Рабочая программа дисциплины (модуля)*

Дифференциальные уравнения

Направление подготовки (специальность)

01.03.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль)

Прикладная математика и искусственный интеллект

Присваиваемая квалификация (степень)

бакалавр

Форма обучения

очная

Год набора 2026

*Рабочая программа дисциплины (модуля) адаптирована для инклюзивного обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья

Челябинск 2026 г.

Содержание

1. ЦЕЛИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Цели преподавания дисциплины «Дифференциальные уравнения» состоит в

приобретении студентами теоретических знаний и практических умений и навыков по теории дифференциальных уравнений, использовании их для решения прикладных задач различных отраслей знания.

Основными задачами изучения дисциплины «Дифференциальные уравнения» является формирование у студентов навыков решения различных видов дифференциальных уравнений и систем, а также умения составления моделей, аналогий действительного мира в виде дифференциальных уравнений и затем умение применить изученные теории к выяснению вопросов существования решений, нахождения их.

Конкретные задачи изучения сводятся к следующему:

1. Изучение основных методов интегрирования различных дифференциальных уравнений первого порядка.

2 .Изучение методов решения линейных уравнений и систем с постоянными коэффициентами.

3. Изучение способов решения линейных уравнений с переменными коэффициентами и элементов качественной теории таких уравнений.

4. Изучение фундаментальных теорем существования и единственности для различных задач Коши.

5. Изучение основных методов решения уравнений, неразрешенных относительно производной, выделение особых решений.

6. Изучение основных типов уравнений, допускающих понижение порядка.

7 .Изучение способов нахождения производной решения по параметру и по начальным условиям, уяснение условий их существования.

8. Изучения понятий фазового пространства и фазовых траекторий. Применение и построение этих понятий для конкретных систем.

9. Изучение основных элементов теории устойчивости.

10. Изучение способов решения нелинейных систем и уравнений в частных производных первого порядка.

Результаты обучения по дисциплине направлены на достижение индикаторов, соответствующих компетенции ОПК-3:

ОПК-3.1. Имеет представление об известных математических моделях, применяемых для решения задач в области профессиональной деятельности

ОПК-3.2. Демонстрирует умения применять и модифицировать математические модели для решения прикладных задач

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОПОП

Цикл (раздел) ОПОП:	Б1.О.08

2.1 Требования к предварительной подготовке обучающегося:

Геометрия

Алгебра

Математический анализ

2.2 Дисциплины и практики, для которых освоение данной дисциплины (модуля) необходимо как предшествующее:

Учебная практика (научно-исследовательская работа (получение первичных навыков научно-исследовательской работы))

Асимптотические методы (научный   семинар)

Уравнения математической физики

Динамические модели экономических процессов

Производственная практика (научно-исследовательская работа)

Вариационное исчисление и оптимальное управление

Теоретическая механика

Численные методы

Эконометрическое моделирование
Выполнение и защита выпускной квалификационной работы

3. КОМПЕТЕНЦИИ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)
ОПК-3: Способен применять и модифицировать математические модели для решения задач в области профессиональной деятельности
Знать:
Для достижения ОПК-3.1.: знать известные математические модели, применяемые для решения задач в области теории дифференциальных уравнений.
Уметь:
Для достижения ОПК-3.2.: уметь применять математические модели для решения прикладных задач с использованием теории обыкновенных дифференциальных уравнений;
Владеть:
-

В результате освоения дисциплины обучающийся должен

3.1	**Знать:**
3.1.1	Знать простейшие типы дифференциальных уравнений, методы понижения порядка дифференциальных уравнений; основные формулы общего и частного решения линейных систем и уравнений с постоянными коэффициентами, определения и свойства матричной экспоненты; условия существования и единственности решения задачи Коши для нормальных систем дифференциальных уравнений и для уравнения n-го порядка в нормальном виде, характер зависимости решений от начальных условий; понятия особого решения; классификацию положений равновесия линейных автономных систем второго порядка; основные определения и положения теории устойчивости.
3.2	**Уметь:**
3.2.1	Уметь решать простейшие дифференциальные уравнения, применять методы понижения порядка; исследовать задачу Коши. Находить особые решения уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной; решать линейные уравнения и системы с постоянными коэффициентами, применять матричную экспоненту к решению систем линейных уравнений с постоянными коэффициентами; строить фазовые портреты линейных автономных систем второго порядка, находить производную по параметру и начальному условию, исследовать устойчивость решения системы дифференциальных уравнений.
3.3	**Владеть:**
3.3.1	Иметь опыт использования логического мышления, методов доказательств математических утверждений; иметь навыки решения и исследования дифференциальных уравнений и систем в математических и физических приложениях; владеть умением пользоваться необходимой литературой.

4. ОБЪЕМ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)	
Общая трудоемкость	**8 ЗЕТ**
Часов по учебному плану : 288 в том числе : аудиторные занятия : 136 самостоятельная работа : 73,4 часов на контроль : 72 контактная работа: 142,6 ИКР: 6,6	Виды контроля в семестрах: экзамены 3, 4

5. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Код занятия	Наименование разделов и тем /вид занятия/	Семестр / Курс	Часов	Литература
	Раздел 1. Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка, разрешенные относительно производной			

1.1	Общие понятия и определения /Лек/	3	2	Л1.2Л2.4 Л2.5 Л2.6Л3.1 Э1 Э2
1.2	Некоторые элементарные методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. /Лек/	3	2	Л1.2Л2.1 Л2.5 Л2.6Л3.1 Э1 Э2
1.3	Комплексные дифференциальные уравнения. Экспонента комплексного числа. /Лек/	3	2	Л1.2Л2.5 Л2.6
1.4	Уравнения с разделяющимися переменными. Задача Коши. /Пр/	3	2	Л1.1Л2.3 Л2.6 Э2
1.5	Однородные уравнения и сводящиеся к ним. Квазиоднородные уравнения. /Пр/	3	4	Л1.1Л2.3 Л2.6 Э2
1.6	Линейные уравнения 1-го порядка. Уравнения Бернулли. /Пр/	3	4	Л1.1Л2.3 Л2.6 Э2
1.7	Уравнения Риккати. Уравнения в полных дифференциалах. /Пр/	3	2	Л1.1Л2.3 Л2.6 Э2
1.8	Интегрирующий множитель. Метод выделений и замен. /Пр/	3	2	Л1.1Л2.3 Л2.6 Э2
1.9	Контрольная работа №1 по теме «Уравнения первого порядка, разрешенные относительно производной». /Пр/	3	2	
1.10	Выполнение домашнего задания к каждому практическому занятию. /Ср/	3	7	Л1.1 Л1.2Л2.3
1.11	Подготовка к контрольной работе №1. /Ср/	3	2	Л1.1 Л1.2Л2.3
	Раздел 2. Линейные уравнения и системы.			
2.1	Некоторые сведения о линейных дифференциальных уравнениях. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами (случай простых корней). /Лек/	3	2	Л1.2Л2.5 Л2.6Л3.1 Э1 Э2
2.2	Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами (случай кратных корней). /Лек/	3	2	Л1.2Л2.5 Л2.6Л3.1 Э1 Э2
2.3	Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами. Квазимногочлены. /Лек/	3	2	Л1.2Л2.5 Л2.6Л3.1 Э1 Э2
2.4	Нормальная линейная однородная система с постоянными коэффициентами. /Лек/	3	2	Л1.2Л2.5 Л2.6Л3.1 Э1 Э2
2.5	Показательная функция матрицы. /Лек/	3	2	Л1.2Л2.5 Л2.6Л3.1 Э1 Э2
2.6	Нормальная система линейных уравнений с переменными коэффициентами. /Лек/	3	4	Л1.2Л2.5 Л2.6Л3.1 Э1 Э2
2.7	Линейные уравнения n-го порядка с непрерывными коэффициентами. /Лек/	3	2	Л1.2Л2.5 Л2.6Л3.1 Э1 Э2
2.8	Теоремы о нулях решений линейных уравнений второго порядка. Краевые задачи для линейных уравнений второго порядка. /Лек/	3	4	Л1.2Л2.5 Л2.6Л3.1 Э1 Э2

2.9	Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами. Квазимногочлены. /Пр/	3	2	Л1.1Л2.6
2.10	Метод вариации постоянных. Задача Коши. Уравнения с комплексными коэффициентами. /Пр/	3	2	Л1.1Л2.6
2.11	Линейные однородные системы с постоянными коэффициентами. Случай действительных собственных значений. /Пр/	3	2	Л1.1Л2.6
2.12	Линейные однородные системы с постоянными коэффициентами: случай комплексных собственных значений. Линейные неоднородные системы с постоянными коэффициентами: квазимногочлены. /Пр/	3	2	Л1.1Л2.6
2.13	Линейные неоднородные системы с постоянными коэффициентами: метод вариации постоянных. Экспонента от матрицы. /Пр/	3	2	Л1.1Л2.6
2.14	Контрольная работа №2 по теме «Линейные уравнения и системы с постоянными коэффициентами». /Пр/	3	2	Л1.1
2.15	Линейная зависимость. Определитель Вронского. Составление линейных уравнений с непрерывными коэффициентами по фундаментальной системе решений. Теорема существования и единственности. /Пр/	3	2	Л1.1Л2.6
2.16	Решение линейных однородных уравнений с непрерывными коэффициентами. Поиск частного решения. Формула Лиувилля. /Пр/	3	2	Л1.1Л2.6 Э2
2.17	Метод вариации постоянных для неоднородных линейных уравнений. Элементы качественной теории линейных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами. /Пр/	3	2	Л1.1Л2.6
2.18	Выполнение домашнего задания к каждому практическому занятию. /Ср/	3	8	Л1.1 Л1.2
2.19	Подготовка к контрольной работе №2. /Ср/	3	2	Л1.1 Л1.2
	Раздел 3. Теоремы существования и единственности решения задач Коши.			
3.1	Теорема существования и единственности решения задачи Коши для нормальной системы линейных уравнений. /Лек/	3	2	Л1.2Л2.1 Л2.5 Л2.6Л3.1 Э1 Э2 Э3
3.2	Теорема существования и единственности решения задачи Коши для одного уравнения. Ломаные Эйлера. /Лек/	3	2	Л1.2Л2.1 Л2.5 Л2.6Л3.1 Э1 Э2
3.3	Теорема существования и единственности решения задачи Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений. /Лек/	3	4	Л1.2Л2.1 Л2.5 Л2.6Л3.1 Э1 Э2
3.4	Теоремы существования и единственности. /Пр/	4	3	Л1.1Л2.6Л3.1
3.5	Подготовка к тесту. /Ср/	3	2	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.3 Л2.5 Л2.6Л3.1 Э1 Э2 Э3 Э4
	Раздел 4. Уравнения, неразрешенные относительно производной.			
4.1	Уравнения, неразрешенные относительно производной. /Лек/	4	2	Л1.2Л2.6 Э1 Э2
4.2	Уравнения неразрешенные относительно производной. Особые решения. Метод введения параметра. Уравнения Лагранжа и Клеро. /Пр/	4	3	Л1.1Л2.2 Л2.3 Л2.6 Э2
	Раздел 5. Уравнения, допускающие понижение порядка.			

5.1	Уравнения, допускающие понижение порядка. /Лек/	4	2	Л1.2Л2.5 Л2.6Л3.1 Э1 Э2
5.2	Уравнения, допускающие понижение порядка. /Пр/	4	4	Л1.1Л2.2 Л2.3 Л2.6 Э2
5.3	Контрольная работа №3. /Пр/	4	2	
5.4	Выполнение домашнего задания к каждому практическому занятию. /Ср/	4	5	Л1.1 Л1.2Л2.2 Л2.3 Л2.5 Л2.6
5.5	Подготовка к контрольной работе №3 /Ср/	4	2	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.3 Л2.5 Л2.6 Э1 Э2 Э3 Э4
	Раздел 6. Непродолжаемые решения.			
6.1	Непродолжаемые решения. /Лек/	4	2	Л1.2Л2.5 Л2.6 Э1 Э2
	Раздел 7. Непрерывная зависимость решения от начальных условий и правой части уравнения.			
7.1	Непрерывная зависимость решения от начальных условий и правой части уравнения. /Лек/	4	2	Л1.2Л2.5 Л2.6Л3.1 Э1 Э2
7.2	Оценка точности приближенного решения. /Пр/	4	1	Л1.1
	Раздел 8. Дифференцируемость решения по параметру.			
8.1	Дифференцируемость решения по параметру, начальным значениям. Уравнения в вариациях по параметру и по начальному значению. Метод малого параметра. /Лек/	4	4	Л1.2Л2.5 Л2.6Л3.1 Э1 Э2
8.2	Производная решения по параметру. Производная решения по начальному условию. Метод малого параметра. /Пр/	4	3	Л1.1
	Раздел 9. Автономные системы дифференциальных уравнений и их фазовые пространства.			
9.1	Автономные системы дифференциальных уравнений и их фазовые пространства. Фазовые пространства. Фазовые траектории. /Лек/	4	3	Л1.2Л2.5 Л2.6Л3.1 Э1 Э2
9.2	Фазовая плоскость линейной однородной системы второго порядка с постоянными коэффициентами. /Лек/	4	3	Л1.2Л2.5 Л2.6Л3.1 Э1 Э2
9.3	Консервативные системы с одной степенью свободы. /Лек/	4	2	Л1.2Л2.4Л3.1 Э1 Э2
9.4	Фазовые портреты линейных систем. Положения равновесия нелинейных систем. /Пр/	4	4	Л1.1
9.5	Консервативные системы с одной степенью свободы. /Пр/	4	2	Л1.1
	Раздел 10. Первые интегралы.			
10.1	Первые интегралы. /Лек/	4	2	Л1.2Л2.5 Л2.6Л3.1 Э1 Э2 Э3
10.2	Первые интегралы. /Пр/	4	2	Л1.1
	Раздел 11. Теория устойчивости.			
11.1	Теория устойчивости. Основные понятия. /Лек/	4	2	Л1.2Л2.1 Л2.5 Л2.6Л3.1 Э1 Э2
11.2	Метод функций Ляпунова. /Лек/	4	2	Л1.2Л2.1 Л2.6Л3.1 Э1 Э2

11.3	Теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению. Предельные циклы. /Лек/	4	4	Л1.2Л2.1 Л2.6Л3.1 Э1 Э2
11.4	Устойчивость по Ляпунову, определение. Исследование на устойчивость по первому приближению. Функция Ляпунова. /Пр/	4	4	Л1.1
	Раздел 12. Уравнения в частных производных первого порядка.			
12.1	Уравнения в частных производных первого порядка. /Лек/	4	4	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.6Л3.1 Э1 Э2 Э3
12.2	Уравнения с частными производными первого порядка. /Пр/	4	4	Л1.1Л2.2Л3.1
12.3	Контрольная работа №4. /Пр/	4	2	Л3.1
12.4	Выполнение домашнего задания к каждому практическому занятию. /Ср/	4	10	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.6Л3.1 Э1 Э2 Э3 Э4
12.5	Подготовка к контрольной работе №4 /Ср/	4	2	Л1.1
12.6	Подготовка к тесту. /Ср/	4	2	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4 Л2.5 Л2.6 Э1 Э2 Э3 Э4
	Раздел 13. Иная контактная работа 3 семестр			
13.1	Индивидуальные консультации, текущий контроль /ИКР/	3	3,3	Л3.1
	Раздел 14. Экзамен 3 семестр			
14.1	Подготовка к экзамену. /Ср/	3	15,7	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.3 Л2.5 Л2.6Л3.1 Э1 Э2 Э3 Э4
	Раздел 15. Иная контактная работа 4 семестр			
15.1	Индивидуальные консультации, текущий контроль /ИКР/	4	3,3	Л3.1
	Раздел 16. Экзамен 4 семестр			
16.1	Подготовка к экзамену. /Ср/	4	15,7	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4 Л2.5 Л2.6Л3.1 Э1 Э2 Э3 Э4

6. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

6.1. Перечень видов оценочных средств

1. Контрольная работа №1
2. Проверка домашних заданий по разделу 1
3. Контроль-ная работа №2
4. Проверка домашних заданий по разделу 2, занятия 8-12
5. Проверка домашних заданий по разделу 2, занятия 14-16
6. Тест за 3 семестр
7. Проверка конспекта лекций за 3 семестр
8. Вопросы к экзамену за 3 семестр
9. Билеты для проведения экзамена в 3 семестре
10. Контрольная работа №3
11. Проверка домашних заданий по разделам 3-5
12. Контрольная работа №4
13. Проверка домашних заданий по разделам 7-9
14. Проверка домашних заданий по разделам 10-12
15.Тест за 4 семестр
16. Проверка конспекта лекций за 4 семестр

17. Вопросы к экзамену за 4 семестр
18. Билеты для проведения экзамена в 4 семестре
19. АПД

6.2. Типовые контрольные задания и иные материалы для текущей аттестации

Типовые контрольные задания по каждому мероприятию находятся в приложениях.
Тесты, также, находится в системе Moodle по адресу http://moodle.uio.csu.ru/course/view.php?id=1103

6.3. Типовые контрольные вопросы и задания для промежуточной аттестации

Вопросы к экзамену 3 семестр:
1. Определение дифференциального уравнения и решения дифференциального уравнения. Задача Коши и краевая задача.
2. Геометрическое истолкование дифференциального уравнения (векторное поле) и его решения (интегральная кривая).
3. Задача обратная решению дифференциального уравнения.
4. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель.
5. Линейные уравнения. Уравнения Бернулли.
6. Уравнения с разделяющимися переменными и однородные уравнения.
7. Комплексная функция. Нормальная система дифференциальных уравнений. Расщепление комплексной системы на систему действительных уравнений.
8. Теорема существования и единственности (формулировка). Теорема существования и единственности для уравнения n-го порядка (формулировка).
9. Экспонента комплексного числа, свойства.
10. Некоторые сведения о линейных дифференциальных уравнениях, свойства решений (с доказательством).
11. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами. Определение оператора L(p), его свойства. Доказательство формулы: L(p) e^λt=L(λ) e^λt.
12. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами (случай простых корней). Теорема о виде решения.
13. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами (случай простых корней). Действительное решение уравнения с действительными коэффициентами.
14. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами (случай кратных корней). Формула смещения. Предложение о семействе функций ω_0 (t),ω_1 (t),…,ω_(k-1) (t),ω_k (t) .
15. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами (случай кратных корней). Теорема о виде решения.
16. Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами. Вид решения. Определение квазимногочлена. Теорема о виде частного решения.
17. Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами. Свойство квазимногочленов.
18. Нормальная линейная однородная система с постоянными коэффициентами. Случай простых корней характеристического уравнения.
19. Нормальная линейная однородная система с постоянными коэффициентами. Общий случай.
20. Нормальная система линейных уравнений с переменными коэффициентами. Простейшие свойства решений однородной системы. Линейная зависимость системы решений.
21. Нормальная система линейных уравнений с переменными коэффициентами. Фундаментальная система решений. Её существование, выражение решения с помощью фундаментальной системы решений.
22. Нормальная система линейных уравнений с переменными коэффициентами. Детерминант Вронского. Соответствие между произвольной матрицей с ненулевым определителем и фундаментальной матрицей линейной системы.
23. Нормальная система линейных уравнений с переменными коэффициентами. Правило дифференцирования детерминанта. Формула Лиувилля.
24. Нормальная неоднородная система линейных уравнений с переменными коэффициентами. Вид решения. Метод вариации постоянных.
25. Линейные уравнения n-го порядка с переменными коэффициентами. Сведение к нормальной линейной системе. Эквивалентность решения уравнения и системы.
26. Линейные уравнения n-го порядка с переменными коэффициентами. Линейная независимость. Фундаментальная система решений. Её существование, выражение решения с помощью фундаментальной системы решений.
27. Линейные уравнения n-го порядка с переменными коэффициентами. Детерминант Вронского. Формула Лиувилля.
28. Линейные уравнения n-го порядка с переменными коэффициентами. Метод вариации постоянных.

29. Показательная функция матрицы. Ряд от матрицы.
30. Экспонента матрицы. Свойства и способы ее нахождения.
31. Экспонента диагональной и жордановой матрицы.
32. Линейные уравнения второго порядка. Приведение к виду без первой производной.
33. Понятия колеблющегося и неколеблющегося на интервале решения. Теорема о неколеблющемся решении.
34. Теорема Штурма и ее следствие.
35. Теорема сравнения и ее следствие.
36. Теорема Кнезера.
37. Понятие о краевых задачах. Теорема об альтернативе. Краевая задача для линейного уравнения второго порядка.
38. Функция Грина для краевой задачи и ее свойства. Теорема о существовании и способе построения функции Грина.
39. Выражение решения краевой задачи для линейного уравнения через функцию Грина. Примеры.
40. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для нормальной системы линейных уравнений. Формулировка теоремы существования и единственности решения задачи Коши для линейного уравнения n-го порядка.
41. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для одного уравнения. Ломаные Эйлера.
42. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений.

Примеры билетов в приложении

Вопросы к экзамену, 4 семестр:
1. Уравнения, неразрешенные относительно производной. Теорема существования и единственности, следствие.
2. Дискриминантная кривая, особое решение дифференциального уравнения, неразрешенного относительно производной.
3. Методы решения уравнений, неразрешенных относительно производной: разрешение относительно производной, метод введения параметра. Уравнения Клеро.
4. Уравнения, допускающие понижение порядка. Промежуточные интегралы. Уравнения, которые не содержат явно искомую функцию или независимую переменную.
5. Понижение порядка в однородных уравнениях. Приведение к полной производной.
6. Непродолжаемые решения. Предложение о существовании непродолжаемого решения.
7. Предложение о выходе непродолжаемого решения за границу ограниченного замкнутого множества, следствие для автономной системы. Пример.
8. Непрерывная зависимость решения от начальных условий и правой части уравнения. Теорема о непрерывной зависимости решения от правой части уравнения. Следствие о непрерывной зависимости решений от начальных условий.
9. Теорема о непрерывной зависимости решения от параметра.
10. Дифференцируемость решения по параметру. Теорема о дифференцируемости решения по параметру, система уравнений в вариациях. Следствие о дифференцируемости решения по начальным значениям, система уравнений в вариациях.
11. Теорема о дифференцируемости по параметру высоких порядков, следствие о разложении решения по степеням малого параметра.
12. Автономные системы дифференциальных уравнений и их фазовые пространства. Понятие автономной системы и нормальной автономной системы. Кинематическая интерпретация решения автономной системы. Сов-падение двух траекторий.
13. Положения равновесия и замкнутые кривые. Три вида траекторий автономной системы.
14. Фазовые пространства. Фазовые траектории. Критерий положения равновесия. Связь геометрической и кинематической интерпретаций решений нормальной системы.
15. Фазовая плоскость линейной однородной системы с постоянными коэффициентами. Невырожденный случай.
16. Фазовая плоскость линейной однородной системы с постоянными коэффициентами. Вырожденный случай.
17. Фазовая плоскость линейной однородной системы с постоянными коэффициентами. Существование нулевого собственного значения.
18. Первые интегралы. Критерий первого интеграла. Функциональная независимость первых интегралов в области, ее связь с линейной независимостью.
19. Теорема о существовании n независимых первых интегралов.
20. Теорема о получении решения с помощью первых интегралов. Теорема о выражении любого первого

интеграла через систему n независимых первых интегралов.
21. Первые интегралы автономных систем, теорема о существовании n-1 независимого первого интеграла, не содержащего t.
22. Устойчивость решения по Ляпунову, асимптотическая устойчивость по Ляпунову, связь этих понятий. Переход от исследования устойчивости произвольного решения к исследованию устойчивости нулевого решения.
23. Достаточное условие устойчивости для линейной однородной системы с постоянными коэффициентами.
24. Исследование устойчивости с помощью функций Ляпунова. Производная функции в силу системы уравнений. Теорема Ляпунова об устойчивости. Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости. Примеры.
25. Теорема Четаева о неустойчивости. Пример.
26. Теорема об устойчивости по первому приближению. Пример.
27. Уравнения с частными производными первого порядка. Линейное одно-родное уравнение, теорема о связи решения с первым интегралом системы дифференциальных уравнений. Лемма о первых интегралах системы меньшего порядка. Теорема об общем решении линейного уравнения.
28. Квазилинейное уравнение, понятие характеристики уравнения. Теорема о решении квазилинейного уравнения. Теорема о получении решения из первого интеграла. Теорема об общем решении квазилинейного уравнения (формулировка).
29. Задача Коши для квазилинейного уравнения, теорема о существовании единственного решения задачи Коши, геометрический смысл условия теоремы, пример.

Примеры билетов в приложении

6.4. Критерии оценивания

Проверка конспектов лекций производится в конце каждого семестра, оцениваются:
наличие в конспекте студента всех пройденных тем лекций - 5 баллов
полнота конспекта - 4 балла
аккуратность оформления - 1 балл

Контроль выполнения письменных домашних заданий проводится в начале каждого практического занятия, либо во время последующей контрольной работы:
15 баллов: решены без ошибок 91-100% домашних заданий;
14 баллов: решены без ошибок 85-90% домашних заданий;
13 баллов: решены без ошибок 79-84% домашних заданий;
12 баллов: решены без ошибок 72-78% домашних заданий;
11 баллов: решены без ошибок 66-71% домашних заданий;
10 баллов: решены без ошибок 61-65% домашних заданий;
9 баллов: решены без ошибок 56-60% домашних заданий;
8 баллов: решены без ошибок 51-55% домашних заданий;
7 баллов: решены без ошибок 43-50% домашних заданий;
6 баллов: решены без ошибок 36-42% домашних заданий;
5 баллов: решены без ошибок 30-35% домашних заданий;
4 балла: решены без ошибок 26-31% домашних заданий;
3 балла: решены без ошибок 21-25% домашних заданий;
2 балла: решены без ошибок 11-20% домашних заданий;
1 балл: решены без ошибок 5-10% домашних заданий;
0 баллов: решены без ошибок менее 5% домашних заданий либо решение задач отсутствует.

Контрольные работы. Каждая задача оценивается из максимума в 5 баллов:
5 баллов: решение полное и без вычислительных ошибок;
4 балла: решение записано не достаточно полно либо имеются незначительные вычислительные ошибки;
3 балла: в решении присутствуют серьезные недочеты либо решение изложено с пробелами в рассуждениях и вычислительными ошибками;
2 балла: приведены верные мысли, но решение изложено в общих чертах, не до конца, либо с вычислительными ошибками, повлекшими неправильный ход решения;
1 балл: приведены верные идеи на начальном этапе решения;
0 баллов; за полное отсутствие решения.
Если полученная сумма превышает 25 баллов, то превышение засчитывается, как бонусный балл.

Тест за 3 (4). Студент отвечает на тест, состоящий из 10 вопросов, правильный ответ на каждый вопрос оценивается в 1 балл. Время на прохождение тестирования - 30 минут. Студенту дается одна попытка для прохождения теста в LMS Moodle.

На каждом практическом занятий студент может получить 2 балла:
посещаемость - 1 балл;
работа у доски - 1 балл;
В противном случае баллы не начисляются. В конце семестра баллы за посещаемость переводятся пропорционально из максимума в 10 баллов, баллы за работу у доски переводятся пропорционально из максимума в 15 баллов.

Семестр 3(Указано максимальное количество баллов)
Проверка конспекта лекций: 10
Проверка домашних заданий по всем разделам: 15
Активная познавательная деятельность на практических занятиях: 25
Контрольная работа №1 (Уравнения первого порядка, разрешенные относительно производной): 25
Контрольная работа №2 (Линейные уравнения и системы с постоянными коэффициентами): 25
Тест за 3 семестр: 10
Итог 110
Экзамен 25

Семестр 4(Указано максимальное количество баллов)
Проверка конспекта лекций: 10
Проверка домашних заданий по всем разделам: 15
Активная познавательная деятельность на практических занятиях: 25
Контрольная работа №3 (Теоремы существования, уравнения неразрешенные относительно производной и уравнения, допускающие понижение порядка): 25
Контрольная работа №4 (Дифференцируемость по параметру, фазовые портреты, первые интегралы, уравнения в ЧП, устойчивость): 25
Тест за 4 семестр: 10
Итог 110
Экзамен 25

Порядок проведения экзамена:
Оценка за дисциплину формируется на основе полученных оценок за контрольно-рейтинговые мероприятия текущего контроля. Если студент не согласен с оценкой, полученной по результатам текущего контроля, студент проходит мероприятие промежуточной аттестации в виде выполнения письменной работы, включающей два теоретических вопроса и три задачи. На выполнение работы отводится 90 минут. Максимальное возможное количество баллов за работу составляет 25 баллов. Студент оформляет работу на отдельном листе и сдает преподавателю на проверку. В этом случае оценка за дисциплину рассчитывается на основе полученных оценок за контрольно-рейтинговые мероприятия текущего контроля и промежуточной аттестации. Фиксация результатов учебной деятельности по дисциплине проводится в день экзамена при личном присутствии студента.

Критерии оценивания экзамена:
Экзаменационный билет содержит 2 теоретических вопроса и 3 задачи. Экзаменационная работа оценивается в 25 баллов, при этом каждое задание оценивается в 5 баллов. Критерии оценивания теоретического вопроса:
5 баллов: Студент отлично знает материал, приводит точные и полные доказательства. Студент практически не допускает ошибок.
4 балла: Студент хорошо знает материал. Однако, допускает незначительные ошибки и неточности при доказательстве теорем.
3 балла: Студент знаком с материалом, знает определения и формулировки теорем. Студент допускает грубые фактические ошибки, при доказательстве теорем, либо не доводит доказательство до конца.
2 балла: Студент излагает материал с трудом, с грубыми фактическими ошибками.
1 балл: Студент не знает основных положений вопроса, не ориентируется в основных понятиях.
0 баллов: Студент отказывается от ответов на вопрос.
Критерии оценивания решения задачи. Оценивается из максимума в 5 баллов.
5 баллов: Задача решена верно.
4 балла: Задача решена с незначительными ошибками.
3 балла: Задание выполнено не менее, чем на 60 процентов.
2 балла: Ход решения верный, но решение содержит одну грубую ошибку.
1 балл: Задание начато, но не выполнено, допущены грубые ошибки.
0 баллов: Студент отказывается от решения задачи.

