Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Челябинский государственный университет»

КЛАССИЧЕСКОЕ УНИВЕРСИТЕТСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

С. А. Никитина, В. И. Ухоботов

Основы вариационного исчисления и оптимального управления

Учебное пособие

Челябинск
Издательство Челябинского государственного университета
2016

Серия основана в 2008 году

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Челябинского государственного университета

Рецензенты: кафедра вычислительной математики Южно-Уральского государственного университета;

В. М. Ситников, кандидат физико-математических наук, доцент

Никитина, С. А.

Основы вариационного исчисления и оптимального управления : учеб. пособие / С. А. Никитина, В. И. Ухоботов. Челябинск : Изд-во Челяб. гос. ун-та, 2016. … с.

ISBN 978-5-7271-1339-4

Включает необходимый теоретический материал по каждой теме, большое количество примеров задач с решениями, задачи для самостоятельной подготовки, а также варианты индивидуальных заданий.

Предназначено для студентов математического факультета, обучающихся в бакалавриате по направлениям подготовки «Прикладная математика и информатика», «Фундаментальная информатика и информационные технологии», «Математика и компьютерные науки». В пособии содержится материал, изучаемый в дисциплинах «Вариационное исчисление и оптимальное управление», «Вариационное исчисление и методы оптимизации».

ISBN 978-5-7271-1339-4

Оглавление

ПРЕДИСЛОВИЕ

Вариационное исчисление занимается задачами поиска экстремума функционалов и является основой изучения теории оптимального управления.

Данное учебно-методическое пособие состоит из трёх глав, содержит необходимый теоретический материал, изложение которого сопровождается примерами решения задач, также приводятся задачи для самостоятельного решения.

Первая глава посвящена основам вариационного исчисления. В ней разъясняются понятия нормы элемента, даны определения функционала и его экстремума, приведено необходимое условие экстремума функционала. Сформулирована простейшая вариационная задача и приведено для неё необходимое условие экстремума. Записаны необходимые условия экстремума для нескольких видов задач с подвижными концами, для задачи Больца, а также рассмотрены вариационные задачи на условный экстремум.

Во второй главе даётся понятие задачи оптимального управления. Рассматривается несколько примеров прикладных задач, которые сводятся к задаче оптимального управления. В каждом приведённом примере показывается применение принципа максимума Понтрягина.

В третьей главе учебного пособия приведены варианты индивидуальных заданий.

Пособие предназначено для студентов математического факультета, изучающих дисциплины «Вариационное исчисление и оптимальное управление», «Вариационное исчисление и методы оптимизации».

1. ОСНОВЫ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

1.1. ВВЕДЕНИЕ. ПРИМЕРЫ ЗАДАЧ

Вариационное исчисление — раздел математики, в котором рассматриваются задачи поиска экстремума функционалов — переменных величин, зависящих от выбора одной или нескольких функций. Вариационное исчисление является развитием той главы математического анализа, которая посвящена задачам отыскания экстремумов функций. Возникновение и развитие вариационного исчисления тесно связано с задачами механики, физики.

Вариационное исчисление начало развиваться с 1696 года и оформилось в самостоятельную математическую дисциплину с собственными методами исследования после фундаментальных работ члена Петербургской академии наук Леонарда Эйлера (1707–1783), которого на полном основании можно считать создателем вариационного исчисления.

Разнообразие задач, приводящих к поиску максимума или минимума некоторой интегральной величины, весьма велико. Большое влияние на развитие вариационного исчисления оказали следующие задачи.

Пример 1.1.1. Задача о брахистохроне

В 1669 году И. Бернулли опубликовал статью в июньском номере журнала «Acta Eruditorium» под названием «Новая задача, к разрешению которой приглашаются математики», в которой предлагал вниманию математиков задачу о линии быстрейшего ската — брахистохроне. В этой задаче требуется определить линию, соединяющую две заданные точки A и B, не лежащие на одной вертикальной прямой и обладающую тем свойством, что материальная точка M скатится по этой линии из точки A в точку B за кратчайшее время.

Мы предположим, что точки A и B лежат в плоскости xOy с осью y, направленной вниз (рис. 1.1.1). Положим, что координаты точек $A = A(x_1, y_1)$ и $B = B(x_2, y_2)$. Пусть $y = y(x)$ — уравнение дуги, соединяющей точки A и B так, что $x_1 < x_2$, $y_1 < y_2$, $y_1 = y(x_1)$, $y_2 = y(x_2)$.

Скорость движения вдоль кривой равна $v = \frac{ds}{dt}$. Тогда время спуска равно

$$I = \int_{x_1}^{x_2} \frac{ds}{v} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{v}\, dx.$$

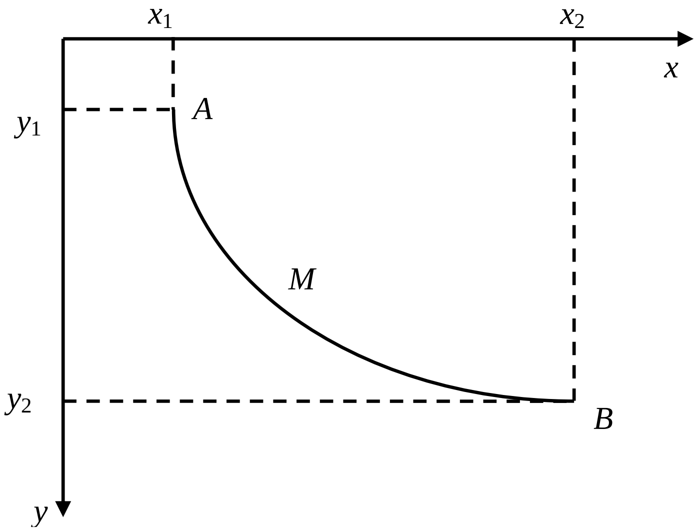

Рис. 1.1.1. Кривая наискорейшего спуска

Чтобы найти скорость y как функцию координаты x, воспользуемся законом сохранения энергии $\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = mgy - mgy_1$, где v_1 — начальная скорость движения точки, g — ускорение свободного падения. Тогда $v = \sqrt{2g(y - y_0)}$, $y_0 = y_1 - \frac{v_1^2}{2g}$, и задача свелась к выбору функции $y(x)$, для которой интеграл

$$I = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y - y_0}}\, dx$$

достигает наименьшего значения из всех возможных.

Легко видеть, что линией быстрейшего ската не будет прямая, соединяющая точки A и B (хотя она и является кратчайшим расстоянием между этими точками), так как при движении по прямой скорость движения будет нарастать сравнительно медленно; если же мы возьмём кривую, более круто спускающуюся около точки A вниз, то, хотя путь и удлинится, значительная часть пути будет пройдена с большей скоростью. Решение задачи о брахистохроне было дано И. Бернулли, Я. Бернулли, Г. Лейбницем, И. Ньютоном и Г. Лопиталем. Оказалось, что линией быстрейшего ската является циклоида.

Циклоида определяется как траектория фиксированной точки M, производящей окружности радиуса r, катящейся без скольжения по прямой (рис. 1.1.2).

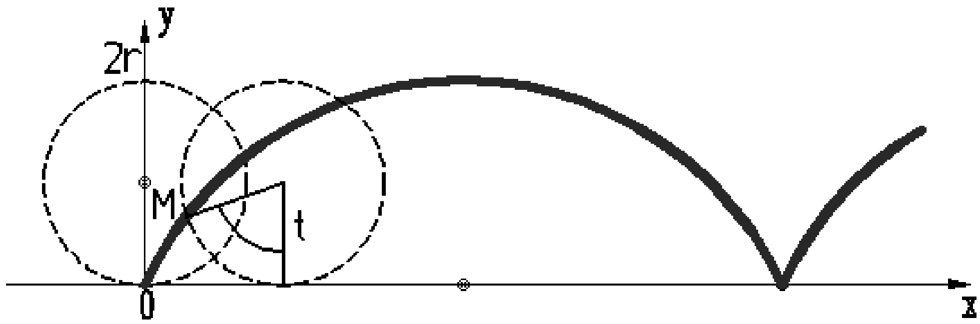

Рис. 1.1.2. Циклоида

Пример 1.1.2. Задача Дидоны

История этой задачи началась в IX веке до н. э., когда, как написал в своей поэме «Энеида» древнеримский поэт Вергилий, дочь финикийского царя принцесса Дидона, спасаясь от своего брата, замыслившего заговор против неё, снарядила корабль и со своими слугами отправилась в плавание вдоль южного побережья Средиземного моря. После нескольких дней плавания корабль причалил к живописному берегу на территории современного государства Тунис. Принцесса попросила вождя местного племени Ярба выделить ей участок земли на берегу, для того чтобы основать там своё поселение. Вождь с усмешкой предложил ей взять столько земли, сколько можно ограничить одной бычьей шкурой. Тогда хитрая Дидона приказала разрезать бычью шкуру на очень тонкие полоски, из которых сплели длинную верёвку. Этой верёвкой Дидона отгородила себе участок земли.

Формализуем задачу. Пусть для простоты линия берега является прямой. От этой прямой верёвкой заданной длины требуется отгородить участок земли наибольшей площади. Проведём оси координат так, чтобы ось *Ox* совпала с линией берега (рис. 1.1.3).

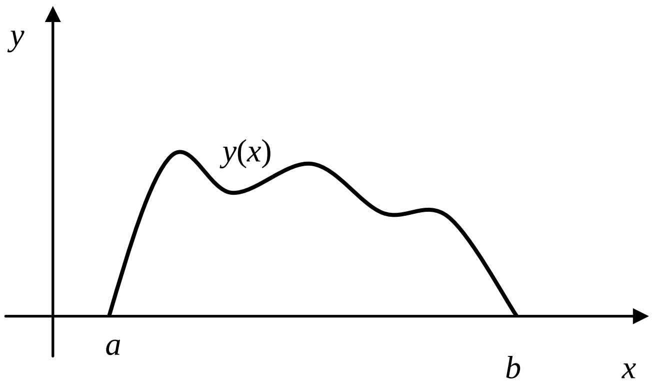

Рис. 1.1.3. Задача Дидоны

Приведём математическую постановку этой задачи. Требуется найти экстремум функционала

$$I = \int_a^b y(x)dx$$

с граничными условиями $y(a)$ = 0, $y(b)$ = 0, и при фиксированном параметре (длине кривой)

$$\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx = l.$$

Здесь a и b — точки закрепления верёвки. Решением задачи является дуга окружности, если концы нельзя двигать по побережью, и полуокружность в противном случае.

Пример 1.1.3. Задача Чаплыгина

Задача состоит в следующем: определить траекторию, по которой должен двигаться самолёт, чтобы облететь территорию максимальной площади за фиксированное время при наличии ветра (скорость ветра постоянна).

Введём на плоскости систему координат x_1Ox_2 так, чтобы скорость ветра, величина которого равна v, была направлена вдоль оси Ox_1. Управлением является угол, который образует относительная скорость самолёта с направлением ветра. Величина w относительной скорости самолёта является постоянной. Считаем, что $w > v$.

Пусть кривая, по которой летит самолёт, задана уравнениями $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$. Тогда

$$x'_1(t) = v + w\cos u,\ x'_2(t) = w\sin u.$$

Площадь S фигуры, которую облетает самолёт за заданное время T, равна

$$S = \frac{1}{2}\int_0^T (x_1(t)x'_2(t) - x_2(t)x'_1(t))dt.$$

Условие замкнутости траектории запишем в виде равенств $x_1(0) = x_1(T)$, $x_2(0) = x_2(T)$. Таким образом, имеем задачу

$$\int_0^T (x_2(t)(v + w\cos u) - x_1(t)\, w\sin u)dt \to \min,$$

$$x_1(0) - x_1(T) = 0,\ x_2(0) - x_2(T) = 0,$$

$$x_1'(t) = v + w\cos u,\ x_2'(t) = w\sin u,$$

которая называется задачей Лагранжа в понтрягинской форме.

Пример 1.1.4. Задача о перехвате цели

В момент времени $t = 0$ на высоте h, расстоянии l, по горизонтали от ракетного комплекса обнаруживается цель, которая летит с постоянной скоростью v по направлению к комплексу. В момент времени $t_0 \geq 0$ запускается ракета, которая в момент времени $t_1 \geq t_0$ осуществляет перехват цели. Управление ракеты строится из условия минимизации времени t_1.

Введём на плоскости систему координат x_1Ox_2 так, чтобы начало координат совпадало с ракетой, ось Ox_2 была направлена вверх, а ось Ox_1 в сторону движения цели (рис.1.1.4). Тогда уравнения движения ракеты имеют следующий вид

$$x_1' = x_3,\ x_2' = x_4,\ x_3' = u_1,\ x_4' = -g + u_2.$$

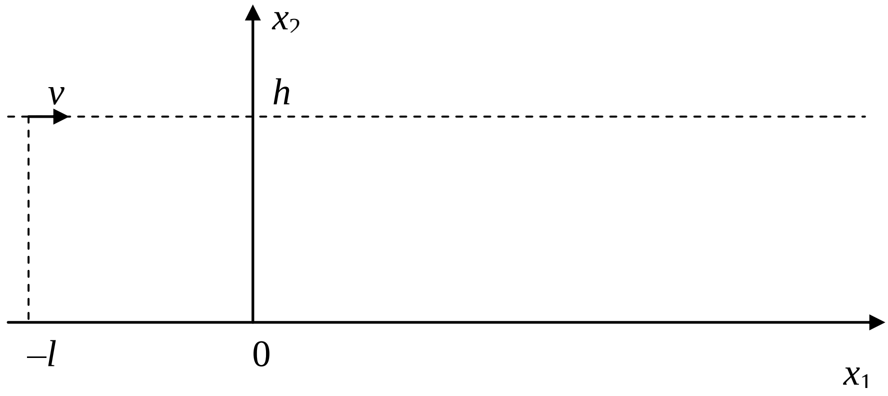

Рис. 1.1.4 Задача о перехвате цели

Запишем начальные условия

$$x_1(t_0) = 0,\ x_2(t_0) = 0,\ x_3(t_0) = 0,\ x_4(t_0) = 0$$

и условия перехвата:

$$x_1(t_1) + l - vt_1 = 0,\ x_2(t_1) - h = 0.$$

Считаем, что при управлении ракетой не можем израсходовать имеющийся запас топлива. Это приводит к ограничению

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(u_1^{\,2}(t) + u_2^2(t)\right) dt - \mu \le 0.$$

Цель выбора управления заключается в минимизации момента t_1.

