

Документ подписан простой электронной подписью Информация о владельце: ФИО: Таскаев Сергей Валерьевич Должность: Ректор	МИНОБРНАУКИ РОССИИ Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Челябинский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ЧелГУ»)	
Дата подписания: 18.11.2025 12:26:10 Уникальный идентификатор документа: 04c19ed8bfb98f3b6cb77a486b9a8788b8322323	Рабочая программа дисциплины "Функциональный анализ" по направлению подготовки (специальности) "Прикладная математика и информатика" направленности (профилю) Информационно-управленческие технологии ФГБОУ ВО «ЧелГУ»	стр. 1



УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе

/ В.Е. Федоров

2021 г.

**Рабочая программа дисциплины (модуля)\***  
**Функциональный анализ**

Направление подготовки (специальность)

01.03.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль)

Информационно-управленческие технологии

Присваиваемая квалификация (степень)

бакалавр

Форма обучения

очная

Год(ы) набора 2021

\*Рабочая программа дисциплины (модуля) адаптирована для инклюзивного обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья

Челябинск 2021 г.

**Рабочая программа дисциплины (модуля) принята:**

Ученым советом математического факультета

Протокол заседания № 13 « 24 » 06 2021 г.

Председатель Ученого совета  
математического факультета  Е.А. Сбродова

Секретарь Ученого совета  
математического факультета  С.А. Никитина

**Рабочая программа дисциплины (модуля) одобрена и рекомендована кафедрой**

Вычислительной математики

Протокол заседания № 14 от « 18 » 06 2021 г.

Заведующий кафедрой  В.Н. Павленко

Автор (составитель) д.ф.-м.н., профессор  В.Н. Павленко

**Структура рабочей программы соответствует приказу ректора  
ФГБОУ ВО «ЧелГУ» от «05» декабря 2018 г. № 678-1**

## Содержание

1. Цели освоения дисциплины
2. Место дисциплины в структуре ОПОП
3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины (модуля)
4. Объем дисциплины (модуля)
5. Структура и содержание дисциплины (модуля)
6. Фонд оценочных средств
  - 6.1. Перечень видов оценочных средств
  - 6.2. Типовые контрольные задания и иные материалы для текущей аттестации
  - 6.3. Типовые контрольные вопросы и задания для промежуточной аттестации
  - 6.4. Критерии оценивания
7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)
  - 7.1. Рекомендуемая литература
  - 7.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет"
  - 7.3. Перечень информационных технологий
8. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)
9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)
10. Специальные условия освоения дисциплины обучающимися с инвалидностью и ограниченными возможностями здоровья

### 1. ЦЕЛИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Дисциплина предназначена для освоения студентами основных приемов функционального анализа: вопросы сходимости в метрических пространствах, не-прерывные отображения и теория линейных операторов. Цель дисциплины — изложить основы функционального анализа на современном языке, в обозримой форме и в достаточно полном объеме. Курс должен способствовать формированию научного мировоззрения, развитию логического мышления, умению выполнять сложные комплексные задания.

Результаты обучения по дисциплине направлены на достижение индикаторов, соответствующих компетенций: ОПК-1

ОПК-1.1. Обладает фундаментальными знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук

ОПК-1.2. Демонстрирует умение решать задачи, формулируемые в рамках математических и (или) естественных наук

ОПК-1.3. Имеет навыки использования основных понятий, теорем, законов математики и (или) естественных наук для решения задач профессиональной деятельности

### 2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОПОП

Цикл (раздел) ОПОП: Б1.О.15

#### 2.1 Требования к предварительной подготовке обучающегося:

Алгебра и геометрия

Математический анализ

Дифференциальные уравнения

Математический анализ

Алгебра

Геометрия

#### 2.2 Дисциплины и практики, для которых освоение данной дисциплины (модуля) необходимо как предшествующее:

Вариационное исчисление и оптимальное управление

Теория игр и исследование операций

Численные методы

Вариационное исчисление и оптимальное управление

Численные методы

Теория игр и исследование операций

### 3. КОМПЕТЕНЦИИ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

**ОПК-1: Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности**

#### Знать:

Основные понятия и методы функционального анализа и возможные приложения при решении прикладных задач.