Итоговая оценка выставляется, исходя из набранной суммы баллов:
0-49 баллов – «неудовлетворительно»
50-69 баллов – «удовлетворительно»
70-90 баллов – «хорошо»
91 и более – «отлично».

7. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

7.1. Рекомендуемая литература

7.1.1. Основная литература

	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год	Ресурс
Л1.1	Филиппов А. Ф.	Сборник задач по дифференциальным уравнениям	Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, 2000	
Л1.2	Демидович Б. П., Моденов В. П.	Дифференциальные уравнения (https://e.lanbook.com/book/195426)	Санкт- Петербург : Лань, 2022	ЭБС

7.1.2. Дополнительная литература

	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год	Ресурс
Л2.1	Эльсгольц Л. Э.	Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление: учебник (https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=455165)	Москва : б.и., 1969	ЭБС
Л2.2	Камке Э., Розов Н. Х.	Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка: справочник (https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=468183)	Москва : Наука, 1966	ЭБС
Л2.3	Камке Э., Фомин С. В.	Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям	Санкт- Петербург : Лань, 2003	
Л2.4	Арнольд В. И.	Обыкновенные дифференциальные уравнения: учебное пособие для вузов	Москва : Наука, 1984	
Л2.5	Понтрягин Л. С.	Обыкновенные дифференциальные уравнения: учебник для государственных университетов	Москва : Наука, 1965	
Л2.6	Петровский И. Г., Мышкис А. Д., Олейник О. А.	Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений: учебник для университетов	Москва : Издательство МГУ, 1984	

7.1.3. Методические разработки

	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год	Ресурс
Л3.1	Алеева С. Р., Изместьев И. В., Ухоботов В. И.	Избранные главы теории дифференциальных уравнений с приложением к теории дифференциальных игр (https://library.csu.ru/rbooks2/view2? code=local/007942/007942)	Челябинск : Издательство Челябинского государственног о университета, [б. г.]	ЭБС

7.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет"

Э1	Лань [Электронный ресурс] : электронно-библиотечная система (ЭБС) / издательство Лань. – URL: http://e.lanbook.com/.
Э2	Университетская библиотека онлайн [Электронный ресурс] : электронно-библиотечная система (ЭБС) / ООО Директмедиа Паблишинг. – URL: http://biblioclub.ru/.
Э3	Znanium.com [Электронный ресурс] : электронно-библиотечная система (ЭБС) / Научно-издательский центр ИНФРА-М. – URL: http://znanium.com/.
Э4	Юрайт [Электронный ресурс] : электронно-библиотечная система (ЭБС) / издательство Юрайт. – URL: https://urait.ru

7.3 Перечень информационных технологий

7.3.1 Программное обеспечение

LMS Moodle

7.3.2 Профессиональные базы данных и информационно-справочные системы

1. Электронный каталог научной библиотеки ЧелГУ [Электронный ресурс] : база данных / Челяб. гос. ун-т. – Челябинск, 1992 .

2. eLIBRARY.RU : научная электронная библиотека : сайт. – Москва, 2000 – . – URL: https://elibrary.ru – Режим доступа: для зарегистрир. пользователей. – Текст : электронный.

8. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Для реализации дисциплины используются учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, практических занятий, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, а также помещения для самостоятельной работы.

Учебные аудитории укомплектованы специализированной мебелью (подразумевается наличие стандартных рабочих (посадочных) мест) и техническими средствами обучения (переносное и / или стационарное мультимедийное оборудование: экран, ноутбук, проектор).

Для проведения занятий лекционного типа предлагаются наборы демонстрационного оборудования и учебно- наглядных пособий (мультимедийные презентации по отдельным темам, рисунки, таблицы, схемы и т.д).

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с подключением к сети "Интернет" и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду университета.

9. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Изучение каждой темы следует начинать с проработки соответствующего теоретического материала в учебниках или использовать собственный конспект лекций данной дисциплины. Для усвоения теоретического материала также нужно разобрать предлагаемые в лекционном курсе примеры. Только затем следует закрепить разобранный материал изучаемой темы самостоятельным решением предлагаемых домашних заданий. Самостоятельная работа над задачами курса может, кроме основного источника, проводится, по другим задачникам. Не стоит пренебрегать и справочной литературой. Успешное написание промежуточных контрольных работ и теста возможно только при внимательном, всестороннем и качественном изучении тем практических занятий, предшествующих данной работе и объявленных преподавателем.
Необходимо тщательно и добросовестно изучить основную и дополнительную литературу, использовать электронные ресурсы. Активная и добросовестная, систематическая работа в течение семестра, проявление инициативы на лекционных и практических занятиях, постоянное выполнение домашних и контрольных работ являются необходимым условием достаточного овладения материалом учебной дисциплины и успешного прохождения промежуточной аттестации по дисциплине.
В случае применения при прохождении практики электронного обучения, дистанционных образовательных технологий общение обучающихся и преподавателя осуществляется в режиме реального времени (онлайн-лекции (вебинары), чаты, видео-конференции и др.) или отложенного времени (система дистанционного обучения Moodle, форумы, электронная почта и др.). Большую часть времени обучающиеся самостоятельно работают с учебно- методическими материалами. Студенты имеют возможность консультироваться с преподавателем по всем вопросам, возникающим в ходе самостоятельной работы посредством электронной почты, мессенджеров, социальных сетей и т.п. Доступ обучающегося к учебным ресурсам в режиме отложенного времени, самостоятельной работы осуществляется через сеть Интернет в удобном для него месте, времени и темпе. При обучении инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья электронное обучение, дистанционные образовательные технологии предусматривают возможность приема-передачи информации в доступных для них формах.
Реализация дисциплины с применением электронного обучения, дистанционных образовательных технологий (далее – ЭО, ДОТ) осуществляется на основании «Положения о реализации основных и дополнительных образовательных программ с применением электронного обучения и дистанционных образовательных технологий в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Челябинский государственный университет», «Положения о порядке зачета обучающимися по основным профессиональным образовательным программам высшего образования в ФГБОУ ВО «ЧелГУ» результатов освоения в организациях, осуществляющих образовательную деятельность, учебных предметов, курсов, дисциплин (модулей), практик, дополнительных образовательных программ» посредством электронной информационно-образовательной среды ФГБОУ ВО «ЧелГУ». В исключительных случаях (форс-мажор и т.п.) при реализации образовательной деятельности с применением ЭО, ДОТ могут применять компоненты, не входящие в перечень электронной информационно-образовательной среды.

10. СПЕЦИАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ ОБУЧАЮЩИМИСЯ С ИНВАЛИДНОСТЬЮ И ОГРАНИЧЕННЫМИ ВОЗМОЖНОСТЯМИ ЗДОРОВЬЯ

Освоение дисциплины инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья осуществляется с использованием специальных технических средств и информационных технологий, предоставляемых Ресурсным учебно-методическим центром по обучению инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья ЧелГУ по запросу обучающегося (мобильные специальные технические средства для лиц с нарушениями зрения и с нарушением слуха, ассистивные информационные технологии).

При необходимости для обучающихся с нарушениями зрения на рабочих местах для проведения практических или лабораторных занятий устанавливается специальное программное обеспечение (программа речевой навигации, речевые синтезаторы, экранные лупы).

В учебные аудитории обеспечивается беспрепятственный доступ для обучающихся с инвалидностью и с ограниченными возможностями здоровья. В каждой аудитории, где обучаются инвалиды и лица с ограниченными возможностями здоровья, предусматривается соответствующее количество мест для обучающихся с учетом нарушений их здоровья.

Для освоения дисциплины инвалидам и лицам с ограниченными возможностями здоровья предоставляется доступ к печатным источникам, имеющимся в научной библиотеке ЧелГУ, с помощью специальных технических средств; доступ с помощью специальных технических и программных средств к электронным источникам, представленным в форме электронного документа в фонде научной библиотеки ЧелГУ или электронно-библиотечных системах.

Учебно-методические материалы для обучающихся из числа инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья предоставляются в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и особенностям восприятия информации.

Для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья освоение дисциплины может быть частично или полностью осуществлено с использованием дистанционных образовательных технологий.

При проведении промежуточной аттестации по дисциплине обучающимся с инвалидностью и с ограниченными возможностями здоровья обеспечивается по их заявлению предоставление в доступной форме в зависимости от их индивидуальных особенностей инструкции о порядке проведения промежуточной аттестации, оценочных средств и возможности ответов на задания (письменно на бумаге, набор ответов на компьютере, письменно шрифтом Брайля, с использованием услуг ассистента, устно).

При проведении процедуры оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья предусматривается использование предоставленных ЧелГУ или собственных технических средств, необходимых им в связи с их индивидуальными особенностями. При необходимости инвалидам и лицам с ограниченными возможностями здоровья предоставляется дополнительное время для подготовки ответа на задания, процедура оценивания результатов обучения по дисциплине может проводиться в несколько этапов.

Примерный перечень домашних заданий из [Филиппов, А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям [Текст] / А. Ф. Филиппов. — Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, 2000. — 176 с.] по темам и занятиям

№ занятия	№ раздела	Наименование или краткое содержание практического занятия, семинара и № ДЗ	Кол-во часов
1	1	Уравнения с разделяющимися переменными. Задача Коши. №: 52,53,57,63,65	2
2-3	1	Однородные уравнения и сводящиеся к ним. Квазиоднородные уравнения. №: 102,107,109,115,122,123,125,128	3
3-4	1	Линейные уравнения 1-го порядка. Уравнения Бернулли. №: 138,149,166,153,156,159	3
5	1	Уравнения Риккати. Уравнения в полных дифференциалах. №: 169,171,191,194,195	2
6	1	Интегрирующий множитель. Метод выделений и замен. №: 197,208,210,211,213,215,219	2

Контрольная работа № 1
Вариант 1

1. $y' = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}, \quad y(1) = 1.$
2. $y' = 2\left(\frac{y+2}{x+y-1}\right)^2.$
3. $(x+y)y' = 1, \quad y(-1) = 0.$
4. $xy' + y = \ln x + 1.$
5. $(x^2 - 3y^2)dx + 2xydy = 0.$
6. $xyy' - x^2\sqrt{y^2+1} = (x+1)(y^2+1).$

Контрольная работа № 1
Вариант 2

1. $xy' = y\cos\ln\frac{y}{x}, \quad y(1) = 1.$
2. $4y' + \frac{y}{x} = \frac{e^{-x}}{xy^3}.$
3. $y' + y\cos x = \sin 2x.$
4. $2xyy' = 3\sqrt{x^6 - y^4} + 3y^2, \quad y(1) = 0.$
5. $dx + (e^y - x)dy = 0.$
6. $y' = \sqrt{100x + 2 + y} - 100.$

Контрольная работа № 1
Вариант 3

1. $y' = \frac{2-4y-6x}{x-y-2}.$
2. $(y + \sqrt{xy})dx = xdy, \quad y(1) = 0.$
3. $xy' + 2y = e^{-x^2}.$
4. $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y.$
5. $\frac{y}{x}dx + (y^3 + \ln x)dy = 0.$
6. $y^2dx + (xy-1)dy = 0, \quad y\left(\frac{1}{e}\right) = e.$

Контрольная работа № 1
Вариант 4

1. $xy' = y + x\cos^2\frac{y}{x}.$
2. $2x^2yy' = y^4 - y^2x, \quad y(-1) = 1.$
3. $(2x+1)y' + y = x.$
4. $x^2ydx + x^3dy = dx.$
5. $y'x\ln x + 2y = \sqrt{16y}\ln x.$
6. $y' = \operatorname{tg}^2(2x+y) - 2, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.$

Контрольная работа № 1
Вариант 5

1. $xy' = y + \sqrt{x^2+y^2}, \quad y(1) = 1.$
2. $3x^2y^2y' = y^3(x + y^3).$
3. $xy' + y(x\operatorname{tg}x + 1) = \sec x.$
4. $y' - xy = -y^3e^{-x^2}.$
5. $y\cos x\,dx + \sin x\,dy = \cos 2x\,dx, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$
6. $y' = (3x - y + 2)^2 - 1.$

Контрольная работа № 1
Вариант 6

1. $x^2y' = y(x+y).$
2. $(1 - x^2y)dx + x^2(y-x)dy = 0.$
3. $y'x\ln x + y = 2\ln x.$
4. $(1-x^2)y' - xy = xy^2, \quad y(0) = 0,5.$
5. $y' = \frac{y+12}{x-11} - \frac{x-11}{y+12}, \quad y(12) = -11.$
6. $y' - y\operatorname{tg}x + y^2\cos x = 0.$

Контрольная работа № 1
Вариант 7

1. $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y, \quad y(1) = 0.$
2. $4xy^3y'\cos\frac{y^4}{x} = y^4\cos\frac{y^4}{x} - x.$
3. $t^2\frac{ds}{dt} = 2ts - 3, \quad s(-1) = 1.$
4. $xyy' - y^2 = 1.$
5. $(\sin x + e^y)dx + \cos x\,dy = 0.$
6. $y' = \sin^2(y - x).$

Контрольная работа № 1
Вариант 8

1. $y - xy' = 2(x + yy').$
2. $y' = \left(\frac{x+y+2}{4+2x}\right)^2.$
3. $\sin t\,ds = \left(4t\sin^2\frac{t}{2} + s\right)dt.$
4. $3y^2y' + y^3 = x + 1, \quad y(1) = -1.$
5. $(1 + 3x^2\sin y)dx - x\operatorname{ctg}y\,dy = 0.$
6. $xy' - 4y - x^2\sqrt{y} = 0.$

Контрольная работа № 1

Вариант 9

1. $y' = \dfrac{(y-1)(y-x)}{(x-1)^2}, \quad y(0) = 2.$
2. $xy' + 2\sqrt{xy} = y, \quad y(1) = 0.$
3. $y' - 8x\sqrt{y} = \dfrac{4xy}{x^2-1}.$
4. $xy' + x^2 + xy - y = 0.$
5. $x\,dx + (x^2 \operatorname{ctg} y - 3\cos y)dy = 0.$
6. $y' = (y - 4x + 3)^2.$

Контрольная работа № 1

Вариант 10

1. $xy' = \dfrac{3y^3 + 4yx^2}{2x^2 + 2y^2}.$
2. $(x - 2y - 8)dy + (3y - 2x + 11)dx = 0.$
3. $y' - \dfrac{y}{x} = x^2, \quad y(1) = 0.$
4. $yy' + y^2 \operatorname{ctg} x - \cos x = 0.$
5. $y\,dx - (x - y^3)dy = 0.$
6. $y' - 3 = \operatorname{tg}^2(2x - y).$

Контрольная работа № 1

Вариант 11

1. $xy' + y \ln \dfrac{y}{x} = 0, \quad y(1) = 1.$
2. $(y+2)dx = (2x + y - 4)dy, \quad y(4) = 2.$
3. $y' + y \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x.$
4. $y' - 9x^2 y - (x^5 - x^2)y^{2/3} = 0.$
5. $(x+y)(1 - xy)dx + (x + 2y)dy = 0.$
6. $2y\,dx + (y^2 - 6x)dy = 0.$