Таким образом, получаем следующую задачу Лагранжа:

$$\int_{t_0}^{t_1} 1dt + t_0 \to \min\ ,\ \int_{t_0}^{t_1} \left(u_1^{\,2}(t) + u_2^2(t)\right) dt - \mu \le 0\ ,$$

$$x_1(t_0) = 0,\ x_2(t_0) = 0,\ x_3(t_0) = 0,\ x_4(t_0) = 0,$$

$$x_1(t_1) + l - vt_1 = 0,\ x_2(t_1) - h = 0,$$

$$x_1^{\prime} = x_3,\ x_2^{\prime} = x_4,\ x_3^{\prime} = u_1,\ x_4^{\prime} = -g + u_2.$$

Пример 1.1.5. Задача о минимальной поверхности вращения

Пусть требуется в плоскости xOy соединить точки $A(a,\ y_a)$ и $B(b,\ y_b)$ кривой так, чтобы боковая поверхность тела, полученного от вращения этой кривой вокруг оси Ox, имела наименьшую площадь (рис. 1.1.5).

Предполагаем, что искомая кривая является графиком гладкой монотонной функции $y(x)$, определённой на отрезке $[a,\ b]$.

Как известно, площадь S боковой поверхности тела вращения определяется формулой

$$S = 2\pi\int_a^в y \cdot ds = 2\pi\int_a^в y \cdot \sqrt{1+\left(y'\right)^2}\,dx.$$

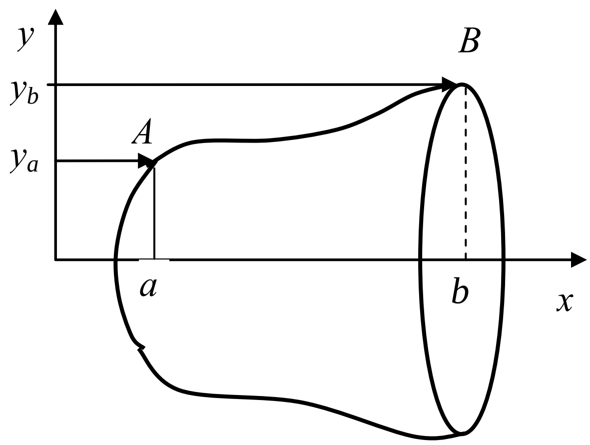

Рис. 1.1.5 Задача о минимальной поверхности вращения

Получили задачу

$$S = 2\pi\int_a^в y \cdot \sqrt{1+\left(y'\right)^2}\,dx \to \min$$

с краевыми условиями $y\,(a) = y_a$, $y(b) = y_b$.

Пример 1.1.6. Задача о геодезических линиях

На поверхности, заданной в прямоугольной системе координат уравнением $\varphi(x, y, z) = 0$, найти кривую, соединяющую точки A и B и имеющую наименьшую длину (рис. 1.1.6).

Наименьшие по длине линии между двумя точками некоторой поверхности являются геодезическими линиями этой поверхности. Например, геодезическими линиями плоскости являются прямые, геодезическими линиями на сфере — дуги большого круга.

Предположим, что поверхность $\varphi(x, y, z) = 0$ является гладкой, а искомая кривая может быть задана уравнениями $y = y(x)$, $z = z(x)$, $x \in [a, b]$, с помощью гладких функций $y(x)$ и $z(x)$.

Тогда её длина L равна

$$L = \int_A^B \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2 + (z')^2}\,dx.$$

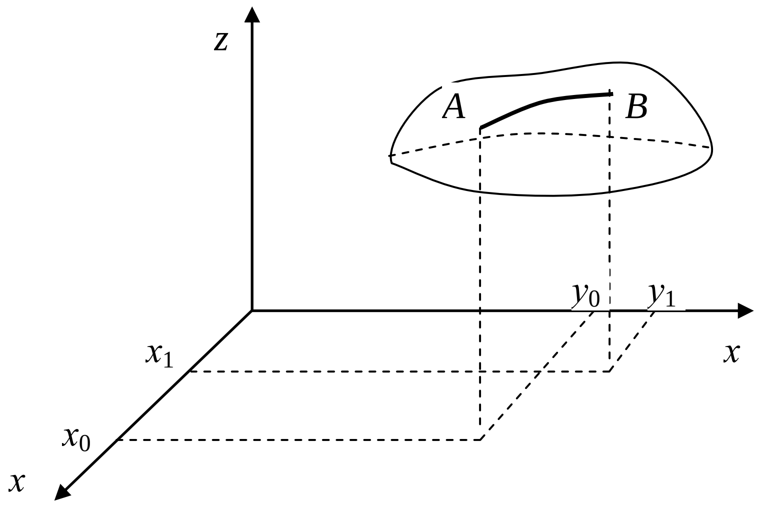

Рис. 1.1.6 Задача о геодезических линиях

Таким образом, приходим к следующей вариационной задаче. Определить такие гладкие на отрезке $[a, b]$ функций $y = y(x)$, $z = z(x)$, что $\varphi(x, y(x), z(x)) = 0$, $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$, $z(x_0) = z_0$, $z(x_1) = z_1$, а интеграл $L = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2 + (z')^2}\,dx$ принимает минимальное значение.

1.2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Напомним понятие экстремума числовой функции числового аргумента $f\colon R \to R$. Точка $a \in R$ — точка локального максимума (минимума), а значение $f(a)$ — локальный максимум (минимум), если для всех точек x, достаточно близких к a, выполняется неравенство $f(x) \le f(a)$ ($f(x) \ge f(a)$).

При этом если существует производная $f'(a)$, то $f'(a) = 0$ (необходимое условие локального экстремума). Если $f'(a) = 0$, то наличие или отсутствие локального экстремума проверяется с помощью достаточного признака локального экстремума.

Аналогично решается задача на локальный экстремум числовой функции n переменных $f\colon R^n \to R$: с помощью частных производных функции

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ищется точка $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, подозрительная на экстремум (критическая точка), и с помощью достаточного признака проверяется наличие или отсутствие локального экстремума.

В вариационном исчислении тоже решаются задачи на экстремум, но для функций, у которых значениями являются числа, а аргументами — функции.

Введём понятие функционала. Пусть дан некоторый класс M функций $x(t)$. Если каждой функции $x(t) \in M$ по некоторому закону поставлено в соответствие определённое число J, то говорят, что в классе функций M определён функционал J и пишут $J = J[x(t)]$.

Класс M функций $x(t)$, на котором определён функционал J, называется областью задания функционала.

Каждую функцию $x = x(t)$, принадлежащую какому-либо классу, мы будем рассматривать как точку некоторого пространства. Пространства, элементами которых являются функции, называются функциональными пространствами. В отличие от известных пространств, например, евклидова векторного пространства, функциональные пространства являются бесконечномерными. То есть существует бесконечно много различных функций, принадлежащих одному классу.

Пример 1.2.1. Пусть M — совокупность всех непрерывных функций, заданных на отрезке [0, 1] и пусть $J[x(t)] = \int_0^1 x(t)dt.$

Тогда $J[x(t)]$ — функционал от $x(t)$. Подставляя вместо $x(t)$ конкретные функции, будем получать значение $J[x]$.

Так, если $x(t) = 1$, то $J[1] = \int_0^1 1\, dt = 1;$

если $x(t) = e^t$, то $J[e^t] = \int_0^1 e^t dt = e - 1;$

если $x(t) = \cos\pi t$, то $J[\cos \pi t] = \int_0^1 \cos \pi t\, dt = 0.$

Мы будем изучать функционалы, действующие из линейного нормированного пространства M в пространство вещественных чисел R.

Определение 1.2.1. Множество L называется (вещественным) линейным пространством, если для любых двух его элементов x, y определён элемент $(x + y) \in L$ (называемый суммой x и y), и для любого элемента $x \in L$ и любого (вещественного) числа α определён элемент $\alpha x \in L$, причём выполнены следующие условия:

1) для любых элементов $x, y \in L$ выполнено $x + y = y + x$ (коммутативность сложения);

2) для любых элементов $x, y, z \in L$ выполнено $(x + y) + z = x + (y + z)$ (ассоциативность сложения);

3) существует элемент $\theta \in L$ (называемый нулевым элементом, или нулём пространства L), такой, что для любого элемента $x \in L$ выполнено $x + \theta = x$ (существование нулевого элемента);

4) для любого элемента $x \in L$ существует элемент $(-x) \in L$ (называемый обратным к x), такой, что $x + (-x) = \theta$ (существование обратного элемента);

5) для любых элементов $x, y \in L$ и любого (вещественного) числа α выполнено $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ (дистрибутивность умножения суммы элементов на число);

6) для любых (вещественных) чисел α и β и любого элемента $x \in L$ выполнено $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ (дистрибутивность умножения суммы чисел на элемент);

7) для любых (вещественных) чисел α, β и любого элемента $x \in L$ выполнено $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ (ассоциативность умножения на число);

8) для любого элемента $x \in L$ выполнено $1x = x$ (свойство единицы).

Примером линейного пространства является n-мерное пространство R^n.

Определение 1.2.2. Элементы $x_1, x_2, \ldots, x_m$ линейного пространства L называются линейно зависимыми, если существуют такие (вещественные) числа $C_1, C_2, \ldots, C_m$, не все равные нулю, такие что $\sum_{i=1}^{m} C_i x_i = \theta$; если же последнее равенство имеет место только в случае $C_1 = C_2 = \ldots = C_m = 0$, то элементы $x_1, x_2, \ldots, x_m$ называются линейно независимыми.

Напомним, что размерностью линейного пространства называется натуральное число n, если существуют n линейно независимых элементов пространства, а любые $n + 1$ элементов этого пространства — линейно зависимы. В этом случае линейное пространство называется конечномерным (n-мерным).

Если для любого натурального n можно указать n линейно независимых элементов, то линейное пространство называется бесконечномерным.

Определение 1.2.3. Линейное пространство N называется нормированным, если для любого элемента $x \in N$ определено (вещественное) число $\|x\|$ (называемое нормой), причём выполнены следующие условия:

1) для любого элемента $x \in N$ выполнено $\|x\| \geq 0$, причём $\|x\| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = \theta$ — нулевой элемент пространства (неотрицательность);

2) для любого элемента $x \in N$ и любого (вещественного) числа α выполнено $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ (однородность);

3) для любых элементов $x, y \in N$ $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника).

Определение 1.2.4. Последовательность элементов нормированного пространства $x_n \in N$, $n = 1, 2, \ldots$ сходится (по норме пространства N) к элементу x_0 при $n \to \infty$, если $\|x_n - x_0\| \to 0$ при $n \to \infty$.

В качестве пространства M области задания функционала мы будем рассматривать следующие пространства.

1. $C[a, b]$ — пространство функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$. Норму можно определить как $\|x\|_{c[a,b]} = \max_{t\in[a,b]}|x(t)|$.

2. $C^1[a, b]$ — пространство функций, непрерывных вместе со своими первыми производными на отрезке $[a, b]$. Норму в этом пространстве можно определить как $\|x\|_{C^1[a,b]} = \max_{x\in[a,b]}|x(t)| + \max_{t\in[a,b]}|x'(t)|$.

3. $C^p[a, b]$ — пространство функций, непрерывных вместе со своими производными до p-го порядка включительно на отрезке $[a, b]$. Норму в пространстве можно определить как $\|x\|_{C^p[a,b]} = \sum_{i=0}^{p} \max_{t\in[a,b]} \left|x^{(i)}(t)\right|$.

Отметим, что понятие нормы элементов в этих пространствах позволит ввести понятие расстояния между элементами этих пространств (т. е. между функциями). Ввиду удобства геометрического языка элементы пространства (функции) называют «точками». Норма $\|x\|$ есть расстояние от функции $x=x(t)$ до функции $x \equiv 0$, то есть от точки $x = x(t)$ до точки $x \equiv 0$.

Пример 1.2.2. Доказать, что $C[a, b]$ является линейным пространством.

Решение. Так как сумма двух непрерывных функций, а также произведение непрерывной функции на вещественное число, также являются непрерывными функциями, то для решения задачи необходимо проверить аксиомы линейного пространства:

1) для $\forall\, x(t), y(t) \in C[a, b]$ выполнено $x(t) + y(t) = y(t) + x(t)$;

2) для любых элементов $x(t), y(t), z(t) \in C[a, b]$ выполнено $(x(t) + y(t)) + z(t) = x(t) + (y(t) + z(t))$;

3) нулевым элементом пространства $C[a, b]$ считается функция $x(t) \equiv 0$;

4) для любого элемента $x(t) \in C[a, b]$ существует обратный элемент $(-x(t)) \in C[a, b]$;

5) для любых элементов $x(t), y(t) \in C[a, b]$ и любого числа α выполнено $\alpha(x(t) + y(t)) = \alpha x(t) + \alpha y(t)$;

6) для любых чисел α и β и любого элемента $x(t) \in C[a, b]$ выполнено $(\alpha + \beta)x(t) = \alpha x(t) + \beta x(t)$;

7) для любых чисел α, β и любого элемента $x(t) \in C[a, b]$ выполнено $(\alpha\beta)x(t) = \alpha(\beta x(t))$;

8) для любого элемента $x(t) \in C[a, b]$ выполнено $1x = x$.