#### Уметь:

Применять знание функционального анализа при решении задач, формулируемых в рамках математических или естественных наук, в профессиональной деятельности.

#### Владеть:

Методами применения функционального анализа при решении прикладных задач.

**В результате освоения дисциплины обучающийся должен**

#### 3.1 Знать:

3.1.1 постановки классических задач функционального анализа

#### 3.2 Уметь:

3.2.1 самостоятельно математически корректно ставить естественнонаучные задачи;

#### 3.3 Владеть:

3.3.1 владеть навыками корректной постановки классических задач математики

#### 4. ОБЪЕМ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Общая трудоемкость	2 ЗЕТ
Часов по учебному плану : 72 в том числе : аудиторные занятия : 48 самостоятельная работа : 24 :	Виды контроля в семестрах:  зачеты 6

#### 5. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Код занятия	Наименование разделов и тем /вид занятия/	Семестр / Курс	Часов	Литература
<b>Раздел 1. Метрические и линейные нормированные пространства</b>				
1.1	Введение в основные понятия /Лек/	6	6	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.3 Л2.4
1.2	Свойства метрики /Пр/	6	2	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2
1.3	Теория меры,интеграл Лебега /Ср/	6	4	Л1.1Л2.2 Л2.4 Э1 Э2
<b>Раздел 2. Линейные непрерывные операторы</b>				
2.1	Линейные операторы /Лек/	6	2	Л1.1 Л1.3Л2.3 Л2.4
2.2	Принцип неподвижной точки /Пр/	6	2	Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2
2.3	Теорема Банаха о пополнении метрических пространств /Ср/	6	6	Л1.1 Л1.3Л2.4 Э1 Э2
2.4	Линейные функционалы /Лек/	6	2	Л1.1 Л1.3Л2.3 Л2.4
<b>Раздел 3. Основные теоремы функционального анализа</b>				
3.1	Принцип равномерной ограниченности /Лек/	6	2	Л1.1 Л1.3Л2.3 Л2.4
3.2	Исследование предкомпактности множеств /Пр/	6	4	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2
3.3	Теорема о продолжении /Лек/	6	2	Л1.1 Л1.3Л2.3
3.4	Теорема об обратном операторе /Лек/	6	2	Л1.1 Л1.3Л2.4
3.5	Свойства линейных операторов /Пр/	6	4	Л1.1 Л1.3Л2.1 Л2.2
3.6	Классические теоремы анализа в рамках основных теорем С.Банаха /Ср/	6	6	Л1.3Л2.4 Э1 Э2
<b>Раздел 4. Гильбертовы пространства</b>				
4.1	Гильбертовы пространства /Лек/	6	6	Л1.1 Л1.3Л2.3
4.2	Гильбертовы пространства /Пр/	6	2	Л1.1 Л1.3Л2.1 Л2.2
4.3	Спектры линейных операторов /Пр/	6	2	Л1.1 Л1.3Л2.1 Л2.2
4.4	Рефлексивность Гильбертова пространства /Ср/	6	4	Л1.3Л2.2
<b>Раздел 5. Решение линейных операторных уравнений</b>				
5.1	Свойства решений линейных уравнений с компактными операторами /Лек/	6	4	Л1.1 Л1.2Л2.3 Л2.4
5.2	Свойства решений линейных уравнений /Лек/	6	2	Л1.1 Л1.2Л2.3 Л2.4
5.3	Спектры линейных операторов /Лек/	6	4	Л1.1 Л1.2Л2.3 Л2.4
5.4	Первая и вторая теоремы Рисса о решении линейных уравнений с компактным оператором /Ср/	6	4	Л1.2Л2.1 Л2.4 Э1 Э2

