким образом, w_1 – гармоническая функция во всей области T и удовлетворяет краевому условию, а функция w гармонична в области W. Построим функцию

$$G = G(x,y,z,x_0,y_0,z_0) = w_1 - w = w_1 - \frac{1}{r_{AP}}, \tag{4.8.5}$$

называемую функцией Грина. В силу построения

$$G|_{\Sigma} = 0. \tag{4.8.6}$$

Пусть u – искомая гармоническая функция в области T, непрерывная вместе с первыми производными в $T \cup \Sigma$, имеющая непрерывные вторые производные в T, принимающая на границе Σ значение $\tilde{u}$. Положим $v = G$ и применим к области W формулу Грина (4.8.3). Поскольку $\Delta u = 0$ и $\Delta v = 0$, то правая часть формулы Грина обращается в нуль, таким образом, получим

$$\oiint\limits_{S_1} \left(u\frac{\partial G}{\partial n_1} - G\frac{\partial u}{\partial n_1} \right) d\sigma + \oiint\limits_{\Sigma} \left(u\frac{\partial G}{\partial n} - G\frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma = 0. \tag{4.8.7}$$

$$\oiint\limits_{\Sigma} \left(u\frac{\partial G}{\partial n} - G\frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma = \left| \begin{array}{l} G|_{\Sigma} = 0, \\ u|_{\Sigma} = \tilde{u} \end{array} \right| = \oiint\limits_{\Sigma} \tilde{u}\frac{\partial G}{\partial n} d\sigma.$$

Вычислим первый интеграл в (4.8.7). Для этого введем сферическую систему координат:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta + x_0, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta + y_0, \\ z = r\cos\theta + z_0. \end{cases}$$

Тогда $r_{AP} = r = \varepsilon$ и

$$\frac{\partial}{\partial n_1} = -\frac{\partial}{\partial r}, \quad d\sigma = \varepsilon^2 \sin\theta d\theta d\varphi.$$

Следовательно, (4.8.7) преобразуется к виду:

$$-\varepsilon^2 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \left(u\frac{\partial G}{\partial r} - G\frac{\partial u}{\partial r} \right)\Bigg|_{S_1} \sin\theta d\theta = -\oiint\limits_{\Sigma} \tilde{u}\frac{\partial G}{\partial n} d\sigma.$$

Перейдем к пределу при $\varepsilon \to 0$:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^2 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \left(u\frac{\partial G}{\partial r} - G\frac{\partial u}{\partial r} \right)\Bigg|_{S_1} \sin\theta d\theta = \oiint\limits_{\Sigma} \tilde{u}\frac{\partial G}{\partial n} d\sigma. \tag{4.8.8}$$

Для этого вычислим

$$\varepsilon^2 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \left(u\frac{\partial G}{\partial r} - G\frac{\partial u}{\partial r} \right)\Bigg|_{S_1} \sin\theta d\theta = \left| G = w_1 - \frac{1}{r} \right| =$$

$$= \varepsilon^2 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \left(u\frac{\partial w_1}{\partial r} - w_1 \frac{\partial u}{\partial r} \right) \Bigg|_{S_1} \sin\theta d\theta +$$

$$+\varepsilon^2 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \left(-u\frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} \right) \Bigg|_{S_1} \sin\theta d\theta.$$

Функции u и w_1 являются гармоническими и непрерывными вместе со своими первыми производными во всей области T, включая точку A. Поэтому они вместе со своими производными ограничены. Тогда

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \left(u\frac{\partial w_1}{\partial r} - w_1 \frac{\partial u}{\partial r} \right) \Bigg|_{S_1} \sin\theta d\theta = 0.$$

Так как

$$\left.\frac{\partial \left(\dfrac{1}{r}\right)}{\partial r}\right|_{S_1} = -\frac{1}{\varepsilon^2}, \quad \left.\frac{1}{r}\right|_{S_1} = -\frac{1}{\varepsilon},$$

то

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} -u\left.\frac{\partial \left(\dfrac{1}{r}\right)}{\partial r}\right|_{S_1} \sin\theta d\theta = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} u|_{S_1} \sin\theta d\theta.$$

Так как функция u является непрерывной, то

$$\lim_{\varepsilon\to 0} u|_{S_1} = u(x_0, y_0, z_0).$$

Тогда, считая возможным предельный переход под знаком интеграла, получим

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} \right) \Bigg|_{\Sigma} \sin\theta d\theta = \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{\Sigma} \sin\theta d\theta = 0$$

в силу ограниченности $\dfrac{\partial u}{\partial r}$. Тогда равенство (4.8.8) примет вид

$$u(x_0, y_0, z_0) = \iint\limits_S \tilde{u} \frac{\partial G}{\partial n} d\sigma.$$

Полученная формула задает решение задачи Дирихле в пространстве, если известна функция Грина G.

4.9. Метод функции Грина для задачи Дирихле (двумерный случай)

Формула Грина для двумерного случая может быть записана в виде

$$\oint\limits_C \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} \right) dS = \iint\limits_D (u\triangle v - v\triangle u) d\sigma, \tag{4.9.1}$$

где C – замкнутая кривая на плоскости, ограничивающая область D, $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ и $\dfrac{\partial v}{\partial n}$ – производные по направлению внешней нормали к C. Тогда для двусвязной области получим

$$\oint\limits_{C_1} \left(u\frac{\partial v}{\partial \vec{n}_1} - v\frac{\partial u}{\partial \vec{n}_1} \right) dS + \oint\limits_{C} \left(u\frac{\partial v}{\partial \vec{n}} - v\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right) dS = \\ = \iint\limits_E (u\triangle v - v\triangle u) d\sigma, \tag{4.9.2}$$

где C_1 – замкнутая кривая, лежащая внутри C, E – двусвязная область, заключенная между кривыми C и C_1 (см. рис. 25).

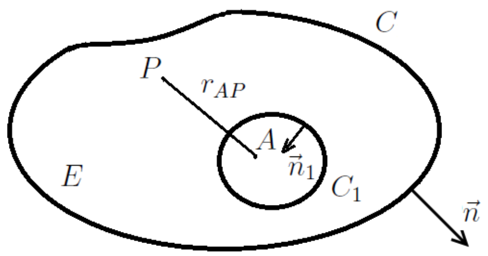


Рис. 25. Построение области E

Поставим задачу Дирихле для уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{4.9.3}$$

$$u|_C = \tilde{u}. \tag{4.9.4}$$

Выберем внутри D произвольную, но фиксированную точку $A(x_0, y_0)$. За контур C_1 примем окружность радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в точке A так, чтобы C_1 целиком лежала внутри C. Обозначим через $P(x, y)$ произвольную точку области E. Найдем расстояние между точками A и P:

$$r_{AP} = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Функция $w = \ln\dfrac{1}{r_{AP}} = -\ln r_{AP}$ является гармонической. Покажем это. Найдем ее частные производные

$$\frac{\partial r_{AP}}{\partial x} = \frac{x-x_0}{r_{AP}}, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{1}{r_{AP}}\frac{\partial r_{AP}}{\partial x} = -\frac{x-x_0}{r_{AP}^2},$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{1}{r_{AP}^2} + 2\frac{x-x_0}{r_{AP}^3}\frac{\partial r_{AP}}{\partial x} = -\frac{1}{r_{AP}^2} + 2\frac{(x-x_0)^2}{r_{AP}^4} = \frac{(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}{r_{AP}^4},$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{-(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{r_{AP}^4}.$$

Если сложить последние два равенства, получим

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$$

То есть w – гармоническая функция в области E.

Обозначим через w_1 решение задачи Дирихле в области D с краевым условием

$$w_1|_C = w|_C. \tag{4.9.5}$$

Здесь w_1 – функция, имеющая непрерывные первые производные в $D \cup C$, и непрерывные вторые производные в D.