Пример 1.2.3. Доказать, что пространство $C[a, b]$ является нормированным, если норму определить как

$$\|x\|_{C[a,b]} = \max_{t\in[a,b]} |x(t)|.$$

Решение. Для доказательства достаточно убедиться в корректности указанного определения нормы, то есть проверить аксиомы нормы:

1) $\forall\ x(t) \in C[a,\ b]$ выполнено $\|x\|_{c[a,b]} = \max_{t\in[a,b]}|x(t)| \geq 0$, причём $\|x\|_{c[a,b]} = 0$ тогда и только тогда, когда $\|x\|_{c[a,b]} \equiv 0 = \theta$;

2) $\forall x(t) \in C[a,\ b]$, $\forall\alpha\in R$ выполнено $\|\alpha x\|_{c[a,b]} = \max_{t\in[a,b]}|\alpha x(t)| = |\alpha| \cdot \max_{t\in[a,b]}|x(t)| = |\alpha| \cdot \|x(t)\|_{c[a,b]}$;

3) $\forall x(t),\ y(t) \in C[a, b]$ выполнено $\|x+y\|_{c[a,b]} = \max_{t\in[a,b]}|x(t)+y(t)| \leq \max_{t\in[a,b]}(|x(t)|+|y(t)|) \leq \max_{t\in[a,b]}(|x(t)|) + \max_{t\in[a,b]}(|y(t)|) = \|x\|_{c[a,b]} + \|y\|_{c[a,b]}$.

Пример 1.2.4. Найти норму $x(t) = t^2 - t$ в пространстве $C[0, 2]$, $C^1[0, 2]$, $C[0, 1]$, $C^1[0, 1]$.

Решение. Построим график функции $x(t) = |t^2 - t|$ на отрезке $[0, 2]$ (рис. 1.2.1). Найдём норму в пространстве $C[0, 2]$:

$$\|t^2-t\|_{C[0,2]} = \max_{t\in[0,2]}|t^2-t| = |2^2-2| = 2.$$

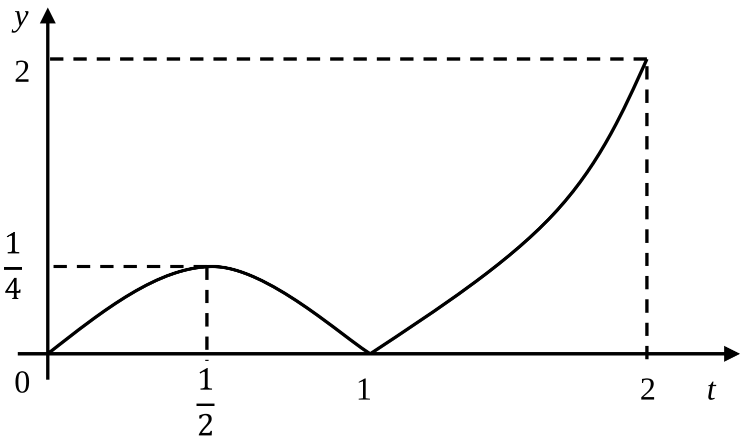

Рис. 1.2.1 График функции $x(t) = |t^2 - t|$

Найдём норму в пространстве $C^1[0, 2]$:

$$\|t^2-t\|_{C^1[0,2]} = \max_{t\in[0,2]}|t^2-t| + \max_{t\in[0,2]}|(t^2-t)'| = 2 + \max_{t\in[0,2]}|2t-1| = 2+4-1=5.$$

Найдём норму в пространстве $C[0, 1]$:

$$\|t^2-t\|_{C[0,1]} = \max_{t\in[0,1]}|t^2-t| = \left|\frac{1}{2}^2 - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{4}.$$

Найдём норму в пространстве $C^1[0, 1]$:

$$\|t^2 - t\|_{C^1[0,1]} =$$

$$\max_{t\in[0,1]}|t^2 - t| + \max_{t\in[0,1]}|(t^2 - t)'| = \frac{1}{4} + \max_{t\in[0,1]}|2t - 1| = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}.$$

Пример 1.2.5. Найти норму $x(t) = \sin t + \cos t$ в пространстве $C[0, 2\pi]$.

Решение. Построим график функции $x(t) = |\sin t + \cos t|$ на отрезке $[0,2\pi]$ (рис. 1.2.2). Найдём норму:

$$\|\sin t + \cos t\|_{C[0,2\pi]} = \max_{t\in[0,2\pi]}|\sin t + \cos t| = \sqrt{2}.$$

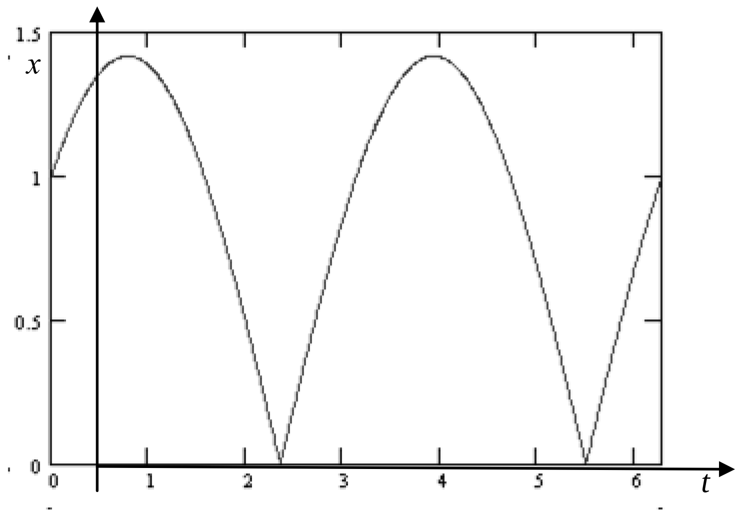

Рис. 1.2.2 График функции $x(t) = |\sin t + \cos t|$

Определение 1.2.5. Сильной ε-окрестностью точки $x_0(t)$ называется множество точек $x \in M$: $\|x - x_0\|_{C[a,b]} = \max_{t\in[a,b]}|x(t) - x_0(t)| \le \varepsilon$.

Определение 1.2.6. Слабой ε-окрестностью точки $x_0(t)$ называется множество точек $x \in M$: $\|x - x_0\|_{C^1[a,b]} = \max_{t\in[a,b]}|x(t) - x_0(t)| + \max_{t\in[a,b]}|x'(t) - x'_0(t)| \le \varepsilon$.

На рис. 1.2.3 кривая $y(t)$ лежит в сильной ε-окрестностью точки $x_0(t)$, так как график функции $y = y(t)$ находится между кривыми $x_0(t) - \varepsilon$ и $x_0(t) + \varepsilon$.

В пространстве $C^1[a, b]$ этого недостаточно, надо ещё, чтобы изгибы кривой мало отличались от изгибов кривой $x_0(t)$. На рис. 1.2.3 кривая $z(t)$ лежит в слабой ε-окрестностью точки $x_0(t)$.

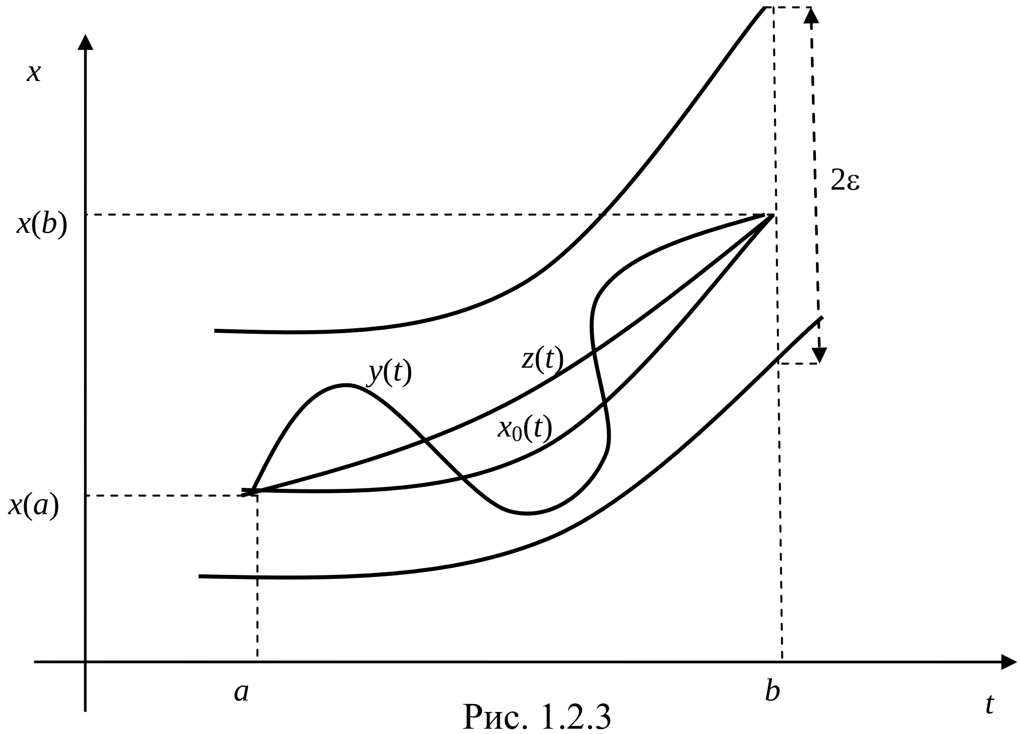

Рис. 1.2.3

Определение 1.2.7. Функционал достигает сильного минимума (максимума) на функции $x_0(t)$, если для любой функции из сильной окрестности $x_0(t)$ выполнено неравенство $J[x] \geq J[x_0]$ ($J[x] \leq J[x_0]$).

Определение 1.2.8. Функционал достигает слабого минимума (максимума) на функции $x_0(t)$, если для любой функции из слабой окрестности $x_0(t)$ выполнено неравенство $J[x] \geq J[x_0]$ ($J[x] \leq J[x_0]$).

Понятие экстремума функционала нуждается в уточнении. Говоря о максимуме или минимуме, мы имели в виду наибольшее или наименьшее значение функционала только по отношению к значениям функционала на близких кривых. Но, как было указано выше, близость кривых может быть понимаема различно, поэтому в определении максимума или минимума надо указывать, какого порядка близость имеется в виду. Если функционал $J[x(t)]$ достигает на кривой $x = x_0(t)$ максимума или минимума по отношению ко всем кривым, для которых модуль разности $|x — x_0|$ мал, то есть по отношению к кривым из сильной ε — окрестностью точки $x_0(t)$, то максимум или минимум называется сильным.

Если же функционал $J[x(t)]$ достигает на кривой $x = x_0(t)$ максимума или минимума лишь по отношению к кривым $x = x(t)$, близким к $x = x_0(t)$ не только по ординатам, но и по направлениям касательных, то есть по отношению к кривым из слабой ε — окрестностью точки $x_0(t)$, то максимум или минимум называется слабым.

Сильные и слабые экстремумы функционала являются его относительными экстремумами. Экстремум функционала на всей совокупности функций, на которых он определён, называется абсолютным экстремумом. Всякий абсолютный экстремум является относительным, но не всякий относительный экстремум будет абсолютным.

Необходимое условие слабого экстремума является необходимым условием сильного экстремума. Достаточное условие сильного экстремума является достаточным условием слабого экстремума.

Определение 1.2.9. Линейным функционалом называется функционал $L[x(t)]$, удовлетворяющий следующим условиям:

а) $L[cx(t)] = cL[x(t)]$, где c — произвольная постоянная;

б) $L[x_1(t) + x_2(t)] = L[x_1(t)] + L[x_2(t)]$.

Следующие функционалы являются линейными в пространстве $C[a, b]$:

1) $J[x] = \int_a^b x(t)dt$;

2) $J[x] = \int_a^b \alpha(t)x(t)dt$, где $\alpha(t)$ — фиксированная функция;

3) $J[x] = x(t_0)$, где $t_0 \in [a, b]$ — фиксированная точка.

Следующий функционал является линейным в пространстве $C^1[a, b]$:

$J[x] = \int_a^b [\alpha(t)x(t) + b(t)x'(t)]dt$, где $a(t)$, $b(t)$ — фиксированные функции.

Определение 1.2.10. Функционал $J[x]$ называется непрерывным в точке $x_0 \in M$, если для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ такое, что при $\forall x \in M$ $\|x - x_0\| \leq \delta$ выполняется неравенство $|J[x] - J[x_0]| \leq \varepsilon$. Другими словами, функционал $J[x]$ называется непрерывным, если малому изменению $x(t)$ соответствует малое изменение функционала $J[x]$.

Определение 1.2.11. Приращением или вариацией δx аргумента функционала $J[x(t)]$ называется разность между двумя функциями $\delta x = x(t) - x_1(t)$. При этом предполагается, что $x(t)$ меняется произвольно в некотором классе функций.

Для исследования функционала на экстремум введём понятие, аналогичное понятию производной числовой функции числовой переменной.

Пусть функционал $J[x]$ определён на некотором множестве допустимых функций М. Пусть $x_0 \in M$ — произвольная фиксированная точка, $h \in M$ — произвольный элемент M. Рассмотрим функцию вещественной переменной α, $\Phi(\alpha) \equiv J[x_0 + \alpha h]$, где α — вещественное число (в предположении, что при любом $\alpha \in R$ функция $x_0 + \alpha h$ остаётся допустимой функцией, то есть $(x_0 + \alpha h) \in M$). Приращение аргумента αh и просто h называют вариацией аргумента.

Определение 1.2.12. Если для любого $h \in M$ существует производная в точке $\alpha = 0$

$$\Phi'(\alpha) = \frac{d}{d\alpha} J[x_0 + \alpha h]_{\alpha=0},$$

то эта производная называется первой вариацией (слабой вариацией) функционала J в точке x_0 и обозначается $\delta J(x_0, h)$.

Очевидно, что $J[x_0 + \alpha h] - J[x_0] = \alpha\delta J(x_0, h) + o(|\alpha|)$.

Определение 1.2.13. Функционал $J[x]$ называется дифференцируемым в точке x_0, если для любого $h \in M$ $\Delta J = J[x_0 + h] - J[x_0] = dJ(x_0, h) + o(||h||)$, где $dJ(x_0, h)$ — линейный и непрерывный по h функционал, который иногда называют сильной вариацией в точке x_0, в то время как функционал (от h) $\delta J(x_0, h)$ — слабой вариацией в точке x_0.

Пример 1.2.6. Найти вариацию функционала

$$J[x] = x^2(0) + \int_{-1}^{1}(tx + x'^2)dx \text{ в точке } x_0.$$

Решение. Найдём сначала вариацию функционала $J[x]$, воспользовавшись первым определением (слабую вариацию).

