

Документ подписан простой электронной подписью Информация о владельце: ФИО: Таскаев Сергей Валерьевич Должность: Ректор	МИНОВЕРНАУКИ РОССИИ Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Челябинский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ЧелГУ»)	
Дата подписания: 07.04.2025 16:01:36 Уникальный программный ключ: 04c19ed8bfb98f3b6cb77a486b9a8788b87232727	Рабочая программа дисциплины "Дифференциальные уравнения" по направлению подготовки (специальности) Математика и компьютерные науки" направленности (профилю) Топологические и аналитические методы исследования математических моделей ФГБОУ ВО «ЧелГУ»	стр. 1

Рабочая программа дисциплины (модуля)*

Дифференциальные уравнения

Направление подготовки (специальность)

02.03.01 Математика и компьютерные науки

Направленность (профиль)

Топологические и аналитические методы исследования математических моделей

Присваиваемая квалификация (степень)

бакалавр

Форма обучения

очная

Год набора 2023

*Рабочая программа дисциплины (модуля) адаптирована для инклюзивного обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья

Челябинск, 2023 г.



Содержание

1. Цели освоения дисциплины
2. Место дисциплины в структуре ОПОП
3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины (модуля)
4. Объем дисциплины (модуля)
5. Структура и содержание дисциплины (модуля)
6. Фонд оценочных средств
 - 6.1. Перечень видов оценочных средств
 - 6.2. Типовые контрольные задания и иные материалы для текущей аттестации
 - 6.3. Типовые контрольные вопросы и задания для промежуточной аттестации
 - 6.4. Критерии оценивания
7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)
 - 7.1. Рекомендуемая литература
 - 7.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет"
 - 7.3. Перечень информационных технологий
8. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)
9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)
10. Специальные условия освоения дисциплины обучающимися с инвалидностью и ограниченными возможностями здоровья



1. ЦЕЛИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Цель освоения учебной дисциплины «Дифференциальные уравнения» состоит в приобретении студентами теоретических знаний и практических умений и навыков по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, использовании их для решения прикладных задач.

Основной задачей является формирование у студентов навыков решения различных видов дифференциальных уравнений и систем, а также умения составления моделей, аналогий действительного мира в виде дифференциальных уравнений и затем умение применить изученные теории к выяснению вопросов существования решений и их нахождения.

Конкретные задачи изучения сводятся к следующему:

1. Изучение основных методов интегрирования различных дифференциальных уравнений первого порядка.
2. Изучение методов решения линейных уравнений и систем с постоянными коэффициентами.
3. Изучение способов решения линейных уравнений с переменными коэффициентами и элементов качественной теории таких уравнений.
4. Изучение фундаментальных теорем существования и единственности для различных задач Коши.
5. Изучение основных методов решения уравнений, неразрешенных относительно производной, выделение особых решений.
6. Изучение основных типов уравнений, допускающих понижение порядка.
7. Изучение способов нахождения производной решения по параметру и по начальным условиям, выяснение условий их существования.
8. Изучения понятий фазового пространства и фазовых траекторий. Применение и построение этих понятий для конкретных систем.
9. Изучение основных элементов теории устойчивости.
10. Изучение способов решения нелинейных систем и уравнений в частных производных первого порядка.

Результаты обучения по дисциплине направлены на достижение индикаторов, соответствующих компетенции ОПК-1:

- ОПК-1.1. Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук;
- ОПК-1.2. Демонстрирует умения решать типовые задачи, формулируемые в рамках математических и (или) естественных наук;
- ОПК-1.3. Имеет навыки использования основных понятий, теорем, законов математики и (или) естественных наук для решения задач профессиональной деятельности.

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОПОП

Цикл (раздел) ОПОП: Б1.О.10

2.1 Требования к предварительной подготовке обучающегося:

Математический анализ

Алгебра

2.2 Дисциплины и практики, для которых освоение данной дисциплины (модуля) необходимо как предшествующее:

Научно-исследовательская работа

Теоретическая механика

Физика

Вариационное исчисление и методы оптимизации

Обыкновенные дифференциальные уравнения и специальные функции

Уравнения с частными производными

Динамические системы

3. КОМПЕТЕНЦИИ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)



Рабочая программа дисциплины "Дифференциальные уравнения" по направлению подготовки (специальности)
"Математика и компьютерные науки" направленности (профилю) Топологические и аналитические методы
исследования математических моделей ФГБОУ ВО «ЧелГУ»

стр. 4

ОПК-1: Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности

Знать:

Для достижения ОПК-1.1.:
знать предмет изучения, основные теоретические и практические элементы теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Уметь:

Для достижения ОПК-1.2.:
уметь решать задачи, относящиеся к основным типам обыкновенных дифференциальных уравнений.

Владеть:

Для достижения ОПК-1.3.:
владеть терминологией, основными обозначениями, приемами и методами решения задач и доказательства утверждений, принятыми в теории обыкновенных дифференциальных уравнений и ее приложениях;

В результате освоения дисциплины обучающийся должен

3.1	Знать:
3.1.1	Знать простейшие типы дифференциальных уравнений, методы понижения порядка дифференциальных уравнений; основные формулы общего и частного решения линейных систем и уравнений с постоянными коэффициентами, определения и свойства матричной экспоненты; условия существования и единственности решения задачи Коши для нормальных систем дифференциальных уравнений и для уравнения n-го порядка в нормальном виде, характер зависимости решений от начальных условий; понятия особого решения; классификацию положений равновесия линейных автономных систем второго порядка; основные определения и положения теории устойчивости.
3.2	Уметь:
3.2.1	Уметь решать простейшие дифференциальные уравнения, применять методы понижения порядка; исследовать задачу Коши. Находить особые решения уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной; решать линейные уравнения и системы с постоянными коэффициентами, применять матричную экспоненту к решению систем линейных уравнений с постоянными коэффициентами; строить фазовые портреты линейных автономных систем второго порядка, находить производную по параметру и начальному условию, исследовать устойчивость решения системы дифференциальных уравнений.
3.3	Владеть:
3.3.1	Иметь опыт использования логического мышления, методов доказательств математических утверждений; иметь навыки решения и исследования дифференциальных уравнений и систем в математических и физических приложениях; владеть умением пользоваться необходимой литературой.

4. ОБЪЕМ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Общая трудоемкость	8 ЗЕТ
Часов по учебному плану : 288 в том числе : аудиторные занятия : 136 самостоятельная работа : 58 часов на контроль : 72 контактная работа: 158 ИКР: 22	Виды контроля в семестрах: экзамены 3, 4

5. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Код занятия	Наименование разделов и тем /вид занятия/	Семестр / Курс	Часов	Литература
	Раздел 1. Общая теория дифференциальных уравнений и систем.			



Рабочая программа дисциплины "Дифференциальные уравнения" по направлению подготовки (специальности) "Математика и компьютерные науки" направленности (профилю) Топологические и аналитические методы исследования математических моделей ФГБОУ ВО «ЧелГУ»				стр. 5
1.1	Общие понятия /Лек/	3	2	Л1.2 Л1.3Л2.4 Л2.5 Л2.6 Э1 Э2
1.2	Некоторые элементарные методы интегрирования. /Лек/	3	2	Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.5 Л2.6 Э1 Э2
1.3	Комплексные дифференциальные уравнения. /Лек/	3	2	Л1.2 Л1.3Л2.5 Л2.6
1.4	Уравнения с разделяющимися переменными. Задача Коши. /Пр/	3	2	Л1.1Л2.3 Л2.6 Э2
1.5	Однородные уравнения и сводящиеся к ним. Квазиоднородные уравнения. /Пр/	3	4	Л1.1Л2.3 Л2.6 Э2
1.6	Линейные уравнения 1-го порядка. Уравнения Бернулли. Уравнения Риккати. /Пр/	3	4	Л1.1Л2.3 Л2.6 Э2
1.7	Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель. Метод выделений и замен. /Пр/	3	4	Л1.1Л2.3 Л2.6 Э2
1.8	Контрольная работа №1 по теме «Уравнения первого порядка, разрешенные относительно производной». /Пр/	3	2	
1.9	Некоторые элементарные методы интегрирования уравнений первого порядка. /Ср/	3	8	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.3 Л2.4 Л2.6 Э1 Э2 Э3
Раздел 2. Линейные уравнения и системы.				
2.1	Некоторые сведения о линейных дифференциальных уравнениях. /Лек/	3	1	Л1.2 Л1.3Л2.5 Л2.6 Э1 Э2
2.2	Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами (случай простых корней). /Лек/	3	2	Л1.2 Л1.3Л2.5 Л2.6 Э1 Э2
2.3	Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами (случай кратных корней). /Лек/	3	3	Л1.2 Л1.3Л2.5 Л2.6 Э1 Э2
2.4	Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами. Квазимногочлены. /Лек/	3	2	Л1.2 Л1.3Л2.5 Л2.6 Э1 Э2
2.5	Нормальная линейная однородная система с постоянными коэффициентами. /Лек/	3	2	Л1.2 Л1.3Л2.5 Л2.6 Э1 Э2
2.6	Показательная функция матрицы. /Лек/	3	2	Л1.2 Л1.3Л2.5 Л2.6 Э1 Э2
2.7	Нормальная система линейных уравнений с переменными коэффициентами. /Лек/	3	4	Л1.2 Л1.3Л2.5 Л2.6 Э1 Э2
2.8	Линейные уравнения n-го порядка с переменными коэффициентами. /Лек/	3	2	Л1.2 Л1.3Л2.5 Л2.6 Э1 Э2
2.9	Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами. Квазимногочлены. /Пр/	3	2	Л1.1Л2.6



