

Документ подписан простой электронной подписью Информация о владельце: ФИО: Таскаев Сергей Валерьевич Должность: Ректор Дата подписания: 04.06.2025 13:02:01 Уникальный программный ключ: 04c19ed8bfb98f3b6c77a486b0a8788b8722727	МИНОВЕРНАУКИ РОССИИ Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Челябинский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ЧелГУ»)	Рабочая программа дисциплины "Дополнительные главы методов вычислений (научный семинар)" по направлению подготовки (специальности) 01.03.02 "Прикладная математика и информатика" направленности (профиль) Прикладная математика и искусственный интеллект ФГБОУ ВО «ЧелГУ»	стр. 1
---	--	---	--------

## **Рабочая программа дисциплины (модуля)\***

**Дополнительные главы методов вычислений (научный семинар)**

Направление подготовки (специальность)

01.03.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль)

Прикладная математика и искусственный интеллект

Присваиваемая квалификация (степень)

бакалавр

Форма обучения

очная

Год(ы) набора 2025

\*Рабочая программа дисциплины (модуля) адаптирована для инклюзивного обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья

Челябинск 2025 г.



## Содержание

1. Цели освоения дисциплины
2. Место дисциплины в структуре ОПОП
3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины (модуля)
4. Объем дисциплины (модуля)
5. Структура и содержание дисциплины (модуля)
6. Фонд оценочных средств
  - 6.1. Перечень видов оценочных средств
  - 6.2. Типовые контрольные задания и иные материалы для текущей аттестации
  - 6.3. Типовые контрольные вопросы и задания для промежуточной аттестации
  - 6.4. Критерии оценивания
7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)
  - 7.1. Рекомендуемая литература
  - 7.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет"
  - 7.3. Перечень информационных технологий
8. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)
9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)
10. Специальные условия освоения дисциплины обучающимися с инвалидностью и ограниченными возможностями здоровья



### 1. ЦЕЛИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

преподавания дисциплины является знакомство с основными понятиями, положениями и методами асимптотического анализа, необходимого для дальнейшего изучения естественных дисциплин связанных с изучением асимптотического поведения функций и решений различных задач, а также формирование у студентов представления об асимптотических методах и навыков решения прикладных задач асимптотическими методами.

Результаты обучения по дисциплине направлены на достижение индикаторов, соответствующих компетенций УК1, ПК1:

УК-1.1. Выполняет поиск информации, определяет критерии системного анализа поставленных задач

УК-1.2. Использует критический анализ, систематизацию и обобщение информации для решения поставленных задач

ПК-1.1. Обладает знаниями о существующих математических методах и моделях, применяемые для описания систем; о классических математических методах анализа систем.

ПК-1.2. Демонстрирует умение: проводить исследование и анализ системы; интерпретировать результаты анализа для заинтересованных лиц; устанавливать причинно-следственные связи между явлениями; проводить сбор, обработку и анализ данных для определения ключевых свойств системы.

ПК-1.3. Имеет практический опыт (навыки): выполнения описания модели системы; применения математических методов при решении типовых задач; выполнения классификации явлений системы и описания причинно- следственных связей между явлениями

### 2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОПОП

Цикл (раздел) ОПОП: К.М.01.ДВ.01.02

#### 2.1 Требования к предварительной подготовке обучающегося:

Математический анализ

Дифференциальные уравнения

#### 2.2 Дисциплины и практики, для которых освоение данной дисциплины (модуля) необходимо как предшествующее:

Научно-исследовательская работа

### 3. КОМПЕТЕНЦИИ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

**УК-1: Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач**

#### Знать:

теоретические основы принятия решений в сфере поиска, критического анализа и синтеза информации

#### Уметь:

Выполняет поиск информации, определяет критерии системного анализа поставленных задач

#### Владеть:

навыками анализа, систематизации и обобщения информации для решения поставленных задач

#### **ПК-1: Способен проектировать системы различного назначения и проводить их анализ**

#### Знать:

существующие математические модели, применяемые для описания систем; о классических математических методах анализа систем.