Тогда функция Грина для области D будет иметь вид

$$G = G(x,y;x_0,y_0) = w_1 - w = w_1 - \ln\frac{1}{r_{AP}}. \tag{4.9.6}$$

По построению

$$G|_C = 0. \tag{4.9.7}$$

Для искомой гармонической функции u, удовлетворяющей условию $u|_C = \tilde{u}$, и функции $v = G$ запишем формулу (4.9.2):

$$\oint\limits_{C_1}\left(u\frac{\partial G}{\partial \vec{n}_1} - G_1\frac{\partial u}{\partial \vec{n}_1}\right)ds + \oint\limits_{C}\left(u\frac{\partial G}{\partial \vec{n}} - G\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right)ds = 0, \tag{4.9.8}$$

где, в силу (4.9.7),

$$\oint\limits_{C} G\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}ds = 0.$$

Введем полярные координаты r, φ:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi + x_0, \\ y = r\sin\varphi + y_0. \end{cases}$$

Тогда, так как

$$\frac{\partial}{\partial \vec{n}_1} = -\frac{\partial}{\partial r}, \quad r_{AP} = r = \varepsilon, \quad u ds = \varepsilon d\varphi,$$

то

$$\varepsilon \int\limits_0^{2\pi} \left(u\frac{\partial G}{\partial r} - G\frac{\partial u}{\partial r} \right)\bigg|_{r=\varepsilon} d\varphi = \oint\limits_{\Gamma} \tilde{u}\frac{\partial G}{\partial \vec{n}} ds. \tag{4.9.9}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \int\limits_0^{2\pi} \left(u\frac{\partial G}{\partial r} - G\frac{\partial u}{\partial r} \right)\bigg|_{r=\varepsilon} d\varphi = \oint\limits_{\Gamma} \tilde{u}\frac{\partial G}{\partial \vec{n}} ds.$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \int\limits_0^{2\pi} \left(u\frac{\partial \left(w_1 - \ln\frac{1}{r}\right)}{\partial r} - \left(w_1 - \ln\frac{1}{r}\right)\frac{\partial u}{\partial r} \right)\bigg|_{r=\varepsilon} d\varphi =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \int\limits_0^{2\pi} \left(u\frac{1}{r} - \ln r\frac{\partial u}{\partial r} \right) + \left(u\frac{\partial w_1}{\partial r} - w_1\frac{\partial u}{\partial r} \right)\bigg|_{r=\varepsilon} d\varphi =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \int\limits_0^{2\pi} u|_{r=\varepsilon}\, d\varphi = u(x_0, y_0) \cdot 2\pi.$$

В силу непрерывности $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} u(r, \varphi)|_{r=\varepsilon} = u(x_0, y_0)$ и $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \ln \varepsilon = 0$. Отсюда получим формулу:

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \oint\limits_{\Gamma} u\frac{\partial G}{\partial \vec{n}} ds,$$

задающую решение задачи Дирихле (4.9.4) для уравнения Лапласа (4.9.3), если известна функция Грина G.

В некоторых частных случаях задания области D можно записать функцию Грина в более простом виде. В качестве примера рассмотрим верхнюю полуплоскость $y > 0$. Граница в данном случае задается равенством $x = 0$. Функция Грина в этом случае примет вид

$$G(x, y, x_0, y_0) = \ln\frac{1}{r_{A^*P}} - \ln\frac{1}{r_{AP}}, \tag{4.9.10}$$

где $A(x_0, y_0)$ – произвольная точка полуплоскости $y > 0$ и $A^*(x_0, -y_0)$ – точка ей сопряженная. Тогда

$$r_{AP} = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2},$$

$$r_{A^*P} = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y+y_0)^2}.$$

Функция

$$u(x_0, y_0) = \frac{y_0}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{u}(x)}{(x-x_0)^2 + y_0^2} dx$$

называется интегралом Пуассона для полуплоскости, и задает решение уравнения Лапласа (4.9.3) в верхней полуплоскости с граничным условием Дирихле (4.9.4) на прямой $x = 0$.

Обозначим через

$$P = \frac{y_0}{\pi} \frac{1}{(x-x_0)^2 + y_0^2}$$

ядро Пуассона для полуплоскости. Данная функция задает стационарное распределение температуры в полуплоскости $y > 0$, если на границе поддерживается распределение температур $\tilde{u} = \delta(x - x_0)$.

Задания для самостоятельного решения

1. Постройте функцию Грина для полуплоскости $x > 0$.

2. Постройте функцию Грина для первой четверти $x > 0$ и $y > 0$.

3. Используя решение первого задания, решите задачу Дирихле методом функции Грина

$$\Delta u = 0,$$
$$u\big|_{y=0} = \frac{\pi}{2}.$$

где S – окружность радиуса 4 с центром в начале координат, $N = \text{const}$.

4.10. Задача Дирихле для уравнения Лапласа в шаре. Метод функции Грина

Внутренняя задача Дирихле

Рассмотрим уравнение Лапласа в шаре радиуса R с центром в начале координат с краевым условием Дирихле:

$$\begin{aligned} &\Delta u = 0, \\ &u\big|_{r=R} = \tilde{u}(\theta, \varphi). \end{aligned} \tag{4.10.1}$$

Построим функцию Грина внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Рассмотрим шар радиуса R с центром в начале координат (см. рис. 26). Пусть $A(x_0, y_0, z_0)$ – фиксированная точка шара,

$A^*(x_0^*, y_0^*, z_0^*)$ – точка ей сопряженная относительно сферы Σ, P – произвольная переменная точка внутри шара. Определим

$$r_{AP} = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2},$$

$$r_{A^*P} = \sqrt{(x - x_0^*)^2 + (y - y_0^*)^2 + (z - z_0^*)^2}.$$

Обозначим $|OP| = r$, $|OA| = r_0$, $|OA|^* = r_0^*$ и $\angle AOP = \psi$ (см. рис. 26).

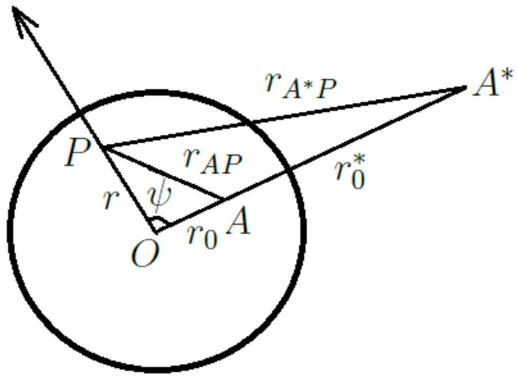


Рис. 26. Сопряженные точки

По теореме косинусов получим

$$r_{AP} = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos\psi},$$

$$r_{A^*P} = \sqrt{r^2 + r_0^{*2} - 2rr_0^* \cos\psi}.$$

Так как $r_0 \cdot r_0^* = R^2$, то $r_0^* = \dfrac{R^2}{r_0}$. Тогда

$$r_{A^*P} = \sqrt{r^2 + \frac{R^4}{r_0^2} - 2r\frac{R^2}{r_0}\cos\psi}.$$

Рассмотрим функцию $\omega = \dfrac{1}{r_{AP}}$, удовлетворяющую уравнению Лапласа во всех точках, за исключением точки A. Функция $\omega_2 = \dfrac{1}{r_{A^*P}}$ будет гармонической всюду внутри шара, т.к. A^* лежит вне шара.

Если точка P расположена на границе шара – сфере Σ, то $r = R$. Тогда

$$r_{AP}|_{\Sigma} = \sqrt{R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos\psi},$$

$$r_{A^*P}|_\Sigma = \sqrt{R^2 + \frac{R^4}{r_0^2} - 2\frac{R^3}{r_0}\cos\psi} = \\ = \frac{R}{r_0}\sqrt{R^2 + r_0^2 - 2Rr_0\cos\psi} = \frac{R}{r_0} r_{AP}|_\Sigma. \tag{4.10.2}$$

Рассмотрим функцию $\omega_1 = \frac{R}{r_0}\omega_2 = \frac{\frac{R}{r_0}}{r_{A^*P}}$. Она является гармонической во всем шаре и

$$\omega_1|_\Sigma = \left.\frac{\frac{R}{r_0}}{r_{A^*P}}\right|_\Sigma = \left.\frac{1}{r_{AP}}\right|_\Sigma = \omega|_\Sigma.$$

Построим функцию Грина для шара

$$G = \omega_1 - \omega = \frac{\frac{R}{r_0}}{r_{A^*P}} - \frac{1}{r_{AP}}.$$

Вычислим

$$\frac{\partial G}{\partial r} = \frac{1}{r_{AP}^2}\frac{\partial r_{AP}}{\partial r} - \frac{R}{r_0}\frac{1}{r_{A^*P}^2}\frac{\partial r_{A^*P}}{\partial r} = \frac{r - r_0\cos\psi}{r_{AP}^3} - \frac{R}{r_0}\frac{r - \frac{R^2}{r_0}\cos\psi}{r_{A^*P}^3}.$$

Пользуясь тем, что

$$\frac{\partial r_{AP}}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos\psi}\right) = \frac{r - r_0\cos\psi}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos\psi}} = \frac{r - r_0\cos\psi}{r_{AP}},$$

$$\frac{\partial r_{A^*P}}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\sqrt{r^2 + \frac{R^4}{r_0^2} - 2r\frac{R^2}{r_0}\cos\psi}\right) = \frac{r - \frac{R^2}{r_0}\cos\psi}{r_{A^*P}}.$$