Рассмотрим

$$J[x_0 + \alpha h] = (x_0(0) + \alpha h(0))^2 + \int_{-1}^{1}(t(x_0(t) + \alpha h(t)) + (x'_0(t) + \alpha h(t))^2)dt.$$

Вариация функционала равна

$$\delta J(x_0, h) = \frac{d}{d\alpha} J[x_0 + \alpha h]_{\alpha=0} = 2x(0)h(0) + \int_{-1}^{1}(th(t) + 2x'_0(t)h'(t))dt.$$

Теперь воспользуемся вторым определением и найдём вариацию как линейную часть приращения функционала в точке x_0 (сильную вариацию). Зададим приращение аргумента функционала — произвольную непрерывно дифференцируемую функцию $h(t) : h(-1) = h(1) = 0$, и найдём приращение

$$\Delta J = J[x_0 + h] - J[x_0] =$$

$$= (x_0(0) + h(0))^2 + \int_{-1}^{1}(t(x_0(t) + h(t)) + (x'_0(t) + h(t))^2)dt - \left(x_0(0)\right)^2 +$$

$$-11tx0(t)+x'0t2dt =$$

$$= 2x(0)h(0) + \int_{-1}^{1}(th(t) + 2x'_0(t)h'(t))dt + h^2(0) + \int_{-1}^{1} h'^2(t)dt.$$

Линейная относительно h часть приращения — первые два слагаемые последнего равенства — и есть искомая (сильная) вариация

$$dJ(x_0, h) = 2x(0)h(0) + \int_{-1}^{1}(th(t) + 2x'_0(t)h'(t))dt,$$

которая в данном случае совпадает с полученной ранее (слабой) вариацией $\delta J(x_0, h)$.

Теорема 1.2.1 (необходимое условие экстремума). Пусть точка $x_0 \in M$ является точкой экстремума функционала $J[x]$, и в этой точке существует вариация $\delta J(x_0, h)$ для всякого $h \in M$, тогда $\delta J(x_0, h) = 0$.

Теорема 1.2.2 (теорема Лейбница о дифференцировании под знаком интеграла). Если функция $f(x, y)$ и её частная производная $f_y'(x,y)$ непрерывна в прямоугольнике $\{(x, y) : x \in [a, b], y \in [c, d]\}$, то

$$\forall\, y \in [c, d] \text{ выполнено } \left(\int_a^b f(x,y)dx\right)'_y = \int_a^b f'_y(x,y)dx.$$

Лемма 1.2.1 (лемма Лагранжа). Пусть $a(t)$ — (фиксированная) непрерывная на $[a, b]$ функция и $\int_a^b a(t)h(t)dt = 0$ для любой непрерывно дифференцируемой функции $h(t)$, такой, что $h(a) = h(b) = 0$. Тогда $a(t) \equiv 0$.

Задачи для самостоятельного решения

1.2.1. Найти нормы следующих функций, рассматривая их как элементы пространств $C[0, 2]$ и $C^1[0, 2]$:

а) $x(t) = 2\sin\pi t - \cos\pi t$;

б) $x(t) = 3\cos\pi t - \sin\pi t$;

в) $x(t) = t^2 - 6t$;

г) $x(t) = t^2 - 4t$.

1.2.2. Найти норму функции $x(t) = t^2 - t^3$ в пространстве $C[0, 1]$ и $C^1[0, 1]$.

1.2.3. Найти вариацию функционала:

а) $J[x] = \int_a^b xx'dt$;

б) $J[x] = \int_a^b (t + x)dt$;

в) $J[x] = \int_a^b (x^2 - x'^2)dt$;

г) $J[x] = \int_0^\pi (x' \sin x)dt$;

д) $J[x] = \int_{-1}^0 (tx - x'^2)dt$;

е) $J[x] = \int_0^\pi (x''^2 - x^2)dt$;

ж) $J[x] = \int_0^1 (t^2 x - x'^2)dt$.

1.3. ПРОСТЕЙШАЯ ЗАДАЧА ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Простейшая вариационная задача (задача с закреплёнными концами) состоит в следующем: среди всех функций $x \in C^1[a, b]$, удовлетворяющих краевым условиям $x(a) = A$, $x(b) = B$ (A, B — заданные числа), найти ту функцию, которая доставляет экстремум функционалу

$$J[x] = \int_a^b F(t, x, x')dt \to extr\,. \tag{1.3.1}$$

Здесь $F(t, x, x')$ — функция трёх переменных, называемая интегрантом.

Иначе говоря, простейшая задача вариационного исчисления состоит в отыскании слабого экстремума функционала вида (1.3.1) на множестве всех гладких кривых, соединяющих две заданные точки.

Теорема 1.3.1 (Необходимое условие слабого экстремума в простейшей задаче вариационного исчисления). Пусть U — открытое множество в пространстве R^3, функция F: $U \to R$ — непрерывная вместе со своими частными производными F_x, $F_{x'}$, функция $x \in C^1[a, b]$, удовлетворяет условиям $x(a) = A$, $x(b) = B$. Тогда, если $x(t)$ доставляет слабый экстремум в простейшей задаче вариационного исчисления, то выполнено

$$F_x(t) - \frac{d}{dt}F_{x'}(t) = 0. \qquad (1.3.2)$$

Замечание. Уравнение (1.3.2) называется уравнением Эйлера (опубликовано в 1744 году).

Определение 1.3.1. Функции $x(t)$, являющиеся решениями уравнения Эйлера, называются экстремалями. Если экстремаль $x(t)$ удовлетворяет граничным условиям $x(a) = A$, $x(b) = B$, то она называется допустимой.

Уравнение Эйлера представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка. Его решение должно зависеть, вообще говоря, от двух произвольных постоянных, которые определяются из двух краевых условий $x(a) = A$, $x(b) = B$. В развёрнутом виде уравнение имеет вид

$$F_x - F_{x't} - F_{xx'}x' - F_{x'x'}x'' = 0\,.$$

Правило решения

1. Привести задачу к виду

$$J[x] = \int_a^b F(t, x, x')dt \to extr\,,\ x(a) = A,\ x(b) = B.$$

2. Выписать необходимое условие — уравнение Эйлера (1.3.2).

3. Найти допустимые экстремали.

4. Доказать, что решением является одна из допустимых экстремалей, или показать, что решения нет.

Пример 1.3.1. Найти допустимую экстремаль в простейшей задаче вариационного исчисления

$$J[x] = \int_0^1 (x^2 + x'^2)dt \to \text{extr},\ x(0) = 0,\ x(1) = 0.$$

Доказать, что на полученной экстремали достигается экстремум функционала путём непосредственного нахождения приращения функционала.

Решение. Выпишем функцию $F(t, x, x') = x^2 + x'^2$. Составим уравнение Эйлера, для этого найдём $F_x = 2x$, $F_{x'} = 2x'$. Уравнение Эйлера для функционала в исследуемой задаче имеет вид

$$x'' - x = 0.$$

Общее решение этого уравнения будет $x = C_1e^t + C_2e^{-t}$. Краевым условиям удовлетворяет экстремаль $x_0(t) \equiv 0$.

Докажем, что на полученной экстремали достигается экстремум функционала путём непосредственного вычисления приращения функционала. Непосредственное вычисление приращения функционала на кривой $x_0(t) \equiv 0$ даёт

$$\Delta J = J[x_0 + h] - J[x_0] = \int_0^1 (x^2 + x'^2)dt \geq 0.$$

Так как $\Delta J \geq 0$, то на экстремали $x_0(t) \equiv 0$ реализуется минимум.

Пример 1.3.2. Найти допустимую экстремаль в простейшей задаче вариационного исчисления:

$$J[x] = \int_{-1}^0 (12tx + x'^2)dt \to \text{extr},$$

$$x(-1) = 1,\ x(0) = 0.$$

Доказать, что на полученной экстремали достигается экстремум функционала путём непосредственного нахождения приращения функционала.

Решение. Выпишем функцию $F(t, x, x') = 12tx + x'^2$. Составим уравнение Эйлера, для этого найдём $F_x = 12t$, $F_{x'} = 2x'$. Уравнение Эйлера для функционала в исследуемой задаче имеет вид

$$x'' + 6x = 0.$$

Общее решение этого уравнения будет $x = -t^3 + C_1 t + C_2$. Краевым условиям удовлетворяет экстремаль $x_0(t) = -t^3$.

Докажем, что на полученной экстремали достигается экстремум функционала путём непосредственного нахождения приращения функционала. Зададим приращение аргумента функционала — произвольную непрерывно дифференцируемую функцию $h(t)$, удовлетворяющую условиям $h(-1) = h(0) = 0$, и найдём приращение функционала на экстремали $x_0(t) = -t^3$.

$$\Delta J = J[x_0 + h\ ] - J[x_0] = J[-t^3 + h] - J[-t^3] =$$

$$= \int_{-1}^{0} \left[12t(-t^3 + h) - (-3t^2 + h')^2\right] dt - \int_{-1}^{0} \left[12t(-t^3) - (-3t^2)^2\right] dt =$$

$$= \int_{-1}^{0} \left[12th + 6t^2 h' - h'^2\right] dt = \int_{-1}^{0} \left[12th - h'^2\right] dt + \underbrace{\int_{-1}^{0} 6t^2 h'\, dt}_{инт.по\, частям} =$$

$$= \underbrace{6t^2 h\Big|_{-1}^{0}}_{=0} - \int_{-1}^{0} 12th dt + \int_{-1}^{0} \left[12th - h'^2\right] dt = -\int_{-1}^{0} h'^2\, dt \le 0\,.$$

Итак, $\Delta J \le 0$, поэтому на экстремали $x_0(t) = -t^3$ реализуется сильный максимум.

Пример 1.3.3. Найти допустимую экстремаль в простейшей задаче вариационного исчисления

$$J[x] = \int_{0}^{\pi} (x^2 - x'^2) dt \to \text{extr},\ x(0) = x(\pi) = 0.$$

Решение. Выпишем функцию $F(t, x, x') = x^2 - x'^2$. Составим уравнение Эйлера, для этого найдём $F_x = 2x$, $F_{x'} = -2x'$. Уравнение Эйлера для функционала в исследуемой задаче имеет вид

$$x'' + x = 0.$$

Общее решение этого уравнения будет $x = C_1\cos t + C_2\sin t$. Из граничных условий следует, что C_1 — любое, $C_2 = 0$, поэтому задача имеет бесконечно много решений.

Простейшие случаи интегрируемости уравнения Эйлера

В развёрнутом виде уравнение Эйлера (1.3.1) имеет вид

$$F_x - F_{x't} - F_{xx'}x' - F_{x'x'}x'' = 0\,.$$

Приёмы интегрирования уравнения Эйлера зависят от конкретного вида функции $F(t, x, x')$. Приведём некоторые примеры для некоторых, часто встречающихся случаев.

1. Функция F не зависит явно от t.

Уравнение Эйлера в этом случае имеет вид $F_x - F_{xx'}x' - F_{x'x'}x'' = 0$.

Умножив это уравнение на x', получим $\dfrac{d}{dt}\left(F - x' \cdot F_{x'}\right) = 0$ и найдём первый интеграл (интеграл энергии)

$$F - x' \cdot F_x{}' = C,$$

где C — произвольная постоянная.

Дальнейшее интегрирование производится методами, развитыми для дифференциальных уравнений первого порядка, не разрешённых относительно производной.

1. Функция F не зависит от x.

Уравнение Эйлера принимает вид $\dfrac{d}{dt}\left(F_{x'}(t, x')\right) = 0$ и имеет первый интеграл (интеграл импульса)

$$F_{x'}(t, x') = C,$$

где C — произвольная постоянная.

Дальнейшее интегрирование производится путём разрешения относительно производной либо путём введения параметра.

2. Функция F не зависит от x'.

Уравнение Эйлера в этом случае имеет вид $F_x(t,x)=0$, то есть не является дифференциальным, поэтому его решение (если оно существует) представляет собой одну или несколько кривых, которые, вообще говоря, могут не удовлетворять граничным условиям $x(a) = A$, $x(b) = B$. Поэтому решение краевой задачи для уравнения Эйлера в рассматриваемом случае, вообще говоря, не существует.

3. Функция F зависит только от x'.

Уравнение Эйлера в этом случае имеет вид $\frac{d}{dt}\big(F_{x'}(x')\big)=0$. Нетрудно увидеть, что это уравнение допускает понижение порядка $F_{x'}(x') = C$. Все решения этого уравнения можно записать в виде $x' = C_1$, где C_1 — произвольная постоянная. Таким образом, экстремалями функционала в этом случае является семейство линейных функций $x = C_1t + C_2$ с произвольными постоянными C_1 и C_2.

Пример 1.3.4. Решить задачу о брахистохроне (см. пример 1.1.1):

$$I=\int_0^b \frac{\sqrt{1+x'^2}}{\sqrt{2gx}}\,dt \to \min,$$

$$x(0) = 0,\ x(b) = B.$$

Решение. Выпишем функцию $F=\frac{\sqrt{1+x'^2}}{\sqrt{2gx}}$ — она не зависит от t. Следовательно, выполняется $F - x' \cdot F_{x'} = C_1$. Поэтому можно записать

$$\frac{\sqrt{1+x'^2}}{\sqrt{2gx}} - x' \cdot \frac{x'}{\sqrt{2gx}\cdot\sqrt{1+x'^2}} = C_1.$$

Откуда получаем

$$\frac{1}{\sqrt{2gx}\cdot\sqrt{x\left(1+x'^2\right)}} = C_1 \text{ или } \frac{1}{\sqrt{x\left(1+x'^2\right)}} = C_2.$$

После выполнения преобразований, уравнение примет вид

$$x(1+x'^2) = C.$$

Получили дифференциальное уравнение первого порядка, не разрешённое относительно производной. Решим его методом введения параметра. Пусть $x' = \mathrm{ctg}\varphi$, где φ — параметр.