Контрольная работа № 1

Вариант 12

1. $xy' = y\left(1 + \ln \dfrac{y}{x}\right), \quad y(1) = \dfrac{1}{\sqrt{e}}.$
2. $4xy^3 y' = y^4 + \sqrt{x^2 + y^8}.$
3. $x(x-1)y' + 2xy = 1.$
4. $y' + xy = -xy^3.$
5. $y^2 y' = (3x + y^3 - 1)^2.$
6. $(1 + x\sqrt{x^2 + y^2}) + (-1 + \sqrt{x^2 + y^2})yy' = 0.$

Контрольная работа № 1

Вариант 13

1. $xy + y^2 = (2x^2 + xy)y'.$
2. $5xy^4 y' = \sqrt{x^2 - y^{10}} + y^5, \quad y(1) = 0.$
3. $y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{e^{-x}}{x}.$
4. $y' + 4x^3 y = 4(1 + x^3)e^{-4x}y^2, \quad y(0) = 1.$
5. $(x^2 - y)dx + x\,dy = 0.$
6. $y' \cos^2(y - x) = 1.$

Контрольная работа № 1

Вариант 14

1. $x^2 y' - y^2 = 2(yx - x^2).$
2. $(2x + y + 5)y' = 3x + 6, \quad y(0) = 1.$
3. $3xy' + \dfrac{x^2}{y^2} + xy - y = 0.$
4. $y' + y \operatorname{tg} x = \sin x.$
5. $y^2 x dy - y^3 dx = x^2 dy.$
6. $(x \cos y - y \sin y)y' + (x \sin y + y \cos y) = 0.$

Контрольная работа № 1

Вариант 15

1. $xy' = \dfrac{3y^3 + 2yx^2}{x^2 + 2y^2}.$
2. $2y + (x^2 y + 1)xy' = 0, \quad y(1) = 1.$
3. $y' = y \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x.$
4. $y + xy' = 2y^2 \ln x, \quad y(1) = 0,5.$
5. $\left(3 + 2\dfrac{y}{x^2}\right)dx + \left(\dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{x^2}\right)dy = 0.$
6. $y' = \sqrt{2x - y + 3} + 2.$

Контрольная работа № 1

Вариант 16

1. $xy' = y\left(\ln y + \ln \dfrac{e}{x}\right), \quad y(1) = \dfrac{1}{\sqrt{e}}.$
2. $yy' = 4x + 3y - 2, \quad y(0) = 2.$
3. $t^2\,ds + 2ts\,dt = e^t dt.$
4. $xy' = 2\sqrt{y}\cos x - 2y.$
5. $\left(2xy + x^2 y + \dfrac{y^3}{3}\right)dx + (x^2 + y^2)dy = 0.$
6. $(2x - y^2)y' = 1.$

Примерный перечень домашних заданий из [Филиппов, А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям [Текст] / А. Ф. Филиппов. — Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, 2000. — 176 с.] по темам и занятиям

№ занятия	№ раздела	Наименование или краткое содержание практического занятия, семинара и № ДЗ	Кол-во часов
8	2	Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами. Квазимногочлены. №: 512,518,531,537,541,546,585	2
9	2	Метод вариации постоянных. Задача Коши. Уравнения с комплексными коэффициентами. №: 577,579,580,585,603,605	2
10	2	Линейные однородные системы с постоянными коэффициентами. Случай действительных собственных значений. №: 799,800,795,806,810	2
11	2	Линейные однородные системы с постоянными коэффициентами: случай комплексных собственных значений. Линейные неоднородные системы с постоянными коэффициентами: квазимногочлены. №: 790,802,832,838,845	2
12	2	Линейные неоднородные системы с постоянными коэффициентами: метод вариации постоянных. Экспонента от матрицы. №: 848,849,853,869,870,871,875	2

Контрольная работа № 2

Вариант 1

1. Построить линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами (возможно более низкого порядка), имеющее данные частные решения: $y_1 = xe^x, \quad y_2 = xe^{-x}$.
2. Решить линейное неоднородное уравнение с неоднородностью в виде квазимногочлена:
$$y'' + 5y' + 6y = e^{-x} + e^{-2x}.$$
3. Решить линейное неоднородное уравнение, используя метод вариации постоянной:
$$y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x.$$
4. Решить линейную однородную систему $\dot{x} = A\,x$:
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{1,2,3} = 2.$$
5. Найти экспоненту от матрицы $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Контрольная работа № 2

Вариант 2

1. Построить линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами (возможно более низкого порядка), имеющее данные частные решения: $y_1 = xe^x \cos 2x, \quad y_2 = e^x \sin 2x$.
2. Решить линейное неоднородное уравнение с неоднородностью в виде квазимногочлена:
$$y''' + 2y'' - 3y' = (8x + 6)e^x.$$
3. Решить линейное неоднородное уравнение, используя метод вариации постоянной:
$$y'' + 4y = \frac{1}{\sin^2 x}.$$
4. Решить линейную однородную систему $\dot{x} = A\,x$:
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{1,2,3} = -1.$$
5. Найти экспоненту от матрицы $\quad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Контрольная работа № 2

Вариант 3

1. Построить линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами (возможно более низкого порядка), имеющее данные частные решения: $y_1 = x^2 e^x, \quad y_2 = xe^x$.
2. Решить линейное неоднородное уравнение с неоднородностью в виде квазимногочлена:
$$y^{IV} - 81y = 27e^{-3x}.$$
3. Решить линейное неоднородное уравнение, используя метод вариации постоянной:
$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{\sqrt{4 - x^2}}.$$
4. Решить линейную однородную систему $\dot{x} = A\,x$:
$$A = \begin{pmatrix} 9 & -6 & -2 \\ 18 & -12 & -3 \\ 18 & -9 & -6 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{1,2,3} = -3.$$
5. Найти экспоненту от матрицы $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Контрольная работа № 2

Вариант 4

1. Построить линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами (возможно более низкого порядка), имеющее данные частные решения: $y_1 = x^2 \cos 4x, \quad y_2 = 1$.
2. Решить линейное неоднородное уравнение с неоднородностью в виде квазимногочлена:
$$y'' - 5y' + 6y = 13 \sin 3x.$$
3. Решить линейное неоднородное уравнение, используя метод вариации постоянной:
$$y'' - 3y' + 2y = \frac{e^{3x}}{1 + e^{2x}}.$$
4. Решить линейную однородную систему $\dot{x} = A\,x$:
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -15 \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{1,2,3} = 1.$$
5. Найти экспоненту от матрицы $\quad A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Контрольная работа № 2

Вариант 5

1. Построить линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами (возможно более низкого порядка), имеющее данные частные решения: $y_1 = e^{3x}, \quad y_2 = \sin(-5x)$.
2. Решить линейное неоднородное уравнение с неоднородностью в виде квазимногочлена:
$$y''' + 6y'' + 9y' = (16x + 24)e^x.$$
3. Решить линейное неоднородное уравнение, используя метод вариации постоянной:
$$y'' + 4y = \frac{1}{\sin 2x}.$$
4. Решить линейную однородную систему $\dot{x} = A\,x$:
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{1,2,3} = -2.$$
5. Найти экспоненту от матрицы $\quad A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Контрольная работа № 2

Вариант 6

1. Построить линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами (возможно более низкого порядка), имеющее данные частные решения: $y_1 = x^2, \quad y_2 = e^{-7x}$.
2. Решить линейное неоднородное уравнение с неоднородностью в виде квазимногочлена:
$$y'' + y' + 2,5y = 25\cos 2x.$$
3. Решить линейное неоднородное уравнение, используя метод вариации постоянной:
$$y'' - 9y' + 18y = \frac{6e^{3x}}{1 + e^{3x}}.$$
4. Решить линейную однородную систему $\dot{x} = A\,x$:
$$A = \begin{pmatrix} 12 & -6 & -2 \\ 18 & -9 & -3 \\ 18 & -9 & -3 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{1,2,3} = 0.$$
5. Найти экспоненту от матрицы $\quad A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Контрольная работа № 2

Вариант 7

1. Построить линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами (возможно более низкого порядка), имеющее данные частные решения: $y_1 = x\sin 4x, \quad y_2 = e^x$.
2. Решить линейное неоднородное уравнение с неоднородностью в виде квазимногочлена:
$$4y'' - y = x^3 - 24x.$$
3. Решить линейное неоднородное уравнение, используя метод вариации постоянной:
$$y'' + \pi^2 y = \frac{\pi^2}{\sin \pi x}.$$
4. Решить линейную однородную систему $\dot{x} = A\,x$:
$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = 1,\ \lambda_{2,3} = 0.$$
5. Найти экспоненту от матрицы $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Контрольная работа № 2

Вариант 8

1. Построить линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами (возможно более низкого порядка), имеющее данные частные решения: $y_1 = \operatorname{sh} x, \quad y_2 = \operatorname{ch} x$.
2. Решить линейное неоднородное уравнение с неоднородностью в виде квазимногочлена:
$$y''' - 4y'' + 3y' = 4(1 - x)e^{-x}.$$
3. Решить линейное неоднородное уравнение, используя метод вариации постоянной:
$$y'' - 4y' + 5y = \frac{e^{2x}}{\cos x}.$$
4. Решить линейную однородную систему $\dot{x} = A\,x$:
$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3.$$
5. Найти экспоненту от матрицы $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Контрольная работа № 2

Вариант 9

1. Построить линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами (возможно более низкого порядка), имеющее данные частные решения: $y_1 = x^2 - 4, \quad y_2 = e^x$.
2. Решить линейное неоднородное уравнение с неоднородностью в виде квазимногочлена:
$$y'' + 2y' + 2y = 2x^3 - 2.$$
3. Решить линейное неоднородное уравнение, используя метод вариации постоянной:
$$y'' - 2y' + y = e^x x^{-2}.$$
4. Решить линейную однородную систему $\dot{x} = A\,x$:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{1,2,3} = 1.$$
5. Найти экспоненту от матрицы $\quad A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -2 & 11 \end{pmatrix}$.

Контрольная работа № 2

Вариант 10

1. Построить линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами (возможно более низкого порядка), имеющее данные частные решения: $y_1 = -\cos 3x, \quad y_2 = 2x^2$.
2. Решить линейное неоднородное уравнение с неоднородностью в виде квазимногочлена:
$$y'' + 2y' + y = e^x + 1.$$
3. Решить линейное неоднородное уравнение, используя метод вариации постоянной:
$$y'' + y = \operatorname{tg} x.$$
4. Решить линейную однородную систему $\dot{x} = A\,x$:
$$A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = -1,\ \lambda_{2,3} = 1.$$
5. Найти экспоненту от матрицы $\quad A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Контрольная работа № 2

Вариант 11

1. Построить линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами (возможно более низкого порядка), имеющее данные частные решения: $y_1 = \operatorname{sh} x, \quad y_2 = e^{2x}$.
2. Решить линейное неоднородное уравнение с неоднородностью в виде квазимногочлена:
$$y''' - 4y'' + 4y' = (x-1)e^x.$$
3. Решить линейное неоднородное уравнение, используя метод вариации постоянной:
$$y'' + y' = \frac{1}{1 + e^x}.$$
4. Решить линейную однородную систему $\dot{x} = A\,x$:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = 3,\ \lambda_{2,3} = -1.$$
5. Найти экспоненту от матрицы $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Контрольная работа № 2

Вариант 12

1. Построить линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами (возможно более низкого порядка), имеющее данные частные решения: $y_1 = x - 2, \quad y_2 = e^{-2x}$.
2. Решить линейное неоднородное уравнение с неоднородностью в виде квазимногочлена:
$$y^{IV} + 5y'' + 4y = 3\sin x.$$
3. Решить линейное неоднородное уравнение, используя метод вариации постоянной:
$$y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x^3}.$$
4. Решить линейную однородную систему $\dot{x} = A\,x$:
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{1,2,3} = -1.$$
5. Найти экспоненту от матрицы $\quad A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -20 & 6 \end{pmatrix}$.

Контрольная работа № 2

Вариант 13

1. Построить линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами (возможно более низкого порядка), имеющее данные частные решения: $y_1 = 3\cos 2x, \quad y_2 = e^{-x}$.
2. Решить линейное неоднородное уравнение с неоднородностью в виде квазимногочлена:
$$y''' - 3y' - 2y = \sin x + 2\cos x.$$
3. Решить линейное неоднородное уравнение, используя метод вариации постоянной:
$$y'' + \pi^2 y = \frac{\pi^2}{\cos \pi x}.$$
4. Решить линейную однородную систему $\dot{x} = A\,x$:
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 2 & 1 & -3 \\ -6 & -3 & 9 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = 14,\ \lambda_{2,3} = 0.$$
5. Найти экспоненту от матрицы $\quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Контрольная работа № 2

Вариант 14

1. Построить линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами (возможно более низкого порядка), имеющее данные частные решения: $y_1 = e^{3x} + 1, \quad y_2 = 2x$.
2. Решить линейное неоднородное уравнение с неоднородностью в виде квазимногочлена:
$$y''' - 3y' + 2y = -4xe^{x}.$$
3. Решить линейное неоднородное уравнение, используя метод вариации постоянной:
$$y'' + 3y' = \frac{9e^{3x}}{1 + e^{3x}}.$$
4. Решить линейную однородную систему $\dot{x} = A\,x$:
$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = 1,\ \lambda_{2,3} = 0.$$
5. Найти экспоненту от матрицы $\quad A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

Контрольная работа № 2

Вариант 15

1. Построить линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами (возможно более низкого порядка), имеющее данные частные решения: $y_1 = \operatorname{ch} 3x, \quad y_2 = e^{-x}$.
2. Решить линейное неоднородное уравнение с неоднородностью в виде квазимногочлена:
$$y'' - 4y' + 8y = e^{2x} + \sin 2x.$$
3. Решить линейное неоднородное уравнение, используя метод вариации постоянной:
$$y'' + 4y = 8\operatorname{ctg} 2x.$$
4. Решить линейную однородную систему $\dot{x} = A\,x$:
$$A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = -1,\ \lambda_{2,3} = 1.$$
5. Найти экспоненту от матрицы $\quad A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$.