Учитывая формулу (4.10.2), получим, что

$$\left.\frac{\partial G}{\partial r}\right|_{r=R} = \frac{R - r_0\cos\psi}{r_{AP}^3|_\Sigma} - \frac{R}{r_0}\frac{R - \frac{R^2}{r_0}\cos\psi}{\left.\frac{R^3}{r_0^3} r_{AP}^3\right|_\Sigma} = \frac{R - r_0\cos\psi}{r_{AP}^3|_\Sigma} -$$

$$-\frac{r_0^2\left(R - \frac{R^2}{r_0}\cos\psi\right)}{R^2 r_{AP}^3|_\Sigma} = \frac{R^3 - r_0\cos\psi R^2 - r_0^2 R + r_0 R^2\cos\psi}{R^2 r_{AP}^3|_\Sigma} = \frac{R^3 - r_0^2 R}{R^2 r_{AP}^3|_\Sigma} =$$

$$= \frac{R^2 - r_0^2}{R r_{AP}^3|_\Sigma} = \frac{R^2 - r_0^2}{R(R^2 + r_0^2 - 2Rr_0\cos\psi)^{\frac{3}{2}}}.$$

Введем сферическую систему координат:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta + x_0, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta + y_0, \\ z = r\cos\theta + z_0. \end{cases}$$

Пусть точки $P(r,\theta,\varphi)$ и $A(r_0,\theta_0,\varphi_0)$, $d\sigma = R^2\sin\theta d\theta d\varphi$. Выразим $\cos\psi$ через единичные векторы $\vec{e_0}$ и $\vec{e}$ векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OP}$ соответственно. Т.к.

$$\overrightarrow{OA} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k} = r_0\cos\varphi_0\sin\theta_0\vec{i} + r_0\sin\varphi_0\sin\theta_0\vec{j} + r_0\cos\theta_0\vec{k},$$

$$\overrightarrow{OP} = r\cos\varphi\sin\theta\vec{i} + r\sin\varphi\sin\theta\vec{j} + r\cos\theta\vec{k},$$

то

$$\vec{e_0} = \frac{1}{r_0}\overrightarrow{OA} = \cos\varphi_0\sin\theta_0\vec{i} + \sin\varphi_0\sin\theta_0\vec{j} + \cos\theta_0\vec{k},$$

$$\vec{e} = \frac{1}{r}\overrightarrow{OP} = \cos\varphi\sin\theta\vec{i} + \sin\varphi\sin\theta\vec{j} + \cos\theta\vec{k}.$$

Получим

$$\cos\psi = \frac{(\vec{e_0},\vec{e})}{|\vec{e_0}||\vec{e}|} = (\vec{e_0},\vec{e}) = \sin\theta_0\sin\theta\cos(\varphi-\varphi_0) + \cos\theta_0\cos\theta. \quad (4.10.3)$$

Пользуясь формулой (4.8.8), получим решение задачи (4.10.1)

$$\begin{aligned} u(r_0,\theta_0,\varphi_0) &= \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\Sigma}\tilde{u}(\theta,\varphi)\frac{R^2-r_0^2}{R(R^2+r_0^2-2Rr_0\cos\psi)^{\frac{3}{2}}}d\sigma = \\ &= \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi}\tilde{u}(\theta,\varphi)\frac{R^2(R^2-r_0^2)}{(R^2+r_0^2-2Rr_0\cos\psi)^{\frac{3}{2}}}\sin\theta d\sigma \end{aligned} \quad (4.10.4)$$

– интеграл Пуассона для шара, где выражение $\cos\psi$ задано формулой (4.10.3).

Мы предполагаем, что точка A не совпадает с началом координат, т.е. $r_0 \neq 0$. Но, по непрерывности решения, формула (4.10.4) остается в силе и при $r_0 = 0$, тогда

$$u|_{r_0=0} = \frac{1}{4\pi R^2}\iint\limits_{\Sigma}\tilde{u}(\theta,\varphi)d\sigma.$$

Функция

$$P(\psi) = \frac{1}{4\pi R}\frac{R^2-r_0^2}{(R^2+r_0^2-2Rr\cos\psi)^{\frac{3}{2}}} \quad (4.10.5)$$

называется *ядром Пуассона,* если $\cos\psi$ задан формулой (4.10.3).

Внешняя задача Дирихле

Рассмотрим теплопроводящее пространство из которого изъят шар, границей оставшейся бесконечной области будет сфера, являющаяся границей изъятого шара. Найдем решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа методом функции Грина. В формуле (4.10.4), пользуясь результатами параграфа 4.9, точку A^* будем рассматривать как исходную точку, а точку A^* как сопряженную. Поменяем точки A и A^* местами, т.е. r_0 заменим на $\dfrac{R^2}{r_0}$ в формуле 4.10.4 и для $r_0 > R$ получим решение внешней задачи Дирихле для уравнения Лапласа

$$u(r_0, \theta_0, \varphi_0) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \tilde{u}(\theta, \varphi) \frac{r_0(r_0^2 - R^2)}{(R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos\psi)^{\frac{3}{2}}} \sin\theta d\theta.$$

Задания для самостоятельного решения

1. Методом функции Грина найдите решение задачи Дирихле

$$\Delta u = 0,$$

$$u|_S = N.$$

где S – сфера радиуса $R = 4$ с центром в начале координат, $N = \text{const}$.

2. Постройте функцию Грина для верхней половины шара.

4.11. Ядро Пуассона для шара

Пусть дан однородный шар радиуса R и точка $M(\theta', \varphi')$ на его границе Σ'. Проведем на Σ с центром в точке M окружность, видную из центра сферы под углом 2ε ($\varepsilon > 0$). Если совместить ось сегмента с осью O_z, то площадь сферического сегмента Σ' равна

$$S_{\Sigma'} = R^2 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\varepsilon} \sin\theta d\theta = 2\pi R^2 (1 - \cos\varepsilon) = 4\pi R^2 \sin^2 \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть

$$\tilde{u} = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi R^2 \sin^2 \frac{\varepsilon}{2}} \text{ на } \Sigma' \\ 0, \text{ на } \Sigma \setminus \Sigma'. \end{cases}$$

Найдем стационарное распределение температуры внутри шара при малых значениях угла ε:

$$u(r_0, \theta_0, \varphi_0) = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{\Sigma'} \frac{1}{4\pi R^2 \sin^2 \frac{\varepsilon}{2}} \frac{R^2 - r_0^2}{R(R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos\psi)^{\frac{3}{2}}} d\sigma,$$

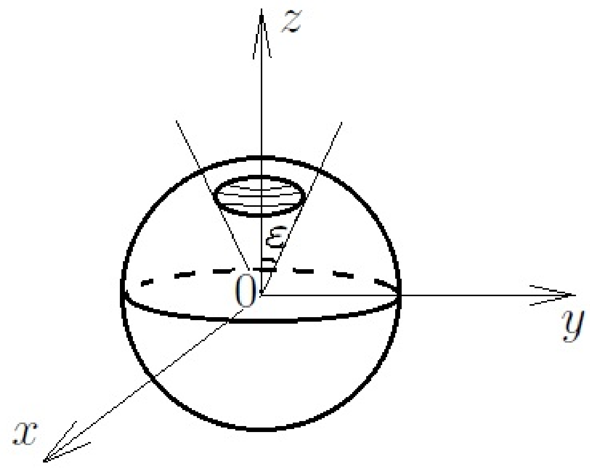


Рис. 27. Сферический сегмент

$d\sigma = R^2 \sin\theta d\theta d\varphi$, тогда по теореме о среднем значении

$$u(r_0, \theta_0, \varphi_0) = \frac{1}{4\pi R} \frac{R^2 - r_0^2}{(R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos\psi)^{\frac{3}{2}}},$$

$\bar{\psi}$ – среднее значение ψ, соответствующее некоторой точке $\widetilde{M}$ со сферическими координатами $\tilde{\theta}$ и $\tilde{\varphi}$, лежащей в сегменте Σ'.

При $\varepsilon \to 0$ граничная температура стремится к нулю во всех точках Σ за исключением M, в которой $\tilde{u} \to \infty$:

$$\tilde{u} = \frac{1}{4\pi R^2 \sin^2 \frac{\varepsilon}{2}} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \infty$$

– двумерная функция Дирака.