Поскольку $x' = \mathrm{ctg}\varphi$, то $1 + x'^2 = \frac{1}{\sin^2\varphi}$. Уравнение будет

$$x = C \cdot \sin^2\varphi.$$

Найдём $dx = 2C\sin\varphi\cos\varphi d\varphi$. С другой стороны, $x' = \mathrm{ctg}\varphi$, то есть $dx = \mathrm{ctg}\varphi dt$. Поэтому $dt = \mathrm{tg}\varphi dx$. Значит, уравнение будет

$$dt = 2C\mathrm{tg}\varphi\sin\varphi\cos\varphi d\varphi.$$

Интегрируем последнее уравнение, получим

$$t = 2C\int \sin^2\varphi\, d\varphi = C\int (1 - \cos 2\varphi) d\varphi = c\varphi - \frac{C}{2}\sin 2\varphi + C_3.$$

Таким образом,

$$t = \frac{C}{2}(2\varphi - \sin 2\varphi) + C_3,\ x = C\sin^2\varphi = \frac{C}{2}(1 - \cos 2\varphi).$$

Обозначим $C/2 = r$, $2\varphi = \tau$. Тогда окончательно получим решение в параметрическом виде

$$t = r(\tau - \sin\tau) + C_3,$$

$$x = r(1 - \cos\tau).$$

Полученная линия является циклоидой.

Пример 1.3.5. Найти экстремаль функционала $J[x] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(2t - x)dt$ при условиях $x(0) = 0$, $x(\pi/2) = \pi/2$. Доказать, что на полученной экстремали достигается экстремум функционала путём непосредственного нахождения приращения функционала.

Решение. Выпишем функцию $F = x(2t - x)$ — не зависит от x'. Уравнение Эйлера имеет вид $2t - 2x = 0$. Откуда получаем $x = t$. Эта функция удовлетворяет краевым условиям, значит, $x_0 = t$ — единственная допустимая экстремаль.

Докажем, что на полученной экстремали достигается экстремум функционала путём вычисления приращения функционала. Зададим приращение аргумента функционала — произвольную непрерывно дифференцируемую функцию $h(t)$, удовлетворяющую условиям $h(0) = 0$, $h(\pi/2) = \pi/2$, и найдём приращение функционала на экстремали $x_0(t) = t$.

$$\Delta J = J[x_0 + h\ ] - J[x_0] = J[t + h] - J[t] =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[(t+h)(2t-t-h) - t(2t-t)\right]dt = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} h^2 dt \le 0.$$

Итак, приращение $\Delta J \le 0$, поэтому на экстремали $x_0(t) = t$ реализуется максимум.

Пример 1.3.6. Найти экстремаль функционала $J[x] = \int_1^2 x'(1+t^3x')dt$ при условиях $x(1) = 2$, $x(2) = 5$. Доказать, что на полученной экстремали достигается экстремум функционала путём непосредственного нахождения приращения функционала.

Решение. Выпишем функцию $F = x'(1 + t^3x')$ — не зависит от x. Уравнение Эйлера имеет вид $1 + 2tx' = 0$. Откуда следует, что $x = \frac{c_1}{t} + c_2$. Подставляем краевые условия, получаем, $x_0 = -\frac{4}{t} + 7$.

Докажем, что на полученной экстремали достигается экстремум функционала путём нахождения приращения функционала. Зададим приращение аргумента функционала — произвольную непрерывно дифференцируемую функцию $h(t)$, удовлетворяющую условиям $h(1) = 0$, $h(2) = 0$, и найдём приращение функционала на экстремали $x_0 = -\frac{4}{t} + 7$.

$$\Delta J = J[x_0 + h] - J[x_0] =$$

$$= \int_1^2 \left[h' + t^2(2x'_0\, h' + h'^2)\right]dt = \underbrace{9h\Big|_1^2}_{=0} + \int_1^2 t^2 h'^2 dt \ge 0.$$

Итак, приращение $\Delta J \ge 0$, поэтому на экстремали $x_0 = -\frac{4}{t} + 7$ реализуется сильный минимум.

Задачи для самостоятельного решения

1.3.1. Найти экстремаль функционала $J[x]$ при указанных условиях. Доказать, что на полученной экстремали достигается экстремум функционала путём непосредственного нахождения приращения функционала:

а) $J[x] = \int_{-1}^{0}(12tx - x'^2)dt \to extr$; $x(-1) = 1, x(0) = 0$;

б) $J[x] = \int_{1}^{2}(2t - x)dt \to extr$; $x(1) = 1, x(2) = 3$;

в) $J[x] = \int_{1}^{2} t^2x'^2dt \to extr$; $x(1) = 3, x(2) = 1$;

г) $J[x] = \int_{0}^{1}(x - x'^2)dt \to extr$; $x(0) = 0, x(1) = 0$;

д) $J[x] = \int_{0}^{1}(x'^2 + xt)dt \to extr$; $x(0) = 0, x(1) = 0$;

е) $J[x] = \int_{0}^{1} x'^3dt \to extr$; $x(0) = 0, x(1) = 1$;

ж) $J[x] = \int_{0}^{3}(x'^2 - x)dt \to extr$; $x(0) = 0, x(3) = 0$;

з) $J[x] = \int_{0}^{1}(t^2x - x'^2)dt \to extr$; $x(0) = 0, x(1) = 0$;

и) $J[x] = \int_{1}^{\mathrm{e}} tx'^2dt \to extr$; $x(1) = 0, x(\mathrm{e}) = 1$;

к) $J[x] = \int_{1}^{\mathrm{e}}(tx'^2 + 2x)dt \to extr$; $x(1) = 1, x(\mathrm{e}) = 0$;

л) $J[x] = \int_{1}^{\mathrm{e}}(2x - tx'^2)dt \to extr$; $x(1) = \mathrm{e}, x(\mathrm{e}) = 0$;

м) $J[x] = \int_{1}^{2} x'(1 + x't^2)dt \to extr$; $x(1) = 2, x(2) = 5$;

н) $J[x] = \int_{0}^{1}(x^2 + x'^2)dt \to extr$; $x(0) = 1, x(1) = \mathrm{e}$.

1.3.2. Найти допустимые экстремали:

а) $J[x] = \int_{-1}^{1}(x'^2 + x^2)dt \to extr$; $x(-1) = x(1) = 1$;

б) $J[x] = \int_{1}^{e}(tx'^2 + xx')dt \to extr$; $x(1) = 0, x(\mathrm{e}) = 1$;

в) $J[x] = \int_{1}^{\frac{\pi}{2}}(2x + x^2 - x'^2)dt \to extr$; $x(0) = x(\pi/2) = 0$;

г) $J[x] = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(x'^2 - x^2 - tx)dt \to extr$; $x(0) = (\pi/2) = 0$;

д) $J[x] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x'^2 - x^2 - 4x\mathrm{sh}t)dt \to extr$; $x(0) = (\pi/2) = 0$;

е) $J[x] = \int_0^2 (tx'^3 - 3xx'^2)dt \to extr$; $x(0) = 4$, $x(2) = 6$;

ж) $J[x] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (6x\sin 2t - x'^2 + x^2)dt \to extr$; $x(0) = (\pi/2) = 0$;

з) $J[x] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4x\sin 2t - x'^2 + x^2)dt \to extr$; $x(0) = (\pi/2) = 0$;

и) $J[x] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4x\cos 2t + x'^2 - x^2)dt \to extr$; $x(0) = (\pi/2) = 0$;

к) $J[x] = \int_0^1 (x^2 - x'^2)e^{2t}dt \to extr$; $x(0) = 0$, $x(1) = e$.

1.4. ПРОСТЕЙШАЯ ЗАДАЧА ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ В ВЕКТОРНОМ СЛУЧАЕ

Ранее было сформулировано правило решения для одномерной простейшей задачи вариационного исчисления. Укажем необходимые изменения для векторного случая.

Пусть в задаче (1.3.1) $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$, а $F = F(t, x_1, \ldots, x_n, x'_1, \ldots, x'_n)$ — функция $2n + 1$ переменных. Рассмотрим задачу отыскания экстремума функционала

$$J[x_1, \ldots, x_n] = \int_a^b F(t, x_1, \ldots, x_n, x'_1, \ldots, x'_n)dt \to extr$$

при заданных граничных условиях

$$x_i(a) = A_i,\ x_i(b) = B_i,\ i = 1, \ldots, n.$$

Необходимые условия в простейшей векторной задаче состоят из системы уравнений Эйлера

$$F_{x_i} - \frac{d}{dt}F_{x'_i} = 0, i = 1, \ldots, n. \qquad (1.3.3)$$

Пример 1.4.1. Найти допустимые экстремали

$$J[x_1, x_2] = \int_0^1 (x'_1 x'_2 + 6tx_1 + 12t^2 x_2)dt \to \mathrm{extr},$$

$$x_1(0) = x_2(0) = 0,\ x_1(1) = x_2(1) = 1.$$

Решение. Выпишем функцию $F(t,\ x_1,\ x_2,\ x'_1,\ x'_2)\ =\ x'_1 x'_2 + 6tx_1 + 12t^2 x_2$. Составим систему уравнений Эйлера, для этого найдём $F_{x_1} = 6t$, $F_{x2} = 12t^2$, $F_{x'_1} = x'_2$, $F_{x'_2} = x'_1$. Система уравнений Эйлера в исследуемой задаче имеет вид

$$\begin{cases} 6t - \dfrac{d}{dt}x'_2 = 0; \\ 12t^2 - \dfrac{d}{dt}x'_1 = 0. \end{cases}$$

Решаем полученную систему

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x'_2 = 6t; \\ \frac{d}{dt}x'_1 = 12t^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'_2 = 3t^2 + C_1; \\ x'_1 = 4t^3 + C_3. \end{cases}$$

Экстремалями будут функции $x_1 = t^4 + C_3 t + C_4$ и $x_2 = t^3 + C_1 t + C_2$.

Используя граничные условия $x_1(0) = x_2(0) = 0$, $x_1(1) = x_2(1) = 1$, находим константы $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$.

Таким образом, допустимые экстремали имеют вид $x_1 = t^4$ и $x_2 = t^3$.

Пример 1.4.2. Найти допустимые экстремали

$$J[x_1, x_2] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x_1 x_2 + x'^2_1 + x'^2_2)dt \to \text{extr},$$

$$x_1(0) = x_2(0) = 0,\ x_1(\pi/2) = 1,\ x_2(\pi/2) = -1.$$

Решение. Выпишем функцию $F(t, x_1, x_2, x'_1, x'_2) = 2x_1 x_2 + x'^2_1 + x'^2_2$. Составим систему уравнений Эйлера, для этого найдём $F_{x1} = 2x_1$, $F_{x2} = 2x_2$, $F_{x1'} = 2x_1'$, $F_{x2'} = 2x_2'$. Система уравнений Эйлера в исследуемой задаче имеет вид

$$\begin{cases} 2x_2 - \dfrac{d}{dt}(2x'_1) = 0; \\ 2x_1 - \dfrac{d}{dt}(2x'_2) = 0. \end{cases}$$

Решаем полученную систему

$$\begin{cases} x_2 - x''_1 = 0; \\ x_1 - x''_2 = 0. \end{cases}$$

Подставим x_2 из первого уравнения системы во второе уравнение этой системы, получим $x_1 - x_1^{\text{IV}} = 0$ — линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение будет $p^4 - 1 = 0$. Корни характеристического уравнения $p_{1,2} = \pm 1$, $p_{3,4} = \pm i$. Запишем функцию $x_1 = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 \cos t + C_4 \sin t$. Следовательно, функция $x_2 = x''_1 = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - C_3 \cos t - C_4 \sin t$.

Экстремалями будут функции $x_1 = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 \cos t + C_4 \sin t$ и $x_2 = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - C_3 \cos t - C_4 \sin t$.

Используя граничные условия $x_1(0) = x_2(0) = 0$, $x_1(\pi/2) = 1$, $x_2(\pi/2) = -1$, находим константы C_1, C_2, C_3, C_4. Для этого составим систему уравнений

$$\begin{cases} 0 = C_1 + C_2 + C_3; \\ 0 = C_1 + C_2 - C_3; \\ 1 = C_1 e^{\frac{\pi}{2}} + C_2 e^{-\frac{\pi}{2}} + C_4; \\ -1 = C_1 e^{\frac{\pi}{2}} + C_2 e^{-\frac{\pi}{2}} - C_4. \end{cases}$$

Из этой системы уравнений находим константы $C_1 = C_2 = C_3 = 0$, $C_4 = 1$. Таким образом, допустимые экстремали имеют вид $x_1 = \sin t$ и $x_2 = -\sin t$.

Задачи для самостоятельного решения

1.4.1. Найти допустимые экстремали:

а) $J[x_1, x_2] = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (x_1'^2 - 2x_1 x_2 + x_2'^2 + 2)dt \to \text{extr}$, $x_1(0) = x_2(0) = 0$, $x_1(\pi/2) = x_2(\pi/2) = 1$.

б) $J[x_1, x_2] = \int\limits_1^2 (x_1'^2 + x_2^2 + x_2'^2)dt \to \text{extr}$, $x_1(1) = 1$, $x_2(1) = 0$, $x_1(2) = 2$, $x_2(2) = 1$.

в) $J[x_1, x_2] = \int\limits_0^1 (x_1'^2 + 2x_1 + x_2'^2)dt \to \text{extr}$, $x_1(0) = x_2(0) = 1$, $x_1(1) = 3/2$, $x_2(1) = 1$.

г) $J[x_1, x_2] = \int\limits_{-1}^1 (2tx_1 - x_1'^2 + \frac{x_2'^3}{3})dt \to \text{extr}$, $x_1(-1) = 2$, $x_2(-1) = -1$, $x_1(1) = 0$, $x_2(1) = 1$.

д) $J[x_1, x_2] = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (x_1'^2 - 2x_1 x_2 - x_2'^2 + 2x_2 - 4x_1^2)dt \to \text{extr}$, $x_1(0) = x_2(0) = 0$, $x_1(\pi/4) = x_2(\pi/4) = 1$.