#### Уметь:

осваивать новые алгоритмы и асимптотические методы для решения прикладных и научно-исследовательских задач, связанных с нахождением асимптотики

#### Владеть:

навыками эффективного применения информационных образовательных ресурсов в учебной деятельности, в том числе самообразовании

**В результате освоения дисциплины обучающийся должен**



Рабочая программа дисциплины "Дополнительные главы методов вычислений (научный семинар)" по направлению подготовки (специальности) 01.03.02 "Прикладная математика и информатика" направленности (профилю) Прикладная математика и искусственный интеллект ФГБОУ ВО «ЧелГУ»		стр. 4
<b>3.1 Знать:</b>		
3.1.1	сущность и значение асимптотического анализа в развитии современной науки	
<b>3.2 Уметь:</b>		
3.2.1	осваивать новые алгоритмы и асимптотические методы для решения прикладных и научно-исследовательских задач, связанных с нахождением асимптотики	
<b>3.3 Владеть:</b>		
3.3.1	эффективного применения информационных образовательных ресурсов в учебной деятельности, в том числе самообразовании	

4. ОБЪЕМ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)	
<b>Общая трудоемкость</b>	<b>З ЗЕТ</b>
Часов по учебному плану : 108 в том числе : аудиторные занятия : 34 самостоятельная работа : 48,4 часов на контроль : 18 контактная работа: 41,6 ИКР: 7,6	Виды контроля в семестрах:  экзамены 5

5. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)				
Код занятия	Наименование разделов и тем /вид занятия/	Семестр / Курс	Часов	Литература
<b>Раздел 1. 1. Введение в теорию асимптотических методов</b>				
1.1	Введение /Лек/	5	2	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Э1 Э2
1.2	Свойства асимптотических рядов /Лек/	5	2	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Э1 Э2
1.3	Теорема о существовании /Лек/	5	2	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Э1 Э2
1.4	Введение в теорию асимптотических методов /Ср/	5	8	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Э1 Э2
<b>Раздел 2. 2. Метод Лапласа, метод стационарной фазы, метод перевала</b>				
2.1	Метод Лапласа /Лек/	5	2	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Э1 Э2
2.2	Асимптотика Г-функции Эйлера /Лек/	5	2	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Э1 Э2
2.3	Метод стационарной фазы /Лек/	5	2	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Э1 Э2
2.4	Асимптотика функции Бесселя /Лек/	5	2	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Э1 Э2
2.5	Комплексный метод перевала /Лек/	5	2	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Э1 Э2



Рабочая программа дисциплины "Дополнительные главы методов вычислений (научный семинар)" по направлению подготовки (специальности) 01.03.02 "Прикладная математика и информатика" направленности (профилю) Прикладная математика и искусственный интеллект ФГБОУ ВО «ЧелГУ»				стр. 5
2.6	Асимптотика функции Эйри /Лек/	5	2	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Э1 Э2
2.7	Метод перевала /Ср/	5	20	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Э1 Э2
<b>Раздел 3. 3. Асимптотическое поведение решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка на бесконечности.</b>				
3.1	Осциллирующие решения /Лек/	5	3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Э1 Э2
3.2	Экспоненциально убывающее решение /Лек/	5	2	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Э1 Э2
3.3	Экспоненциально растущее решение /Лек/	5	2	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Э1 Э2
3.4	Замены Лиувилля /Лек/	5	3	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Э1 Э2
3.5	Асимптотическое поведение решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка на бесконечности /Ср/	5	10,4	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Э1 Э2
<b>Раздел 4. 4. Дифференциальные уравнения с малым параметром</b>				
4.1	Постановка задачи. Оценка решения /Лек/	5	2	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Э1 Э2
4.2	Построение и обоснование асимптотики /Лек/	5	4	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Э1 Э2
4.3	Дифференциальные уравнения с малым параметром /Ср/	5	10	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Э1 Э2
<b>Раздел 5. Экзамен</b>				
5.1	Экзамен /Экзамен/	5	18	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2
<b>Раздел 6. Иная контактная работа</b>				
6.1	Индивидуальные консультации, текущий контроль /ИКР/	5	7,6	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2

## 6. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

### 6.1. Перечень видов оценочных средств

1. Контрольные работы 1-2 (теоретические)
2. Домашние контрольные работы: №1-15.
3. Посещаемость лекций.
4. Экзаменационные билеты.

### 6.2. Типовые контрольные задания и иные материалы для текущей аттестации

Перечень домашних контрольных заданий см. Приложение.