При $\varepsilon \to 0$ получается, что $\tilde{\theta} \to \theta'$ и $\tilde{\varphi} \to \varphi'$, тогда стационарное распределение температуры будет стремиться к функции, называемой ядром Пуассона,

$$P(\psi) = \frac{1}{4\pi R} \frac{R^2 - r_0^2}{(R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos\psi)^{\frac{3}{2}}}, \tag{4.11.1}$$

где $\cos\psi = \sin\theta_0 \sin\theta' \cos(\varphi_0 - \varphi') + \cos\theta_0 \cos\theta'$.

Функция (4.11.1) является стационарным распределением температуры в точке $(r_0, \theta_0, \varphi_0)$, если на границе шара поддерживается всюду нулевая температура, кроме одной точки $M(\theta, \varphi)$, в которой температура бесконечна (в смысле указанного предельного перехода).

Для любых r_0, θ_0, φ_0 интеграл Пуассона равен

$$\frac{1}{4\pi} \oiint\limits_{\Sigma} \frac{R^2 - r_0^2}{(R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos\psi)^{\frac{3}{2}}} d\sigma = 1.$$

Поэтому граничная температура $\tilde{u} = 1$ на всей сфере, то, в силу единственности решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа всюду внутри шара, $u \equiv 0$.

Задания для самостоятельного решения

1. Показать, что интеграл Пуассона равен единице. Дать физическую интерпретацию данному свойству.

2. Построить ядро Пуассона для полушара.

4.12. Задача Дирихле для уравнения Лапласа в полупространстве. Метод функции Грина

Рассмотрим уравнение Лапласа в полупространстве $z > 0$ с краевым условием Дирихле на плоскости $z = 0$:

$$\begin{aligned} &\Delta u = 0, \\ &u|_{z=0} = \tilde{u}(x, y). \end{aligned} \tag{4.12.1}$$

Построим функцию Грина задачи (4.12.1), повторяя алгоритм параграфа 4.10. Получим, что для полупространства $z > 0$ функция Грина имеет вид

$$G(x, y, z, x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{r_{A^*P}} - \frac{1}{r_{AP}},$$

где $A(x_0, y_0, z_0)$ – произвольная точка полупространства $z > 0$ и $A^*(x_0, y_0, -z_0)$ – точка ей сопряженная, где

$$\begin{aligned} r_{AP} &= \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}, \\ r_{A^*P} &= \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z + z_0)^2}. \end{aligned}$$

Внешняя нормаль к плоскости $z = 0$ направлена вниз, в сторону отрицательного направления оси z, тогда

$$\left.\frac{\partial G}{\partial \vec{n}}\right|_{\Sigma} = -\left.\frac{\partial G}{\partial z}\right|_{z=0}.$$

Так как

$$\left.\frac{1}{r_{AP}}\right|_{z=0} = \left.\frac{1}{r_{A^*P}}\right|_{z=0}$$

и функция $\dfrac{1}{r_{A^*P}}$ является гармонической при $z > 0$, получим, что

$$\frac{\partial G}{\partial z} = -\frac{1}{r_{A^*P}^2}\frac{\partial r_{A^*P}}{\partial z} + \frac{1}{r_{AP}^2}\frac{\partial r_{AP}}{\partial z} = -\frac{z + z_0}{r_{A^*P}^3} + \frac{z - z_0}{r_{AP}^3}.$$

$$\left.\frac{\partial G}{\partial \vec{n}}\right|_{\Sigma} = \left.\frac{z_0 + z}{r^3_{A^*P}}\right|_{z=0} - \left.\frac{z - z_0}{r^3_{AP}}\right|_{z=0} = \frac{2z_0}{((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z_0)^{\frac{3}{2}}}.$$

Тогда решение задачи (4.12.1) примет вид

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{z_0}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{u}(x,y)}{((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z_0^2)^{\frac{3}{2}}} dy. \qquad (4.12.2)$$

Иногда решение удобнее записывать в цилиндрической системе координат:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z, \end{cases}$$

тогда решение (4.12.2) преобразуется

$$u(r_0, \varphi_0, z_0) = \frac{z_0}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\tilde{u}(r,\varphi) r dr}{(r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos(\varphi - \varphi_0) + z_0^2)^{\frac{3}{2}}} d\varphi. \quad (4.12.3)$$

Интегралы (4.12.2), (4.12.3) несобственные, и для их сходимости граничная функция $\tilde{u}(x,y)$ должна «достаточно хорошосебя вести».

Ядро Пуассона для полупространства может быть записано в виде

$$P(x_0, x, y_0, y) = \frac{z_0}{2\pi}\frac{1}{((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z_0^2)^{\frac{3}{2}}}$$

или

$$P(r_0, r, \varphi_0, \varphi) = \frac{z_0}{2\pi}\frac{1}{(r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos(\varphi-\varphi_0) + z_0^2)^{\frac{3}{2}}}$$

и может быть интерпретировано как стационарное распределение температуры в однородном полупространстве $z > 0$, на границе которого в плоскости $z = 0$ поддерживается температура равная нулю всюду кроме точки (x, y), где она бесконечна. Действительно, если $\tilde{u} = 0$ вне квадрата $x' - \varepsilon < x < x' + \varepsilon$, $y' - \varepsilon < y < y' + \varepsilon$, и $\tilde{u} = \dfrac{1}{4\varepsilon^2}$ внутри этого квадрата, то по теореме о среднем значении

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{z_0}{8\pi\varepsilon^2}\int\limits_{x'-\varepsilon}^{x'+\varepsilon} dx \int\limits_{y'-\varepsilon}^{y'+\varepsilon} \frac{dy}{((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z_0^2)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \frac{z_0}{2\pi} \frac{1}{((\tilde{x} - x_0)^2 + (\tilde{y} - y_0)^2 + z_0^2)^{\frac{3}{2}}},$$

где $x' - \varepsilon < \tilde{x} < x' + \varepsilon$, $y' - \varepsilon < \tilde{y} < y' + \varepsilon$. Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{z_0}{2\pi} \frac{1}{((x' - x_0)^2 + (y' - y_0)^2 + z_0^2)^{\frac{3}{2}}},$$

опуская штрихи, получим ядро Пуассона для полупространства.

Как следует из единственности решения задачи Дирихле

$$\frac{z_0}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z_0^2)^{\frac{3}{2}}} dy = 1.$$

Интеграл от ядра Пуассона по всей граничной плоскости равен единице.

Задания для самостоятельного решения

1. Найдите функцию $u(r, \varphi)$, гармоническую в полупространстве $x > 0$ и удовлетворяющую граничному условию

$$u|_{x=0} = y - z.$$

2. Найдите функцию $u(r, \varphi)$, гармоническую в полупространстве $y > 0$ и удовлетворяющую граничному условию

$$u|_{y=0} = x^2 - z^2.$$

4.13. Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге. Метод функции Грина

Внутренняя задача Дирихле

Рассмотрим уравнение Лапласа в круге радиуса R с центром в начале координат с краевым условием Дирихле:

$$\begin{aligned} &\Delta u = 0, \\ &u|_{r=R} = f(\varphi). \end{aligned} \tag{4.13.1}$$

Построим функцию Грина внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Пусть $A(x_0, y_0)$ – фиксированная точка круга, $A^*(x_0^*, y_0^*)$ – точка ей сопряженная, P – произвольная переменная точка. Повторяя рассуждения параграфа 4.10, придем к функции Грина

$$G(x,y,x_0,y_0) = \ln\frac{R/r_0}{r_{A^*P}} - \ln\frac{1}{r_{AP}}, \tag{4.13.2}$$

где точки $A(x_0,y_0)$ и $A^*\left(\dfrac{R^2}{r_0^2}x_0, \dfrac{R^2}{r_0^2}y_0\right)$ – сопряженные. Тогда

$$r_{AP} = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2},$$

$$r_{A^*P} = \sqrt{\left(x-\frac{R^2}{r_0^2}x_0\right)^2+\left(y-\frac{R^2}{r_0^2}y_0\right)^2}, \quad r_0 = \sqrt{x_0^2+y_0^2}.$$

Функция

$$\omega_1 = \ln\frac{\frac{R}{r_0}}{r_{A^*P}} = \ln\frac{1}{r_{A^*P}} + \ln\frac{R}{r_0} = \ln\frac{1}{r_{A^*P}} + \text{const}$$