Рабочая программа дисциплины "Дифференциальные уравнения" по направлению подготовки (специальности) "Математика и компьютерные науки" направленности (профилю) Топологические и аналитические методы исследования математических моделей ФГБОУ ВО «ЧелГУ»				стр. 6
2.10	Метод вариации постоянных. Задача Коши. Уравнения с комплексными коэффициентами. /Пр/	3	2	Л1.1Л2.6
2.11	Линейные однородные системы с постоянными коэффициентами. Случай действительных корней. /Пр/	3	2	Л1.1Л2.6
2.12	Линейные однородные системы с постоянными коэффициентами: случай комплексных корней. Линейные неоднородные системы с постоянными коэффициентами: квазимногочлены. /Пр/	3	2	Л1.1Л2.6
2.13	Линейные неоднородные системы с постоянными коэффициентами. Метод вариации постоянных. Экспонента от матрицы. /Пр/	3	2	Л1.1Л2.6
2.14	Контрольная работа №2 по теме «Линейные уравнения и системы с постоянными коэффициентами». /Пр/	3	2	
2.15	Линейная зависимость. Определитель Вронского. Составление линейных уравнений с непрерывными коэффициентами по фундаментальной системе решений. Теорема существования и единственности. /Пр/	3	2	Л1.1Л2.6
2.16	Решение линейных однородных уравнений с непрерывными коэффициентами. Поиск частного решения. Формула Лиувилля. /Пр/	3	2	Л1.1Л2.6 Э2
2.17	Метод вариации постоянных для неоднородных линейных уравнений. /Пр/	3	1	Л1.1Л2.6
2.18	Линейные уравнения с постоянными коэффициентами. Нормальная линейная однородная система с постоянными коэффициентами. /Ср/	3	8	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.5 Л2.6Л3.1 Э1 Э2 Э3 Э4
2.19	Нормальная система линейных уравнений с переменными коэффициентами. Линейные уравнения n-го порядка с переменными коэффициентами. /Ср/	3	7	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.5 Л2.6Л3.1 Э1 Э2 Э3 Э4
Раздел 3. Теоремы о нулях решений линейных уравнений второго порядка.				
3.1	Теоремы о нулях решений линейных уравнений второго порядка. /Лек/	3	3	Л1.2 Л1.3Л2.6 Э3
3.2	Элементы качественной теории линейных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами. /Пр/	3	1	Л1.1Л2.6
3.3	Теоремы о нулях решений линейных уравнений второго порядка. /Ср/	3	2	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.6 Э1 Э2 Э3 Э4
Раздел 4. Краевые задачи.				
4.1	Краевые задачи для линейных уравнений второго порядка. /Лек/	3	1	Л1.2 Л1.3Л2.6 Э1 Э2
4.2	Краевые задачи. /Ср/	3	4	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.6 Э1 Э2 Э3 Э4
Раздел 5. Задача Коши.				
5.1	Теорема существования и единственности решения задачи Коши для нормальной системы линейных уравнений. /Лек/	3	2	Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.5 Л2.6 Э1 Э2 Э3
5.2	Теорема существования и единственности решения задачи Коши для одного уравнения. /Лек/	3	2	Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.5 Л2.6 Э1 Э2
5.3	Теорема существования и единственности решения задачи Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений. /Лек/	3	2	Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.5 Л2.6 Э1 Э2
5.4	Теоремы существования и единственности. /Пр/	4	3	Л1.1Л2.6



	Раздел 6. Уравнения, неразрешенные относительно производной.			
6.1	Уравнения, неразрешенные относительно производной. /Лек/	4	2	Л1.2 Л1.3Л2.6 Э1 Э2
6.2	Уравнения неразрешенные относительно производной. Особые решения. Метод введения параметра. Уравнения Лагранжа и Клеро. /Пр/	4	3	Л1.1Л2.2 Л2.3 Л2.6 Э2
6.3	Уравнения, неразрешенные относительно производной. /Ср/	4	4	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.6 Э1 Э2 Э3 Э4
	Раздел 7. Уравнения, допускающие понижение порядка.			
7.1	Уравнения, допускающие понижение порядка. /Лек/	4	2	Л1.2 Л1.3Л2.5 Л2.6 Э1 Э2
7.2	Уравнения, допускающие понижение порядка. /Пр/	4	4	Л1.1Л2.2 Л2.3 Л2.6 Э2
7.3	Контрольная работа №3. /Пр/	4	2	
7.4	Уравнения, допускающие понижение порядка. /Ср/	4	4	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.2 Л2.3 Л2.5 Л2.6 Э1 Э2 Э3 Э4
	Раздел 8. Непродолжаемые решения.			
8.1	Непродолжаемые решения. /Лек/	4	2	Л1.2 Л1.3Л2.5 Л2.6 Э1 Э2
8.2	Непродолжаемые решения. /Ср/	4	2	Л1.2 Л1.3Л2.5 Л2.6 Э1 Э2 Э3 Э4
	Раздел 9. Непрерывная зависимость решения от начальных условий и правой части уравнения.			
9.1	Непрерывная зависимость решения от правой части уравнения, начальных значений и параметров. /Лек/	4	2	Л1.2 Л1.3Л2.5 Л2.6 Э1 Э2
9.2	Оценка точности приближенного решения. /Пр/	4	1	Л1.1Л2.6
9.3	Непрерывная зависимость решения от правой части уравнения, начальных значений и параметров. /Ср/	4	2	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.4 Л2.5 Л2.6Л3.1 Э1 Э2 Э3 Э4
	Раздел 10. Дифференцируемость решения по параметру.			
10.1	Дифференцируемость решения по параметру, начальным значениям. Уравнения в вариациях по параметру и по начальному значению. Метод малого параметра. /Лек/	4	4	Л1.2 Л1.3Л2.5 Л2.6 Э1 Э2
10.2	Производная решения по параметру. /Пр/	4	3	Л1.1 Л1.3Л2.6
10.3	Производная решения по начальному условию. Метод малого параметра. /Пр/	4	2	Л1.1 Л1.3Л2.6
10.4	Дифференцируемость решения по параметру, начальным значениям. Уравнения в вариациях. Метод малого параметра. /Ср/	4	5	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.5 Л2.6Л3.1 Э1 Э2 Э3 Э4
	Раздел 11. Автономные системы дифференциальных уравнений и их фазовые пространства.			



Рабочая программа дисциплины "Дифференциальные уравнения" по направлению подготовки (специальности) "Математика и компьютерные науки" направленности (профилю) Топологические и аналитические методы исследования математических моделей ФГБОУ ВО «ЧелГУ»				стр. 8
11.1	Автономные системы дифференциальных уравнений и их фазовые пространства. Фазовые пространства. Фазовые траектории. /Лек/	4	3	Л1.2 Л1.3Л2.5 Л2.6 Э1 Э2
11.2	Фазовая плоскость линейной однородной системы второго порядка с постоянными коэффициентами. /Лек/	4	3	Л1.2 Л1.3Л2.5 Л2.6 Э1 Э2
11.3	Фазовые портреты линейных систем. Положения равновесия нелинейных систем. /Пр/	4	4	Л1.1Л2.6
11.4	Консервативные системы с одной степенью свободы. /Пр/	4	2	Л1.1Л2.4 Л2.6
11.5	Консервативные системы с одной степенью свободы. /Лек/	4	2	Л2.4Л3.1 Э1 Э2 Э3 Э4
Раздел 12. Первые интегралы.				
12.1	Первые интегралы. /Лек/	4	2	Л1.2 Л1.3Л2.5 Л2.6 Э1 Э2 Э3
12.2	Первые интегралы. /Пр/	4	2	Л1.1Л2.6
12.3	Первые интегралы. /Ср/	4	2	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.5 Л2.6Л3.1 Э1 Э2 Э3 Э4
Раздел 13. Теория устойчивости.				
13.1	Теория устойчивости. Основные понятия. /Лек/	4	3	Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.5 Л2.6 Э1 Э2
13.2	Метод функций Ляпунова. /Лек/	4	2	Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.6 Э1 Э2
13.3	Теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению. /Лек/	4	2	Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.6 Э1 Э2
13.4	Устойчивость по Ляпунову, определение. Исследование на устойчивость по первому приближению. Функция Ляпунова. /Пр/	4	4	Л1.1Л2.6 Э1
13.5	Теория устойчивости. /Ср/	4	6	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.5 Л2.6Л3.1 Э1 Э2 Э3 Э4
13.6	Предельные циклы. /Лек/	4	1	Л2.4Л3.1
Раздел 14. Уравнения в частных производных первого порядка.				
14.1	Уравнения с частными производными первого порядка. /Лек/	4	4	Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.6 Э1 Э2 Э3
14.2	Уравнения с частными производными первого порядка. /Пр/	4	2	Л1.1Л2.6
14.3	Контрольная работа №4. /Пр/	4	2	
14.4	Уравнения с частными производными первого порядка. /Ср/	4	4	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Л2.6 Э1 Э2 Э3 Э4
Раздел 15. Экзамен 3 семестр				