Вопросы по дополнительным главам методов вычислений к теоретической контрольной-I:

1. Символы  $O$  и  $o$ .
2. Правила для  $O$ -символа.
3. Свойства символов  $O$  и  $o$ .
4. Асимптотические последовательности.



5. Утверждения об асимптотических последовательностях.
6. Эквивалентные последовательности.
7. Теоремы об интегрировании асимптотических последовательностей.
8. Асимптотические разложения.
9. Необходимое условие разложения функции в асимптотический ряд.
10. Достаточное условие разложения функции (теорема Макки).
11. Единственность асимптотического разложения.
12. Линейные операции над асимптотическими разложениями.
13. Интегрирование асимптотических разложений.
14. Дифференцирование степенных асимптотических разложений.

Вопросы по дополнительным главам методов вычислений к теоретической контрольной-II:

15. Метод Лагранжа решения конечных уравнений.
16. Метод подстановки решения конечных уравнений. Примеры.
17. Метод разложения подынтегральной функции и метод интегрирования по частям для интегралов, зависящих от параметра
18. Интеграл Лапласа. Случай невырожденной точки максимума на границе.
19. Интеграл Лапласа. Случай вырожденной внутренней точки максимума.
20. Метод интегрирования по частям для интеграла Лапласа.
21. Интеграл Фурье. Лемма Римана-Лебега.
22. Метод интегрирования по частям для интеграла Фурье.
23. Метод стационарной фазы. Асимптотическое представление для интеграла Фурье.
24. Дифференциальные уравнения второго порядка. Асимптотика решения на бесконечности.
25. ДУ второго порядка. Колеблющиеся решения.
26. ДУ второго порядка. Экспоненциальные решения.
27. Преобразования Лиувилля.
28. Метод ВКБ.

### 6.3. Типовые контрольные вопросы и задания для промежуточной аттестации

Перечень вопросов к экзамену см. Приложение.  
Пример экзаменационного билета см. Приложение.

### 6.4. Критерии оценивания

Балльно-рейтинговая система оценки знаний студента по дисциплине выстраивается на основе балльной оценки различных форм деятельности студентов. Для формирования оценки суммируются баллы семестра и экзамена.

Структура оценивания работы в семестре:

В течение семестра проводятся 18 занятий, за присутствие на которых студент может получить максимум 5 баллов. За контрольные работы №1-2 теоретические максимум 10 баллов. За выполнение домашних контрольных заданий №1-15 выставляется максимум 75 баллов.

Итого 90 баллов.

Структура экзамена:

1. Теоретический вопрос – 10 баллов.

2. Практическое задание – 10 баллов.

Итого 20 баллов.

Максимальное количество баллов семестр+экзамен:  $5+2*5+15*5+2*10=110$ .

Критерий оценивания результатов семестра и экзамена:

60 – 85 баллов – выставляется оценка “удовлетворительно”,

86 – 100 баллов – выставляется оценка “хорошо”,

101 балл и выше – выставляется оценка “отлично”.

## 7. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

### 7.1. Рекомендуемая литература

#### 7.1.1. Основная литература

Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год	Ресурс
---------------------	----------	-------------------	--------



Рабочая программа дисциплины "Дополнительные главы методов вычислений (научный семинар)" по направлению подготовки (специальности) 01.03.02 "Прикладная математика и информатика" направленности (профилю) Прикладная математика и искусственный интеллект ФГБОУ ВО «ЧелГУ»

стр. 7

	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год	Ресурс
Л1.1	Шалаумов В. А.	Асимптотические методы в анализе: учебное пособие ( <a href="https://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=232652">https://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=232652</a> )	Кемерово : Кемеровский государственный университет, 2012	ЭБС
Л1.2	Ильин А.М., Данилин А.Р.	Асимптотические методы в анализе: монография ( <a href="https://znanium.com/catalog/document?id=110630">https://znanium.com/catalog/document?id=110630</a> )	Москва : Издательская фирма "Физико-математическая литература" (ФИЗМАТЛИТ), 2009	ЭБС

#### 7.1.2. Дополнительная литература

	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год	Ресурс
Л2.1	Федорюк М. В.	Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений: научная литература ( <a href="https://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=464104">https://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=464104</a> )	Москва : Наука, 1983	ЭБС
Л2.2	Щитов И. Н.	Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений: монография ( <a href="https://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=275565">https://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=275565</a> )	Москва : Физматлит, 2013	ЭБС

#### 7.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет"

Э1	Электронный каталог НБ ЧелГУ [Электронный ресурс] : база данных / Челяб. гос. ун-т. – 1992.
Э2	eLIBRARY.RU [Электронный ресурс] : научная электронная б-ка URL: <a href="http://elibrary.ru/defaultx.asp">http://elibrary.ru/defaultx.asp</a> .