удовлетворяет уравнению Лапласа всюду внутри круга. По теореме ко-

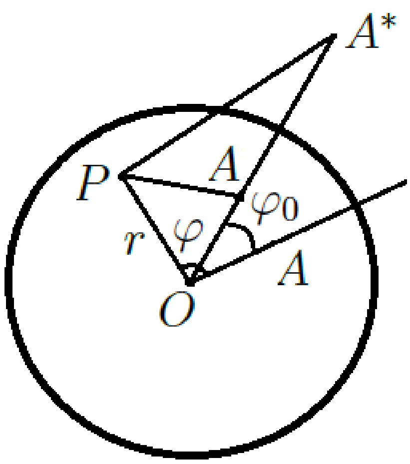


Рис. 28. Сопряженные точки

синусов (см. рис. 28) получим, что

$$r_{AP} = \sqrt{r^2+r_0^2-2rr_0\cos{(\varphi-\varphi_0)}},$$

$$r_{A^*P} = \sqrt{r^2+\frac{R^4}{r_0^2}-2r\frac{R^2}{r_0}\cos{(\varphi-\varphi_0)}},$$

$$r = OP = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Если точка P попадает на границу круга Γ, то $r=R$, тогда

$$r_{A^*P}|_{r=R} = \frac{R}{r_0}\sqrt{R^2+r_0^2-2Rr_0\cos{(\varphi-\varphi_0)}} = \frac{R}{r_0}r_{AP}\bigg|_{r=R},$$

$$\omega|_\Gamma = \omega_1|_\Gamma, \quad \left.\frac{\partial G}{\partial \vec{n}}\right|_\Gamma = \left.\frac{\partial G}{\partial r}\right|_{r=R}.$$

Так как

$$\frac{\partial r_{AP}}{\partial r} = \frac{r - r_0 \cos(\varphi - \varphi_0)}{r_{AP}},$$

$$\frac{\partial r_{A^*P}}{\partial r} = \frac{r - \frac{R^2}{r_0}\cos(\varphi - \varphi_0)}{r_{A^*P}},$$

получим

$$G = \ln\frac{R}{r_0} - \ln r_{A^*P} + \ln r_{AP}.$$

Вычислим производные

$$\frac{\partial G}{\partial r} = \frac{1}{r_{AP}}\frac{\partial r_{AP}}{\partial r} - \frac{1}{r_{A^*P}}\frac{\partial r_{A^*P}}{\partial r} = \frac{r - r_0\cos(\varphi - \varphi_0)}{r_{AP}^2} - \frac{r - \frac{R^2}{r_0}\cos(\varphi - \varphi_0)}{r_{A^*P}^2},$$

$$\left.\frac{\partial G}{\partial r}\right|_{r=R} = \frac{R - \frac{r_0^2}{R}}{r_{AP}^2}, \quad r_{AP}^2 = R^2 + r_0^2 - 2Rr_0\cos(\varphi - \varphi_0),$$

$$\left.\frac{\partial G}{\partial r}\right|_{r=R} = \frac{R^2 - r_0^2}{R(R^2 + r_0^2 - 2Rr_0\cos(\varphi - \varphi_0))}.$$

Тогда решение задачи (4.13.1)

$$u(r_0, \varphi_0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\varphi)\frac{R^2 - r_0^2}{R^2 + r_0^2 - 2Rr_0\cos(\varphi - \varphi_0)}d\varphi \tag{4.13.3}$$

– интеграл Пуассона для круга ($ds = Rd\varphi$).

Обозначим через

$$P(\varphi) = \frac{1}{2\pi}\frac{R^2 - r_0^2}{R^2 + r_0^2 - 2Rr_0\cos(\varphi - \varphi_0)}$$

– ядро Пуассона для круга.

Покажем, что интеграл Пуассона задает решение первой краевой задачи в предположении, что функция $f(\varphi)$ непрерывно дифференцируема в виде ряда.

Покажем, что функция u непрерывно примыкает к граничным значениям. Выберем какую-либо последовательность непрерывно дифференцируемых функций

$$f_1(\varphi), f_2(\varphi), \ldots, f_n(\varphi), \ldots.$$

Последовательности граничных функций будет соответствовать последовательность гармонических функций $u_n(r,\varphi)$, определяемых по формуле (4.15.2). Если $f_n(\varphi) \rightrightarrows f(\varphi)$, то $\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0\ (\varepsilon) > 0:\ |f_n(\varphi) - f_{n+l}(\varphi)| < \varepsilon$ при $\forall n > n_0(\varepsilon)$, $\forall l \in \mathbb{N}$. Для функций $u_n(r,\varphi)$ в силу принципа максимального значения $|u_n(r,\varphi) - u_{n+l}(r,\varphi)| < \varepsilon$ при $r \le R$ и $\forall n > n_0(\varepsilon)$ $\forall l \in \mathbb{N}$. Таким образом, $u_n \rightrightarrows u$ и функция $u(r,\varphi)$ – непрерывна в замкнутой области. Поскольку все u_n непрерывны в замкнутой области $r \le a$ при $a < R$. Получим

$$u(r,\varphi) = \lim_{n\to\infty} u_n(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2R\rho\cos(\varphi-\psi) + \rho^2} f(\psi)d\psi,$$

а при $r = R$

$$u(R,\varphi) = f(\varphi).$$

Поскольку последовательность $f_n \rightrightarrows f$, то предельный переход под знаком интеграла законен. Таким образом,

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\varphi-\psi) + r^2} f(\psi)d\psi$$

при произвольной непрерывно дифференцируемой функции $f(\varphi)$, и является решением уравнения Лапласа.

Физической интерпретацией ядра Пуассона для круга является стационарное распределение температуры внутри круга радиуса R, граница которого - окружность Γ - поддерживается при нулевой температуре всюду кроме одной точки, в которой температура бесконечна.

Внешняя задача Дирихле

Пусть теплопроводящим телом является плоскость из которой извлечен круг радиуса R с центром в начале координат. Границей данной бесконечной области будет окружность радиуса R центром в начале координат, являющаяся границей круга. Используя свойства сопряженных точек (см. параграф 4.7), поменяем точки A и A^* местами в формуле (4.13.3), т.е. r_0 заменим на $\dfrac{R^2}{r_0}$, и получим решение уравнения Лапласа внешней задачи Дирихле (т.е $r_0 > R$) с краевым условием $u(R,\varphi) = \tilde{u}(\varphi)$:

$$u(r_0,\varphi_0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi} \tilde{u}(\varphi)\frac{r_0^2 - R^2}{R^2 + r_0^2 - 2Rr_0\cos(\varphi-\varphi_0)}d\varphi. \qquad (4.13.4)$$

Задания для самостоятельного решения

1. Построить функцию Грина для полукруга. Найти решение задачи

$$\Delta u = 0,$$

$$u|_\Gamma = u_0,$$

где Γ – верхняя полуокружность, радиуса R с центром в начале координат.

2. Найдите функцию $u(r, \varphi)$, гармоническую внутри кольца $a < r < b$ и удовлетворяющую граничным условиям

$$u|_{r=a} = u_1(\varphi), \quad u|_{r=b} = u_2(\varphi).$$

4.14. Решение первой краевой задачи для круга методом разделения переменных

Первая внутренняя краевая задача

Рассмотрим круг радиуса R с центром в начале координат. Требуется найти функцию $u = u(r, \varphi)$ удовлетворяющую уравнению Лапласа внутри круга

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, \quad r < R, \tag{4.14.1}$$

и краевому условию Дирихле

$$u|_{r=R} = \tilde{u}(\varphi). \tag{4.14.2}$$

Решение задачи (4.14.1), (4.14.2) будем искать в виде $u = U(r)\Phi(\varphi)$. Подставим $u = U(r)\Phi(\varphi)$ в (4.14.1) и получим

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dU}{dr}\right)\Phi = -\frac{1}{r^2}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}U,$$

$$\frac{r}{U}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dU}{dr}\right) = -\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}, \tag{4.14.3}$$

тогда

$$\frac{r}{U}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dU}{dr}\right) = \lambda, \quad \frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = -\lambda, \tag{4.14.4}$$

где λ – постоянная. Найдем решение второго уравнения:

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + \lambda\Phi = 0, \quad \Phi(\varphi) = A\cos\sqrt{\lambda}\varphi + B\sin\sqrt{\lambda}\varphi, \tag{4.14.5}$$

где A, B – произвольные постоянные. Увеличение φ на 2π возвращает точку (r, φ) в исходное положение:

$$\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi).$$

Тогда $\sqrt{\lambda} = n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ или $\lambda = n^2$. Таким образом нашли функцию

$$\Phi_n(\varphi) = A\cos n\varphi + B\sin n\varphi.$$

Теперь вернёмся к (4.14.4) и составим уравнение для нахождения функции U, учитывая $\lambda = n^2$:

$$\frac{r}{U}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dU}{dr}\right) = n^2,$$

$$r^2\frac{d^2U}{dr^2} + r\frac{dU}{dr} - n^2U = 0.$$

Подставим $U = r^\alpha$ и получим

$$r^2\alpha(\alpha-1)r^{\alpha-2} + r\alpha r^{\alpha-1} - n^2r^\alpha = \alpha(\alpha-1)r^\alpha + \alpha r^\alpha - n^2r^\alpha = 0.$$

Отсюда

$$\alpha(\alpha-1) + \alpha - n^2 = 0,$$

$$\alpha^2 = n^2,$$

$$\alpha = \pm n.$$

Таким образом, нашли два решения

$$U(r) = r^n \quad \text{и} \quad U(r) = r^{-n}.$$

Отбросим второе решение, т.к. $U(r)$ стремится в бесконечность при r, стремящимся к нулю (центр круга). Тогда решением уравнения (4.14.1) является функция

$$u_n(r, \varphi) = r^n(A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi).$$

Функция, полученная суммированием $u_n(r, \varphi)$,

$$u(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n(A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi), \tag{4.14.6}$$

в силу линейности и однородности уравнения, тоже является решением (4.14.1).