1.5. Задача со старшими производными

Рассмотрим следующую задачу вариационного исчисления

$$J[x] = \int_a^b F(t, x, x', x'', ..., x^{(n)})dt \to \text{extr} \qquad (1.5.1)$$

граничные условия имеют вид

$$\begin{gathered} x(a) = A_0, x(b) = B_0, \\ x'(a) = A_1, x'(b) = B_1, \\ \dots \\ x^{(n-1)}(a) = A_{n-1}, x^{(n-1)}(b) = B_{n-1}. \end{gathered} \qquad (1.5.2)$$

Здесь числа a и b фиксированы. Функция $F(t, x, x', x'', ..., x^{(n)})$ — зависит от $n + 2$ переменных. Функции $x \in C^n[a, b]$, удовлетворяющие заданным краевым условиям (1.5.2), называются допустимыми.

Определение 1.5.1. Допустимая функция $x \in C^n[a, b]$ доставляет слабый минимум (максимум) в задаче (1.5.1), (1.5.2), если существует число $\varepsilon > 0$, такое, что для любой допустимой функции $h(\cdot) \in C^n[a, b]$, для которой $\|x(\cdot) - h(\cdot)\|_{C^n[a,b]} \le \varepsilon$, выполняется неравенство $J[x(\cdot)] \le J[h(\cdot)]$ ($J[x(\cdot)] \ge J[h(\cdot)]$).

Теорема 1.5.1 (Необходимое условие слабого экстремума в задаче со старшими производными). Пусть U — открытое множество в пространстве R^{n+2}, функция F: $U \to R$ — непрерывная вместе со своими частными производными по $x, x', \dots, x^{(n)}$, функция $x \in C^n[a, b]$, удовлетворяет условиям (1.5.2). Тогда, если $x(t)$ доставляет слабый экстремум в задаче (1.5.1), то выполнено уравнение

$$F_x - \frac{d}{dt}F_{x'} + \frac{d^2}{dt^2}F_{x''} + ... + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}F_{x^{(n)}} = 0. \qquad (1.5.3)$$

Замечание. Уравнение (1.5.3) называется уравнением Эйлера — Пуассона.

Правило решения

1. Привести задачу к виду (1.5.1).

2. Выписать необходимое условие — уравнение Эйлера — Пуассона (1.5.3).

3. Найти допустимые экстремали, то есть решения уравнения (1.5.3), удовлетворяющие граничным условиям (1.5.2).

4. Доказать, что решением является одна из допустимых экстремалей, или показать, что решения нет.

Пример 1.5.1. Решить задачу со старшими производными

$$J[x] = \int_0^2 \left(x''^2 + x'^2\right)dt \to \text{extr},$$

$$x(0) = x'(0) = x(2) = x'(2) = 0.$$

Решение. Выпишем функцию $F(t, x, x', x'') = x''^2 + x'^2$. Составим уравнение Эйлера — Пуассона, для этого найдём $F_x = 0$, $F_{x'} = 2x'$, $F_{x''} = 2x''$. Уравнение Эйлера — Пуассона для функционала в исследуемой задаче имеет вид

$$-\frac{d}{dt}(2x') + \frac{d^2}{dt^2}(2x'') = 0.$$

Приведём уравнение к виду $x^{(4)} - x'' = 0$. Полученное уравнение является линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение имеет вид $p^4 - p^2 = 0$. Корни характеристического уравнения $p_{1,2} = 0$, $p_{3,4} = \pm 1$. Следовательно, функция $x(t) = C_1 t + C_2 + C_3 e^t + C_4 e^{-t}$. Запишем производную найденной функции $x'(t) = C_1 + C_3 e^t - C_4 e^{-t}$.

Используя граничные условия $x(0) = x'(0) = x(2) = x'(2) = 0$, находим константы C_1, C_2, C_3, C_4. Для этого составим систему уравнений

$$\begin{cases} 0 = C_2 + C_3 + C_4; \\ 0 = C_1 + C_3 - C_4; \\ 0 = 2C_1 + C_2 + C_3 e^2 + C_4 e^{-2}; \\ 0 = C_1 + C_3 e^2 - C_4 e^{-2}. \end{cases}$$

Из этой системы уравнений находим константы $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$. Таким образом, допустимая экстремаль имеет вид $x_0 \equiv 0$.

Докажем, что на полученной экстремали достигается экстремум функционала путём непосредственного нахождения приращения функционала. Зададим приращение аргумента функционала — произвольную дважды непрерывно дифференцируемую функцию $h(t)$, удовлетворяющую условиям $h(0) = h(2) = h'(0) = h'(2) = 0$, и найдём приращение функционала на экстремали $x_0 \equiv 0$:

$$\Delta J = J[x_0 + h] — J[x_0] = \int_0^2 \left(h''^2 + h'^2\right)dt \geq 0.$$

Поскольку приращение функционала $\Delta J \geq 0$, то на экстремали $x_0 \equiv 0$ реализуется минимум.

Пример 1.5.2. Решить задачу со старшими производными

$$J[x] = \int_0^1 e^{-t} x''^2 dt \to \text{extr},$$

$$x(0) = 0,\ x'(0) = 1,\ x(1) = e,\ x'(1) = 2e.$$

Решение. Выпишем функцию $F(t, x, x', x'') = e^{-t} x''^2$. Составим уравнение Эйлера — Пуассона, для этого найдём $F_x = 0$, $F_{x'} = 0$, $F_{x''} = 2e^{-t} x''$. Уравнение Эйлера — Пуассона для функционала в исследуемой задаче имеет вид

$$\frac{d^2}{dt^2}(2e^{-t}x'') = 0.$$

Приведём уравнение к виду

$$\frac{d}{dt}(e^{-t}x'') = C_1.$$

Из последнего уравнения выразим $x'' = C_1 e^t t + C_2 e^t$.

Интегрируем (по частям) полученное уравнение

$$x' = C_1 e^t t - C_1 e^t + C_2 e^t + C_3,$$

следовательно, функция $x(t) = C_1 e^t t - 2C_1 e^t + C_2 e^t + C_3 t + C_4$.

Используя граничные условия $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$, $x(1) = e$, $x'(1) = 2e$, находим константы C_1, C_2, C_3, C_4. Для этого составим систему уравнений

$$\begin{cases} 0 = -2C_1 + C_2 + C_4; \\ 1 = -C_1 + C_2 + C_3; \\ e = C_1 e - 2C_2 e + C_2 e + C_3 + C_4; \\ 2e = C_1 e - C_1 e + C_2 e + C_3. \end{cases}$$

Из этой системы уравнений находим константы $C_1 = 1$, $C_2 = 2$, $C_3 = 0$, $C_4 = 0$. Таким образом, допустимая экстремаль имеет вид $x_0 = te^t$.

Докажем, что на полученной экстремали достигается экстремум функционала путём непосредственного нахождения приращения функционала. Зададим приращение аргумента функционала — произвольную дважды непрерывно дифференцируемую функцию $h(t)$, удовлетворяющую условиям $h(0) = h(1) = h'(0) = h'(1) = 0$, и найдём приращение функционала на экстремали $x_0 = te^t$:

$$\Delta J = J[x_0 + h] - J[x_0] = \int_0^1 e^{-t}\left(x_0'' + h''\right)^2 dt - \int_0^1 e^{-t} x_0''^{\,2} dt = \int_0^1 e^{-t}\left(2x_0'' h'' + h''^{\,2}\right) dt.$$

С помощью двукратного интегрирования по частям, учитывая, что $h(0) = h(1) = h'(0) = h'(1) = 0$, получаем,

$$\int_0^1 e^{-t}\left(2x_0'' h''\right) dt = 2\int_0^1 e^{-t} e^t (2+t)\, dh' = \underbrace{2(2+t)h'\Big|_0^1}_{=0} - 2\int_0^1 h' dt = -2\int_0^1 dh = \underbrace{-2h\Big|_0^1}_{=0} = 0.$$

Поэтому приращение функционала запишется в виде

$$\Delta J = \int_0^1 e^{-t} h''^{\,2} dt \geq 0\,.$$

Поскольку приращение функционала $\Delta J \geq 0$, то на экстремали $x_0 = te^t$ реализуется минимум.

Пример 1.5.3. Найти допустимую экстремаль

$$J[x] = \int_0^1 \left(120xt - \frac{x''^{\,2}}{2}\right) dt \to \text{extr},$$

$$x(0) = x'(0) = 0,\ x(1) = 1,\ x'(1) = 6.$$

Решение. Выпишем функцию $F(t, x, x', x'') = 120xt - \frac{x''^{\,2}}{2}$. Составим уравнение Эйлера — Пуассона, для этого найдём $F_x = 120t$, $F_{x'} = 0$, $F_{x''} = -x''$.

Уравнение Эйлера — Пуассона для функционала в исследуемой задаче имеет вид

$$120t + \frac{d^2}{dt^2}(-x'') = 0.$$

Приведём уравнение к виду $x^{(4)} = 120t$. Последовательно интегрируем полученное уравнение

$$x^{(3)} = 60\,t^2 + C_1;$$

$$x^{(2)} = 20t^3 + C_1 t + C_2;$$

$$x' = 5\,t^4 + ½\,C_1 t^2 + C_2 t + C_3;$$

$$x = t^4 + {}^1/_6 \cdot C_1 t^3 + ½\,C_2 t^2 + C_3 t + C_4.$$

Используя граничные условия $x(0) = x'(0) = 0$, $x(1) =1$, $x'(1) = 6$, находим константы C_1, C_2, C_3, C_4. Для этого составим систему уравнений

$$\begin{cases} 0 = C_4; \\ 0 = C_3; \\ 1 = 1 + \dfrac{C_1}{6} + \dfrac{C_2}{2}; \\ 6 = \ 5 + \dfrac{C_1}{2} + C_2. \end{cases}$$

Из этой системы уравнений находим константы $C_1 = 6$, $C_2 =–2$, $C_3 = 0$, $C_4 = 0$. Таким образом, допустимая экстремаль имеет вид $x = t^5 + t^3 – t^2$.

Пример 1.5.4. Требуется поднять ракету в заданный момент времени T на заданную высоту h, достичь заданной скорости v и израсходовать как можно меньше топлива. В начальный момент скорость ракеты равна нулю. Считаем, что на ракету действует сила сопротивления, пропорциональная её скорости.

Решение. Ось Ox направим вертикально вверх. Тогда уравнение движения ракеты имеет вид

$$x'' = –k\,x' – g + u,\ k = \text{const} > 0.$$

Получим следующую вариационную задачу со старшими производными

$$\int_0^T (x'' + \ kx' + g)^2 dt \to \min,$$

$$x(0) = 0,\ x'(0) = 0,\ x(T) = h,\ x'(T) = v.$$

Запишем уравнение (1.5.3). Имеем

$$2\frac{d^2}{dt^2}(x'' + kx' + g) - 2k\,\frac{d}{dt}(x'' + kx' + g) = 0.$$

Обозначим $u = x'' + kx'$, тогда $u'' = ku'$. Отсюда находим, что $x'' + kx' = Ce^{kt} + A$. Здесь C и A — произвольные постоянные. Решая это дифференциальное уравнение, найдём функцию

$$x = B\,e^{-kt} + D + \frac{C}{2k^2}\,e^{kt} + \frac{A}{k}\,t.$$

Из граничных условий получим систему из четырёх уравнений

$$D + B + \frac{C}{2k^2} = 0,$$

$$-kB + \frac{C}{2k} + \frac{A}{k} = 0,$$

$$D + e^{-kT}B + \frac{C}{2k^2}\,e^{kT} + T\frac{A}{k} = h,$$

$$-ke^{-kT}B + \frac{C}{2k}e^{kT} + \frac{A}{k} = v.$$

Вычислим определитель Δ этой системы линейных уравнений:

$$\Delta = \frac{1}{2k^3}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -k & k & 1 \\ 1 & e^{-kT} & e^{kT} & T \\ 0 & -ke^{-kT} & ke^{kT} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2k^3}\begin{vmatrix} -k & k & 1 \\ e^{-kT} & e^{kT} & T \\ -ke^{-kT} & ke^{kT} & 1 \end{vmatrix} + \frac{1}{2k^3}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -k & k & 1 \\ -ke^{-kT} & ke^{kT} & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2k^3}(-ke^{kT} + k^2Te^{kT} - k^2Te^{-kT} - ke^{-kT} + 2k) +$$

$$+ \frac{1}{2k^3}(2k - ke^{kT} - ke^{-kT}) = \frac{1}{2k^2}(4 - 2e^{kT} - 2e^{-kT} + kTe^{kT} - kTe^{-kT}).$$

Обозначим $x = kT$. Тогда $2k^2\Delta = 4 - 2e^x - 2e^{-x} + xe^x - xe^{-x} = g(x)$.

Имеем $g'(x) = -e^x + e^{-x} + xe^x + xe^{-x}$, $g''(x) = x(e^x - e^{-x}) > 0$ при $x > 0$. Далее $g(0) = 0$, $g'(0) = 0$. Поэтому $g(x) > 0$ при $x > 0$. Следовательно, постоянные A, B, D, C определяются единственным образом.

Задачи для самостоятельного решения

1.5.1. Решить задачи со старшими производными:

а) $J[x] = \int_0^1 (360t^2 x - x''^2)dt \to extr$; $x(0) = x(1) = 0$, $x'(0) = 1$, $x'(1) = 2{,}5$;

б) $J[x] = \int_0^1 x''^2 dt \to extr$; $x(0) = x(1) = x'(0) = 0$, $x'(1) = 1$;

в) $J[x] = \int_0^1 (x''^2 - 48x)dt \to extr$; $x(0) = 1$, $x(1) = x'(1) = 0$, $x'(0) = -4$.