#### 7.3 Перечень информационных технологий

##### 7.3.1 Программное обеспечение

LMS Moodle

##### 7.3.2 Профессиональные базы данных и информационно-справочные системы

Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU (<https://elibrary.ru/defaultx.asp?>) eLIBRARY.RU : научная электронная библиотека : сайт. – Москва, 2000 – . – URL: <https://elibrary.ru>. – Режим доступа: для зарегистрир. пользователей. – Текст : электронный.

Справочник «Информо» (<http://www.informio.ru/>) ИНФОРМИО : электронный справочник [обеспечение всех типов образовательных учреждений нормативными, методическими, научнопрактическими материалами]. – URL: <http://www.informio.ru/>. – Режим доступа: для зарегистрир. пользователей ЧелГУ. – Текст : электронный.

## 8. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Для реализации дисциплины используются учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, а также помещения для самостоятельной работы. Для проведения занятий лекционного типа предлагаются наборы демонстрационного оборудования и учебно-наглядных пособий, аудитория оснащённая доской и проектором для демонстрации презентаций.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с подключением к сети "Интернет" и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду университета.

## 9. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

При изучении данной дисциплины используются лекционные занятия (34 ч.) и самостоятельная работа (48,4 ч.). На лекционных занятиях обсуждение теоретического материала сочетается с решением задач. Студенту желательно активно участвовать в проведении аудиторных занятий, задавать вопросы, высказывать свою точку зрения по поводу обсуждаемой проблемы, задачи. Умение обосновывать свою точку зрения, нахождения компромиссного решения в этически выдержанной дискуссии не только важно для лучшего усвоения материала, но и ценится в реальной жизни. Важным моментом при изучении любой дисциплины является организация самостоятельной работы. Проработку теоретического материала студенту желательно проводить как после каждого занятия, так и по завершении темы.



Это позволит связать воедино полученные сведения и составить цельную картину. При этом следует обращаться к различным источникам информации (помимо рекомендованной литературы поиск нужного материала в интернете). Желательно регулярно выполнять домашние занятия. Они могут содержать не только задачи, но и проработку нового теоретического материала.

В случае применения при обучении дисциплины электронного обучения, дистанционных образовательных технологий общение обучающихся и руководителя практики осуществляется в режиме реального времени (чат), или отложенного времени (система дистанционного обучения Moodle, чаты, электронная почта).

Большую часть времени обучающиеся самостоятельно работают с учебно-методическими материалами. Студенты имеют возможность консультироваться с руководителем практики по всем вопросам, возникающим в ходе самостоятельной работы посредством электронной почты, социальных сетей.

Доступ обучающегося к учебным ресурсам в режиме отложенного времени, самостоятельной работы осуществляется через сеть Интернет в удобном для него месте, времени и темпе.

При обучении лиц с ограниченными возможностями здоровья электронное обучение, дистанционные образовательные технологии предусматривают возможность приема-передачи информации в доступных для них формах.

Реализация дисциплины с применением электронного обучения, дистанционных образовательных технологий (далее – ЭО, ДОТ) осуществляется на основании «Положения о реализации основных и дополнительных образовательных программ с применением электронного обучения и дистанционных образовательных технологий в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Челябинский государственный университет», «Положения о порядке зачета обучающимися по основным профессиональным образовательным программам высшего образования в ФГБОУ ВО «ЧелГУ» результатов освоения в организациях, осуществляющих образовательную деятельность, учебных предметов, курсов, дисциплин (модулей), практик, дополнительных образовательных программ» посредством электронной информационно-образовательной среды ФГБОУ ВО «ЧелГУ». В исключительных случаях (форс-мажор и т.п.) при реализации образовательной деятельности с применением ЭО, ДОТ могут применять компоненты, не входящие в перечень электронной информационно-образовательной среды.