Положим $A_0 = \dfrac{a_0}{2}$, $A_n = a_n$, $B_n = b_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и получим

$$u(r,\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) r^n.$$

Из (4.14.6) при $r = R$ получим

$$\tilde{u}(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(R^n a_n \cos n\varphi + R^n b_n \sin n\varphi),$$

представляющую собой разложение в ряд Фурье функции $\tilde{u}$, где

$$R^n a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \tilde{u}(\psi) \cos n\psi d\psi,$$

$$R^n b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \tilde{u}(\psi) \sin n\psi d\psi,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi R^n}\int_0^{2\pi} \tilde{u}(\psi) \cos n\psi d\psi, \quad b_n = \frac{1}{\pi R^n}\int_0^{2\pi} \tilde{u}(\psi) \sin n\psi d\psi. \qquad (4.14.7)$$

Подставим (4.14.7) в (4.14.6), преобразуем выражение и получим решение задачи (4.14.1), (4.14.2)

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n(\varphi - \psi)\right) \tilde{u}(\psi) d\psi. \qquad (4.14.8)$$

В силу теоремы единственности решения 4.5.1, полученное выражение (4.14.8) должно совпадать с интегралом Пуассона для круга (4.13.3) (полученным в параграфе 4.13), покажем это. По формуле Эйлера

$$\cos n(\varphi - \psi) = \mathrm{Re}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}n(\varphi-\psi)},$$

тогда

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n(\varphi - \psi) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n(\varphi-\psi)}\right).$$

Для $r < R$, $\left(\dfrac{r}{R} < 1\right)$ вычислим сумму ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n(\varphi-\psi)} = \left|\frac{r}{R}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi-\psi)} = q\right| = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q},$$

$$|q| = \left|\frac{r}{R}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi-\psi)}\right| < \frac{r}{R} < 1.$$

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n(\varphi-\psi)} = \frac{1}{2} + \frac{\frac{r}{R}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi-\psi)}}{1-\frac{r}{R}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi-\psi)}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{r}{R}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi-\psi)} + \frac{r}{R}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi-\psi)}}{1-\frac{r}{R}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi-\psi)}} = \frac{1}{2}\frac{R + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi-\psi)}}{R - r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi-\psi)}}.$$

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{2}\frac{R + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi-\psi)}}{R - r\mathrm{e}^{\mathrm{i}n(\varphi-\psi)}}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2}\frac{(R + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi-\psi)})(R - r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\varphi-\psi)})}{R - r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi-\psi)}(R - r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\varphi-\psi)})}\right) =$$

$$= \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2}\frac{R^2 - r^2 + Rr\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi-\psi)} - Rr\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\varphi-\psi)}}{R^2 + r^2 - Rr\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\varphi-\psi)} - rR\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi-\psi)}}\right) =$$

$$= \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2}\frac{R^2 - r^2 + 2iRr\sin(\varphi-\psi)}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\varphi-\psi)}\right) = \frac{1}{2}\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\varphi-\psi) + r^2}.$$

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n(\varphi-\psi) = \frac{1}{2}\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\varphi-\psi) + r^2}.$$

Таким образом, получили интеграл Пуассона для круга (4.13.3)

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \tilde{u}(\psi)\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\varphi-\psi) + r^2}d\psi,$$

тем самым показали требуемое.

Первая внешняя краевая задача

Рассмотрим внешнюю задачу Дирихле для уравнения Лапласа в круговой области

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad r > R, \\ u|_{r=R} = f(\varphi). \end{cases} \tag{4.14.9}$$

Предположим, что функция f непрерывна и дифференцируема, и решение u непрерывно в области, включая границу. Оператор Лапласа в полярных координатах выглядит следующим образом:

$$\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}. \tag{4.14.10}$$

Искомую функцию будем искать в виде произведения двух независимых друг от друга функций $U(r)$ и $\Phi(\varphi)$:

$$u(r,\varphi) = U(r)\Phi(\varphi).$$

Подставив в уравнение искомую функцию в ее новом виде, получим

$$\frac{\frac{d}{dr}\left(r\frac{dU}{dr}\right)}{\frac{U}{r}} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda, \text{ где } \lambda = \mathrm{const}.$$

Тогда

$$\Phi'' + \lambda\Phi = 0, \quad \Phi \neq 0,$$

$$r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dU}{dr}\right) - \lambda U = 0, \quad U \neq 0.$$

Аналогично внутренней задаче решим первое уравнение и получим

$$\Phi(\varphi) = A\cos(\sqrt{\lambda}\varphi) + B\sin(\sqrt{\lambda}\varphi),$$

$$\Phi_n(\varphi) = A_n\cos(n\varphi) + B_n\sin(n\varphi).$$

Решим второе уравнение

$$U(r) = r^{\alpha}, \alpha = \pm n,$$

тогда

$$U_n(r) = Cr^n + Dr^{-n}, \text{ где } C, D - \text{ произвольные постоянные.}$$

Для того чтобы решение было ограничено в бесконечности, положим $C = 0$, тогда $U_n = Dr^{-n}$ и частные решения имеют вид

$$u_n(r,\varphi) = \frac{1}{r^n}(A_n\cos(n\varphi) + B_n\sin(n\varphi)) \text{ для } r \geq R.$$

Просуммировав частные решения $u_n(r,\varphi)$, найдем общее решение в виде ряда

$$u(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r^n}(A_n\cos(n\varphi) + B_n\sin(n\varphi)). \tag{4.14.11}$$

Подставив общее решение в граничное условие, получим

$$u(R,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}R^{-n}(A_n\cos(n\varphi) + B_n\sin(n\varphi)) = f(\varphi). \tag{4.14.12}$$

С другой стороны, функцию $f(\varphi)$ можно разложить по той же системе функций в ряд Фурье

$$f(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos(n\varphi) + b_n\sin(n\varphi)), \tag{4.14.13}$$

коэффициенты которого находятся по известным формулам

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\psi)d\psi,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\psi)\cos(n\psi)d\psi,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\psi)\sin(n\psi)d\psi.$$

Сравнив коэффициенты ряда (4.14.12) и (4.14.12), найдем коэффициенты искомого решения (4.14.11):

$$A_0 = \frac{a_0}{2}, A_n = a_n R^n, B_n = b_n R^n.$$

Тогда

$$u(r,\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^n (\alpha_n\cos(n\varphi) + \beta_n\sin(n\varphi)). \tag{4.14.14}$$

В силу теоремы о единственности решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа 4.6.2, полученное выражение (4.14.8) должно совпадать с интегралом Пуассона (4.13.4) для круга (полученным в параграфе 4.14), покажем это таким же образом, как и в случае внутренней задачи.

Подставим a_0, a_n, b_n в (4.14.14), поменяем местами порядок интегрирования и суммирования

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\psi)\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^n (\cos(n\psi)\cos(n\varphi) + \sin(n\psi)\sin(n\varphi))\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\psi)\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^n \cos(n\psi - n\varphi)\right).$$

$$\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^n \cos(n\psi - n\varphi)\right) =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\left(\frac{R}{r}\right)^n e^{in(\varphi-\psi)} + \left(\frac{R}{r}\right)^n e^{-in(\varphi-\psi)}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\frac{R}{r}e^{i(\varphi-\psi)}}{1-\frac{R}{r}e^{i(\varphi-\psi)}} + \frac{\frac{R}{r}e^{-i(\varphi-\psi)}}{1-\frac{R}{r}e^{-i(\varphi-\psi)}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1-\left(\frac{R}{r}\right)^2}{1-\frac{R}{r}\cos(n\psi - n\varphi) + \left(\frac{R}{r}\right)^2}.$$

$$u(r,\varphi) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi)\frac{r^2-R^2}{r^2-2Rr\cos(\varphi-\psi)+R^2d\psi}, \text{ при } r > R, \\ f(\varphi), \text{ при } r = R. \end{cases}$$

Таким образом показали, что решения, полученные методом Фурье и с помощью функции Грина, имеют один и тот же вид.