Контрольная работа № 2

Вариант 16

1. Построить линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами (возможно более низкого порядка), имеющее данные частные решения: $y_1 = 3, \quad y_2 = 2x\cos 8x$.
2. Решить линейное неоднородное уравнение с неоднородностью в виде квазимногочлена:
$$y'' + 3y' - 4y = e^{-4x} + xe^{-x}.$$
3. Решить линейное неоднородное уравнение, используя метод вариации постоянной:
$$y'' - 6y' + 8y = \frac{4}{1 + e^{-2x}}.$$
4. Решить линейную однородную систему $\dot{x} = A\,x$:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = 3,\ \lambda_{2,3} = -1.$$
5. Найти экспоненту от матрицы $\quad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Примерный перечень домашних заданий из [Филиппов, А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям [Текст] / А. Ф. Филиппов. — Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, 2000. — 176 с.] по темам и занятиям

№ занятия	№ раздела	Наименование или краткое содержание практического занятия, семинара и № ДЗ	Кол-во часов
14	2	Линейная зависимость. Определитель Вронского. Составление линейных уравнений с непрерывными коэффициентами по фундаментальной системе решений. Теорема существования и единственности. №:644,645,649,650,653,668,673,676,678	2
15	2	Решение линейных однородных уравнений с непрерывными коэффициентами. Поиск частного решения. Формула Лиувилля. №: 683 ,690,696,701,705	2
16	2	Метод вариации постоянных для неоднородных линейных уравнений. Элементы качественной теории линейных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами. № 703,707,712,718,722,727,730,732	2

Тест 3 семестр (Вариант 1)

Правильные ответы:

№ вопроса	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
Правильный ответ	**2,3**	**3**	**2**	**4**	**3**	**1**	**3**	**4**	**1**	**2**

Дисциплина: **Дифференциальные уравнения**
Время выполнения теста: **30** минут
Количество заданий: **10**
Студент(ка)____(Фамилия, Имя)

_______________(группа №)

ЗАДАНИЕ N 1 ***(выберите несколько вариантов ответа)***

Среди записанных ниже дифференциальных уравнений уравнениями первого порядка **не являются** …

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1) $(x+y^2)dy+(2xy+x^2)dx=0$

2) $y''+2y'-3y=\sin x$

3) $y'+2xy'''=3y$

4) $y'^3+2xy=y^2$

ЗАДАНИЕ N 2 ***(выберите один вариант ответа)***

Общее решение дифференциального уравнения $y'(1+x^2)=xy$ может быть записано в виде …

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1) $y=C\cdot(1+x^2)$

2) $y^2=C\cdot\sqrt{1+x^2}$

3) $y^2=C\cdot(1+x^2)$

4) $y^2\cdot(1+x^2)=C$

ЗАДАНИЕ N 3 ***(выберите один вариант ответа)***

С помощью замены неизвестной функции $y(x) = x \cdot z(x)$ однородное уравнение $(x + 2y)dx = xdy$ сводится к следующему уравнению с разделяющимися переменными …

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1) $(1+2z)dx = xdz$

2) $(1+z)dx = xdz$

3) $(1+z)dx = dz$

4) $(1+x)dx = zdz$

ЗАДАНИЕ N 4 ***(выберите один вариант ответа)***

Применяя метод вариации постоянной, общее решение линейного уравнения $y' = y\cos x + \sin x$ следует искать в виде …

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1) $y = C(x) \cdot \cos x$

2) $y = C(x) \cdot e^{-\sin x}$

3) $y = C(x) \cdot e^{\cos x}$

4) $y = C(x) \cdot e^{\sin x}$

ЗАДАНИЕ N 5 ***(выберите один вариант ответа)***

Задача Коши для уравнения четвертого порядка $y^{(IV)}(x) - y(x) = 0$ может быть поставлена заданием …

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1) $y(0) = y_0$

2) $y'(0) = y_1, y''(0) = y_2, y'''(0) = y_3$

3) $y(0) = y_0, y'(0) = y_1, y''(0) = y_2, y'''(0) = y_3$

4) $y(0) = y_0, y'(0) = y_1, y''(1) = y_2, y'''(1) = y_3$

ЗАДАНИЕ N 6 ***(выберите один вариант ответа)***

Модуль определителя Вронского системы вектор-функций

$$\Psi_1(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos 2t \\ -2e^t \sin 2t \end{pmatrix},\ \Psi_2(t) = \begin{pmatrix} -e^t \cos 2t \\ 2e^t \sin 2t \end{pmatrix}$$ равен …

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1) $|\det W(t)| = 0$

2) $|\det W(t)| = 2e^t \cdot |\sin 2t \cos 2t|$

3) $|\det W(t)| = 2e^{2t}$

4) $|\det W(t)| = 2e^{2t} \cdot |\sin t \cos t|$

ЗАДАНИЕ N 7 ***(выберите один вариант ответа)***

Частное решение линейной неоднородной системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2y - te^{-t} \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x \end{cases}$$

следует искать в виде …

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1) $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}_ч = e^{-t} \cdot \begin{pmatrix} at^2 \\ bt^2 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}_ч = e^{-t} \cdot \begin{pmatrix} at + b \\ 0 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}_ч = e^{-t} \cdot \begin{pmatrix} at + b \\ ct + d \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}_ч = e^{-t} \cdot \begin{pmatrix} at \\ bt \end{pmatrix}$

ЗАДАНИЕ N 8 ***(выберите один вариант ответа)***

Модуль определителя Вронского системы функций $\{e^x, \operatorname{ch} x\}$ равен …

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1) $|\det W(t)| = 0$

2) $|\det W(t)| = e^x$

3) $|\det W(t)| = \operatorname{ch} x$

4) $|\det W(t)| = 1$

ЗАДАНИЕ N 9 ***(выберите один вариант ответа)***

Характеристический многочлен $L(p)$, соответствующий однородному дифференциальному уравнению $y''' + y'' + y' = 0$, имеет вид …

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1) $L(p) = p^3 + p^2 + p$

2) $L(p) = p^2 + p + 1$

3) $L(p) = p^3 + 2p^2 + 1$

4) $L(p) = p^3 + p^2 + 1$

ЗАДАНИЕ N 10 ***(выберите один вариант ответа)***

Частное решение $y_ч(x)$ дифференциального уравнения $y'' + 4y = 2e^x \cos 2x$ следует искать в виде …

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1) $y_ч(x) = e^x \cdot a\cos 2x$

2) $y_ч(x) = e^x \cdot (a\sin 2x + b\cos 2x)$

3) $y_ч(x) = a\sin 2x + b\cos 2x$

4) $y_ч(x) = e^x \cdot (a\sin x + b\cos x)$

Тест 3 семестр (Вариант 2)

Правильные ответы:

№ вопроса	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
Правильный ответ	**2**	**3**	**2**	**1**	**8**	**3**	**1**	**2**	**1**	**4**

Дисциплина: **Дифференциальные уравнения**
Время выполнения теста: **30** минут
Количество заданий: **10**
Студент(ка)____(Фамилия, Имя)

______________(группа №)

ЗАДАНИЕ N 1 ***(выберите один вариант ответа)***

Дифференциальное уравнение $y' - x(y^2 + 1) = 0$ является …

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1) однородным

2) уравнением с разделяющимися переменными

3) линейным уравнением относительно функции $y(x)$ и ее производных

4) уравнением Бернулли

ЗАДАНИЕ N 2 ***(выберите один вариант ответа)***

С помощью замены неизвестной функции $y(x) = x \cdot z(x)$ уравнение $(x^2 + y^2)y' = 2xy$ сводится к следующему уравнению с разделяющимися переменными относительно функции $z(x)$: …

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1) $xz'(z^2 + 1) = z^3 - z$

2) $xz'(z + 1) = z - z^3$

3) $xz'(z^2 + 1) = z - z^3$

4) $xz'(z^2 + 1) = z^2 - z$

ЗАДАНИЕ N 3 ***(выберите один вариант ответа)***

Среди указанных ниже функций интегрирующим множителем для дифференциального уравнения $2xy\ln y dx + (x^2 + y^2)dy = 0$ является …

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1) $\mu(x,y) = \dfrac{1}{y^2}$

2) $\mu(x,y) = \dfrac{1}{y}$

3) $\mu(x,y) = y$

4) $\mu(x,y) = \dfrac{1}{x}$

ЗАДАНИЕ N 4 ***(выберите один вариант ответа)***

Уравнение Бернулли $y' - 2xy = x^2 y^2$ приводится к линейному относительно функции $z(x)$ и ее производной путем замены …

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1) $z(x) = \dfrac{1}{y(x)}$

2) $z(x) = y^2(x)$

3) $z(x) = \dfrac{1}{y^2(x)}$

4) $z(x) = x^2 \cdot y^2(x)$

ЗАДАНИЕ N 5 ***(введите ответ)***

В точке $x = 2$ значение функции $y(x)$, являющейся решением задачи Коши

$$\begin{cases} xy' = 2y \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

равно …

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

ЗАДАНИЕ N 6 ***(выберите один вариант ответа)***

Фундаментальная система решений линейной однородной системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + y \end{cases}$$

может быть записана в виде …

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1) $\Psi_1(t) = e^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \Psi_2(t) = e^{-2t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

3) $\Psi_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \Psi_2(t) = e^{2t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

2) $\Psi_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \Psi_2(t) = e^{-2t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

4) $\Psi_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ \Psi_2(t) = e^{2t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

ЗАДАНИЕ N 7 ***(выберите один вариант ответа)***

Компонента $y(t)$ решения задачи Коши

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + y, \quad x(0) = 1 \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y,\ y(0) = -3 \end{cases}$$

равна …

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1) $y(t) = -1 - 2e^{-2t}$

3) $y(t) = -3e^{-2t}$

2) $y(t) = 1 - 4e^{-2t}$

4) $y(t) = -2 - e^{-2t}$

ЗАДАНИЕ N 8 ***(выберите один вариант ответа)***

Среди функций $y_1(x) = e^x, y_2(x) = \mathrm{ch}\, x, y_3(x) = \mathrm{sh}\, x$, являющихся решениями дифференциального уравнения $y'' - y = 0$ на отрезке $a \le x \le b$, линейно независимые системы образуют …

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1) все функции $\{e^x, \operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x\}$ линейно независимы

2) $\{e^x, \operatorname{ch} x\}$, $\{e^x,\ \operatorname{sh} x\}$ и $\{\operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x\}$

3) только $\{\operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x\}$

4) только $\{e^x, \operatorname{ch} x\}$ и $\{e^x,\ \operatorname{sh} x\}$

ЗАДАНИЕ N 9 ***(выберите один вариант ответа)***

Общее решение однородного линейного дифференциального уравнения $y'' + 4y = 0$ может быть записано в виде …

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1) $y(x) = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x$

2) $y(x) = C_1 \sin 2x + C_2 \sin(-2x)$

3) $y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$

4) $y(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x$

ЗАДАНИЕ N 10 ***(выберите один вариант ответа)***

Применяя метод вариации постоянных, решение неоднородного дифференциального уравнения $y'' + \frac{1}{x} y' = -\frac{1}{x}$ следует искать в виде $y(x) = C_1(x) + C_2(x) \cdot \ln x$, где функции $C_1(x), C_2(x)$ определяются путем решения системы …

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1) $\begin{cases} C_1'(x) + C_2'(x) \cdot \ln x = 0 \\ C_1'(x) + C_2'(x) \cdot \frac{1}{x} = -\frac{1}{x} \end{cases}$

2) $\begin{cases} C_1(x) + C_2(x) \cdot \ln x = 0 \\ C_2(x) = -1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} C_1'(x) + C_2'(x) \cdot \ln x = 0 \\ C_2'(x) = -\frac{1}{x} \end{cases}$

4) $\begin{cases} C_1'(x) + C_2'(x) \cdot \ln x = 0 \\ C_2'(x) \frac{1}{x} = -\frac{1}{x} \end{cases}$

БИЛЕТ 1.

1. Решить задачу Коши: $y' = \dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y}, \quad y(1) = 1.$

2. Решить систему уравнений $\dot{x} = Ax$: $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 6 & -6 & 5 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = -1.$

3. При каких a и b каждое решение уравнения $y'' + ay' + by = 0$, кроме $y(x) \equiv 0$, возрастает по абсолютной величине, начиная с некоторого x?

4. Определение дифференциального уравнения и решения дифференциального уравнения.

5. Нормальная система линейных уравнений с переменными коэффициентами. Фундаментальная система решений. Её существование, выражение решения с помощью фундаментальной системы решений.

БИЛЕТ 2.

1. Решить уравнение: $e^x \sin^3 y + (1 + e^{2x}) \cos y \cdot y' = 0$

2. Решить уравнение: $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x.$

3. Найти общее решение уравнения, используя формулу Лиувилля: $t^2\ddot{x} - 3t\dot{x} + 4x = 0.$

4. Геометрическое истолкование дифференциального уравнения(векторное поле) и его решения (интегральная кривая).

5. Нормальная линейная однородная система с постоянными коэффициентами. Случай простых корней характеристического уравнения.

БИЛЕТ 3.

1. Решить задачу Коши: $y \cos x dx + \sin x dy = \cos 2x dx, \quad y(\pi/2) = 1.$

2. Решить систему уравнений: $\begin{cases} \dot{x} &= x + 8y - 8e^t \\ \dot{y} &= y + 2x - 2e^t. \end{cases}$

3. Составить линейное однородное дифференциальное уравнение (возможно меньшего порядка), имеющее данные частные решения: $3x^2 + 6x + 23, \quad 9x^2 - 3, \quad 3x + 12.$

4. Уравнения с разделяющимися переменными и однородные уравнения первого порядка.

5. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для одного уравнения (Доказательство единственности).

БИЛЕТ 4.

1. Решить задачу Коши: $y' + \dfrac{y}{x} \ln \dfrac{y}{x} = 0, \quad y(1) = 1.$
2. Решить уравнение: $y'' - 2y' = \sin x$.
3. Найти общее решение уравнения, используя формулу Лиувилля: $\quad (2t+1)\ddot{x} + 4t\dot{x} - 4x = 0.$
4. Задача обратная решению дифференциального уравнения.
5. Нормальная система линейных уравнений с переменными коэффициентами. Детерминант Вронского. Соответствие между произвольной матрицей с ненулевым определителем и фундаментальной матрицей линейной системы.

БИЛЕТ 5.

1. Решить задачу Коши: $x^2 y' = 2xy - 3, \quad y(-1) = 1.$
2. Решить систему уравнений $\dot{x} = Ax$: $\;A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 0,\ \lambda_{2,3} = 1.$
3. Записать значения параметров a и b, чтобы $y_1 = \cos 3x$ и $y_2 = e^x$ являлись решениями линейного уравнения $y''' - by'' + ay' - aby = 0$ ($a = const$, $b = const$).
4. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами. Определение оператора $L(p)$, его свойства. Доказательство формулы: $L(p)e^{\lambda t} = L(\lambda)e^{\lambda t}$.
5. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для одного уравнения (Доказательство существования).

БИЛЕТ 6.

1. Решить задачу Коши: $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y, \quad y(1) = 0.$
2. Решить уравнение: $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{\sqrt{4 - x^2}}.$
3. Оценить сверху и снизу расстояние между двумя соседними нулями любого (не тождественно равного нулю) решения данного уравнения на заданном отрезке: $(e^x + 7)y'' + e^{2x}y = 0,\ x \in [0, 5].$
4. Комплексная функция. Нормальная система дифференциальных уравнений. Расщепление комплексной системы на систему действительных уравнений.
5. Нормальная система линейных уравнений с переменными коэффициентами. Правило дифференцирования детерминанта. Формула Лиувилля для нормальной системы.

БИЛЕТ 7.

1. Решить уравнение: $x^2\cos^2 x(y - 2\sin y + 3)dy - (x^2 + \cos^2 x)dx = 0$.
2. Решить систему уравнений: $\begin{cases} \dot{x} &= x - y + 1 \\ \dot{y} &= y - 4x. \end{cases}$
3. При каких a и b все решения уравнения $y'' + ay' + by = 0$ ограничены на всей числовой прямой $-\infty < x < +\infty$?
4. Уравнения в полных дифференциалах.
5. Теорема Штурма и ее следствие.

БИЛЕТ 8.