## 10. СПЕЦИАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ ОБУЧАЮЩИМИСЯ С ИНВАЛИДНОСТЬЮ И ОГРАНИЧЕННЫМИ ВОЗМОЖНОСТЯМИ ЗДОРОВЬЯ

Освоение дисциплины инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья осуществляется с использованием специальных технических средств и информационных технологий, предоставляемых Ресурсным учебно-методическим центром по обучению инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья ЧелГУ по запросу обучающегося (мобильные специальные технические средства для лиц с нарушениями зрения и с нарушением слуха, ассистивные информационные технологии).

При необходимости для обучающихся с нарушениями зрения на рабочих местах для проведения практических или лабораторных занятий устанавливается специальное программное обеспечение (программа речевой навигации, речевые синтезаторы, экранные лупы).

В учебные аудитории обеспечивается беспрепятственный доступ для обучающихся с инвалидностью и с ограниченными возможностями здоровья. В каждой аудитории, где обучаются инвалиды и лица с ограниченными возможностями здоровья, предусматривается соответствующее количество мест для обучающихся с учетом нарушений их здоровья.

Для освоения дисциплины инвалидам и лицам с ограниченными возможностями здоровья предоставляется доступ к печатным источникам, имеющимся в научной библиотеке ЧелГУ, с помощью специальных технических средств; доступ с помощью специальных технических и программных средств к электронным источникам, представленным в форме электронного документа в фонде научной библиотеки ЧелГУ или электронно-библиотечных системах.

Учебно-методические материалы для обучающихся из числа инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья предоставляются в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и особенностям восприятия информации.

Для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья освоение дисциплины может быть частично или полностью осуществлено с использованием дистанционных образовательных технологий.

При проведении промежуточной аттестации по дисциплине обучающимся с инвалидностью и с ограниченными возможностями здоровья обеспечивается по их заявлению предоставление в доступной форме в зависимости от их индивидуальных особенностей инструкции о порядке проведения промежуточной аттестации, оценочных средств и возможности ответов на задания (письменно на бумаге, набор ответов на компьютере, письменно шрифтом Брайля, с использованием услуг ассистента, устно).

При проведении процедуры оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья предусматривается использование предоставленных ЧелГУ или собственных технических средств,



МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Челябинский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ЧелГУ»)

Рабочая программа дисциплины "Дополнительные главы методов вычислений (научный семинар)" по направлению подготовки (специальности) 01.03.02 "Прикладная математика и информатика" направленности (профилю) Прикладная математика и искусственный интеллект ФГБОУ ВО «ЧелГУ»

стр. 9

необходимых им в связи с их индивидуальными особенностями. При необходимости инвалидам и лицам с ограниченными возможностями здоровья предоставляется дополнительное время для подготовки ответа на задания, процедура оценивания результатов обучения по дисциплине может проводиться в несколько этапов.

## Перечень домашних контрольных заданий по дополнительным главам методов вычислений

1. Привести примеры асимптотических рядов по степеням  $x$  при  $x \rightarrow 0$ . Привести примеры асимптотических рядов по степеням  $x^{-1}$  при  $x \rightarrow \infty$ . Привести примеры калибровочных последовательностей. Доказать теорему о единственности разложении функции по заданной калибровочной последовательности.
2. Написать асимптотики интегралов:  $\int_x^\infty f(t) \sin t dt$ ,  $\int_x^\infty f(t) \cos t dt$ ,  $\int_x^\infty f(t) e^{-t} dt$  при  $x \rightarrow \infty$ . Привести свойства асимптотических рядов.
3. Доказать теорему о существовании непрерывной функции, разлагающейся в заданный асимптотический ряд.
4. Получить асимптотическое представление для интеграла Лапласа в случае максимума «фазовой» функции внутри промежутка интегрирования и в случае максимума на границе.
5. Получить асимптотику интеграла Лапласа произвольного порядка. Получить асимптотику  $\Gamma$ -функции Эйлера при больших значениях аргумента.
6. Получить асимптотику интеграла Фурье для строго монотонной фазовой функции в частном случае и для фазовой функции, имеющей одну стационарную точку.
7. Применить метод стационарной фазы для строго монотонной фазовой функции в общем случае и при наличии конечного числа стационарных точек.
8. Получить асимптотику функций Бесселя при больших значениях аргумента.
9. Изучить основные положения метода перевала.
10. Получить асимптотику функции Эйри при больших значениях аргумента.
11. Получить асимптотику решения ДУ второго порядка. Колеблющиеся решения.
12. Получить асимптотику решения ДУ второго порядка. Экспоненциальные решения.
13. Вывести формулы преобразований Лиувилля. Применить их на примерах.
14. Дать постановку задачи краевой задачи для ДУ с малым параметром при старшей производной. Оценить решение.
15. Определить функции пограничного слоя. Построить и обосновать асимптотику.