Рабочая программа дисциплины "Дифференциальные уравнения" по направлению подготовки (специальности) "Математика и компьютерные науки" направленности (профилю) Топологические и аналитические методы исследования математических моделей ФГБОУ ВО «ЧелГУ»				стр. 9
15.1	Экзамен /Экзамен/	3	36	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.5 Л2.6Л3.1 Э1 Э2 Э3 Э4
Раздел 16. Экзамен 4 семестр				
16.1	Экзамен /Экзамен/	4	36	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Л2.4 Л2.5 Л2.6Л3.1 Э1 Э2 Э3 Э4
Раздел 17. Иная контактная работа 3 семестр				
17.1	Индивидуальные консультации, текущий контроль /ИКР/	3	11	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.3 Л2.5 Л2.6Л3.1 Э1 Э2 Э3 Э4
Раздел 18. Иная контактная работа 4 семестр				
18.1	Индивидуальные консультации, текущий контроль /ИКР/	4	11	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Л2.4 Л2.5 Л2.6Л3.1 Э1 Э2 Э3 Э4

6. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

6.1. Перечень видов оценочных средств

Контрольные работы
Тесты

6.2. Типовые контрольные задания и иные материалы для текущей аттестации

Примеры вариантов контрольных работ №1-№4 представлены в Приложении
Тесты находится в системе Moodle по адресу <http://moodle.uio.csu.ru/course/view.php?id=1103>, пример заданий из теста находится в приложении

6.3. Типовые контрольные вопросы и задания для промежуточной аттестации

Вопросы к экзамену 3 семестр:

1. Определение дифференциального уравнения и решения дифференциального уравнения. Задача Коши и краевая задача.
2. Геометрическое истолкование дифференциального уравнения (векторное поле) и его решения (интегральная кривая).
3. Задача обратная решению дифференциального уравнения.
4. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель.
5. Линейные уравнения. Уравнения Бернулли.
6. Уравнения с разделяющимися переменными и однородные уравнения.
7. Комплексная функция. Нормальная система дифференциальных уравнений. Расщепление комплексной системы на систему действительных уравнений.
8. Теорема существования и единственности (формулировка). Теорема существования и единственности для уравнения n -го порядка (формулировка).
9. Экспонента комплексного числа, свойства.
10. Некоторые сведения о линейных дифференциальных уравнениях, свойства решений (с доказательством).
11. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами. Определение оператора $L(p)$, его свойства. Доказательство формулы: $L(p) e^{\lambda t} = L(\lambda) e^{\lambda t}$.
12. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами (случай простых корней). Теорема о виде решения.
13. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами (случай простых корней). Действительное решение уравнения с действительными коэффициентами.
14. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами (случай кратных корней). Формула смещения.
Предложение о семействе функций $\omega_0(t), \omega_1(t), \dots, \omega_{(k-1)}(t), \omega_k(t)$.



15. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами (случай кратных корней). Теорема о виде решения.
16. Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами. Вид решения. Определение квазимногочлена. Теорема о виде частного решения.
17. Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами. Свойство квазимногочленов.
18. Нормальная линейная однородная система с постоянными коэффициентами. Случай простых корней характеристического уравнения.
19. Нормальная линейная однородная система с постоянными коэффициентами. Общий случай.
20. Нормальная система линейных уравнений с переменными коэффициентами. Простейшие свойства решений однородной системы. Линейная зависимость системы решений.
21. Нормальная система линейных уравнений с переменными коэффициентами. Фундаментальная система решений. Её существование, выражение решения с помощью фундаментальной системы решений.
22. Нормальная система линейных уравнений с переменными коэффициентами. Детерминант Вронского. Соответствие между произвольной матрицей с ненулевым определителем и фундаментальной матрицей линейной системы.
23. Нормальная система линейных уравнений с переменными коэффициентами. Правило дифференцирования детерминанта. Формула Лиувилля.
24. Нормальная неоднородная система линейных уравнений с переменными коэффициентами. Вид решения. Метод вариации постоянных.
25. Линейные уравнения n -го порядка с переменными коэффициентами. Сведение к нормальной линейной системе. Эквивалентность решения уравнения и системы.
26. Линейные уравнения n -го порядка с переменными коэффициентами. Линейная независимость. Фундаментальная система решений. Её существование, выражение решения с помощью фундаментальной системы решений.
27. Линейные уравнения n -го порядка с переменными коэффициентами. Детерминант Вронского. Формула Лиувилля.
28. Линейные уравнения n -го порядка с переменными коэффициентами. Метод вариации постоянных.
29. Показательная функция матрицы. Ряд от матрицы.
30. Экспонента матрицы. Свойства и способы ее нахождения.
31. Экспонента диагональной и жордановой матрицы.
32. Линейные уравнения второго порядка. Приведение к виду без первой производной.
33. Понятия колеблющегося и неколеблющегося на интервале решения. Теорема о неколеблющемся решении.
34. Теорема Штурма и ее следствие.
35. Теорема сравнения и ее следствие.
36. Теорема Кнезера.
37. Понятие о краевых задачах. Теорема об альтернативе. Краевая задача для линейного уравнения второго порядка.
38. Функция Грина для краевой задачи и ее свойства. Теорема о существовании и способе построения функции Грина.
39. Выражение решения краевой задачи для линейного уравнения через функцию Грина. Примеры.
40. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для нормальной системы линейных уравнений. Формулировка теоремы существования и единственности решения задачи Коши для линейного уравнения n -го порядка.
41. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для одного уравнения. Ломаные Эйлера.
42. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений.

Примеры билетов в приложении

Вопросы к экзамену, 4 семестр:

1. Уравнения, неразрешенные относительно производной. Теорема существования и единственности, следствие.
2. Дискриминантная кривая, особое решение дифференциального уравнения, неразрешенного относительно производной.
3. Методы решения уравнений, неразрешенных относительно производной: разрешение относительно производной, метод введения параметра. Уравнения Клеро.
4. Уравнения, допускающие понижение порядка. Промежуточные интегралы. Уравнения, которые не содержат явно искомую функцию или независимую переменную.
5. Понижение порядка в однородных уравнениях. Приведение к полной производной.
6. Непродолжаемые решения. Предложение о существовании непродолжаемого решения.



7. Предложение о выходе непродолжаемого решения за границу ограниченного замкнутого множества, следствие для автономной системы. Пример.
8. Непрерывная зависимость решения от начальных условий и правой части уравнения. Теорема о непрерывной зависимости решения от правой части уравнения. Следствие о непрерывной зависимости решений от начальных условий.
9. Теорема о непрерывной зависимости решения от параметра.
10. Дифференцируемость решения по параметру. Теорема о дифференцируемости решения по параметру, система уравнений в вариациях. Следствие о дифференцируемости решения по начальным значениям, система уравнений в вариациях.
11. Теорема о дифференцируемости по параметру высоких порядков, следствие о разложении решения по степеням малого параметра.
12. Автономные системы дифференциальных уравнений и их фазовые пространства. Понятие автономной системы и нормальной автономной системы. Кинематическая интерпретация решения автономной системы. Совпадение двух траекторий.
13. Положения равновесия и замкнутые кривые. Три вида траекторий автономной системы.
14. Фазовые пространства. Фазовые траектории. Критерий положения равновесия. Связь геометрической и кинематической интерпретаций решений нормальной системы.
15. Фазовая плоскость линейной однородной системы с постоянными коэффициентами. Невырожденный случай.
16. Фазовая плоскость линейной однородной системы с постоянными коэффициентами. Вырожденный случай.
17. Фазовая плоскость линейной однородной системы с постоянными коэффициентами. Существование нулевого собственного значения.
18. Первые интегралы. Критерий первого интеграла. Функциональная независимость первых интегралов в области, ее связь с линейной независимостью.
19. Теорема о существовании n независимых первых интегралов.
20. Теорема о получении решения с помощью первых интегралов. Теорема о выражении любого первого интеграла через систему n независимых первых интегралов.
21. Первые интегралы автономных систем, теорема о существовании $n-1$ независимого первого интеграла, не содержащего t .
22. Устойчивость решения по Ляпунову, асимптотическая устойчивость по Ляпунову, связь этих понятий. Переход от исследования устойчивости произвольного решения к исследованию устойчивости нулевого решения.
23. Достаточное условие устойчивости для линейной однородной системы с постоянными коэффициентами.
24. Исследование устойчивости с помощью функций Ляпунова. Производная функции в силу системы уравнений. Теорема Ляпунова об устойчивости. Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости. Примеры.
25. Теорема Четаева о неустойчивости. Пример.
26. Теорема об устойчивости по первому приближению. Пример.
27. Уравнения с частными производными первого порядка. Линейное одно-родное уравнение, теорема о связи решения с первым интегралом системы дифференциальных уравнений. Лемма о первых интегралах системы меньшего порядка. Теорема об общем решении линейного уравнения.
28. Квазилинейное уравнение, понятие характеристики уравнения. Теорема о решении квазилинейного уравнения. Теорема о получении решения из первого интеграла. Теорема об общем решении квазилинейного уравнения (формулировка).
29. Задача Коши для квазилинейного уравнения, теорема о существовании единственного решения задачи Коши, геометрический смысл условия теоремы, пример.