#### 6. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

### 6.1. Перечень видов оценочных средств

домашние задания,  
контрольная работа,  
зачет

### 6.2. Типовые контрольные задания и иные материалы для текущей аттестации

Пример домашнего задания см. Приложение

### 6.3. Типовые контрольные вопросы и задания для промежуточной аттестации

Пример контрольной работы см. Приложение

Вопросы к зачёту

1. Проверка аксиом метрики для конкретных пространств
2. Исследование последовательностей на фундаментальность.
3. Принцип вложенных шаров. Исследование метрического пространства на полноту. Теорема Бэра о категориях.
4. Сжимающий оператор. Примеры. Принцип сжимающих отображений.
5. Предкомпактные множества и компакт. Примеры, применение. Свойства предкомпактных множеств. Сеть для множества в метрическом пространстве.
6. Теорема Хаусдорфа (критерий предкомпактности). Теорема Арчела.
7. Сепарабельные метрические пространства. Примеры несепарабельных метрических пространств.
8. Линейные нормированные пространства, ЛНП. Введение расстояния в ЛНП. Банаховы пространства, примеры
9. Некомпактность шара в бесконечномерном нормированном пространстве.
10. Линейный оператор, его свойства. Признаки его непрерывности. Норма линейного оператора и её свойства.
11. Линейное нормированное пространство  $L(X, Y)$  всех ограниченных линейных операторов  $A: X \rightarrow Y$ . Теорема о полноте этого пространства, когда  $Y$  – банахово.
12. ЛНП всех непрерывных линейных функционалов  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  (или  $\mathbb{C}$ ). Следствие из теоремы о полноте пространства  $L(X, Y)$ , когда  $Y$  – банахово.
13. Процедура поиска норм линейного ограниченного оператора. Примеры.
14. Теорема Хана-Банаха, алгебраический вариант. Случай ЛНП.
15. Теорема Банаха-Штейнгауза.
16. Теорема Банаха об обратном операторе.
17. Определение гильбертова пространства. Примеры.
18. Определение ортонормальной системы (ОНС). Ряд Фурье элемента  $x$  по данной ОНС. Примеры.
19. Теорема об экстремальном свойстве коэффициентов Фурье. Неравенство Бесселя.
20. Определение полной ОНС. Пример.
21. Доказать теорему о проекции точки на выпуклое множество.
22. Теорема об ортогональном разложении  $H$  в сумму подпространств.
23. Теорема Рисса об общем виде линейного ограниченного функционала на Гильбертовом пространстве. Описание сопряжённого пространства к  $H$ .
24. Определение слабой сходимости. Примеры, упражнения.
25. Теорема о вложении  $X$  в своё второе сопряжённое.
26. Критерий слабой сходимости в пространстве непрерывных на отрезке функций с чебышевской нормой.
27. Общий вид линейных непрерывных функционалов на  $l_p$ . Признак слабой сходимости.

### 6.4. Критерии оценивания

Балльно-рейтинговая система оценки знаний студента по дисциплине определяется на основе балловой оценки различных форм деятельности студентов.

Итоговая оценка выставляется, исходя из количества баллов, набранных в течение семестра.

Начисляемые рейтинговые баллы.

(По каждой позиции указывается максимальный балл)

Контрольная работа - 40

Домашние задания - 20

Решение задач из лекций – 10

Посещаемость -10

Итого 80 баллов

Критерии оценивания контрольной работы

Максимальный балл за одну контрольную работу – 20 баллов

В контрольной работе 4 задачи. Максимальная оценка за каждую из них - 5 баллов. Время, отводимое для выполнения контрольной работы -90 минут.

Критерии оценивания задачи

Максимальный балл — 5.

При подведении итогов зачет ставится, если студент за все контрольные мероприятия набрал не менее 40 баллов: Уровни сформированности компетенций определяется следующим образом:

1. Высокий уровень сформированности компетенций – 70-80 баллов:  
- предполагает формирование компетенций на высоком уровне, готовность к самостоятельной профессиональной деятельности.  
- студент способен аргументировать собственную точку зрения по дискуссионным вопросам дисциплины, решать ситуационные задачи, критически оценивать информацию, формулировать собственные выводы.
2. Средний уровень – 60-69  
- предполагает формирование компетенций на среднем уровне: формируется комплексное знание особенностей решения прикладных задач, умение сбора, анализа и обработки данных, необходимых для решения прикладных задач.  
- студент способен давать развернутые ответы на теоретические вопросы дисциплины на уровне не ниже среднего.
3. Базовый уровень – 40-59 баллов  
- предполагает формирование компетенций на начальном уровне, студент освоил основные понятия и положения изучаемой дисциплины.
4. Низкий уровень - 0-39 баллов.