## Перечень вопросов для промежуточной аттестации по дополнительным главам методов вычислений

1. Определение асимптотического ряда по степеням  $x$  при  $x \rightarrow 0$ . Примеры. Связь с аналитическими функциями. Единственность асимптотического разложения.
2. Определение асимптотического ряда по степеням  $x^{-1}$  при  $x \rightarrow \infty$ . Примеры. Единственность асимптотического разложения.
3. Калибровочные последовательности  $x^n$ , другие калибровочные последовательности. Примеры. Единственность асимптотического разложения по заданной системе калибровочных функций.
4. Асимптотика интегралов вида  $\int_x^\infty f(t) \sin t dt$ ,  $\int_x^\infty f(t) \cos t dt$ ,  $\int_x^\infty f(t) e^{-t} dt$  при  $x \rightarrow \infty$ .
5. Свойства асимптотических рядов: линейная комбинация, умножение, деление, интегрирование. Единственность асимптотического разложения по заданной калибровочной последовательности функций.
6. Эквивалентность различных определений асимптотического ряда.
7. Соотношения между асимптотическими и сходящимися рядами.
8. Теорема существования непрерывной функции, разлагающейся в заданный асимптотический ряд.
9. Метод Лапласа для нахождения асимптотики интегралов вида  $\int_a^b f(t) e^{\lambda h(t)} dt$  при  $\lambda \rightarrow \infty$ , где  $h(t)$ ,  $f(t)$  - гладкие вещественные функции. Частный случай  $h(t) = -t^2/2$ ,  $a < 0 < b$ .
10. Метод Лапласа для нахождения асимптотики интегралов вида  $\int_a^b f(t) e^{\lambda h(t)} dt$  при  $\lambda \rightarrow \infty$ , где  $h(t)$ ,  $f(t)$  - гладкие вещественные функции. Общий случай при условии, что  $h(t) < h(c)$  для  $t \neq c$ ,  $h'(c) < 0$ ,  $a < c < b$ .
  - a) Вычисление асимптотики путём замены переменных в окрестности точки максимума.
  - b) Вывод формулы путём разложения экспоненты в ряд Тейлора с остаточным членом.
  - d) Асимптотика  $\Gamma$ - функции Эйлера при больших значениях аргумента.
11. Метод Лапласа для нахождения асимптотики интегралов вида  $\int_a^b f(t) e^{\lambda h(t)} dt$  при  $\lambda \rightarrow \infty$ , где  $h(t)$ ,  $f(t)$  - гладкие вещественные функции. Асимптотика интеграла в случае, когда максимум  $h(t)$  достигается на границе отрезка  $[a, b]$ .
12. Метод стационарной фазы - нахождение асимптотики интеграла  $\int_a^b f(t) e^{i\lambda S(t)} dt$  при  $\lambda \rightarrow \infty$ , где  $S(t)$ ,  $f(t)$  - гладкие вещественные функции. Асимптотика интеграла при условии, что  $S'(t) \neq 0$ .