Примеры билетов в приложении

6.4. Критерии оценивания

Семестр 3 (Указано максимальное количество баллов)

Контрольная работа №1 (Уравнения первого порядка, разрешенные относительно производной)	25
Контрольная работа №2 (Линейные уравнения и системы с постоянными коэффициентами)	25
Посещаемость занятий (лекционных)	10
Посещаемость занятий (практических)	10
Выполнение домашних заданий	15
Работа у доски	15
Итого	100
Тест (бонус)	10
Экзамен	20



Рабочая программа дисциплины "Дифференциальные уравнения" по направлению подготовки (специальности)
"Математика и компьютерные науки" направленности (профилю) Топологические и аналитические методы
исследования математических моделей ФГБОУ ВО «ЧелГУ»

стр. 12

Семестр 4(Указано максимальное количество баллов)

Контрольная работа №3 (Теоремы существования, уравнения неразрешенные относительно производной и уравнения,
допускающие понижение порядка) 25

Контрольная работа №4 (Дифференцируемость по параметру, фазовые портреты, первые интегралы, устойчивость) 25

Посещаемость занятий (лекционных) 10

Посещаемость занятий (практических) 10

Выполнение домашних заданий 15

Работа у доски 15

Итого 100

Тест (бонус) 10

Экзамен 20

Критерии оценивания контрольных работ: Каждая задача из контрольных №1-3 оценивается из максимума 5 баллов, если полученная сумма превышает 25, то превышение засчитывается, как бонусный балл. В контрольной №4: 1 задача из максимума 5 баллов, 2 и 3 из 10 максимальных баллов. При обнаружении ошибок в решении оценка снижается вплоть до 1 балла, 0 баллов - за полное отсутствие решения.

Описание показателей и критериев оценивания компетенций для теста:

Неудовлетворительно --- Менее 40% --- 0 баллов

Удовлетворительно --- 40%-65% --- 4-6,5 баллов

Хорошо --- 66%-85% --- 6,6-8,5 баллов

Отлично --- 86%-100% --- 8,6-10 баллов

Порядок проведения экзамена

Письменный экзамен: проводится в присутствии преподавателя и предполагает решение задач и развернутый, полный ответ на теоретические вопросы. Вопросы каждого билета составляются с учётом материала, пройденного как на лекционных занятиях, так и на практических занятиях. Время, отводимое на выполнение итоговой работы, 2 астрономических часа (120 минут).

Критерии оценивания экзамена:

За каждое выполненное задание билета студент может получить от 1 до 5 баллов. Если задание выполнено правильно, то оно оценивается 5 баллами. Если задание выполнено с ошибками, то баллы снижаются вплоть до 1 балла в зависимости от количества допущенных ошибок. Если задание выполнено полностью неправильно или студент не выполнил какое-либо задание из билета, то за него он получает 0 баллов. Сумма полученных баллов умножается на 4/5. Максимальное количество баллов за экзамен – 20.

Итоговая оценка выставляется, исходя из набранной суммы баллов:

От 0 до 49 баллов – «неудовлетворительно»

50-69 баллов – «удовлетворительно»

70-90 баллов – «хорошо»

91-100 баллов – «отлично».

7. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

7.1. Рекомендуемая литература

7.1.1. Основная литература

	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год	Ресурс
Л1.1	Филиппов А. Ф.	Сборник задач по дифференциальным уравнениям	Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, 2000	
Л1.2	Треногин В. А.	Обыкновенные дифференциальные уравнения: учебник (https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=82614)	Москва : Физматлит, 2009	ЭБС
Л1.3	Бибиков Ю. Н.	Курс обыкновенных дифференциальных уравнений (https://e.lanbook.com/book/210617)	Санкт- Петербург : Лань, 2022	ЭБС

7.1.2. Дополнительная литература



	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год	Ресурс
Л2.1	Эльсгольц Л. Э.	Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление: учебник (https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=455165)	Москва : б.и., 1969	ЭБС
Л2.2	Камке Э., Розов Н. Х.	Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка: справочник (https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=468183)	Москва : Наука, 1966	ЭБС
Л2.3	Камке Э., Фомин С. В.	Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям	Санкт-Петербург : Лань, 2003	
Л2.4	Арнольд В. И.	Обыкновенные дифференциальные уравнения: учебное пособие для вузов	Москва : Наука, 1984	
Л2.5	Понтрягин Л. С.	Обыкновенные дифференциальные уравнения: учебник для государственных университетов	Москва : Наука, 1965	
Л2.6	Петровский И. Г., Мышкис А. Д., Олейник О. А.	Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений: учебник для университетов	Москва : Издательство МГУ, 1984	

7.1.3. Методические разработки

	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год	Ресурс
Л3.1	Алеева С. Р., Изместьев И. В., Ухоботов В. И.	Избранные главы теории дифференциальных уравнений с приложением к теории дифференциальных игр (http://library.csu.ru/rbooks2/view2?code=local/007942/007942)	Челябинск : Издательство Челябинского государственног о университета, [б. г.]	ЭБС

7.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет"

Э1	Лань [Электронный ресурс] : электронно-библиотечная система (ЭБС) / издательство Лань. – URL: http://e.lanbook.com/ .			
Э2	Университетская библиотека онлайн [Электронный ресурс] : электронно-библиотечная система (ЭБС) / ООО Директмедиа Паблишинг. – URL: http://biblioclub.ru/ .			
Э3	Znanium.com [Электронный ресурс] : электронно-библиотечная система (ЭБС) / Научно-издательский центр ИНФРА-М. – URL: http://znanium.com/ .			
Э4	Юрайт [Электронный ресурс] : электронно-библиотечная система (ЭБС) / издательство Юрайт. – URL: https://urait.ru			

7.3 Перечень информационных технологий

7.3.1 Программное обеспечение

LMS Moodle

MS Office365

7.3.2 Профессиональные базы данных и информационно-справочные системы

1. Электронный каталог научной библиотеки ЧелГУ [Электронный ресурс] : база данных / Челяб. гос. ун-т. – Челябинск, 1992 .
2. eLIBRARY.RU : научная электронная библиотека : сайт. – Москва, 2000 – . – URL: <https://elibrary.ru> – Режим доступа: для зарегистрир. пользователей. – Текст : электронный.

8. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

1. Учебная аудитория на 25 мест для проведения занятий лекционного типа, оснащённая проектором, экраном, магнитно-маркерной доской, маркером; с возможностью демонстрации электронных презентаций при уровне освещения, достаточном для работы с конспектом.
2. Учебная аудитория на 25 мест с доской для проведения практических занятий.



3. Учебная аудитория на 25 мест для возможности самостоятельной работы обучающихся. Также, для самостоятельной работы обучающихся используется электронный читальный зал научной библиотеки ЧелГУ, оснащенный персональными компьютерами, мультимедийной аппаратурой. В аудитории обеспечен доступ к различной справочной литературе, энциклопедиям, библиографическим и полнотекстовым базам данных, информационным ресурсам «Интернет».

9. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Изучение каждой темы следует начинать с проработки соответствующего теоретического материала в учебниках или использовать собственный конспект лекций данной дисциплины. Для усвоения теоретического материала также нужно разобрать предлагаемые в лекционном курсе примеры. Только затем следует закрепить разобранный материал изучаемой темы самостоятельным решением предлагаемых домашних заданий. Самостоятельная работа над задачами курса может, кроме основного источника, проводиться, по другим задачникам. Не стоит пренебрегать и справочной литературой. Успешное написание промежуточных контрольных работ и теста возможно только при внимательном, всестороннем и качественном изучении тем практических занятий, предшествующих данной работе и объявленных преподавателем.

Необходимо тщательно и добросовестно изучить основную и дополнительную литературу, использовать электронные ресурсы. Активная и добросовестная, систематическая работа в течение семестра, проявление инициативы на лекционных и практических занятиях, постоянное выполнение домашних и контрольных работ являются необходимым условием достаточного овладения материалом учебной дисциплины и успешного прохождения промежуточной аттестации по дисциплине.

В случае применения при обучении дисциплины электронного обучения, дистанционных образовательных технологий общение обучающихся и преподавателя осуществляется в режиме реального времени (чаты в системе дистанционного обучения Moodle, собрания в MS Office365 (Microsoft Teams)) или отложенного времени (система дистанционного обучения Moodle, MS Office365, электронная почта). Большую часть времени обучающиеся самостоятельно работают с учебно-методическими материалами. Студенты имеют возможность консультироваться с преподавателем по всем вопросам, возникающим в ходе самостоятельной работы посредством электронной почты, социальных сетей или мессенджеров. Доступ обучающегося к учебным ресурсам в режиме отложенного времени, самостоятельной работы осуществляется через сеть Интернет в удобном для него месте, времени и темпе.

При обучении лиц с ограниченными возможностями здоровья электронное обучение, дистанционные образовательные технологии предусматривают возможность приема-передачи информации в доступных для них формах.

Реализация дисциплины с применением электронного обучения, дистанционных образовательных технологий (далее – ЭО, ДОТ) осуществляется на основании «Положения о реализации основных и дополнительных образовательных программ с применением электронного обучения и дистанционных образовательных технологий в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Челябинский государственный университет», «Положения о порядке зачета обучающимися по основным профессиональным образовательным программам высшего образования в ФГБОУ ВО «ЧелГУ» результатов освоения в организациях, осуществляющих образовательную деятельность, учебных предметов, курсов, дисциплин (модулей), практик, дополнительных образовательных программ» посредством электронной информационно-образовательной среды ФГБОУ ВО «ЧелГУ». В исключительных случаях (форс-мажор и т.п.) при реализации образовательной деятельности с применением ЭО, ДОТ могут применять компоненты, не входящие в перечень электронной информационно-образовательной среды.

10. СПЕЦИАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ ОБУЧАЮЩИМИСЯ С ИНВАЛИДНОСТЬЮ И ОГРАНИЧЕННЫМИ ВОЗМОЖНОСТЯМИ ЗДОРОВЬЯ

Освоение дисциплины инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья осуществляется с использованием специальных технических средств и голо информационных технологий, предоставляемых Ресурсным учебно-методическим центром по обучению инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья ЧелГУ по запросу обучающегося.

1. Мобильные специальные технические средства для лиц с нарушениями зрения: портативный компьютер с вводом/выводом шрифтом Брайля с синтезатором речи «E1Braille-W14J G2»; ноутбуки с программной экранной доступности NVDA; электронные увеличители для удаленного просмотра; видеоувеличители портативные; тифлоплеер; цифровые диктофоны.

2. Мобильные специальные технические средства для лиц с нарушениями слуха: система свободного звукового поля со встроенной совместимостью с FM-устройствами; радиоклассы «Сонет-PCM» с передатчиком, заушным индуктором и индукционной петлей; система информационная для слабослышащих переносная «Исток» А2 со встроенным плеером – звуковым информатором; документ-камера; программируемые слуховые аппараты индивидуального пользования.



3. Ассистивные информационные технологии: программное обеспечение экранного доступа с синтезом речи NVDA; программы экранного увеличения; программы речевого синтеза для компьютеров и ноутбуков; программы речевого синтеза для мобильных устройств; экранная клавиатура; экранная лупа.

При необходимости для обучающихся с нарушениями зрения на рабочих местах для проведения практических или лабораторных занятий устанавливается специальное программное обеспечение (программа речевой навигации NVDA, речевые синтезаторы, экранные лупы).

В учебные аудитории обеспечивается беспрепятственный доступ для обучающихся инвалидов и обучающихся с ограниченными возможностями здоровья. В каждой аудитории, где обучаются инвалиды и лица с ограниченными возможностями здоровья, предусматривается соответствующее количество мест для обучающихся с учетом нарушений их здоровья.

Для освоения дисциплины инвалидам и лицам с ограниченными возможностями здоровья предоставляется доступ к печатным источникам, имеющимся в научной библиотеке ЧелГУ, с помощью специальных технических средств; доступ к электронным источникам, представленным в форме электронного документа в фонде научной библиотеки ЧелГУ или электронно-библиотечных системах, с помощью специальных технических и программных средств (рабочее место для незрячего пользователя с программным обеспечением экранного доступа с синтезом речи NVDA, рабочее место с компьютерным роллером и клавиатурой Clevy с большими кнопками и с разделяющей клавиши накладкой).

Учебно-методические материалы для обучающихся из числа инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья предоставляются в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации:

Для лиц с нарушениями зрения:

- в печатной форме увеличенным шрифтом,
- в форме электронного документа,
- в форме аудиофайла,
- в печатной форме шрифтом Брайля.

Для лиц с нарушениями слуха:

- в печатной форме,
- в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата:

- в печатной форме,
- в форме электронного документа,
- в форме аудиофайла.

Данный перечень может быть конкретизирован в зависимости от контингента обучающихся.

Для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья освоение дисциплины может быть частично или полностью осуществлено с использованием дистанционных образовательных технологий (Moodle, Adobe Connect Pro и пр.).

В освоении дисциплины инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья используется индивидуальная работа. Под индивидуальной работой подразумевается две формы взаимодействия с преподавателем: индивидуальная учебная работа (консультации), т.е. дополнительное разъяснение учебного материала и углубленное изучение материала с теми обучающимися, которые в этом заинтересованы, и индивидуальная воспитательная работа. Индивидуальные консультации направлены на индивидуализацию обучения и установлению воспитательного контакта между преподавателем и обучающимся инвалидом или обучающимся с ограниченными возможностями здоровья.

При проведении процедуры оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья по дисциплине обеспечивается выполнение следующих дополнительных требований в зависимости от индивидуальных особенностей, обучающихся:

- а) инструкция по порядку проведения процедуры оценивания предоставляется в доступной форме (устно, в письменной форме, в письменной форме шрифтом Брайля, устно с использованием услуг сурдопереводчика);
- б) доступная форма предоставления заданий оценочных средств (в печатной форме, в печатной форме увеличенным шрифтом, в печатной форме шрифтом Брайля, в форме электронного документа, задания зачитываются ассистентом, задания предоставляются с использованием сурдоперевода);
- в) доступная форма предоставления ответов на задания (письменно на бумаге, набор ответов на компьютере, письменно шрифтом Брайля, с использованием услуг ассистента, устно).

При проведении процедуры оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья предусматривается использование технических средств, необходимых им в связи с их индивидуальными особенностями. Эти средства могут быть предоставлены ЧелГУ или могут использоваться собственные технические средства. При необходимости инвалидам и лицам с ограниченными возможностями здоровья предоставляется дополнительное время для подготовки ответа на задания, процедура оценивания результатов обучения по дисциплине может проводиться в несколько этапов.

Проведение процедуры оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья допускается с использованием дистанционных образовательных технологий.

Контрольная работа № 1**Вариант 1**

- $3e^x \operatorname{tg} y dx + (2 - e^x) \sec^2 y dy = 0$
- $y' = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}, \quad y(1) = 1.$
- $y' = 2 \left(\frac{y+2}{x+y-1} \right)^2.$
- $xy' + y = \ln x + 1.$
- $(x^2 + 3y^2)dx + 6xydy = 0.$
- $(x+y)y' = 1, \quad y(-1) = 0.$

Контрольная работа № 1**Вариант 2**

- $(1 + e^x)yy' = e^x.$
- $xy' = y \cos \ln \frac{y}{x}, \quad y(1) = 1.$
- $y' + y \cos x = \sin 2x.$
- $4y' + \frac{y}{x} = \frac{e^{-x}}{xy^3}.$
- $2xyy' = 3\sqrt{x^6 - y^4} + 3y^2, \quad y(1) = 0.$
- $y' = \sqrt{100x + 2 + y} - 100.$

Контрольная работа № 1**Вариант 3**

- $(1 + y^2)dx + (1 + x^2)dy = 0.$
- $(y + \sqrt{xy})dx = xdy, \quad y(1) = 0.$
- $y' = \frac{2 - 4y - 6x}{x - y - 2}.$
- $xy' + 2y = e^{-x^2}.$
- $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y.$
- $\frac{y}{x}dx + (y^3 + \ln x)dy = 0.$

Контрольная работа № 1**Вариант 4**

- $(1 + y^2)dx + xdy = 0.$
- $xy' = y + x \cos^2 \frac{y}{x}.$
- $(2x + 1)y' + y = x.$
- $y'x \ln x + 2y = \sqrt{16y} \ln x.$
- $x^2ydx + x^3dy = dx.$
- $y' = \operatorname{tg}^2(2x + y) - 2, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.$

Контрольная работа № 1**Вариант 5**

- $y' \sin x - y \cos x = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$
- $xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2}, \quad y(1) = 1.$
- $xy' + y(x \operatorname{tg} x + 1) = \sec x.$
- $y' - xy = -y^3 e^{-x^2}.$
- $y \cos x dx + \sin x dy = \cos 2x dx, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$
- $y' = (3x - y + 2)^2 - 1.$

Контрольная работа № 1**Вариант 6**

- $(1 - x^2)y' = x(y + y^2), \quad y(0) = 0, 5.$
- $x^2y' = y(x + y).$
- $y' = \frac{y+12}{x-11} - \frac{x-11}{y+12}, \quad y(12) = -11.$
- $y'x \ln x + y = 2 \ln x.$
- $y' - y \operatorname{tg} x + y^2 \cos x = 0.$
- $(x^3 + xy^2)dx + (x^2y + y^3)dy = 0.$

Контрольная работа № 1**Вариант 7**

- $e^x \sin^3 y + (1 + e^{2x}) \cos y \cdot y' = 0.$
- $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y, \quad y(1) = 0.$
- $xyy' - y^2 = 1.$
- $t^2 \frac{dx}{dt} = 2tx - 3, \quad x(-1) = 1.$
- $x(2x^2 + y^2)dx + y(x^2 + 2y^2)dy = 0.$
- $y' = \sin^2(y - x).$

Контрольная работа № 1**Вариант 8**

- $y \ln y dx + xdy = 0, \quad y(1) = 1.$
- $y' + y = x + 1, \quad y(1) = -1.$
- $\sin t dx = \left(4t \sin^2 \frac{t}{2} + x \right) dt.$
- $xy' - 4y - x^2\sqrt{y} = 0.$
- $\frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{x dy - y dx}{x^2} = 0.$
- $y - xy' = 2(x + yy').$

Контрольная работа № 2**Вариант 1**

1. Построить линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами (возможно более низкого порядка), имеющее данные частные решения: $y_1 = xe^x$, $y_2 = xe^{-x}$.