## 7. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

### 7.1. Рекомендуемая литература

#### 7.1.1. Основная литература

	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год	Ресурс
Л1.1	Люстерник Л. А., Соболев В. И.	Краткий курс функционального анализа ( <a href="https://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&amp;pl1_id=245">https://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&amp;pl1_id=245</a> )	Санкт- Петербург : Лань, 2009	ЭБС
Л1.2	Филимоненкова Н. В.	Конспект лекций по функциональному анализу ( <a href="http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=64343">http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=64343</a> )	Санкт- Петербург : Лань, 2015	ЭБС
Л1.3	Власова Е. А., Марчевский И. К.	Элементы функционального анализа ( <a href="http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=67481">http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=67481</a> )	Санкт- Петербург : Лань, 2015	ЭБС

#### 7.1.2. Дополнительная литература

	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год	Ресурс
Л2.1	Гуревич А. П., Корнев В. В., Хромов А. П.	Сборник задач по функциональному анализу ( <a href="https://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&amp;pl1_id=3175">https://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&amp;pl1_id=3175</a> )	Санкт- Петербург : Лань, 2012	ЭБС
Л2.2	Филимоненкова Н. В.	Сборник задач по функциональному анализу ( <a href="http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=65041">http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=65041</a> )	Санкт- Петербург : Лань, 2015	ЭБС
Л2.3	Колмогоров А. Н.	Элементы теории функций и функционального анализа.: монография ( <a href="https://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=479687">https://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=479687</a> )	Москва : Издательство Московского университета, 1954	ЭБС
Л2.4	Гейт В. Э.	Функциональный анализ: учебно-методический комплекс ( <a href="http://library.csu.ru/rbooks2/view2?code=local/emc/000195/geytve">http://library.csu.ru/rbooks2/view2?code=local/emc/000195/geytve</a> )	Челябинск : [б. и.], 2010	ЭБС

### 7.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет"

Э1	Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU ( <a href="https://elibrary.ru/defaultx.asp?">https://elibrary.ru/defaultx.asp?</a> ) eLIBRARY.RU : научная электронная библиотека : сайт. – Москва, 2000 – . – URL: <a href="https://elibrary.ru">https://elibrary.ru</a> . – Режим доступа: для зарегистрир. пользователей. – Текст : электронный.
Э2	Справочник «Информио» ( <a href="http://www.informio.ru/">http://www.informio.ru/</a> ) ИНФОРМИО : электронный справочник [обеспечение всех типов образовательных учреждений нормативными, методическими, научнопрактическими материалами]. – URL: <a href="http://www.informio.ru/">http://www.informio.ru/</a> . – Режим доступа: для зарегистрир. пользователей ЧелГУ. – Текст : электронный.

Рабочая программа дисциплины "Функциональный анализ" по направлению подготовки (специальности) "Прикладная математика и информатика" направленности (профилю) Информационно-управленческие технологии ФГБОУ ВО «ЧелГУ»	стр. 8
<b>7.3 Перечень информационных технологий</b>	
<b>7.3.1 Программное обеспечение</b>	
LMS Moodle	
<b>7.3.2 Профессиональные базы данных и информационно-справочные системы</b>	
Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU ( <a href="https://elibrary.ru/defaultx.asp?">https://elibrary.ru/defaultx.asp?</a> ) eLIBRARY.RU : научная электронная библиотека : сайт. – Москва, 2000 – – URL: <a href="https://elibrary.ru">https://elibrary.ru</a> . – Режим доступа: для зарегистрир. пользователей. – Текст : электронный.	
Справочник «Информо» ( <a href="http://www.informio.ru/">http://www.informio.ru/</a> ) ИНФОРМИО : электронный справочник [обеспечение всех типов образовательных учреждений нормативными, методическими, научнопрактическими материалами]. – URL: <a href="http://www.informio.ru/">http://www.informio.ru/</a> . – Режим доступа: для зарегистрир. пользователей ЧелГУ. – Текст : электронный.	