1.5.2. Найти допустимые экстремали:

а) $J[x] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x''^2 - x'^2)dt \to extr$; $x(0) = x'(0) = x'(\pi/2) = 0$, $x(\pi/2)=\pi/2$;

б) $J[x] = \int_0^1 (e^{-t} \cdot x''^2)dt \to extr$; $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$, $x(1) = e$, $x'(1) = 2e$;

в) $J[x] = \int_0^1 (t+1)^3 x''^2 dt \to extr$; $x(0) = 1$, $x'(0) = -1$, $x(1) = ½$, $x'(1) = -¼$;

г) $J[x] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x''^2 - x^2 + t^2)dt \to extr$; $x(0) = 1$, $x'(0) = x(\pi/2) = 0$, $x'(\pi/2) = -1$;

д) $J[x] = \int_0^1 x'''^2 dt \to extr$; $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$, $x(1) = 1$, $x'(1) = 4$, $x''(1) = 12$;

е) $J[x] = \int_0^1 (x'''^2 - x''^2)dt \to extr$; $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$, $x(\pi) = \pi$, $x'(\pi) = 2$, $x''(\pi)=0$.

1.6. ЗАДАЧА БОЛЬЦА

Задачей Больца называется следующая экстремальная задача без ограничений в пространстве функций $C^1[a, b]$:

$$J[x] = \int_a^b F(t, x, x')dt + f(x(a), x(b)) \to \text{extr}. \qquad (1.6.1)$$

Здесь числа a и b фиксированы, $F(t, x, x')$ — функция трёх переменных, называемая интегрантом, $f(v_1, v_2)$ — функция двух переменных, называемая терминантом.

Определение 1.6.1. Будем говорить, что функция $x \in C^1[a, b]$ доставляет слабый минимум (максимум) в задаче (1.6.1), если найдётся $\varepsilon > 0$, такое, что для любой функции $h(\cdot)C^1[a, b]$, для которой $\|x(\cdot) - h(\cdot)\|_{C^1[a, b]} < \varepsilon$, выполнено неравенство $J[x(\cdot)] \le J[h(\cdot)]$ ($J[x(\cdot)] \ge J[h(\cdot)]$).

Теорема 1.6.1 (Необходимое условие слабого экстремума в задаче Больца). Пусть U — открытое множество в пространстве R^3, функция F: $U \to R$ — непрерывная вместе со своими частными производными по x и x'. Пусть V — открытое множество в пространстве R^2, функция f: $V \to R$ — непрерывно дифференцируемая. Тогда, если $x(t) \in C^1[a, b]$ доставляет слабый экстремум в задаче Больца (1.6.1), то выполнены следующие условия:

1) уравнение Эйлера

$$F_x - \frac{d}{dt}F_{x'} = 0, \tag{1.6.2}$$

2) условия трансверсальности

$$(F_{x'} - f_{x(a)})|_{\,t=a} = 0,\ (F_{x'} + f_{x(b)})|_{\,t=b} = 0. \tag{1.6.3}$$

Правило решения

1. Привести задачу к виду (1.6.1).

2. Выписать необходимые условия — уравнение Эйлера (1.6.2) и условия трансверсальности (1.6.3).

3. Найти допустимые экстремали, то есть решения уравнения (1.6.2), удовлетворяющие условиям трансверсальности (1.6.3).

4. Доказать, что решением является одна из допустимых экстремалей, или показать, что решения нет.

Задача Больца в векторном случае

Укажем необходимые изменения для векторного случая.

Пусть в задаче (1.6.1) $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$, $F = F(t, x_1, \ldots, x_n, x'_1, \ldots, x'_n)$ — функция $2n + 1$ переменных, $f = f(v_1, v_2, \ldots, v_n, u_1, \ldots, u_n)$ — функция $2n$ переменных. Рассмотрим задачу отыскания экстремума функционала:

$$J[x_1, \ldots, x_n] = \int_a^b F(t, x_1, \ldots, x_n, x_1', \ldots, x_n')dt + f(x_1(a), \ldots, x_n(a), x_1(b), \ldots, x_n(b)) \to \text{extr}. \quad (1.6.4)$$

Необходимые условия в векторной задаче Больца состоят из системы уравнений Эйлера

$$F_{x_i}(t) - \frac{d}{dt}F_{x'_i}(t) = 0, i = 1, \ldots n \quad (1.6.5)$$

и условий трансверсальности, задающихся системой уравнений

$$(F_{x'i} - f_{xi(a)})|_{t=a} = 0, (F_{x'i} + f_{xi(b)})|_{t=b} = 0. \quad (1.6.6)$$

Пример 1.6.1. Решить задачу Больца

$$J[x] = \int_0^1 \left(x'^2 - x\right)dt + x^2(1) \to \text{extr}.$$

Решение. Выпишем функции $F(t, x, x') = x'^2 - x$ и $f = x^2(1)$. Запишем необходимые условия (1.6.2) и (1.6.3). Сначала составим уравнение Эйлера, для этого найдём $F_x = -1$, $F_{x'} = 2x$. Уравнение Эйлера для функционала в исследуемой задаче имеет вид

$$-1 - \frac{d}{dt}(2x') = 0.$$

Приведём уравнение к виду $2x'' + 1 = 0$. Последовательно интегрируем полученное уравнение, получаем

$$x' = -\tfrac{1}{2}t + C_1;$$

$$x = -\tfrac{1}{4}t^2 + C_1t + C_2.$$

Теперь запишем условия трансверсальности, для этого найдём $f_{x(0)} = 0$, $f_{x(1)} = 2x(1)$. Условия трансверсальности имеют вид:

$$(F_{x'} - f_{x(0)})|_{t=0} = 0 \Leftrightarrow 2x'(0) = 0;$$

$$(F_{x'} + f_{x(1)})|_{t=1} = 0 \Leftrightarrow 2x'(1) + 2x(1) = 0.$$

Из первого условия следует, что $C_1 = 0$. Из второго условия получаем уравнение $-\tfrac{1}{2} \cdot 2 - \tfrac{1}{4} \cdot 2 + 2C_2 = 0$, следовательно, $C_2 = \tfrac{3}{4}$.

Таким образом, имеется единственная допустимая экстремаль — функция $x_0 = -\frac{1}{4}t^2 + \frac{3}{4}$.

Покажем, что полученная экстремаль доставляет минимум в задаче. Зададим приращение аргумента функционала — произвольную непрерывно дифференцируемую функцию $h(t)$, и найдём приращение функционала на экстремали $x_0 = -\frac{1}{4}t^2 + \frac{3}{4}$.

$$\Delta J = J[x_0 + h] - J[x_0] = J[x_0 + h] - J[x_0] =$$

$$= \int_0^1 2x'_0 h' dt + \int_0^1 h'^2 dt - \int_0^1 h dt + 2x_0(1)h(1) + h^2(1).$$

Интегрируя по частям первое слагаемое и учитывая, что $x_0 = -\frac{1}{4}t^2 + \frac{3}{4}$, получим,

$$\Delta J = 2x'_0 h\Big|_0^1 - \int_0^1 (2x_0'' + 1) h dt + \int_0^1 h'^2 dt + 2x_0(1)h(1) + h^2(1) =$$

$$= 2\left(-\frac{t}{2}\right)h\Bigg|_0^1 - \int_0^1 \left(2\left(-\frac{1}{2}\right) + 1\right) h dt + \int_0^1 h'^2 dt + 2\left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right)h(1) + h^2(1) = \int_0^1 h'^2 dt + h^2(1) \geq 0.$$

Итак, $\Delta J \geq 0$, поэтому на экстремали $x_0(t) = -\frac{1}{4}t^2 + \frac{3}{4}$ реализуется минимум.

Пример 1.6.2. В задаче Больца найти допустимые экстремали

$$J[x] = \int_0^1 e^{t+1}\left(x'^2 + 2x^2\right)dt + 2x(1)\cdot\left(x(0) + 1\right) \to \text{extr}.$$

Решение. Выпишем функцию $F(t, x, x') = e^{t+1}(x'^2 + 2x^2)$ и терминальную часть $f = 2x^2(1)\cdot(x(0) + 1)$. Запишем необходимые условия (1.6.2) и (1.6.3). Составим уравнение Эйлера, для этого найдём $F_x = 4xe^{t+1}$, $F_{x'} = 2x'e^{t+1}$. Уравнение Эйлера для функционала в исследуемой задаче имеет вид

$$4xe^{t+1} - \frac{d}{dt}(2x'e^{t+1}) = 0.$$

Преобразуем уравнение

$$4xe^{t+1} - 2x'e^{t+1} - 2x''e^{t+1} = 0.$$

Поделим обе части уравнения на $e^{t+1} > 0$ и приведём уравнение к виду $x'' + x' - 2x = 0$. Полученное уравнение является линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами. Соответствующее характеристическое уравнение имеет вид $p^2 + p - 2 = 0$. Корни характеристического уравнения $p_1 = -2$, $p_2 = 1$. Следовательно, функция $x(t) = C_1e^{-2t} + C_2e^t$. Найдём производную $x'(t) = -2C_1e^{-2t} + C_2e^t$.

Теперь запишем условия трансверсальности, для этого найдём $f_{x(0)} = 2x(1)$, $f_{x(1)} = 2x(0) + 2$. Условия трансверсальности имеют вид

$$(F_{x'} - f_{x(0)})|_{t=0} = 0 \Leftrightarrow e \cdot 2x'(0) - 2x(1) = 0;$$

$$(F_{x'} + f_{x(1)})|_{t=1} = 0 \Leftrightarrow e^2 \cdot 2x'(1) + 2x(0) + 2 = 0.$$

Подставим в эти условия функцию $x(t) = C_1e^{-2t} + C_2e^t$, получаем систему уравнений

$$-4C_1e + 2C_2e - 2C_1e^{-2} - 2C_2e = 0;$$

$$-4C_1 + 2C_2e^3 + 2C_1 + 2C_2 = -2.$$

Из последней системы определяем константы $C_1 = 0$, $C_2 = -(1 + e^3)^{-1}$.

Таким образом, имеется единственная допустимая экстремаль — функция $x_0 = -\frac{e^t}{1+e^3}$.

Задачи для самостоятельного решения

1.6.1. Решить задачи Больца:

а) $J[x] = \int_0^1 (x'^2 + x^2)dt - x(1)(e - e^{-1}) \to extr$;

б) $J[x] = \int_0^{\pi} (x'^2 + x^2 - 4x\sin t)dt + 2x^2(0) + 2x(\pi) - x^2(\pi) \to extr$;

в) $J[x] = \int_1^{e} 2x'(tx' + x)dt + 3x^2(1) - x^2(e) - 4x(e) \to extr$.

1.6.2. В задаче Больца найти допустимые экстремали:

а) $J[x] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x'^2 - x^2)dt - x^2(0) + 2x\left(\frac{\pi}{2}\right) \to extr$;

б) $J[x] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x'^2 - x^2)dt + x^2(0) - x^2\left(\frac{\pi}{2}\right) + 4x\left(\frac{\pi}{2}\right) \to extr$;

в) $J[x] = \int_0^1 x'^2 dt + 4x^2(0) - 5x^2(1) \to extr$;

г) $J[x] = \int_0^1 x'^2 dt + x^2(0) - 2x^2(1) \to extr$.

1.7. ЗАДАЧИ С ПОДВИЖНЫМИ ГРАНИЦАМИ

Задачей с подвижными границами называется следующая задача в пространстве $C^1(\Delta) \times R^2$

$$J[x, t_0, t_1] = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, x')dt + \psi_0\big(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)\big) \to extr, \tag{1.7.1}$$

$$\psi_i\big(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)\big) = 0, \quad i = 1, ..., m. \tag{1.7.2}$$

Здесь Δ — заданный конечный отрезок, $F = F(t, x, x')$ — функция трёх, а $\psi_i = \psi_i\big(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)\big)$ — четырёх переменных, t_0, $t_1 \in \Delta$. В отличие от задачи Больца и простейшей задачи классического вариационного исчисления, концы отрезка интегрирования являются подвижными и, следовательно, решение задачи включает в себя некоторую функцию $x(\cdot)$ и тот отрезок $[t_0, t_1]$, на котором она рассматривается. Значения функции $x(\cdot)$ в точках t_0 и t_1 в общем случае могут быть и не заданы. Частным случаем (1.7.1) является задача, в которой один из концов t_0 или t_1 — подвижный, а другой закреплён.

Определение 1.7.1. Тройка $(x(\cdot), t_0, t_1)$ называется допустимой в задаче (1.7.1), если $x(\cdot) \in C^1(\Delta)$, t_0, $t_1 \in \mathrm{int}\Delta$, $t_0 < t_1$ и выполняются условия (1.7.2) на концах.

Определение 1.7.2. Будем говорить, что допустимая тройка $(x(\cdot), t_0, t_1)$ доставляет слабый минимум (максимум) в задаче (1.7.1), (1.7.2) (в пространстве $C^1(\Delta) \times R^2$), если существует число $\varepsilon > 0$, такое, что для любой другой допустимой тройки $(h(\cdot), \tau_0, \tau_1)$, для которой $|t_0 - \tau_0| < \varepsilon$, $|t_1 - \tau_1| < \varepsilon$ и $\|x(\cdot) - h(\cdot)\|_{C1(\Delta)} < \varepsilon$, выполняется неравенство $J[x, t_0, t_1] \le J[h, \tau_0, \tau_1]$ ($J[x, t_0, t_1] \ge J[h, \tau_0, \tau_1]$).

***Правило решения* (*общий случай*)**

1. Составить функцию Лагранжа:

$$\pounds(x, t_0, t_1, \lambda) = \int_{t_0}^{t_1} \lambda_0 F(t, x, x')dt + \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i\big(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)\big),$$

где $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_m) \in R^{m+1}$ — множители Лагранжа.

2. Выписать необходимые условия:

а) уравнение Эйлера

$$\lambda_0 F_x(t) - \frac{d}{dt}\lambda_0 F_{x'}(t) = 0;$$

б) условия трансверсальности по x

$$\lambda_0 F_{x'}(t_0) - l_{x_0} = 0, \lambda_0 F_{x'}(t_1) + l_{x_1} = 0,$$

где $l = l(t_0, x_0, t_1, x_1) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(t_0, x_0, t_1, x_1)$;

в) условия стационарности по t_0, t_1

$$\pounds_{t0} = 0, \pounds_{t1} = 0$$

(условия стационарности выписываются только для подвижных границ).