1. Решить уравнение $y' - (x + y)\ln(x + y + 5) = 5\ln(x + y + 5) - 1$, при условии $y(0) = e - 5$.
2. Найти e^{tA} при: $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
3. Даны два различных решения y_1 и y_2 линейного неоднородного уравнения первого порядка. Выразить через них общее решение этого уравнения.
4. Нормальная неоднородная система линейных уравнений с переменными коэффициентами. Вид решения. Метод вариации постоянных для решения линейной системы.
5. Линейные уравнения второго порядка. Приведение к самосопряженному виду, к виду без первой производной (с помощью замены независимого переменного и с помощью замены неизвестной функции).

БИЛЕТ 9.

1. Решить уравнение: $(x^2y^3 + y)dx + (x^3y^2 + x)dy = 0$.
2. Решить систему уравнений $\dot{x} = Ax$: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2$.
3. При каких a и b каждое решение уравнения $y'' + ay' + by = 0$ обращается в нуль на бесконечном множестве точек?
4. Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами. Вид решения. Определение квазимногочлена. Теорема о виде частного решения.
5. Показательная функция матрицы. Ряд от матрицы.

БИЛЕТ 10.

1. Решить задачу Коши: $y' \cos\dfrac{y}{x} = \dfrac{y}{x}\cos\dfrac{y}{x} - 1, \quad y(1) = \dfrac{\pi}{4}$.

2. Решить уравнение: $y''' - 3y'' + 2y' = 2 + e^{3x}$.

3. Найти общее решение уравнения, используя формулу Лиувилля: $(t^2+t)\ddot{x}+(2-t^2)\dot{x}-(2+t)x = 0$.

4. Нормальная линейная однородная система с постоянными коэффициентами. Общий случай.

5. Задача Коши для различных типов уравнений и примеры краевых задач.

БИЛЕТ 11.

1. Решить задачу Коши: $xy' + 2\sqrt{xy} = y, \quad y(1) = 0$.

2. Найти e^{tA} при: $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

3. При каких a и b все решения уравнения $y'' + ay' + by = 0$ стремятся к нулю при $x \to +\infty$?

4. Нормальная неоднородная система линейных уравнений с переменными коэффициентами. Вид решения. Метод вариации постоянных для решения линейной системы.

5. Понятия колеблющегося и неколеблющегося на интервале решения. Теорема о неколеблющемся решении.

БИЛЕТ 12.

1. Решить уравнение: $(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0$.

2. Решить уравнение: $y'' + \pi^2 y = \dfrac{\pi^2}{\sin \pi x}$.

3. При каких α и β уравнение $y' = ax^\alpha + by^\beta$ приводится к однородному с помощью замены $y = z^m$? (Запишите соотношение, связывающее α и β.)

4. Линейные уравнения n-го порядка с переменными коэффициентами. Сведение к нормальной линейной системе. Эквивалентность решения уравнения и системы.

5. Теорема сравнения и ее следствие.

БИЛЕТ 13.

1. Решить задачу Коши: $xy' - y = x^3, \quad y(1) = 0$.

2. Решить систему уравнений $\dot{x} = A\,x$: $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{1,2,3} = 0$.

3. При каких a и b уравнение $y'' + ay' + by = 0$ имеет хотя бы одно решение $y(x) \not\equiv 0$, стремящееся к нулю при $x \to +\infty$?

4. Уравнения в полных дифференциалах.

5. Теорема Кнезера.

БИЛЕТ 14.

1. Решить задачу Коши: $y' = \dfrac{y}{x}\left(1 + \ln\dfrac{y}{x}\right), \quad y(1) = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

2. Решить уравнение: $y'' + y = 6\cos 2x + 3\sin 2x$.

3. Оценить сверху и снизу расстояние между двумя соседними нулями любого ненулевого решения следующего уравнения на заданном отрезке: $\quad (x^2 - 51)y'' - (x + 1)y = 0$, $x \in [2, 7]$.

4. Линейные уравнения n-го порядка с переменными коэффициентами. Линейная независимость. Фундаментальная система решений. Её существование, выражение решения с помощью фундаментальной системы решений.

5. Экспонента матрицы. Свойства и способы ее нахождения.

БИЛЕТ 15.

1. Решить задачу Коши: $(x + y)y' = 1$, $y(-1) = 0$.

2. Решить систему уравнений $\dot{x} = A\,x$: $\quad A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = -1,\ \lambda_{2,3} = 1$.

3. Записать значения параметров a и b, чтобы $y_1 = (\cos x + \sin x)e^x$ и $y_2 = (3\cos x + 2\sin x)e^x$ являлись решениями линейного уравнения $y'' + ay' + by = 0$ ($a = const$, $b = const$).

4. Нормальная система линейных уравнений с переменными коэффициентами. Простейшие свойства решений однородной системы. Линейная зависимость системы решений.

5. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений (Доказательство единственности).

БИЛЕТ 16.

1. Решить задачу Коши: $x^2y' = (x-y)y, \quad y(1) = 1.$
2. Решить уравнение: $y'' - 2y' + y = e^x x^{-2}.$
3. Найти общее решение уравнения, используя формулу Лиувилля: $\quad (1+t^2)\ddot{x} + t\dot{x} - x = 0.$
4. Нормальная линейная однородная система с постоянными коэффициентами. Случай простых корней характеристического уравнения.
5. Ломанные Эйлера.

БИЛЕТ 17.

1. Решить задачу Коши: $y' = \mathrm{tg}^2(2x+y) - 2, \quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{4}.$
2. Решить систему уравнений $\dot{x} \ = \ A\,x$: $\quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = 0, \ \lambda_{2,3} = 1.$
3. При каких k и ω уравнение $y'' + k^2 y = \sin \omega x$ имеет хотя бы одно периодическое решение ?
4. Линейные уравнения n-го порядка с переменными коэффициентами. Детерминант Вронского для линейного уравнения. Формула Лиувилля для линейного уравнения.
5. Теорема Штурма и ее следствие.

БИЛЕТ 18.

1. Решить уравнение: $(10x^2 + 4xy + 2y^2)dx + (2x^2 + 4xy + 11y^2)dy = 0.$
2. Решить задачу Коши: $y'' - 2y' = 2e^x, \ y(1) = -1, \ y'(1) = 0.$
3. Оценить сверху и снизу расстояние между двумя соседними нулями любого ненулевого решения следующего уравнения на заданном отрезке: $(\cos x + 10)y'' + 10y = 0, \ x \in [10\pi, 20\pi].$
4. Нормальная система линейных уравнений с переменными коэффициентами. Фундаментальная система решений. Её существование, выражение решения с помощью фундаментальной системы решений.
5. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для нормальной системы линейных уравнений (Доказательство существования).

БИЛЕТ 19.

1. Решить задачу Коши: $y' = \dfrac{y}{x}\left(1 + \ln\dfrac{y}{x}\right), \quad y(1) = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

2. Решить систему уравнений $\dot{x} = Ax$: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 1$.

3. Доказать, что два решения уравнения $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ (с непрерывными коэффициентами), имеющие максимум при одном и том же значении x, линейно зависимы.

4. Свойство квазимногочленов.

5. Экспонента диагональной и жордановой матрицы.

БИЛЕТ 20.

1. Решить задачу Коши: $y' = \dfrac{y^2}{x^2} - \dfrac{y}{x}, \quad y(-1) = 1$.

2. Решить уравнение: $y'' + y' = \dfrac{1}{1 + e^x}$.

3. При каких n уравнение $y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = 0$ (с непрерывными коэффициентами) может иметь частное решение $y = (x-2)^4$.

4. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами. Формула смещения. Предложение о семействе функций $\omega_0(t), \omega_1(t), \ldots, \omega_{k-1}(t), \omega_k(t)$.

5. Нормальная система линейных уравнений с переменными коэффициентами. Простейшие свойства решений однородной системы. Линейная зависимость системы решений.

БИЛЕТ 21.

1. Решить задачу Коши: $y'\cos x - y\sin x = 2$, $y(0) = 0$.

2. Решить систему уравнений: $\begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = y - 4x + 1. \end{cases}$

3. Зная три частных решения $y_1 = e^{2x} + \cos 2x,\ y_2 = e^{2x} + 2\cos^2 x,\ y_3 = e^{2x}$ линейного неоднородного уравнения второго порядка, написать его общее решение (ответ обосновать).

4. Теорема существования и единственности (случай полинома) (формулировка). Теорема существования и единственности для уравнения n-го порядка (случай полинома) (формулировка).

5. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами (случай простых корней). Теорема о виде решения.

БИЛЕТ 22.

1. Решить задачу Коши: $y^2dx + (xy-1)dy = 0, \quad y(e^{-1}) = e.$
2. Решить уравнение: $y'' - y = e^x \cos x.$
3. Найти общее решение уравнения, используя формулу Лиувилля: $(3t+3t^2)\ddot{x} - 6(t+1)\dot{x} + 6x = 0.$
4. Нормальная линейная однородная система с постоянными коэффициентами. Общий случай.
5. Показательная функция матрицы. Ряд от матрицы.

БИЛЕТ 23.

1. Решить задачу Коши: $2xy' = y^2x - 2y$, $y(1) = 2$.
2. Решить систему уравнений: $\left\{\begin{array}{lcl} \dot{x} & = & 3x + 2y + 4e^{5t} \\ \dot{y} & = & x + 2y \end{array}\right.$.
3. Пусть $A = \begin{pmatrix} a^2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & -a \end{pmatrix}$, при каком $a \in \mathbb{R} \quad \det(e^A) = 1$?
4. Экспонента комплексного числа, свойства.
5. Линейные уравнения n-го порядка с переменными коэффициентами. Метод вариации постоянных для линейного уравнения.

БИЛЕТ 24.

1. Решить задачу Коши: $y' - y \operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\cos^3 x}$, $y(0) = 0$.
2. Найти e^{tA} при: $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.
3. Оценить сверху и снизу расстояние между двумя соседними нулями любого ненулевого решения следующего уравнения на заданном отрезке: $(x-10)y'' + xy = 0$, $x \in [11, 121]$.
4. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами. Определение оператора $L(p)$, его свойства. Доказательство формулы: $L(p)e^{\lambda t} = L(\lambda)e^{\lambda t}$.
5. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для нормальной системы линейных уравнений (Доказательство единственности).

Примерный перечень домашних заданий из [Филиппов, А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям [Текст] / А. Ф. Филиппов. — Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, 2000. — 176 с.] по темам и занятиям

№ занятия	№ раздела	Наименование или краткое содержание практического занятия, семинара и № ДЗ	Кол-во часов
1-2	3	Теоремы существования и единственности решения задач Коши. №:221(в),222(б,г),223(г),225(а,в,д),228(а,в,д),232,234	3
2-3	4	Уравнения неразрешенные относительно производной. Особые решения. Метод введения параметра. Уравнения Лагранжа и Клеро. №:249,251,257,259,263,272,279,284,290,296	3
4-5	5	Уравнения, допускающие понижение порядка. №:424,430,433,441,459,461463,467,470,504,505	4

Контрольная работа № 3
Вариант 1

1. Для задачи Коши $\dot{x} = t^3/x$, $x(0) = 1$ указать какой-нибудь отрезок, на котором существует решение с данными начальными условиями.

2. Построить последовательные приближения y_0, y_1, y_2 к решению данной задачи: $y' = y^2 - x$, $y(0) = 1$.

3. При каких порядках n уравнение $y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$ с непрерывно дифференцируемой функцией f может иметь среди своих решений две функции: $y_1 = 2x$, $y_2 = 2x + x^3$.

4. Выделить особые решения (если они есть): $y'^2 x = 2y'^3 - 1$.

5. Решить задачу Коши: $yy''' + 3y'y'' = 0,\ y(0) = -1,\ y'(0) = -\sqrt{2},\ y''(0) = 1.$

Контрольная работа № 3
Вариант 2

1. Для задачи Коши $\dot{x} = t^3/x^2$, $x(0) = 1/6$ указать какой-нибудь отрезок, на котором существует решение с данными начальными условиями.

2. Построить последовательные приближения $y_0, y_1, y_2, z_0, z_1, z_2$ к решению данной задачи: $y' = z$, $z' = y^2$, $y(0) = 1, z(0) = 2$.

3. При каких начальных условиях существует единственное решение уравнения: $(x+2)y'' = y' + \sqrt{y}$.

4. Выделить особые решения (если они есть): $2y'^3 - 3y'^2 + x = y$.

5. Решить задачу Коши: $yy'' + 1 = y'^2,\ y(-\pi/2) = -1,\ y'(-\pi/2) = 0.$

Контрольная работа № 3
Вариант 3

1. Для задачи Коши $\dot{x} = t^8/x^2$, $x(0) = 1/8$ указать какой-нибудь отрезок, на котором существует решение с данными начальными условиями.

2. Построить последовательные приближения y_0, y_1, y_2 к решению данной задачи: $y' = y^3 + x$, $y(0) = 1$.

3. При каких порядках n уравнение $y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$ с непрерывно дифференцируемой функцией f может иметь среди своих решений функции: $y_1 = x + 1$, $y_2 = x + \cos x$.

4. Выделить особые решения (если они есть): $y = xy'^2 - 2y'^3$.

5. Решить задачу Коши: $y'^2 + 2yy'' = 0,\ y(1) = 1,\ 3y'(1) = 1.$

Контрольная работа № 3
Вариант 4

1. Для задачи Коши $\dot{x} = t^7/x^2$, $x(0) = 1/7$ указать какой-нибудь отрезок, на котором существует решение с данными начальными условиями.

2. Построить последовательные приближения y_0, y_1, y_2 к решению данной задачи: $y' = y^3 + x^2$, $y(0) = 0$.

3. При каких начальных условиях существует единственное решение системы:
$$\frac{dx}{dt} = y^3 + \sqrt[4]{t-1},\ y\frac{dy}{dt} = \sqrt[3]{x}.$$

4. Выделить особые решения (если они есть): $y = xy' - 3y'^3$.

5. Решить задачу Коши: $(y')^2 - yy'' = (y/x)^2,\ y(1) = -1,\ y'(1) = 0.$

Контрольная работа № 3
Вариант 5

1. Для задачи Коши $\dot{x} = t/x^3$, $x(0) = 1/3$ указать какой-нибудь отрезок, на котором существует решение с данными начальными условиями.

2. Построить последовательные приближения $y_0, y_1, y_2, z_0, z_1, z_2$ к решению данной задачи: $y' = y^2/z$, $z' = y/2$, $y(0) = 1, z(0) = 1$.

3. При каких порядках n уравнение $y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$ с непрерывно дифференцируемой функцией f может иметь среди своих решений две функции: $y_1 = x + x^3,\ y_2 = x^2/2 + x$.

4. Выделить особые решения (если они есть): $x^2y'^2 = xyy' + 1$.

5. Решить задачу Коши: $y'^2 = (3y - 2y')y'',\ y(0) = y'(0) = -1.$

Контрольная работа № 3
Вариант 6

1. Для задачи Коши $\dot{x} = t^5/x^2$, $x(0) = 1$ указать какой-нибудь отрезок, на котором существует решение с данными начальными условиями.

2. Построить последовательные приближения y_0, y_1, y_2 к решению данной задачи: $y' = y^2 + 3x^2 - 1$, $y(1) = 1$.

3. При каких начальных условиях существует единственное решение уравнения:
$$y''' \sqrt[3]{y'}(x - y'') = y.$$

4. Выделить особые решения (если они есть): $yy'^2 = 2xy'^3 + 1$.