<b>8. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)</b>
Для реализации дисциплины используются учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, а также помещения для самостоятельной работы.
Для проведения занятий лекционного типа предлагаются наборы демонстрационного оборудования и учебно-наглядных пособий (экран, ноутбук, колонки, мультимедийный проектор и компьютер для презентации лекций, слайдов лекций, подготовленных в Microsoft Power Point).

<b>9. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)</b>
<p>Учебный курс строится таким образом, чтобы способствовать созданию у студента понятийно-теоретического ядра и развитию практического навыка решения математических задач.</p> <p>Для успешного усвоения материала студенту необходимо использовать следующие формы обучения:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Лекционная форма, которая предполагает посещение и конспектирование лекций. Лекционные занятия могут проводиться как в классической форме, предполагающее устное изложение материала преподавателем и конспектированием материала студентам, так и форме семинара, студентам предлагается совместное решение теоретических задач при возможной помощи преподавателя. Кроме того, часть лекций сопровождается интерактивными материалами для лучшего понимания геометрической интерпретации материала.</li> <li>2. Практическая форма занятий предполагает посещение их студентом, с предоставлением выполненного домашнего задания, и выполнение итого-во-зачётной контрольной работы.</li> <li>3. Самостоятельная форма работы, предполагает кроме выполнения всех домашних работ, необходимость использования и изучения литературы по заданной теме. В случае затруднений при решении задач домашнего задания необходимо обратиться за помощью к лектору согласно расписания его консультаций, которое висит вблизи кафедры вычислительной математики. В случае применения при обучении дисциплины электронного обучения, дистанционных образовательных технологий общение обучающихся и преподавателя осуществляется в режиме реального времени (чат), или отложенного времени (система дистанционного обучения Moodle, чаты, электронная почта).</li> </ol> <p>Большую часть времени обучающиеся самостоятельно работают с учебно-методическими материалами. Студенты имеют возможность консультироваться с преподавателем по всем вопросам, возникающим в ходе самостоятельной работы посредством электронной почты, социальных сетей.</p> <p>Доступ обучающегося к учебным ресурсам в режиме отложенного времени, самостоятельной работы осуществляется через сеть Интернет в удобном для него месте, времени и темпе.</p> <p>При обучении лиц с ограниченными возможностями здоровья электронное обучение, дистанционные образовательные технологии предусматривают возможность приема-передачи информации в доступных для них формах.</p> <p>Реализация дисциплины с применением электронного обучения, дистанционных образовательных технологий (далее – ЭО, ДОТ) осуществляется на основании «Положения о реализации основных и дополнительных образовательных программ с применением электронного обучения и дистанционных образовательных технологий в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Челябинский государственный университет», «Положения о порядке зачета обучающимися по основным профессиональным образовательным программам высшего образования в ФГБОУ ВО «ЧелГУ» результатов освоения в организациях, осуществляющих образовательную деятельность, учебных предметов, курсов, дисциплин (модулей), практик, дополнительных образовательных программ» посредством электронной информационно-образовательной среды ФГБОУ ВО «ЧелГУ». В исключительных случаях (форс-мажор и т.п.) при реализации образовательной деятельности с применением ЭО, ДОТ могут применять компоненты, не входящие в перечень электронной информационно-образовательной среды.</p>

<b>10. СПЕЦИАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ ОБУЧАЮЩИМИСЯ С ИНВАЛИДНОСТЬЮ И ОГРАНИЧЕННЫМИ ВОЗМОЖНОСТЯМИ ЗДОРОВЬЯ</b>
--

Освоение дисциплины инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья осуществляется с использованием специальных технических средств и голо информационных технологий, предоставляемых Ресурсным учебно-методическим центром по обучению инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья ЧелГУ по запросу обучающегося.

1. Мобильные специальные технические средства для лиц с нарушениями зрения: портативный компьютер с вводом/выводом шрифтом Брайля с синтезатором речи «ElBraile-W14J G2»; ноутбуки с программной экранного доступа NVDA; электронные увеличители для удаленного просмотра; видеоувеличители портативные; тифлоплеер; цифровые диктофоны.