Задания для самостоятельного решения

1. Найдите функцию $u(r,\varphi)$, гармоническую внутри кольца $a < r < b$ и удовлетворяющую граничным условиям

$$u|_{r=a} = u_1(\varphi), \quad u|_{r=b} = u_2(\varphi).$$

2. Пользуясь решением предыдущей задачи, найдите емкость цилиндрического конденсатора, рассчитанную на единицу длины.

3. Найдите функцию $u(x,y)$, гармоническую внутри прямоугольника $0 < x < a, 0 < y < b$ и удовлетворяющую граничным условиям

$$\begin{aligned} u|_{x=0} = u_1(\varphi), &\quad u|_{x=a} = 0, \\ u|_{y=0} = u_2(\varphi), &\quad u|_{y=b} = 0. \end{aligned}$$

4.15. Обоснование метода разделения переменных для первой внутренней задачи

Покажем, что формальное решение задачи (4.14.1), (4.14.2)

$$u(r,\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n (a_n\cos n\varphi + b_n \sin n\varphi), \tag{4.15.1}$$

полученное методом разделения переменных, является решением первой внутренней краевой задачи, т.е. удовлетворяет определению 4.5.1.

Покажем, что (4.15.1) можно дифференцировать любое число раз. Так как

$$u_n = \left(\frac{r}{R}\right)^n (a_n\cos n\varphi + b_n \sin n\varphi), \tag{4.15.2}$$

тогда

$$\frac{\partial^k u_n}{\partial \varphi^k} = \left(\frac{r}{R}\right)^n n^k \left(a_n \cos\left(n\varphi + k\frac{\pi}{2}\right) + b_n \sin\left(n\varphi + k\frac{\pi}{2}\right)\right).$$

Отсюда

$$\left|\frac{\partial^k u_n}{\partial \varphi^k}\right| \leq \left(\frac{r}{R}\right)^n n^k 2M,$$

причем $|a_n| < M$, $|b_n| < M$, так как a_n, b_n – коэффициенты Фурье функции f.

Фиксируем некоторое значение $r_0 < R$ такое, что $\dfrac{r}{R} < \dfrac{r_0}{R} < 1$, и получим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n n^k (|a_n| + |b_n|) \leq 2M \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n n^k,$$

который сходится равномерно на множестве $\dfrac{r}{R} \leq \dfrac{r_0}{R} < 1$ при любых k. Поэтому ряд (4.15.1) можно дифференцировать по φ в любой точке внутри круга любое число раз. В силу произвольности r_0 заключаем, что (4.15.1) можно почленно дифференцировать в любой точке внутри круга.

Предположим, что $\tilde{u}(\varphi)$ – непрерывная и дифференцируемая функция, тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) < \infty,$$

$$\left|\left(\frac{r}{R}\right)^n a_n \cos n\varphi\right| \leq |a_n|,$$

$$\left|\left(\frac{r}{R}\right)^n b_n \sin n\varphi\right| \leq |b_n|.$$

Поэтому ряды сходятся равномерно при $\dfrac{r}{R} \leq 1$, следовательно, представимые ими функции непрерывны на границе.

Задания для самостоятельного решения

1. Покажите, что формальное решение (4.14.6), полученное методом разделения переменных, является решением первой внешней краевой задачи, т.е. удовлетворяет определению 4.6.1.

2. Найдите функцию $u(r, \varphi)$, гармоническую вне круга $r < b$ и удовлетворяющую граничному условию

$$u|_{r=b} = x^2 - 3y^2.$$

4.16. Метод разделения переменных для трёхмерного уравнения Лапласа в сферических координатах

В этом параграфе будем изучать уравнение Лапласа $\Delta u = 0$ в шаре. Проведем сферическую замену переменных, тогда искомая функция u будет зависеть от (r, φ, θ), и уравнение Лапласа примет вид

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0. \qquad (4.16.1)$$

Рассмотрим осесимметричный случай, когда функция u не зависит от φ (т.е. $u(r, \varphi_1, \theta) = u(r, \varphi_2, \theta)$ для любых φ_1, φ_2, другими словами u постоянна на каждом круге широты $\varphi \in [0, 2\pi)$). В таком случае $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0$ и уравнение (4.16.1) примет вид

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) = 0$$

или

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) = 0. \qquad (4.16.2)$$

Решим уравнение (4.16.2) методом разделения переменных (методом Фурье). Функцию $u = u(r, \theta)$ представим в виде $u = R(r)\Theta(\theta)$, где функция R зависит только от r, а функция Θ зависит только от θ. Кроме того, $R(r), \Theta(\theta)$ ограничены в шаре радиуса ρ с центром в начале координат.

Подставим $R(r)\Theta(\theta)$ вместо u в уравнение (4.16.2) и получим

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)\Theta(\theta) + \frac{R(r)}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}\right) = 0, \quad | : R(r)\Theta(\theta)$$

$$\frac{1}{R(r)}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) = -\frac{1}{\Theta(\theta)}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}\right).$$

Поскольку R и Θ не зависят друг от друга, то правая и левая части равенства будут равны между собой тогда и только тогда, когда они равны некоторой константе λ.

$$\frac{1}{R(r)}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) = -\frac{1}{\Theta(\theta)}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}\right) = \lambda.$$

Будем считать, что $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\lambda \geq 0$. Представим $\lambda = p(p+1)$. Найдем решение уравнения относительно функции $R(r)$:

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2} + 2r\frac{dR}{dr} - p(p+1)R = 0. \qquad (4.16.3)$$

Полагая $R = r^\alpha$, получим

$$r^2\alpha(\alpha-1)r^{\alpha-2} + 2r\alpha r^{\alpha-1} - p(p+1)r^2 = 0,$$

$$\alpha(\alpha-1) + 2\alpha - p(p+1) = 0, \tag{4.16.4}$$

$$\alpha(\alpha+1) = p(p+1).$$

Таким образом, нашли два решения $\alpha = p$ и $\alpha = -p-1$ и, соответственно, уравнение (4.16.3) имеет два частных решения $R(r) = r^{-p-1}$, $R(r) = r^p$. Частное решение $R(r) = r^{-p-1}$ неограничено в нуле при $p > -1$, а частное решение $R(r) = r^p$ ограниченно внутри шара, т.к. $\rho \geq 0$.

Найдем решение уравнения относительно функции $\Theta(\theta)$:

$$-\frac{1}{Q(\theta)}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dQ(\theta)}{d\theta}\right) = -p(p+1). \tag{4.16.5}$$

Сделаем замену переменной

$$x = \cos\theta, \quad \theta \in [0, \pi],$$

тогда

$$\frac{d\Theta}{d\theta} = \frac{d\Theta}{dx}\frac{dx}{d\theta} = -\sin\theta\frac{d\theta}{dx},$$

$$\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) = \frac{d}{d\theta}\left(-\sin^2\theta\frac{d\Theta}{dx}\right) = -\sin\theta\frac{d}{dx}\left(-\sin^2\theta\frac{d\Theta}{dx}\right) =$$

$$= \sin\theta\frac{d}{dx}\left(\sin^2\theta\frac{d\Theta}{dx}\right),$$

$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - x^2,$$

$$\frac{d}{dx}\left(\sin^2\theta\frac{d\Theta}{dx}\right) = -p(p+1)\Theta.$$

И, окончательно, получим уравнение Лежандра[13]:

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d\Theta}{dx}\right] = -p(p+1)\Theta. \tag{4.16.6}$$

Или в упрощенной записи для произвольной функции $y = y(x)$

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right] = -p(p+1)y. \tag{4.16.7}$$

[13]Адриен Мари Лежандр (18 сентября 1752 — 10 января 1833) — французский математик.

Уравнение Лежандра имеет ограниченное решение только в том случае, когда $p = n$, где $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Для таких p ограниченными решениями являются полиномы Лежандра порядка n :

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left[(x^2 - 1)^n \right]. \tag{4.16.8}$$

Эта формула называется формулой Родрига[14]. Покажем, что $y = P_n(x)$ удовлетворяют уравнению (4.16.7).