5. Решить задачу Коши: $yy'' + 1 = y'^2,\ y(\pi) = 1,\ y'(\pi) = 0.$

Примерный перечень домашних заданий из [Филиппов, А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям [Текст] / А. Ф. Филиппов. — Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, 2000. — 176 с.] по темам и занятиям

№ занятия	№ раздела	Наименование или краткое содержание практического занятия, семинара и № ДЗ	Кол-во часов
7	7	Оценка точности приближенного решения. №: 1058,1061,1062	1
7-8	8	Производная решения по параметру. Производная решения по начальному условию. Метод малого параметра. №: 1065,1067,1069,1070,1074,1078	3
9-10	9	Фазовые портреты линейных систем. Положения равновесия нелинейных систем. №:964-966,968,970,971,976,978,980,998,988,991	4
11	9	Консервативные системы с одной степенью свободы. №: 1003,1007,1008,1010	2

Примерный перечень домашних заданий из [Филиппов, А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям [Текст] / А. Ф. Филиппов. — Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, 2000. — 176 с.] по темам и занятиям

№ занятия	№ раздела	Наименование или краткое содержание практического занятия, семинара и № ДЗ	Кол-во часов
12	10	Первые интегралы. №:1148,1150,1155,1160,1162	2
13-14	11	Устойчивость по Ляпунову, определение. Исследование на устойчивость по первому приближению. Функция Ляпунова. №: 881(в),891,893,895,897,904,907,909,914,922,923,925,927	4
15	12	Уравнения в частных производных первого порядка. №:1170,1172,1178,1190,1194,1214	2

Тест 4 семестр

Правильные ответы:

№ вопроса	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
Правильный ответ	**3**	**4**	**3**	**1**	**3**	**2**	**3**	**1**	**64**	**-1**

Дисциплина: **Дифференциальные уравнения**
Время выполнения теста: **30** минут
Количество заданий: **10**
Студент(ка)________________________________ ______________________(Фамилия, Имя)

______________(группа №)

ЗАДАНИЕ N 1 ***(выберите один вариант ответа)***

Укажите недостающую часть определения

Постоянное решение $x = \frac{\pi}{2}$ задачи Коши

$$\frac{dx}{dt} = \cos x,\ x(1) = \frac{\pi}{2}$$

устойчиво по Ляпунову, если … : что для $\forall x(1)$ такого, что $\left| x(1) - \frac{\pi}{2} \right| < \delta$, для

$\forall t \geq 1\ \forall x(t)$ – решение задачи такое, что $\left| x(t) - \frac{\pi}{2} \right| < \varepsilon$.

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1) $\exists \varepsilon > 0$ и $\exists \delta(\varepsilon) > 0$

2) $\exists \varepsilon > 0$ и $\forall \delta(\varepsilon) > 0$

3) $\forall \varepsilon > 0$ и $\exists \delta(\varepsilon) > 0$

4) $\forall \varepsilon > 0$ и $\forall \delta(\varepsilon) > 0$

ЗАДАНИЕ N 2 ***(выберите один вариант ответа)***

Из теоремы об устойчивости по первому приближению следует ассимптотическая устойчивость по Ляпунову нулевого решения задачи Коши для системы …

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1) $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2^2 \\ \dot{x}_2 = 2x_2 \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2^2 \\ \dot{x}_2 = -2x_2 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2^2 \\ \dot{x}_2 = 2x_2 \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2^2 \\ \dot{x}_2 = -2x_2 + x_1^2 \end{cases}$

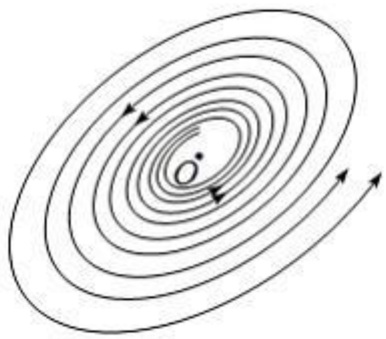
ЗАДАНИЕ N 3 ***(выберите один вариант ответа)***

Качественное поведение траекторий на фазовой плоскости (фазовый портрет) для системы уравнений

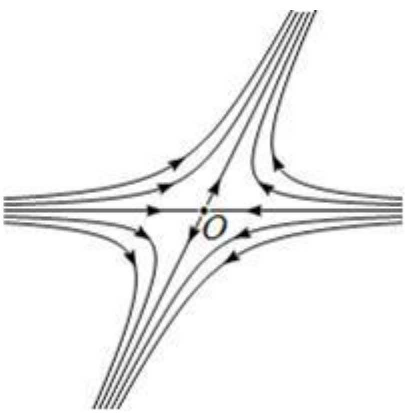
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \\ \dot{x}_2 = 2x_2 \end{cases}$$

имеет вид …
(стрелками обозначено направление движения вдоль фазовых траекторий с ростом t)

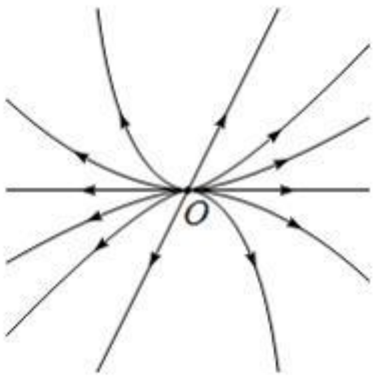
ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:



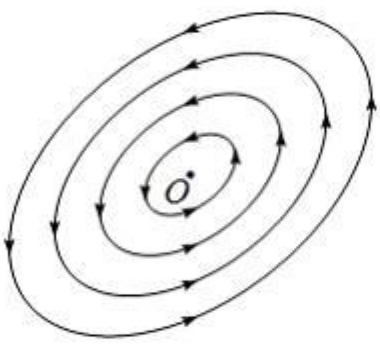
1)



2)



3)



4)

ЗАДАНИЕ N 4 ***(выберите один вариант ответа)***

Положение равновесия покоя $x_1 = x_2 = 0$ системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \\ \dot{x}_2 = 2x_2 \end{cases}$$

является …

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1) неустойчивым узлом

2) центром

3) устойчивым фокусом

4) устойчивым узлом

ЗАДАНИЕ N 5 ***(выберите один вариант ответа)***

Характеристиками уравнения

$$\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

является семейство кривых …. , где C – произвольная постоянная.

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1) $x + \frac{y^2}{2} = C$

2) $y + \frac{x^2}{2} = C$

3) $y - \frac{x^2}{2} = C$

4) $x - \frac{y^2}{2} = C$

ЗАДАНИЕ N 6 ***(выберите один вариант ответа)***

Система для характеристик квазилинейного уравнения

$$e^z \frac{\partial z}{\partial x} + e^x \frac{\partial z}{\partial y} = e^{x+z}$$

имеет вид …

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1) $e^z dx = e^x dy = e^{x+z} dz$

2) $\frac{dx}{e^z} = \frac{dy}{e^x} = \frac{dz}{e^{x+z}}$

3) $e^z dx = e^x dy = -e^{x+z} dz$

4) $\frac{dx}{e^z} = \frac{dy}{e^x} = -\frac{dz}{e^{x+z}}$

ЗАДАНИЕ N 7 ***(выберите один вариант ответа)***

Общее решение уравнения

$$(x+2y)\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

может быть записано в виде $z=f(u)$, где $f(u)$ – произвольная дифференцируемая функция, а аргумент u равен …

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1) $xy-y^2$

3) $xy+y^2$

2) $xy+x^2$

4) $xy-x^3$

ЗАДАНИЕ N 8 ***(выберите один вариант ответа)***

Общее решение уравнения

$$y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}=x-y$$

может быть представлено в неявной форме в виде … , где F – произвольная дифференцируемая функция.

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1) $F(x^2-y^2, x-y+z)=0$

3) $F(x+y^2, x-y+z)=0$

2) $F(x^2, x-y+z)=0$

4) $F(x^3+y^3, x-y+z)=0$

ЗАДАНИЕ N 9 ***(введите ответ)***

Функция $z(x,y)$, являющаяся решением задачи Коши

$$y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

$z\big|_{y=-2x} = y^2$

принимает в точке $(-1,7)$ значение ...

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

ЗАДАНИЕ N 10 ***(введите ответ)***

Функция $z(x, y)$, являющаяся решением задачи Коши

$$\frac{1}{x^2}\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{1}{y^2}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{z^2},$$

$z\big|_{x=3y} = 2y,$

принимает в точке $(-1,1)$ значение …

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

Контрольная работа № 4

Вариант 1

1. Для задачи $\dot{x} = \varepsilon\sqrt{\ln x} + xt, \quad x(0) = 1 - \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ найти производную $\left.\dfrac{\partial x(t,\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}$.
2. Решить задачу Коши:
$$\sqrt{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \sqrt{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}, \quad z|_{x=1} = -\sqrt{y}.$$
3. Исследовать в зависимости от параметра a устойчивость положения равновесия (0, 0) системы:
$$\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = 4y - ax. \end{cases}$$
4. Для системы из задания 3. при $a = 2$ начертить фазовые траектории.
5. Найти все положения равновесия, исследовать их на устойчивость, найти первый интеграл консервативной системы:
$$\ddot{x} = 4x^3 - 2x.$$
6. Исследовать устойчивость нулевого решения уравнения:
$$y^{IV} + 2y''' + 4y'' + 3y' + 2y = 0$$

Контрольная работа № 4

Вариант 2

1. Для задачи $\dot{x} = \varepsilon\sqrt[3]{\ln x} + x\sqrt{t}, \quad x(0) = 1 - \sqrt[3]{\dfrac{2\varepsilon^3}{3}}$ найти производную $\left.\dfrac{\partial x(t,\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}$.
2. Решить задачу Коши:
$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = u, \quad u|_{x=2} = \frac{1}{2}(y+z).$$
3. Исследовать в зависимости от параметра a устойчивость положения равновесия (0, 0) системы:
$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y \\ \dot{y} = 4x + ay. \end{cases}$$
4. Для системы из задания 3. при $a = -1$ начертить фазовые траектории.
5. Найти все положения равновесия, исследовать их на устойчивость, найти первый интеграл консервативной системы:
$$\ddot{x} = -e^x + 1.$$
6. Исследовать устойчивость нулевого решения уравнения:
$$y^{IV} + 2y''' + 3y'' + 7y' + 2y = 0$$

Контрольная работа № 4

Вариант 3

1. Для задачи $\dot{x} = \varepsilon + 2x^2 t, \quad x(0) = 1 + \varepsilon$ найти производную $\left.\dfrac{\partial x(t,\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}$.
2. Решить задачу Коши:
$$x\frac{\partial z}{\partial x} + z\frac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad z|_{x=1} = -y.$$
3. Исследовать в зависимости от параметра a устойчивость положения равновесия (0, 0) системы:
$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y \\ \dot{y} = 3x + ay. \end{cases}$$
4. Для системы из задания 3. при $a = -9/2$ начертить фазовые траектории.
5. Найти все положения равновесия, исследовать их на устойчивость, найти первый интеграл консервативной системы:
$$\ddot{x} = -1 - \sin x.$$
6. Исследовать устойчивость нулевого решения уравнения:
$$y^{IV} + 2y''' + 6y'' + 5y' + 6y = 0$$

Контрольная работа № 4

Вариант 4

1. Для задачи $\dot{x} = \dfrac{\varepsilon}{x} + 2x^2 t, \quad x(0) = 1 - \varepsilon$ найти производную $\left.\dfrac{\partial x(t,\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}$.
2. Решить задачу Коши:
$$xy\frac{\partial z}{\partial x} + xz\frac{\partial z}{\partial y} = yz, \quad z|_{x=1} = 1 + y^2.$$
3. Исследовать в зависимости от параметра a устойчивость положения равновесия (0, 0) системы:
$$\begin{cases} \dot{x} = -x + ay \\ \dot{y} = -x + y. \end{cases}$$
4. Для системы из задания 3. при $a = 5$ начертить фазовые траектории.
5. Найти все положения равновесия, исследовать их на устойчивость, найти первый интеграл консервативной системы:
$$\ddot{x} = -e^{-x} + e^x.$$
6. Исследовать устойчивость нулевого решения уравнения:
$$y^{IV} + 2y''' + y'' + 2y' + y = 0$$

БИЛЕТ 1.

1. Для задачи Коши $\dot{x} = xt^6$, $x(0) = 1$ построить последовательные приближения $x_0(t)$, $x_1(t)$, $x_2(t)$.

2. Для уравнения $\dot{x} = \operatorname{tg} x$ найти положения равновесия и исследовать их на устойчивость.

3. Найти производную от решения данного дифференциального уравнения по параметру μ при $\mu = 0$: $y' = y - x + \mu x e^{2y}$, $y(1) = 2 - \mu$.

4. Уравнения, неразрешенные относительно производной. Теорема существования и единственности, следствие.

5. Задача Коши для квазилинейного уравнения, теорема о существовании единственного решения задачи Коши (формулировка), геометрический смысл условия теоремы.

БИЛЕТ 2.

1. Для уравнения $\dot{x} = x^{1/3}t^3$ найти первый интеграл $V(t, x) = const$.

2. Для системы уравнений $\begin{cases} \dot{x} &= 5x + 3y \\ \dot{y} &= -y - 3x \end{cases}$ нарисовать фазовый портрет и исследовать на устойчивость нулевое решение.

3. Найти производную от решения задачи $y' = 2xy + \sin y$, $y(1) = y_0$ по y_0 при $y_0 = 0$.

4. Непродолжаемые решения. Предложение о существовании непродолжаемого решения.

5. Дискриминантная кривая, особое решение дифференциального уравнения, неразрешенного относительно производной.

БИЛЕТ 3.

1. Для задачи Коши $x\dot{x} = t^3$, $x(0) = 1$ указать какой-нибудь отрезок, на котором существует решение с данными начальными условиями.

2. Нарисовать фазовый портрет и исследовать на устойчивость положения равновесия системы $\ddot{x} = -2x + 4x^3$.

3. Для системы уравнений $\begin{cases} \dot{x} &= 2x + y \\ \dot{y} &= 4y + 3x \end{cases}$ построить два независимых первых интеграла.

4. Теорема о непрерывной зависимости решения от правой части уравнения. Следствие о непрерывной зависимости решений от начальных условий.

5. Методы решения уравнений, неразрешенных относительно производной: разрешение относительно производной, метод введения параметра. Уравнения Клеро.

БИЛЕТ 4.

1. Для задачи Коши $\dot{x} = xt^3$, $x(0) = 1$ построить три последовательных приближения $x_0(t)$, $x_1(t)$, $x_2(t)$.

2. Для системы уравнений $\begin{cases} \dot{x} &= 2y - 3x \\ \dot{y} &= y - 2x \end{cases}$ нарисовать фазовый портрет и исследовать на устойчивость нулевое решение.

3. Решить уравнение $y'^2 - (x + y + y/x)y' + y + y^2/x = 0$ и выделить интегральные кривые, проходящие через точку $M_1(1, 0)$ или через точку $M_2(0, 0)$.

4. Дифференцируемость решения по начальным значениям, система уравнений в вариациях.

5. Уравнения, допускающие понижение порядка. Промежуточные интегралы.

БИЛЕТ 5.

1. Решить уравнение: $yy'' + 1 = y'^2$.