2. Мобильные специальные технические средства для лиц с нарушениями слуха: система свободного звукового поля со встроенной совместимостью с FM-устройствами; радиоклассы «Сонет-PCM» с передатчиком, заушным индуктором и индукционной петлей; система информационная для слабослышащих переносная «Исток» А2 со встроенным плеером – звуковым информатором; документ-камера; программируемые слуховые аппараты индивидуального пользования.

3. Ассистивные информационные технологии: программное обеспечение экранного доступа с синтезом речи NVDA; программы экранного увеличения; программы речевого синтеза для компьютеров и ноутбуков; программы речевого синтеза для мобильных устройств; экранная клавиатура; экранная лупа.

При необходимости для обучающихся с нарушениями зрения на рабочих местах для проведения практических или лабораторных занятий устанавливается специальное программное обеспечение (программа речевой навигации NVDA, речевые синтезаторы, экранные лупы).

В учебные аудитории обеспечивается беспрепятственный доступ для обучающихся инвалидов и обучающихся с ограниченными возможностями здоровья. В каждой аудитории, где обучаются инвалиды и лица с ограниченными возможностями здоровья, предусматривается соответствующее количество мест для обучающихся с учетом нарушений их здоровья.

Для освоения дисциплины инвалидам и лицам с ограниченными возможностями здоровья предоставляется доступ к печатным источникам, имеющимся в научной библиотеке ЧелГУ, с помощью специальных технических средств; доступ к электронным источникам, представленным в форме электронного документа в фонде научной библиотеки ЧелГУ или электронно-библиотечных системах, с помощью специальных технических и программных средств (рабочее место для незрячего пользователя с программным обеспечением экранного доступа с синтезом речи NVDA, рабочее место с компьютерным роллером и клавиатурой Clevy с большими кнопками и с разделяющей клавиши накладкой).

Учебно-методические материалы для обучающихся из числа инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья предоставляются в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации:

Для лиц с нарушениями зрения:

- в печатной форме увеличенным шрифтом,
- в форме электронного документа,
- в форме аудиофайла,
- в печатной форме шрифтом Брайля.

Для лиц с нарушениями слуха:

- в печатной форме,
- в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата:

- в печатной форме,
- в форме электронного документа,
- в форме аудиофайла.

Данный перечень может быть конкретизирован в зависимости от контингента обучающихся.

Для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья освоение дисциплины может быть частично или полностью осуществлено с использованием дистанционных образовательных технологий (Moodle, Adobe Connect Pro и пр.).

В освоении дисциплины инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья используется индивидуальная работа. Под индивидуальной работой подразумевается две формы взаимодействия с преподавателем: индивидуальная учебная работа (консультации), т.е. дополнительное разъяснение учебного материала и углубленное изучение материала с теми обучающимися, которые в этом заинтересованы, и индивидуальная воспитательная работа. Индивидуальные консультации направлены на индивидуализацию обучения и установлению воспитательного контакта между преподавателем и обучающимся инвалидом или обучающимся с ограниченными возможностями здоровья.

При проведении процедуры оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья по дисциплине обеспечивается выполнение следующих дополнительных требований в зависимости от индивидуальных особенностей, обучающихся:

- а) инструкция по порядку проведения процедуры оценивания предоставляется в доступной форме (устно, в письменной форме, в письменной форме шрифтом Брайля, устно с использованием услуг сурдопереводчика);
- б) доступная форма предоставления заданий оценочных средств (в печатной форме, в печатной форме увеличенным шрифтом, в печатной форме шрифтом Брайля, в форме электронного документа, задания зачитываются ассистентом, задания предоставляются с использованием сурдоперевода);
- в) доступная форма предоставления ответов на задания (письменно на бумаге, набор ответов на компьютере,

письменно шрифтом Брайля, с использованием услуг ассистента, устно).