Положим $Z = (x^2 - 1)^n$. Пусть $y = Z^{(n)}$. Найдем производную

$$Z' = 2nx(x^2 - 1)^{n-1},$$

тогда

$$(x^2 - 1)Z' = 2nxZ.$$

Найдем производную порядка n от обеих частей последнего равенства:

$$\frac{d^n}{dx^n} \left[(x^2 - 1)Z' \right] = 2n \frac{d^n}{dx^n}(xZ). \tag{4.16.9}$$

Отсюда с помощью формулы дифференцирования произведения

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dx^n}(uv) = uv^{(n)} + nu'v^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{2!}u''v^{(n-2)} + \cdots \\ + nu^{(n-1)}v' + u^{(n)}v. \end{aligned} \tag{4.16.10}$$

Положив $u = x^2 - 1, v = Z'$ в формуле (4.16.10), найдем производную от левой части равенства (4.16.9):

$$\frac{d^n}{dx^n} \left[(x^2 - 1)Z' \right] = (x^2 - 1)Z^{(n+1)} + 2xnZ^{(n)} + 2\frac{n(n-1)}{2!}Z^{(n-1)}.$$

Положим $u = x, v = Z$ в формуле (4.16.10) и найдем производную от правой части равенства (4.16.9):

$$\frac{d^n}{dx^n}[xZ] = xZ^{(n)} + nZ^{(n-1)}.$$

Подставим найденные производные в равенство (4.16.9)

$$(x^2 - 1)Z^{(n+1)} + 2nxZ^{(n)} + n(n-1)Z^{(n-1)} = 2nxZ^{(n)} + 2n^2 Z^{(n-1)},$$

упростив, получим

$$(x^2 - 1)Z^{(n+1)} - n(n+1)Z^{(n-1)} = 0.$$

[14]Бенжамен Олинд Родриг (6 октября 1795, Бордо — 17 декабря 1851, Париж) — французский математик, механик и экономист.

Далее продифференцируем по x

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)Z^{(n+1)}\right]+n(n+1)Z^{(n)}=0,$$

и поскольку $Z^{(n)}=y$, тогда

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right]+n(n+1)y=0.$$

Это показывает, что

$$y=Z^{(n)}=\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right]$$

является частным решением (4.16.7) при $n=p$. Тогда

$$Cy=C\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right]$$

является решением уравнения (4.16.7).

Полиномы Лежандра $P_n(x)=\dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$, $n=0,1,\ldots$, обладают следующими свойствами:

1. Квадрат нормы полиномов Лежандра

$$\|P_n(x)\|^2=\int\limits_{-1}^{1}P_n^2(x)dx=\frac{2}{2n+1}.$$

2. Полиномы Лежандра различных порядков ортогональны на отрезке $[-1,1]$.

3. Полиномы Лежандра образуют полную систему.

Поскольку полиномы Лежандра ортогональны и образуют полную систему, то произвольную функцию $f(x)$ можно разложить в ряд Фурье вида

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nP_n(x).$$

Коэффициент a_n находится из свойства ортогональности

$$a_n=\frac{2n+1}{2}\int\limits_{-1}^{1}f(x)P_n(x)dx.$$

Вернемся к решению уравнения Лапласа. На границе области наложим условие Дирихле

$$u|_{r=\rho}=u_0(\theta). \tag{4.16.11}$$

Частные решения уравнения Лапласа (4.16.1) внутри шара радиуса ρ будут иметь вид

$$u_n(r,\theta) = C_n r^n P_n(\cos\theta). \tag{4.16.12}$$

Частные решения уравнения Лапласа (4.16.1) вне шара радиуса ρ будут иметь вид

$$u_n(r,\theta) = D_n r^{-n-1} P_n(\cos\theta). \tag{4.16.13}$$

В силу полноты системы $\{P_n(\cos\theta)\}$, просуммировав частные решения, найдем

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n r^n P_n(\cos\theta). \tag{4.16.14}$$

Частные решения уравнения Лапласа (4.16.1) вне шара радиуса ρ будут иметь вид

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n r^{-n-1} P_n(\cos\theta). \tag{4.16.15}$$

Коэффициенты C_n и D_n для рядов в формулах (4.16.14) и (4.16.14), соответственно, находятся по формулам

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{2n+1}{4\pi\rho^n} \oiint\limits_S u_0(\theta) P_n(\cos\theta) d\sigma, \\ D_n &= \frac{(2n+1)\rho^n}{4\pi} \oiint\limits_S u_0(\theta) P_n(\cos\theta) d\sigma, \end{aligned} \tag{4.16.16}$$

где S – сфера радиуса ρ с центром в начале координат.

Пример 4.16.1. Найти решение первой внутренней краевой задачи

$$\Delta u = 0, \quad u(r,\theta,\varphi)|_{r=\rho} = \cos\theta.$$

Решение. Функция на границе не зависит от φ, значит искомая функция также не зависит от φ, поэтому это осесимметричный случай. Воспользуемся формулой (4.16.14)

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n r^n P_n(\cos\theta).$$

По формуле Родрига

$$P_1(\cos\theta) = \cos\theta.$$

Сравнивая вид решения и граничное условие, можно прийти к выводу о том, что только C_1 отличен от нуля. Найдем его по формуле (4.16.16) и получим

$$C_1 = \frac{3}{\rho}\frac{1}{4\pi}\oiint\limits_S \cos\theta P_n(\cos\theta)d\sigma = \frac{3}{2\rho}\int\limits_0^\pi \cos^2\theta\sin\theta d\theta = \frac{1}{\rho}.$$

Таким образом, искомое решение имеет вид $u(r,\theta) = \dfrac{r}{\rho}\cos\theta$.

Задания для самостоятельного решения

1. Найдите решение первой внешней краевой задачи

$$\Delta u = 0, \quad u(r,\theta,\varphi)|_{r=\rho} = \cos(\theta) - 2\cos(2\theta).$$

2. Определите стационарное распределение температуры внутри шарового слоя $a < r < b$, если при $r = a$ поддерживается температура u_1, а при $r = b$ поддерживается температура u_2.

Библиографический список

1. Алиев Р.Г. Уравнения в частных производных. М.: Экзамен, 2005.

2. Араманович И.Г., Левин В.И. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1969.

3. Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. М.: Наука, 1979.

4. Вентцель Т.Д., Горький А.Ю., Капустина Т.О. и др. Сборник задач по уравнениям с частными производными. М.: БИНОМ, 2008.

5. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1967.

6. Зорич В. А. Математический анализ. Москва : Изд-во МЦНМО, 2012.

7. Карачик В. В. Курс математического анализа. Челябинск : Изд. центр ЮУрГУ, 2009.

8. Кирхгоф Г. Механика. Лекции по математической физике. М.: АН СССР, 1962.

9. Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Наука, 1962.

10. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.

11. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных.М.: Наука, 1976.

12. Олейник О. А. Лекции об уравнениях с частными производными. М. : Бином. Лаб. знаний, 2005.

13. Олейник О.А., Иосифьян Г.А., Шамаев А.С. Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. М.: Изд-во МГУ, 1990.

14. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. М.: Наука, 1961.

15. Свешников А. Г., Боголюбов А. Н., Кравцов В. В. Лекции по математической физике. М.: Изд-во МГУ, 1993.

16. Свиридюк Г. А., Федоров В. Е. Математический анализ. Часть I. Челябинск: ЧелГУ, 1999.

17. Свиридюк Г. А., Кузнецов Г. А. Математический анализ. Часть II. Челябинск: ЧелГУ, 2000.

18. Свиридюк Г. А., Келлер А. В. Математический анализ. Часть III. Челябинск: ЧелГУ, 2000.

19. Свиридюк Г. А., Замышляева А. А. Математический анализ. Часть IV. Челябинск: ЧелГУ, 2001.

20. Смирнов М.М. Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка. М.: Наука, 1964.

21. Смирнов М.М. Задачи по уравнениям математической физики. М.: Наука, 1973.

22. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966.

23. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.

24. Шапиро Д.А. Конспект лекций по математическим методам физики. Часть 1 (Уравнения в частных производных. Специальные функции. Асимптотики). Новосибирск: НГУ, 2004.

25. Шапиро Д.А. Конспект лекций по математическим методам физики. Часть 2 (Представления групп и их применение в физике. Функции Грина). Новосибирск: НГУ, 2004.

26. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Эдиториал УРСС, 2002.

Учебное издание

Замышляева Алена Александровна,
Манакова Наталья Александровна,
Бычков Евгений Викторович,
Цыпленкова Ольга Николаевна

КЛАССИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ФИЗИКИ

Учебное пособие

Техн. редактор *А.В. Миних*

Издательский центр Южно-Уральского государственного университета

Подписано в печать 10.12.2020. Формат 60×84 1/16. Печать цифровая.
Усл. печ. л. 9,30. Тираж 30 экз. Заказ 566/507.

Отпечатано в типографии Издательского центра ЮУрГУ.
454080, г. Челябинск, проспект Ленина, 76.