2. Решить линейное неоднородное уравнение с неоднородностью в виде квазимногочлена:

$$y'' + 5y' + 6y = e^{-x} + e^{-2x}.$$

3. Решить линейное неоднородное уравнение, используя метод вариации постоянной:

$$y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x.$$

4. Решить линейную однородную систему $\dot{x} = Ax$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{1,2,3} = 2.$$

5. Найти экспоненту от матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Контрольная работа № 2**Вариант 2**

1. Построить линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами (возможно более низкого порядка), имеющее данные частные решения: $y_1 = xe^x \cos 2x$, $y_2 = e^x \sin 2x$.

2. Решить линейное неоднородное уравнение с неоднородностью в виде квазимногочлена:

$$y''' + 2y'' - 3y' = (8x + 6)e^x.$$

3. Решить линейное неоднородное уравнение, используя метод вариации постоянной:

$$y'' + 4y = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

4. Решить линейную однородную систему $\dot{x} = Ax$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{1,2,3} = -1.$$

5. Найти экспоненту от матрицы $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Контрольная работа № 2**Вариант 3**

1. Построить линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами (возможно более низкого порядка), имеющее данные частные решения: $y_1 = x^2 e^x$, $y_2 = xe^x$.

2. Решить линейное неоднородное уравнение с неоднородностью в виде квазимногочлена:

$$y^{IV} - 81y = 27e^{-3x}.$$

3. Решить линейное неоднородное уравнение, используя метод вариации постоянной:

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{\sqrt{4-x^2}}.$$

4. Решить линейную однородную систему $\dot{x} = Ax$:

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -6 & -2 \\ 18 & -12 & -3 \\ 18 & -9 & -6 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{1,2,3} = -3.$$

5. Найти экспоненту от матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Контрольная работа № 2**Вариант 4**

1. Построить линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами (возможно более низкого порядка), имеющее данные частные решения: $y_1 = x^2 \cos 4x$, $y_2 = 1$.

2. Решить линейное неоднородное уравнение с неоднородностью в виде квазимногочлена:

$$y'' - 5y' + 6y = 13 \sin 3x.$$

3. Решить линейное неоднородное уравнение, используя метод вариации постоянной:

$$y'' - 3y' + 2y = \frac{e^{3x}}{1 + e^{2x}}.$$

4. Решить линейную однородную систему $\dot{x} = Ax$:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -15 \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{1,2,3} = 1.$$

5. Найти экспоненту от матрицы $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Контрольная работа № 2**Вариант 5**

1. Построить линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами (возможно более низкого порядка), имеющее данные частные решения: $y_1 = e^{3x}$, $y_2 = \sin(-5x)$.

2. Решить линейное неоднородное уравнение с неоднородностью в виде квазимногочлена:

$$y''' + 6y'' + 9y' = (16x + 24)e^x.$$

3. Решить линейное неоднородное уравнение, используя метод вариации постоянной:

$$y'' + 4y = \frac{1}{\sin 2x}.$$

4. Решить линейную однородную систему $\dot{x} = Ax$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{1,2,3} = -2.$$

5. Найти экспоненту от матрицы $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Контрольная работа № 2**Вариант 6**

1. Построить линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами (возможно более низкого порядка), имеющее данные частные решения: $y_1 = x^2$, $y_2 = e^{-7x}$.

2. Решить линейное неоднородное уравнение с неоднородностью в виде квазимногочлена:

$$y'' + y' + 2,5y = 25 \cos 2x.$$

3. Решить линейное неоднородное уравнение, используя метод вариации постоянной:

$$y'' - 9y' + 18y = \frac{6e^{3x}}{1 + e^{3x}}.$$

4. Решить линейную однородную систему $\dot{x} = Ax$:

$$A = \begin{pmatrix} 12 & -6 & -2 \\ 18 & -9 & -3 \\ 18 & -9 & -3 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{1,2,3} = 0.$$

5. Найти экспоненту от матрицы $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Контрольная работа № 2**Вариант 7**

1. Построить линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами (возможно более низкого порядка), имеющее данные частные решения: $y_1 = x \sin 4x$, $y_2 = e^x$.

2. Решить линейное неоднородное уравнение с неоднородностью в виде квазимногочлена:

$$4y'' - y = x^3 - 24x.$$

3. Решить линейное неоднородное уравнение, используя метод вариации постоянной:

$$y'' + \pi^2 y = \frac{\pi^2}{\sin \pi x}.$$

4. Решить линейную однородную систему $\dot{x} = Ax$:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = 0.$$

5. Найти экспоненту от матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Контрольная работа № 2**Вариант 8**

1. Построить линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами (возможно более низкого порядка), имеющее данные частные решения: $y_1 = \operatorname{sh} x$, $y_2 = \operatorname{ch} x$.

2. Решить линейное неоднородное уравнение с неоднородностью в виде квазимногочлена:

$$y''' - 4y'' + 3y' = 4(1 - x)e^{-x}.$$

3. Решить линейное неоднородное уравнение, используя метод вариации постоянной:

$$y'' - 4y' + 5y = \frac{e^{2x}}{\cos x}.$$

4. Решить линейную однородную систему $\dot{x} = Ax$:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3.$$

5. Найти экспоненту от матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Контрольная работа № 3**Вариант 1**

- Для задачи Коши $\dot{x} = t^3/x$, $x(0) = 1$ указать какой-нибудь отрезок, на котором существует решение с данными начальными условиями.
- Построить последовательные приближения y_0, y_1, y_2 к решению данной задачи: $y' = y^2 - x$, $y(0) = 1$.
- При каких порядках n уравнение $y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$ с непрерывно дифференцируемой функцией f может иметь среди своих решений две функции: $y_1 = 2x$, $y_2 = 2x + x^3$.
- а) Решить уравнение: $y'^2 x = 2y^3 - 1$.
б) Выделить особые решения (если они есть).
- Решить уравнение: $y'^2 + 2yy'' = 0$.
- Решить уравнение: $4y' = x^2 + y'^2$.

Контрольная работа № 3**Вариант 2**

- Для задачи Коши $\dot{x} = t^3/x^2$, $x(0) = 1/6$ указать какой-нибудь отрезок, на котором существует решение с данными начальными условиями.
- Построить последовательные приближения $y_0, y_1, y_2, z_0, z_1, z_2$ к решению данной задачи: $y' = z$, $z' = y^2$, $y(0) = 1$, $z(0) = 2$.
- При каких начальных условиях существует единственное решение уравнения: $(x + 2)y'' = y' + \sqrt{y}$.
- а) Решить уравнение: $2y'^3 - 3y'^2 + x = y$.
б) Выделить особые решения (если они есть).
- Решить уравнение: $(y'')^2 - y'y''' = (y'/x)^2$.
- Решить уравнение: $y''^2 y' + y''(x - y') - x = 0$.

Контрольная работа № 3**Вариант 3**

- Для задачи Коши $\dot{x} = t^8/x^2$, $x(0) = 1/8$ указать какой-нибудь отрезок, на котором существует решение с данными начальными условиями.
- Построить последовательные приближения y_0, y_1, y_2 к решению данной задачи: $y'' = y' + x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
- При каких порядках n уравнение $y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$ с непрерывно дифференцируемой функцией f может иметь среди своих решений функции: $y_1 = x + 1$, $y_2 = x + \cos x$.
- а) Решить уравнение: $y = xy'^2 - 2y'^3$.
б) Выделить особые решения (если они есть).
- Решить уравнение: $yy'' + 1 = y'^2$.
- Решить уравнение: $y'^4 - y'^3 y''' = 1$.

Контрольная работа № 3**Вариант 4**

- Для задачи Коши $\dot{x} = t^7/x^2$, $x(0) = 1/7$ указать какой-нибудь отрезок, на котором существует решение с данными начальными условиями.
- Построить последовательные приближения y_0, y_1, y_2 к решению данной задачи: $y' = y^3 + x^2$, $y(0) = 0$.
- При каких начальных условиях существует единственное решение системы:

$$\frac{dx}{dt} = y^3 + \sqrt[4]{t-1}, \quad y \frac{dy}{dt} = \sqrt[3]{x}.$$
- а) Решить уравнение: $y = xy' - 3y'^3$.
б) Выделить особые решения (если они есть).
- Решить уравнение: $y'(1 + y'^2) = 5y''$.
- Решить уравнение: $y' = (x + 1)y'' + y'^2$.

Контрольная работа № 3**Вариант 5**

- Для задачи Коши $\dot{x} = t/x^3$, $x(0) = 1/3$ указать какой-нибудь отрезок, на котором существует решение с данными начальными условиями.
- Построить последовательные приближения $y_0, y_1, y_2, z_0, z_1, z_2$ к решению данной задачи: $y' = y^2/z$, $z' = y/2$, $y(0) = 1$, $z(0) = 1$.
- При каких порядках n уравнение $y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$ с непрерывно дифференцируемой функцией f может иметь среди своих решений две функции: $y_1 = x + x^3$, $y_2 = x^2/2 + x$.
- а) Решить уравнение: $x^2 y'^2 = xyy' + 1$.
б) Выделить особые решения (если они есть).
- Решить уравнение: $y'y''' = 2(y'')^2$.
- Решить уравнение: $5y' + y'^2 = x(y'' + x)$.