При проведении процедуры оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья предусматривается использование технических средств, необходимых им в связи с их индивидуальными особенностями. Эти средства могут быть предоставлены ЧелГУ или могут использоваться собственные технические средства. При необходимости инвалидам и лицам с ограниченными возможностями здоровья предоставляется дополнительное время для подготовки ответа на задания, процедура оценивания результатов обучения по дисциплине может проводиться в несколько этапов.

Проведение процедуры оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья допускается с использованием дистанционных образовательных технологий.

Перечень домашних заданий и самостоятельных работ  
по курсу "Функциональный анализ"  
для групп МП-301, 302

1-ое домашнее задание. Метрики и нормы

1. Доказать, что функция  $\rho(x, y) = \frac{|x - y|}{|x - y| + 1}$  является метрикой на  $\mathbb{R}$ .
2. Доказать, что функция  $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2}$  является нормой на  $\mathbb{R}^2$ .
3. Доказать, что функция  $\|x\| = \max |x_i|$  является нормой на  $c_0$ .
4. Доказать, что функция  $\|x\| = \sup |x_i|$  является нормой на  $c$ .
5. Доказать, что функция  $\rho(x, y) = \frac{|x - y|}{\sqrt{x^2 + 1}\sqrt{y^2 + 1}}$  является метрикой на  $\mathbb{R}$ .
6. Найти необходимое и достаточное условие того, чтобы заданное на плоскости было единичным шаром для некоторой метрики.

2-ое домашнее задание. Метрики и нормы

1. Доказать, что функция  $\rho_s(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|x_k - y_k|}{|x_k - y_k| + 1}$  является метрикой на пространстве всех последовательностей  $s$ .
2. Можете ли Вы придумать норму в  $s$ ?
3. Доказать, что следующие функции - нормы:
  - (a)  $\|f\| = |f(a)| + \max_{t \in [a, b]} |f(t)|$  в  $C[a, b]$ .
  - (b)  $\|f\| = \max_{t \in [a, b]} (|f(t)| + |f'(t)|)$  в  $C^1[a, b]$ .
  - (c)  $\|f\| = \int_a^b e^{\tau} |f(\tau)| d\tau$  в  $L_1[a, b]$ .

3-ье домашнее задание. Скалярное произведение

1. Доказать, что в предгильбертовом пространстве для любых  $x, y$  и  $z$  выполнено равенство

$$\|z - x\|^2 + \|z - y\|^2 = \frac{1}{2}\|x - y\|^2 + 2 \left\| z - \frac{x + y}{2} \right\|^2.$$

2. Пусть  $X$  – вещественное линейное нормированное пространство и  $\forall x, y \in X$ :

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Доказать, что формула

$$(x, y) = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

задаёт скалярное произведение в  $X$ .

3. Доказать, что в пространстве  $C[0, 1]$  нельзя ввести скалярное произведение, которое бы индуцировало норму  $\|f\| = \max |f(t)|$ .
4. Доказать, что формула  $(f, g) = \int_a^b f(t)g(t) + e^t f'(t)g'(t) dt$  задаёт скалярное произведение в  $C^1[a, b]$ .

5. Пусть  $x = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right)$  и  $y = \left(1, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^4}, \dots\right)$ . Найти  $(x, y)$  в  $\ell_2$ .

4-ое домашнее задание. Скалярное произведение

- Верно ли, что из  $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$  следует  $x \perp y$ , если а) пространство вещественное; б) пространство комплексное.
- Доказать следующие свойства ортогонального дополнения:
  - Если  $M \in N$ , то  $N^\perp \in M^\perp$ .
  - $M^\perp$  – линейное замкнутое подмножество.
  - $M \in (M^\perp)^\perp$ .
- Проверить ортогональность функций в  $L_2(0, 2\pi)$ :

$$f(x) = \sqrt{3} \sin 3x - \frac{1}{2} \sin 2x, \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cos 3x - 2 \cos 2x.$$