2. Нарисовать фазовый портрет системы $\ddot{x} = -3x^2 + 4x$.

3. В зависимости от параметра $\varepsilon \in \mathbb{R}$ исследовать на устойчивость нулевое решение системы уравнений $\begin{cases} \dot{x} &= -y - \varepsilon x + x^3 \\ \dot{y} &= y^3 + x. \end{cases}$

4. Непродолжаемые решения. Предложение о существовании непродолжаемого решения.

5. Фазовые пространства. Фазовые траектории. Критерий положения равновесия. Связь геометрической и кинематической интерпретаций решений нормальной системы.

БИЛЕТ 6.

1. Решить уравнение: $x^2y'^2 = xyy' + 1$.

2. Нарисовать фазовый портрет и исследовать на устойчивость положения равновесия системы $\ddot{x} = 3x^2 - 6x$.

3. Для уравнения $\dot{x} = x^{1/5}t^5$ найти первый интеграл $V(t, x) = const$.

4. Исследование устойчивости с помощью функций Ляпунова. Производная функции в силу системы уравнений. Теорема Ляпунова об устойчивости. Пример.

5. Уравнения, допускающие понижение порядка. Уравнения, несодержащие явно искомой функции или независимого переменного.

БИЛЕТ 7.

1. Решить уравнение: $(y')^2 - yy'' = (y/x)^2$.
2. Для уравнения $\dot{x} = \ln(1+x)$ найти положение равновесия и исследовать его на устойчивость.
3. Для уравнения $\dot{x} = \mu\sqrt{\ln x} + xt$, $x(0) = 1 - \dfrac{\mu}{\sqrt{2}}$ найти $\left.\dfrac{\partial x(t,\mu)}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$.
4. Предложение о выходе непродолжаемого решения за границу ограниченного замкнутого множества, следствие для автономной системы.
5. Понятие автономной системы и нормальной автономной системы. Кинематическая интерпретация решения автономной системы. Совпадение двух траекторий.

БИЛЕТ 8.

1. Для задачи Коши $\dot{x} = x^2/t$, $x(1) = 1$ построить три последовательных приближения $x_0(t)$, $x_1(t)$, $x_2(t)$.
2. Для системы уравнений построить два независимых первых интеграла: $\left\{\begin{array}{lcl} \dot{x} & = & x - y \\ \dot{y} & = & y - 4x. \end{array}\right.$
3. При каких a особая точка системы $\dot{x} = a(x+y)$, $\dot{y} = a^2 y$ является седлом?
4. Теорема о непрерывной зависимости решения от параметра.
5. Уравнения, допускающие понижение порядка. Понижение порядка в однородных уравнениях. Приведение к полной производной.

БИЛЕТ 9.

1. Решить уравнение: $(y')^2 + 2yy'' = 0$.
2. Для уравнения $\dot{x} = \cos x$ найти положение равновесия и исследовать его на устойчивость.
3. При каких a, b, c, d для каждого решения системы $\dot{x} = ax + by$, $\dot{y} = cx + dy$ полярный угол точки $(x(t), y(t))$ возрастает при увеличении t?
4. Теорема о дифференцируемости по параметру высоких порядков, следствие о разложении решения по степеням малого параметра.
5. Дискриминантная кривая, особое решение дифференциального уравнения, неразрешенного относительно производной.

БИЛЕТ 10.

1. Построить последовательные приближения y_0, y_1, y_2, z_0, z_1, z_2 к решению данной системы с данными начальными условиями: $y' = z,\ z' = y^2$, $y(0) = 1$, $z(0) = 2$.
2. Нарисовать фазовый портрет системы $\ddot{x} = 3x^2 - 2x$.
3. Найти производную от решения данного дифференциального уравнения по параметру μ при $\mu = 0$: $y' = \dfrac{y}{x} + \mu x e^{-y}$ $(x > 0)$, $y(1) = 1 + 2\mu$.
4. Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости.
5. Первые интегралы. Критерий первого интеграла. Функциональная независимость первых интегралов в области, ее связь с линейной независимостью.

БИЛЕТ 11.

1. При каких начальных условиях существует единственное решение уравнения: $(x+2)y'' = y' + \sqrt{y}$.
2. Найти положение равновесия системы и исследовать его на устойчивость: $\begin{cases} \dot{x} = x - 4y + 1 \\ \dot{y} = x + y - 4. \end{cases}$
3. Найти разложение решения по степеням μ до μ^2 включительно: $y' = 5\mu x + \dfrac{1}{2y}$ $(x \geqslant 1)$, $y(1) = 1 - \mu$.
4. Теорема о существовании n независимых первых интегралов.
5. Фазовая плоскость линейной однородной системы с постоянными коэффициентами. Вырожденный случай.

БИЛЕТ 12.

1. Решить: $2y'^3 - 3y'^2 + x = y$.
2. Для уравнения $\dot{x} = \varepsilon + 2x^2 t, \quad x(0) = 1 + \varepsilon$ найти $\left.\dfrac{\partial x(t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}$.
3. Имеются ли у уравнения $\ddot{x} = 4x - 4x^3$ неограниченные решения?
4. Теорема о получении решения с помощью первых интегралов. Теорема о выражении любого первого интеграла через систему n независимых первых интегралов.
5. Устойчивость решения по Ляпунову, асимптотическая устойчивость по Ляпунову, связь этих понятий. Переход от исследования устойчивости произвольного решения к исследованию устойчивости нулевого решения.

БИЛЕТ 13.

1. Решить уравнение: $(y')^2 + 2yy'' = 0$.
2. Для задачи $\dot{x} = \frac{\mu}{x} + 5x^2t^4$, $x(0) = 1 - 4\mu$ найти $\left.\frac{\partial x(t,\mu)}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$.
3. При каких соотношениях между коэффициентами a, b, c, d особая точка системы $\dot{x} = ax + by$, $\dot{y} = cx + dy$ является 1)седлом; 2)узлом?
4. Первые интегралы автономных систем, теорема о существовании $n-1$ независимого первого интеграла, не содержащего t.
5. Фазовые пространства. Фазовые траектории. Критерий положения равновесия. Связь геометрической и кинематической интерпретаций решений нормальной системы.

БИЛЕТ 14.

1. Решить: $y'^2x = 2y'^3 - 1$.
2. Для уравнения $\dot{x} = \sin x + x$ найти положение равновесия и исследовать его на устойчивость.
3. Для системы уравнений $\begin{cases} \dot{x} &= -x + 4y \\ \dot{y} &= y + x \end{cases}$ построить два независимых первых интеграла.
4. Положения равновесия и замкнутые кривые. Три вида траекторий автономной системы.
5. Уравнения с частными производными первого порядка. Линейное однородное уравнение, теорема о связи решения с первым интегралом нормальной системы дифференциальных уравнений. Теорема об общем решении линейного уравнения (формулировки).

БИЛЕТ 15.

1. При каких начальных условиях существует единственное решение системы:
$$\dot{x} = y^3 + \sqrt[4]{t-1},\ y\dot{y} = \sqrt[3]{x}.$$
2. Для задачи $\dot{x} = \varepsilon\sqrt{\ln x} + xt$, $x(0) = 1 - \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ найти производную $\left.\frac{\partial x(t,\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}$.
3. Выяснить, при каких значениях параметра a нулевое решение является а) асимптотически устойчивым; б) неустойчивым: $\begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -ay - x^3 - a^2x. \end{cases}$
4. Уравнения, неразрешенные относительно производной. Теорема существования и единственности, следствие.
5. Квазилинейное уравнение, понятие характеристики уравнения. Теорема о решении квазилинейного уравнения (формулировка).

БИЛЕТ 16.

1. Для задачи Коши $x^2\dot{x} = t^8$, $8x(0) = 1$ указать какой-нибудь отрезок, на котором существует решение с данными начальными условиями.

2. Нарисовать фазовый портрет системы: $\begin{cases} \dot{x} &= 7x + 2y + 3 \\ \dot{y} &= 3x + 2y - 1. \end{cases}$

3. Система $\dot{x} = Ax$, где $x \in \mathbb{R}^3$, A — постоянная действительная матрица, имеет частное решение, у которого известна только первая координата: $x_1 = e^{-t}(1+\cos t)$. Устойчиво ли нулевое решение? (ответ обосновать).

4. Предложение о выходе непродолжаемого решения за границу ограниченного замкнутого множества, следствие для автономной системы.

5. Теорема о получении решения из первого интеграла. Теорема об общем решении квазилинейного уравнения (формулировки).

БИЛЕТ 17.

1. При каких n уравнение $y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$ с непрерывно дифференцируемой функцией f может иметь среди своих решений две функции: $y_1 = x + x^3$, $y_2 = x^2/2 + x$.

2. Нарисовать фазовый портрет системы: $\ddot{x} = -e^x + 1$.

3. Выяснить, при каких значениях параметра a нулевое решение является а) асимптотически устойчивым; б) неустойчивым: $\begin{cases} \dot{x} &= ax + y + (a+1)x^2 \\ \dot{y} &= ay + x. \end{cases}$

4. Теорема о дифференцируемости решения по параметру, система уравнений в вариациях.

5. Задача Коши для квазилинейного уравнения, теорема о существовании единственного решения задачи Коши (формулировка), геометрический смысл условия теоремы, пример.

БИЛЕТ 18.

1. При каких начальных условиях существует единственное решение уравнения:
$$y''' \sqrt[3]{y'}(x - y'') = y.$$

2. Для задачи $\dot{x} = \dfrac{\mu}{x} + 2x^2 t$, $x(0) = 1 - \mu$ найти $\left.\dfrac{\partial x(t,\mu)}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$.

3. а) При каких $a \in \mathbb{R}$ существуют ограниченные при $-\infty < t < \infty$ решения системы $\dot{x} = 2y - 4x + 1$, $\dot{y} = 2x - y + a$. Найти эти решения. б) Устойчивы ли они?

4. Теорема о существовании n независимых первых интегралов.

5. Понятие автономной системы и нормальной автономной системы. Кинематическая интерпретация решения автономной системы. Совпадение двух траекторий.

БИЛЕТ 19.

1. Для задачи Коши $x^2\dot{x} = t^5$, $x(0) = 1$ указать какой-нибудь отрезок, на котором существует решение с данными начальными условиями.

2. Для системы построить два независимых первых интеграла: $\begin{cases} \dot{x} &= x - 2y - 1 \\ \dot{y} &= x + 4y + 2. \end{cases}$

3. При каких значениях параметра a нулевое решение системы $\begin{cases} \dot{x} &= ax + a\sin y \\ \dot{y} &= ax^3 - a^2 y \end{cases}$ является а) асимптотически устойчивым; б) неустойчивым?

4. Фазовая плоскость линейной однородной системы с постоянными коэффициентами. Невырожденный случай.

5. Уравнения, допускающие понижение порядка. Промежуточные интегралы.

БИЛЕТ 20.

1. Решить уравнение: $2y'(y'' + 2) = xy''^2$.

2. Найти все положения равновесия, нарисовать фазовый портрет системы: $\ddot{x} = -\cos x$.

3. Найти производную от решения задачи $y' = y^3 \sin x + y\cos x$, $y(0) = y_0$ по y_0 при $y_0 = 0$.

4. Исследование устойчивости с помощью функций Ляпунова. Производная функции в силу системы уравнений. Теорема Ляпунова об устойчивости.

5. Методы решения уравнений, неразрешенных относительно производной: разрешение относительно производной, метод введения параметра. Уравнения Клеро.

БИЛЕТ 21.

1. Построить последовательные приближения y_0, y_1, y_2 к решению данного уравнения с данными начальными условиями: $y' = y^2 + 3x^2 - 1$, $y(1) = 1$.

2. Нарисовать фазовый портрет системы: $\ddot{x} = -3^x + 1$.

3. На плоскости параметров a, b указать такую область, что при любых (a, b) из этой области вторая компонента $y(t)$ любого решения системы $\begin{cases} \dot{x} = ax - y \\ \dot{y} = x + by \end{cases}$ имеет бесконечно много нулей при $t \geqslant 0$.

4. Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости. Пример.

5. Уравнения, допускающие понижение порядка. Понижение порядка в однородных уравнениях. Приведение к полной производной.

БИЛЕТ 22.

1. Решить уравнение $y = \ln(1 + y'^2)$ и выделить особые решения (если они есть).

2. Определить тип положения равновесия и нарисовать траектории системы: $\begin{cases} \dot{x} = -2x - y \\ \dot{y} = x - 3y. \end{cases}$

3. Найти независимые первые интегралы системы уравнений: $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dz}{0}$.

4. Теорема о непрерывной зависимости решения от правой части уравнения. Следствие о непрерывной зависимости решений от начальных условий.

5. Уравнения, допускающие понижение порядка. Уравнения, несодержащие явно искомой функции или независимого переменного.

БИЛЕТ 23.

1. При каких начальных условиях существует единственное решение уравнения:
$$(x + 2)y'' = y' + \sqrt{y}.$$

2. Для задачи $\dot{x} = \dfrac{\mu}{x} + 4x^2t^3$, $x(0) = 1 - 3\mu$ найти $\left.\dfrac{\partial x(t, \mu)}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$.

3. Рассматривается система $\dot{x} = a^2x - y$, $\dot{y} = 5x - (3 + 2a)y$.
а) Будет ли нулевое решение системы при $a = -1$ асимптотически устойчивым? Обосновать ответ.
б) Нарисовать траектории системы при $a = -3$.

4. Положения равновесия и замкнутые кривые. Три вида траекторий автономной системы.

5. Устойчивость решения по Ляпунову, асимптотическая устойчивость по Ляпунову, связь этих понятий. Переход от исследования устойчивости произвольного решения к исследованию устойчивости нулевого решения.

БИЛЕТ 24.

1. При каких начальных условиях существует единственное решение уравнения:
$$y''' \sqrt[3]{y'}(x - y'') = y.$$

2. Найти первый интеграл системы: $\ddot{x} = -\cos x$.

3. Рассматривается система $\dot{x} = a^2x - y$, $\dot{y} = 5x - (3 + 2a)y$.
а) Нарисовать траектории системы при $a = -3$.
б) Существует ли такое значение $a \in \mathbb{R}$, при котором траектории — замкнутые кривые?

4. Достаточное условие устойчивости для линейной однородной системы с постоянными коэффициентами.

5. Дискриминантная кривая, особое решение дифференциального уравнения, неразрешенного относительно производной.

01.03.02 Прикладная математика и информатика, направленность (профиль) "Прикладная математика и искусственный интеллект", РПД по дисциплине "Дифференциальные уравнения", 2026 год набора, очная форма обучения.

Рабочая программа дисциплины (модуля) одобрена и рекомендована:

Проректор по учебной работе	утверждено 27.02.26	А.А. Саламатов

Ученым советом математического факультета

Протокол заседания № 8 от 19.02.2026

Председатель Ученого совета математического факультета	согласовано	А. С. Скорынин

Заседанием кафедры теории управления и оптимизации

Протокол заседания № 8 от 12.02.2026

Заведующий кафедрой	согласовано	И. В. Изместьев
Автор (составитель)		С. Р. Алеева

Структура рабочей программы соответствует приказу ректора ФГБОУ ВО «ЧелГУ» от «13» апреля 2021 г. № 274-1