13. Метод стационарной фазы - нахождение асимптотики интеграла  $\int_a^b f(t)e^{i\lambda S(t)} dt$  при  $\lambda \rightarrow \infty$ , где  $S(t), f(t)$  - гладкие вещественные функции. Частный случай  $S(t) = t^2/2$ ,  $a < 0 < b$ .
14. Метод стационарной фазы - нахождение асимптотики интеграла  $\int_a^b f(t)e^{i\lambda S(t)} dt$  при  $\lambda \rightarrow \infty$ , где  $S(t), f(t)$  - гладкие вещественные функции. Общий случай при условии, что  $S'(c) = 0$ ,  $S'(t) \neq 0$  для  $t \neq c$ ,  $S'(c) \neq 0$ ,  $a < c < b$ .
15. Метод стационарной фазы - нахождение асимптотики интеграла  $\int_a^b f(t)e^{i\lambda S(t)} dt$  при  $\lambda \rightarrow \infty$ , где  $S(t), f(t)$  - гладкие вещественные функции. Асимптотика при наличии конечного числа стационарных точек на интервале  $(a, b)$ .
16. Асимптотика функций Бесселя при больших значениях аргумента.
17. Метод перевала - нахождение асимптотики интеграла  $\int_L f(z)e^{\lambda h(z)} dz$  при  $\lambda \rightarrow \infty$ , где  $h(z)$  - аналитическая функция в области  $D$ , а  $L$  - кусочно гладкая кривая.
18. Асимптотика функции Эйри при больших значениях аргумента.
19. Асимптотика решения уравнения  $u''(t) + (1+q(t))u = 0$ , где  $q(t) \in C[A, \infty)$ ,  $q(t) = \sum_2^\infty q_k t^{-k}$  при  $t \rightarrow \infty$ .
- Лемма 1: Существование, единственность и формула решения уравнения  $u'' + u = f(t)$ , стремящегося к нулю при  $t \rightarrow \infty$ .
- Лемма 2: Существование и единственность решения уравнения  $u'' + (1+q(t))u = f(t)$ , стремящегося к нулю при  $t \rightarrow \infty$ .
- Лемма 3: построение формального асимптотического разложения вида  $u(t) = e^{\pm it} \sum_0^\infty c_k t^{-k}$  при  $t \rightarrow \infty$ , обоснование асимптотики.
20. Асимптотика решения уравнения  $u''(t) - (1+q(t))u = 0$ , где  $q(t) \in C[A, \infty)$ ,  $q(t) = \sum_2^\infty q_k t^{-k}$  при  $t \rightarrow \infty$ .
- Лемма 1: Существование, единственность и формула решения уравнения  $u'' - u = f(t)$ , экспоненциально стремящегося к нулю при  $t \rightarrow \infty$ .
- Лемма 2: Существование и единственность решения уравнения  $u'' + (1+q(t))u = f(t)$ , экспоненциально стремящегося к нулю при  $t \rightarrow \infty$ .
- Лемма 3: построение формального асимптотического разложения вида  $u(t) = e^{-t} \sum_0^\infty c_k t^{-k}$  при  $t \rightarrow \infty$ , обоснование асимптотики. Асимптотика экспоненциально растущего решения уравнения  $u'' - (1+q(t))u = 0$ , при  $t \rightarrow \infty$ .

21. Преобразования Лиувилля. Асимптотика решений других линейных дифференциальных уравнений второго порядка.

22. Краевая задача для дифференциального уравнения

$$\varepsilon u''(t) + a(t)u'(t) + c(t)u(t) = f(t) \text{ при } \varepsilon \ll 1.$$

1) Фредгольмовость краевой задачи.

2) Оценка решения при условии, что  $c(t) < 0$  для краевых условий

$$u(r_1) = A_1, \quad u(r_2) = A_2, \quad r_1 < r_2.$$

3) Оценка решения при условии, что  $c(t) < 0$  для краевых условий

$$u'(r_1) - h_1 u(r_1) = A_1, \quad u'(r_2) + h_2 u(r_2) = A_2.$$

4) Оценка решения при условии, что  $a(t) \neq 0$ .

5) Функции пограничного слоя. Формальное построение и обоснование асимптотики.

**Пример экзаменационного билета:**

1. Доказать теорему о единственности разложения функции по заданной калибровочной последовательности.

2. Найти асимптотическое представление интегралов Фурье при  $\lambda \rightarrow \infty$  :

$$\int_{0,5}^2 \sqrt{x} e^{i\lambda(-x^2+2x+1)} dx .$$

3. Установите, что для уравнения

$$tu'' + 4u' + tu = 0$$

существует решение, обладающее при  $t \rightarrow \infty$  асимптотикой  $u(t) \sim \frac{e^{-it}}{t^2}$  .