- Изобразить на плоскости все точки  $(a, b)$ , для которых функции будут ортогональны:

$$f(x) = e^x - 1, \quad g(x) = a \sin x - b \cos 2x + 1.$$

- Найти ненулевую функцию  $f$  такую, что  $f \perp x$  и  $f \perp y$  в  $L_2(-\pi, \pi)$ :

$$x(t) = t + 2t^2, \quad y(t) = e^t - 1.$$

5-ое домашнее задание. Сходимость последовательностей

- Исследовать сходимость в зависимости от комплексного параметра  $\alpha$  в пространствах  $c, c_0, \ell_1$ :

$$x_n = (1^\alpha, 2^\alpha, 3^\alpha, 4^\alpha, \dots, n^\alpha, 0, 0, 0, \dots).$$

- Проверить сходимость в  $c, \ell_1, \ell_2$ :

$$x_n = \left(1, \frac{1}{2 \ln 2}, \frac{1}{3 \ln 3}, \frac{1}{4 \ln 4}, \dots, \frac{1}{n \ln n}, 0, 0, 0, \dots\right).$$

- Исследовать сходимость в  $C[0, 1], C^1[0, 1], L_2[0, 1]$ :

- $f_n(t) = t^n - t^{n+1}$ ;
- $f_n(t) = ne^{-nt}$ .

6-ое домашнее задание. Линейные операторы

- Проверить линейность ограниченность и найти норму оператора:

- $A: \ell_1 \rightarrow \ell_2, Ax = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_4, \dots)$ ;
- $B: \ell_1 \rightarrow \ell_1, Bx = (x_1 - \frac{x_2}{1}, x_2 - \frac{x_3}{2}, x_3 - \frac{x_4}{3}, \dots)$ ;
- $B: \ell_2 \rightarrow \ell_2$ .
- $C: C[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, Cf = \int_0^1 (1 - 2t)f(t)dt$ ;
- $C: L_1(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ ;
- $D: C[0, 1] \rightarrow C[0, 1], Df(x) = \int_0^1 (x + t)f(t)dt$ ;
- $D: C[0, 1] \rightarrow L_1[0, 1]$ .

7-ое домашнее задание. Линейные операторы

- Проверить линейность ограниченность и найти норму оператора:

- $A: \ell_1 \rightarrow \ell_1, (Ax)_k = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_k}{k^2}$ .
- $B: \ell_1 \rightarrow C[-1, 1], Bx(t) = x_1 + x_2 t + x_3 t^2 + x_4 t^3 + \dots$
- $C: C[0, 1] \rightarrow \ell_2, (Cf)_k = \int_0^{1/k} f(t)dt$ .
- $D: C[0, 1] \rightarrow C[0, 1], Df(t) = \int_t^1 (\tau - t)f(\tau)d\tau$ .

Контрольная работа №1

(непрерывные линейные функционалы, структура сопряженного пространства)

Вариант 1

1. Доказать, что функционал в пространстве  $C[-1,1]$  является

$$\langle x, f \rangle = \frac{1}{3(x(-1) + x(1))}$$

линейным непрерывным и найти его норму

2. Является ли ограниченным в пространстве  $C[0,1]$  линейный

функционал

?

$$\langle x, f \rangle = \int_0^1 x(\sqrt{t}) dt$$

3. Найти норму и доказать непрерывность функционала

$$\langle x, f \rangle = \int_{-1}^1 tx(t) dt \quad \text{в } L_1[-1,1]$$

4. Пусть  $X$  – банахово пространство,  $f_n \in X^*$  и для любого  $x \in X$  существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x, f_n \rangle = \langle x, f \rangle$ . Доказать, что  $f \in X^*$

Вариант 2

1. Доказать, что функционал в пространстве  $C[-1,1]$  является

линейным непрерывным и найти его норму  $\langle x, f \rangle = 2(x(1) - x(0))$

2. Является ли ограниченным в пространстве  $C[0,1]$  линейный

функционал?

$$\langle x, f \rangle = \int_0^1 x(t^2) dt$$

3. Найти норму и доказать непрерывность функционала

$$\langle x, f \rangle = \int_{-1}^1 tx(t) dt \quad \text{в } L_2[-1,1]$$

4. Пусть  $X$  – линейное нормированное пространство,  $f_n \in X^*$ . Доказать, что  $f_n$  сходится тогда и только тогда, когда  $\langle x, f_n \rangle$  сходится равномерно в шаре  $\{x \in X: \|x\| < 1\}$