Контрольная работа № 3**Вариант 6**

- Для задачи Коши $\dot{x} = t^5/x^2$, $x(0) = 1$ указать какой-нибудь отрезок, на котором существует решение с данными начальными условиями.
- Построить последовательные приближения y_0, y_1, y_2 к решению данной задачи: $y' = y^2 + 3x^2 - 1$, $y(1) = 1$.
- При каких начальных условиях существует единственное решение уравнения:

$$y''' \sqrt[3]{y'}(x - y'') = y.$$
- а) Решить уравнение: $yy'^2 = 2xy'^3 + 1$.
б) Выделить особые решения (если они есть).
- Решить уравнение: $y'^2 = (3y - 2y')y''$.
- Решить уравнение: $xy''^3 = 1 + y''$.

Контрольная работа № 4**Вариант 1**

- Для задачи $\dot{x} = \varepsilon\sqrt{\ln x} + xt$, $x(0) = 1 - \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ найти производную $\left. \frac{\partial x(t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}$.
- Найти все положения равновесия, исследовать их на устойчивость, найти первые интегралы, нарисовать фазовый портрет линейной системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y - 1 \\ \dot{y} = x + 2y + 1. \end{cases}$$

- Найти все положения равновесия, исследовать их на устойчивость, найти первые интегралы, нарисовать фазовый портрет консервативной системы:

$$\ddot{x} = 4x^3 - 2x.$$

Контрольная работа № 4**Вариант 2**

- Для задачи $\dot{x} = \varepsilon\sqrt[3]{\ln x} + x\sqrt{t}$, $x(0) = 1 - \sqrt[3]{\frac{2\varepsilon^3}{3}}$ найти производную $\left. \frac{\partial x(t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}$.
- Найти все положения равновесия, исследовать их на устойчивость, найти первые интегралы, нарисовать фазовый портрет линейной системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x + 2 \\ \dot{y} = 3x + y - 2. \end{cases}$$

- Найти все положения равновесия, исследовать их на устойчивость, найти первые интегралы, нарисовать фазовый портрет консервативной системы:

$$\ddot{x} = -e^x + 1.$$

Контрольная работа № 4**Вариант 3**

- Для задачи $\dot{x} = \varepsilon + 2x^2t$, $x(0) = 1 + \varepsilon$ найти производную $\left. \frac{\partial x(t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}$.
- Найти все положения равновесия, исследовать их на устойчивость, найти первые интегралы, нарисовать фазовый портрет линейной системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = 7x + 2y + 3 \\ \dot{y} = 3x + 2y - 1. \end{cases}$$

- Найти все положения равновесия, исследовать их на устойчивость, найти первые интегралы, нарисовать фазовый портрет консервативной системы:

$$\ddot{x} = \cos x - \sin x.$$

Контрольная работа № 4**Вариант 4**

- Для задачи $\dot{x} = \frac{\varepsilon}{x} + 2x^2t$, $x(0) = 1 - \varepsilon$ найти производную $\left. \frac{\partial x(t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}$.
- Найти все положения равновесия, исследовать их на устойчивость, найти первые интегралы, нарисовать фазовый портрет линейной системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 4y - 1 \\ \dot{y} = 2x + 3y + 3. \end{cases}$$

- Найти все положения равновесия, исследовать их на устойчивость, найти первые интегралы, нарисовать фазовый портрет консервативной системы:

$$\ddot{x} = -e^{-x} + e^x.$$

Контрольная работа № 4**Вариант 5**

- Для задачи $\dot{x} = \varepsilon\sqrt[5]{\ln^2 x} + x\sqrt[3]{t^2}$, $x(0) = 1 - \sqrt[5]{\frac{9\varepsilon^5}{25}}$ найти производную $\left. \frac{\partial x(t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}$.
- Найти все положения равновесия, исследовать их на устойчивость, найти первые интегралы, нарисовать фазовый портрет линейной системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 2y - 1 \\ \dot{y} = x + 4y + 2. \end{cases}$$

- Найти все положения равновесия, исследовать их на устойчивость, найти первые интегралы, нарисовать фазовый портрет консервативной системы:

$$\ddot{x} = -\cos x.$$

Контрольная работа № 4**Вариант 6**

- Для задачи $\dot{x} = \varepsilon x + 2x^2t$, $x(0) = 1 + \varepsilon^2$ найти производную $\left. \frac{\partial x(t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}$.
- Найти все положения равновесия, исследовать их на устойчивость, найти первые интегралы, нарисовать фазовый портрет линейной системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 2y + 3 \\ \dot{y} = x - y + 1. \end{cases}$$

- Найти все положения равновесия, исследовать их на устойчивость, найти первые интегралы, нарисовать фазовый портрет консервативной системы:

$$\ddot{x} = -3^x + 1.$$

Примеры вопросов теста:

ЗАДАНИЕ N 1 (выберите несколько вариантов ответа)

Среди записанных ниже дифференциальных уравнений уравнениями первого порядка не являются ...

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1) $(x + y^2)dy + (2xy + x^2)dx = 0$ 3) $y' + 2xy''' = 3y$

2) $y'' + 2y' - 3y = \sin x$ 4) $y'^3 + 2xy = y^2$

ЗАДАНИЕ N 2 (выберите один вариант ответа)

Дифференциальное уравнение $y' - x(y^2 + 1) = 0$ является ...

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1) однородным

3) линейным уравнением относительно функции $y(x)$ и ее производных

2) уравнением с разделяющимися переменными

4) уравнением Бернулли

ЗАДАНИЕ N 3 (выберите один вариант ответа)

Общее решение дифференциального уравнения $y'(1 + x^2) = xy$ может быть записано в виде ...

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1) $y = C \cdot (1 + x^2)$ 3) $y^2 = C \cdot (1 + x^2)$

2) $y^2 = C \cdot \sqrt{1 + x^2}$ 4) $y^2 \cdot (1 + x^2) = C$

ЗАДАНИЕ N 4 (выберите один вариант ответа)

С помощью замены неизвестной функции $y(x) = x \cdot z(x)$ уравнение

$(x^2 + y^2)y' = 2xy$ сводится к следующему уравнению с разделяющимися переменными относительно функции $z(x)$: ...

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1) $xz'(z^2 + 1) = z^3 - z$ 3) $xz'(z^2 + 1) = z - z^3$

2) $xz'(z + 1) = z - z^3$ 4) $xz'(z^2 + 1) = z^2 - z$

БИЛЕТ 1.

1. Решить задачу Коши: $y' = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}$, $y(1) = 1$.
 2. Решить систему уравнений $\dot{x} = Ax$: $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 6 & -6 & 5 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -1$.
 3. При каких a и b каждое решение уравнения $y'' + ay' + by = 0$, кроме $y(x) \equiv 0$, возрастает по абсолютной величине, начиная с некоторого x ?
 4. Определение дифференциального уравнения и решения дифференциального уравнения.
 5. Нормальная система линейных уравнений с переменными коэффициентами. Фундаментальная система решений. Её существование, выражение решения с помощью фундаментальной системы решений.
-

БИЛЕТ 2.

1. Решить уравнение: $e^x \sin^3 y + (1 + e^{2x}) \cos y \cdot y' = 0$
 2. Решить уравнение: $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x$.
 3. Найти общее решение уравнения, используя формулу Лиувилля: $t^2 \ddot{x} - 3t \dot{x} + 4x = 0$.
 4. Геометрическое истолкование дифференциального уравнения (векторное поле) и его решения (интегральная кривая).
 5. Нормальная линейная однородная система с постоянными коэффициентами. Случай простых корней характеристического уравнения.
-

БИЛЕТ 3.

1. Решить задачу Коши: $y \cos x dx + \sin x dy = \cos 2x dx$, $y(\pi/2) = 1$.
 2. Решить систему уравнений: $\begin{cases} \dot{x} = x + 8y - 8e^t \\ \dot{y} = y + 2x - 2e^t \end{cases}$
 3. Составить линейное однородное дифференциальное уравнение (возможно меньшего порядка), имеющее данные частные решения: $3x^2 + 6x + 23$, $9x^2 - 3$, $3x + 12$.
 4. Уравнения с разделяющимися переменными и однородные уравнения первого порядка.
 5. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для одного уравнения (Доказательство единственности).
-

БИЛЕТ 4.

1. Решить задачу Коши: $y' + \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x} = 0$, $y(1) = 1$.
2. Решить уравнение: $y'' - 2y' = \sin x$.
3. Найти общее решение уравнения, используя формулу Лиувилля: $(2t + 1)\ddot{x} + 4t\dot{x} - 4x = 0$.
4. Задача обратная решению дифференциального уравнения.
5. Нормальная система линейных уравнений с переменными коэффициентами. Детерминант Вронского. Соответствие между произвольной матрицей с ненулевым определителем и фундаментальной матрицей линейной системы.

БИЛЕТ 5.

1. Решить задачу Коши: $x^2y' = 2xy - 3$, $y(-1) = 1$.
2. Решить систему уравнений $\dot{x} = Ax$: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = 1$.
3. Записать значения параметров a и b , чтобы $y_1 = \cos 3x$ и $y_2 = e^x$ являлись решениями линейного уравнения $y''' - by'' + ay' - aby = 0$ ($a = \text{const}$, $b = \text{const}$).
4. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами. Определение оператора $L(p)$, его свойства. Доказательство формулы: $L(p)e^{\lambda t} = L(\lambda)e^{\lambda t}$.
5. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для одного уравнения (Доказательство существования).

БИЛЕТ 6.

1. Решить задачу Коши: $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$, $y(1) = 0$.
 2. Решить уравнение: $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{\sqrt{4 - x^2}}$.
 3. Оценить сверху и снизу расстояние между двумя соседними нулями любого (не тождественно равного нулю) решения данного уравнения на заданном отрезке: $(e^x + 7)y'' + e^{2x}y = 0$, $x \in [0, 5]$.
 4. Комплексная функция. Нормальная система дифференциальных уравнений. Расщепление комплексной системы на систему действительных уравнений.
 5. Нормальная система линейных уравнений с переменными коэффициентами. Правило дифференцирования детерминанта. Формула Лиувилля для нормальной системы.
-

БИЛЕТ 7.

1. Решить уравнение: $x^2 \cos^2 x(y - 2 \sin y + 3)dy - (x^2 + \cos^2 x)dx = 0$.
2. Решить систему уравнений:
$$\begin{cases} \dot{x} = x - y + 1 \\ \dot{y} = y - 4x. \end{cases}$$
3. При каких a и b все решения уравнения $y'' + ay' + by = 0$ ограничены на всей числовой прямой $-\infty < x < +\infty$?
4. Уравнения в полных дифференциалах.
5. Теорема Штурма и ее следствие.

БИЛЕТ 8.

1. Решить уравнение $y' - (x + y) \ln(x + y + 5) = 5 \ln(x + y + 5) - 1$, при условии $y(0) = e - 5$.
2. Найти e^{tA} при: $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
3. Даны два различных решения y_1 и y_2 линейного неоднородного уравнения первого порядка. Выразить через них общее решение этого уравнения.
4. Нормальная неоднородная система линейных уравнений с переменными коэффициентами. Вид решения. Метод вариации постоянных для решения линейной системы.
5. Линейные уравнения второго порядка. Приведение к самосопряженному виду, к виду без первой производной (с помощью замены независимого переменного и с помощью замены неизвестной функции).

БИЛЕТ 9.

1. Решить уравнение: $(x^2y^3 + y)dx + (x^3y^2 + x)dy = 0$.
2. Решить систему уравнений $\dot{x} = Ax$: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$.
3. При каких a и b каждое решение уравнения $y'' + ay' + by = 0$ обращается в нуль на бесконечном множестве точек?
4. Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами. Вид решения. Определение квазимногочлена. Теорема о виде частного решения.
5. Показательная функция матрицы. Ряд от матрицы.

БИЛЕТ 1.

1. Для задачи Коши $\dot{x} = xt^6$, $x(0) = 1$ построить последовательные приближения $x_0(t)$, $x_1(t)$, $x_2(t)$.
 2. Для уравнения $\dot{x} = \operatorname{tg} x$ найти положения равновесия и исследовать их на устойчивость.
 3. Найти производную от решения данного дифференциального уравнения по параметру μ при $\mu = 0$: $y' = y - x + \mu x e^{2y}$, $y(1) = 2 - \mu$.
 4. Уравнения, неразрешенные относительно производной. Теорема существования и единственности, следствие.
 5. Задача Коши для квазилинейного уравнения, теорема о существовании единственного решения задачи Коши (формулировка), геометрический смысл условия теоремы.
-

БИЛЕТ 2.

1. Для уравнения $\dot{x} = x^{1/3}t^3$ найти первый интеграл $V(t, x) = \operatorname{const}$.
 2. Для системы уравнений $\begin{cases} \dot{x} = 5x + 3y \\ \dot{y} = -y - 3x \end{cases}$ нарисовать фазовый портрет и исследовать на устойчивость нулевое решение.
 3. Найти производную от решения задачи $y' = 2xy + \sin y$, $y(1) = y_0$ по y_0 при $y_0 = 0$.
 4. Непродолжаемые решения. Предложение о существовании непродолжаемого решения.
 5. Дискриминантная кривая, особое решение дифференциального уравнения, неразрешенного относительно производной.
-

БИЛЕТ 3.

1. Для задачи Коши $x\dot{x} = t^3$, $x(0) = 1$ указать какой-нибудь отрезок, на котором существует решение с данными начальными условиями.
 2. Нарисовать фазовый портрет и исследовать на устойчивость положения равновесия системы $\ddot{x} = -2x + 4x^3$.
 3. Для системы уравнений $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = 4y + 3x \end{cases}$ построить два независимых первых интеграла.
 4. Теорема о непрерывной зависимости решения от правой части уравнения. Следствие о непрерывной зависимости решений от начальных условий.
 5. Методы решения уравнений, неразрешенных относительно производной: разрешение относительно производной, метод введения параметра. Уравнения Клеро.
-

БИЛЕТ 4.

1. Для задачи Коши $\dot{x} = xt^3$, $x(0) = 1$ построить три последовательных приближения $x_0(t)$, $x_1(t)$, $x_2(t)$.
2. Для системы уравнений $\begin{cases} \dot{x} = 2y - 3x \\ \dot{y} = y - 2x \end{cases}$ нарисовать фазовый портрет и исследовать на устойчивость нулевое решение.
3. Решить уравнение $y'^2 - (x + y + y/x)y' + y + y^2/x = 0$ и выделить интегральные кривые, проходящие через точку $M_1(1, 0)$ или через точку $M_2(0, 0)$.
4. Дифференцируемость решения по начальным значениям, система уравнений в вариациях.
5. Уравнения, допускающие понижение порядка. Промежуточные интегралы.

БИЛЕТ 5.

1. Решить уравнение: $yy'' + 1 = y'^2$.
2. Нарисовать фазовый портрет системы $\ddot{x} = -3x^2 + 4x$.
3. В зависимости от параметра $\varepsilon \in \mathbb{R}$ исследовать на устойчивость нулевое решение системы уравнений $\begin{cases} \dot{x} = -y - \varepsilon x + x^3 \\ \dot{y} = y^3 + x. \end{cases}$
4. Непродолжаемые решения. Предложение о существовании непродолжаемого решения.
5. Фазовые пространства. Фазовые траектории. Критерий положения равновесия. Связь геометрической и кинематической интерпретаций решений нормальной системы.

БИЛЕТ 6.

1. Решить уравнение: $x^2y'^2 = xyy' + 1$.
 2. Нарисовать фазовый портрет и исследовать на устойчивость положения равновесия системы $\ddot{x} = 3x^2 - 6x$.
 3. Для уравнения $\dot{x} = x^{1/5}t^5$ найти первый интеграл $V(t, x) = const$.
 4. Исследование устойчивости с помощью функций Ляпунова. Производная функции в силу системы уравнений. Теорема Ляпунова об устойчивости. Пример.
 5. Уравнения, допускающие понижение порядка. Уравнения, не содержащие явно искомой функции или независимого переменного.
-

БИЛЕТ 7.

1. Решить уравнение: $(y')^2 - yy'' = (y/x)^2$.
2. Для уравнения $\dot{x} = \ln(1+x)$ найти положение равновесия и исследовать его на устойчивость.
3. Для уравнения $\dot{x} = \mu\sqrt{\ln x} + xt$, $x(0) = 1 - \frac{\mu}{\sqrt{2}}$ найти $\left. \frac{\partial x(t, \mu)}{\partial \mu} \right|_{\mu=0}$.
4. Предложение о выходе непродолжаемого решения за границу ограниченного замкнутого множества, следствие для автономной системы.
5. Понятие автономной системы и нормальной автономной системы. Кинематическая интерпретация решения автономной системы. Совпадение двух траекторий.

БИЛЕТ 8.

1. Для задачи Коши $\dot{x} = x^2/t$, $x(1) = 1$ построить три последовательных приближения $x_0(t)$, $x_1(t)$, $x_2(t)$.
2. Для системы уравнений построить два независимых первых интеграла:
$$\begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = y - 4x. \end{cases}$$
3. При каких a особая точка системы $\dot{x} = a(x+y)$, $\dot{y} = a^2y$ является седлом?
4. Теорема о непрерывной зависимости решения от параметра.
5. Уравнения, допускающие понижение порядка. Понижение порядка в однородных уравнениях. Приведение к полной производной.

БИЛЕТ 9.

1. Решить уравнение: $(y')^2 + 2yy'' = 0$.
 2. Для уравнения $\dot{x} = \cos x$ найти положение равновесия и исследовать его на устойчивость.
 3. При каких a, b, c, d для каждого решения системы $\dot{x} = ax + by$, $\dot{y} = cx + dy$ полярный угол точки $(x(t), y(t))$ возрастает при увеличении t ?
 4. Теорема о дифференцируемости по параметру высоких порядков, следствие о разложении решения по степеням малого параметра.
 5. Дискриминантная кривая, особое решение дифференциального уравнения, неразрешенного относительно производной.
-

**02.03.01 Математика и компьютерные науки, направленность (профиль)
"Топологические и аналитические методы исследования математических
моделей",
РПД по дисциплине "Дифференциальные уравнения", 2023 год набора, очная
форма обучения.**

Проректор по учебной работе утверждено 24.04.2023 В.Е. Федоров

Ученым советом математического факультета

Протокол заседания № 8 от 13.04.2023

Председатель Ученого совета
математического факультета согласовано Е.А. Сбродова

Заседанием кафедры теории управления и оптимизации

Протокол заседания № 11 от 07.04.2023

Заведующий кафедрой согласовано И. В. Изместьев

Автор (составитель) С. Р. Алеева

**Структура рабочей программы соответствует приказу ректора ФГБОУ ВО
«ЧелГУ» от «13» апреля 2021 г. № 247-1**