3. Найти допустимые экстремали, то есть решения уравнения Эйлера, являющиеся допустимыми функциями и удовлетворяющие условиям «б» и «в» с вектором множителей Лагранжа λ, не равным нулю. При этом бывает удобно отдельно рассмотреть случаи $\lambda_0 = 0$ и $\lambda_0 \neq 0$. Во втором случае можно положить λ_0 равным единице или любой другой, отличной от нуля константе.

4. Найти решение среди допустимых экстремалей или доказать, что решения нет.

Рассмотрим ***частный случай*** задачи (1.7.1) с двумя подвижными границами. Правый конец функции $x(t)$ может перемещаться вдоль заданной кривой $\varphi_1(t)$, а левый — вдоль кривой $\varphi_0(t)$ (рис. 1.7.1). Здесь t_1 — абсцисса точки пересечения кривых $x(t)$ и $\varphi_1(t)$, t_0 — абсцисса точки пересечения кривых $x(t)$ и $\varphi_0(t)$, $t \in \Delta$, где Δ — заданный конечный отрезок.

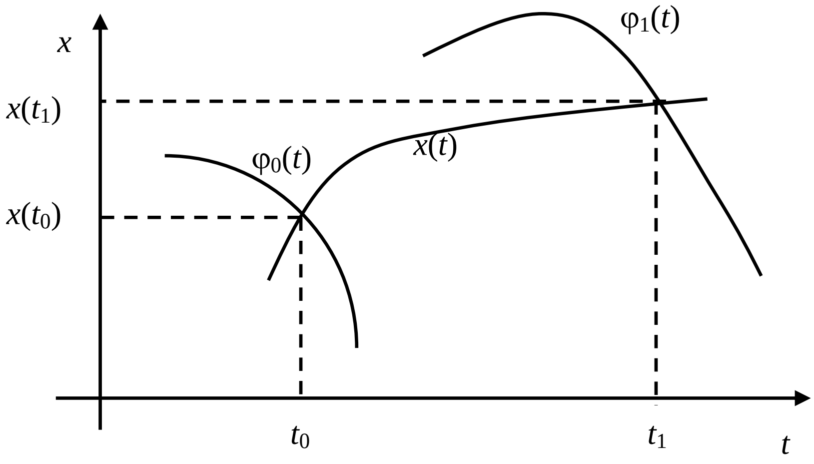

Рис. 1.7.1 Задача с двумя подвижными границами

В этом случае задача записывается следующим образом

$$J[x, t_0, t_1] = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, x')dt \to extr\,, \qquad (1.7.3)$$

$$x(t_0) = \varphi_0(t_0),\ x(t_1) = \varphi_1(t_1). \qquad (1.7.4)$$

Теорема 1.7.1 (Необходимое условие слабого экстремума в частном случае задачи с подвижными границами). Пусть U — открытое множество в пространстве R^3, функция F: $U \to R$ — непрерывная вместе со своими частными производными по x и x'. Пусть $x(t)$, $\varphi_0(t)$, $\varphi_1(t) \in C^1(\Delta)$, и выполнены условия (1.7.4). Тогда, если тройка $(x(\cdot), t_0, t_1)$ доставляет слабый экстремум в задаче (1.7.3), то выполнено следующие условия:

1) уравнение Эйлера

$$F_x - \frac{d}{dt}F_{x'} = 0; \qquad (1.7.5)$$

2) условия трансверсальности

$$(F - (x' - \varphi_0')F_{x'})|_{t = t_0} = 0;\ (F - (x' - \varphi_1')F_{x'})|_{t = t_1} = 0. \qquad (1.7.6)$$

Замечание. Если подвижной является только одна из границ, то условие трансверсальности (1.7.6) записывается только для этой границы.

Правило решения (***частный случай***)

1. Привести задачу к виду (1.7.3), (1.7.4).

2. Выписать необходимые условия — уравнение Эйлера (1.7.5) и условия трансверсальности (1.7.6).

3. Найти допустимые экстремали, то есть решения уравнения (1.7.5), удовлетворяющие условиям трансверсальности (1.7.6).

4. Доказать, что решением является одна из допустимых экстремалей, или показать, что решения нет.

Рассмотрим теперь другой ***частный случай*** — задачу со свободной правой (левой) границей. Правый (левый) конец функции $x(t)$ может перемещаться (рис. 1.7.2) по вертикальной прямой $t = b$ ($t = a$). В некоторых задачах обе границы могут быть свободными.

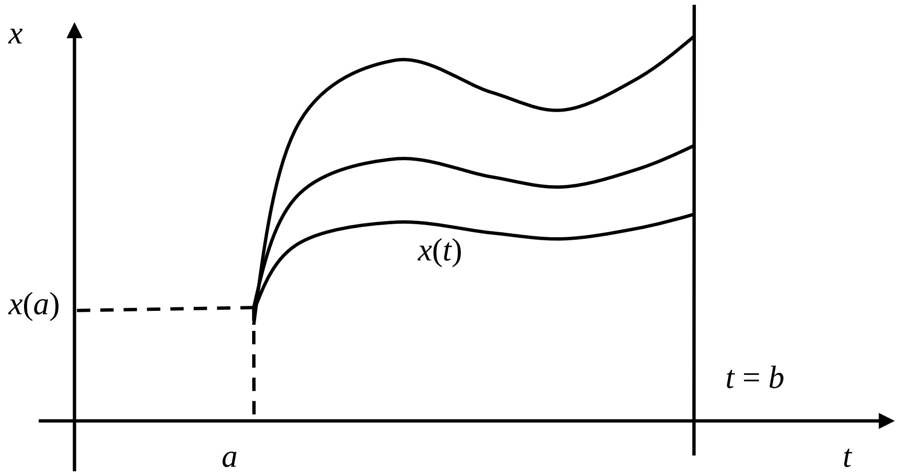

Рис. 1.7.2 Задача со свободной правой границей

В случае свободной правой границы задача записывается следующим образом

$$J[x] = \int_a^b F(t, x, x')dt \to extr, \tag{1.7.7}$$

$$x(a) = A. \tag{1.7.8}$$

При этом условие трансверсальности (1.7.6) для правой границы будет иметь вид

$$F_{x'}\big|_{t=b} = 0. \tag{1.7.9}$$

Условие (1.7.9) называется естественным граничным условием.

Аналогично, в случае свободной левой границы условие трансверсальности (1.7.6) для левой границы будет иметь вид

$$F_{x'}\big|_{t=a} = 0. \qquad (1.7.10)$$

Если свободными являются обе границы, то записываются оба естественные граничные условия (1.7.9) и (1.7.10).

Пример 1.7.1. Решить задачу со свободной границей

$$J[x] = \int_0^1 \left(x - x'^2\right)dt \to \text{extr, при условии } x(0) = 0.$$

Решение. Эта задача со свободной правой границей при $t = 1$. Выпишем функцию $F(t, x, x') = x - x'^2$. Составим уравнение Эйлера, для этого найдём производные $F_x = 1$, $F_{x'} = 2x'$. Уравнение Эйлера для функционала в исследуемой задаче имеет вид

$$1 + 2x'' = 0.$$

После преобразования

$$x'' = -½.$$

Решение этого уравнения будет $x = -\frac{t^2}{4} + C_1 t + C_2$.

Из граничного условия $x(0) = 0$ следует, что $C_2 = 0$. Составим естественное граничное условие для правой границы $F_{x'}\big|_{t=1} = 0$. Это условие запишется в виде $2x'(1) = 0$. Найдём производную полученной функции $x' = -\frac{t}{2} + C_1$. Подставим в естественное граничное условие значение производной x'

$$-\frac{1}{2} + C_1 = 0.$$

Из последнего выражения следует, что $C_1 = \frac{1}{2}$.

Таким образом, допустимая экстремаль имеет вид $x_0 = \frac{t}{2} - \frac{t^2}{4}$.

Докажем, что на полученной экстремали достигается экстремум функционала путём непосредственного нахождения приращения функционала. Зададим приращение аргумента функционала — произвольную непрерывно дифференцируемую функцию $h(t)$, удовлетворяющую условию $h(0) = 0$, и найдём приращение функционала на экстремали $x_0 = \frac{t}{2} - \frac{t^2}{4}$:

$$\Delta J = J[x_0 + h] - J[x_0] = \int_0^1 \left((x_0 + h) - (x_0' + h')^2\right)dt - \int_0^1 \left(x_0 + x_0'^2\right)dt = \int_0^1 \left(h - 2x_0'h' - h'^2\right)dt.$$

Рассмотрим отдельно второй интеграл, для нахождения которого применим метод интегрирования по частям. Учтём также, что $h(0) = 0$:

$$-2\int_0^1 \left(\frac{1}{2} - \frac{t}{2}\right)h'dt = -2\int_0^1 \left(\frac{1}{2} - \frac{t}{2}\right)dh = (-1 + t)h\Big|_0^1 - \int_0^1 hdt = -h(1) + h(1) - \int_0^1 hdt = -\int_0^1 hdt.$$

Поэтому приращение функционала запишется в виде

$$\Delta J = \int_0^1 \left(h - h - h'^2\right)dt = -\int_0^1 h'^2 dt \le 0\ .$$

Поскольку приращение функционала $\Delta J \le 0$, то на экстремали $x_0 = \frac{t}{2} - \frac{t^2}{4}$ реализуется максимум.

Пример 1.7.2. Решить задачу со свободной границей

$$J[x] = \int_0^1 \left(x'^2 + x\right)dt \to \text{extr, при условии } x(1) = 0.$$

Решение. Эта задача со свободной левой границей при $t = 0$. Выпишем функцию $F(t, x, x') = x'^2 + x$. Составим уравнение Эйлера, для этого найдём производную $F_x = 1$, $F_{x'} = 2x'$. Уравнение Эйлера для функционала в исследуемой задаче имеет вид

$$1 - 2x'' = 0.$$

После преобразования

$$x'' = ½.$$

Решение этого уравнения будет $x = \frac{t^2}{4} + C_1 t + C_2$.

Из граничного условия $x(1) = 0$ следует, что $C_2 = -C_1 - ¼$. Составим естественное граничное условие для левой границы $F_{x'}\big|_{t=0} = 0$. Это условие запишется в виде $2x'(0) = 0$. Найдём производную полученной функции

$x' = \frac{t}{2} + C_1$. Подставим в естественное граничное условие производную x', получим, что $C_1 = 0$.

Таким образом, допустимая экстремаль имеет вид $x_0 = \frac{t^2}{4} - \frac{1}{4}$.

Докажем, что на полученной экстремали достигается экстремум функционала путём непосредственного нахождения приращения функционала. Зададим приращение аргумента функционала — произвольную непрерывно дифференцируемую функцию $h(t)$, удовлетворяющую условию $h(1) = 0$, и найдём приращение функционала на экстремали $x_0 = \frac{t^2}{4} - \frac{1}{4}$.

$$\Delta J = J[x_0 + h] - J[x_0] = \int_0^1 \left((x_0 + h) + (x_0' + h')^2\right) dt - \int_0^1 \left(x_0 - x_0'^2\right) dt = \int_0^1 \left(h + 2x_0'h' + h'^2\right) dt.$$

Рассмотрим отдельно интеграл, для нахождения которого применим метод интегрирования по частям. Учтём также, что $h(1) = 0$.

$$2\int_0^1 \frac{t}{2} h'dt = \int_0^1 t\,dh = th\Big|_0^1 - \int_0^1 h\,dt = -\int_0^1 h\,dt.$$

Поэтому приращение функционала запишется в виде

$$\Delta J = \int_0^1 \left(h - h + h'^2\right) dt = \int_0^1 h'^2 dt \geq 0\,.$$

Поскольку приращение функционала $\Delta J \geq 0$, то на экстремали $x_0 = \frac{t^2}{4} - \frac{1}{4}$ реализуется минимум.

Пример 1.7.3. Решить задачу со свободной границей

$$J[x] = \int_0^1 x'^2 dt \to \text{extr}, \text{ при условии } x(0) = 1.$$

Решение. Эта задача со свободной правой границей при $t = 1$. Выпишем функцию $F(t,\ x,\ x') = x'^2$. Подынтегральная функция зависит только от x', значит, решением уравнения Эйлера будет линейная функция $x = C_1 t + C_2$.

Из граничного условия $x(0) = 1$ следует, что $C_2 = 1$. Составим естественное граничное условие для левой границы $F_{x'}\big|_{t=1} = 0$. Это условие запишется в виде $2x'(1) = 0$. Найдём производную полученной функции

$x' = C_1$. Подставим в естественное граничное условие производную x', получим, что $C_1 = 0$. Таким образом, допустимая экстремаль имеет вид $x_0 = 1$.

Докажем, что на полученной экстремали достигается экстремум функционала путём непосредственного нахождения приращения функционала. Зададим приращение аргумента функционала — произвольную непрерывно дифференцируемую функцию $h(t)$, удовлетворяющую условию $h(0) = 0$, и найдём приращение функционала на экстремали $x_0 = 1$.

$$\Delta J = J[x_0 + h] - J[x_0] = \int_0^1 \left((x_0' + h')^2 - x_0'^2 \right) dt = \int_0^1 h'^2 dt \geq 0.$$

Поскольку приращение функционала $\Delta J \geq 0$, то на экстремали $x_0 = 1$ реализуется минимум.

Пример 1.7.4. Найти допустимые экстремали в задаче со свободной границей

$$J[x] = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(x'^2 - x^2 \right) dt \to \text{extr}, \text{ при условии } x(0) = 1.$$

Решение. Эта задача со свободной правой границей при $t = \frac{\pi}{4}$. Выпишем функцию $F(t, x, x') = x'^2 - x^2$. Составим уравнение Эйлера, для этого найдём $F_x = -2x$, $F_{x'} = 2x'$. Уравнение Эйлера для функционала в исследуемой задаче имеет вид

$$x'' + x = 0.$$

Полученное уравнение является линейным уравнением с постоянными коэффициентами. Общее решение этого уравнения будет $x = C_1 \cos t + C_2 \sin t$.

Из граничного условия $x(0) = 1$ следует, что $C_1 = 1$. Составим естественное граничное условие для правой границы $F_{x'}\big|_{t = \pi/4} = 0$. Это условие запишется в виде $x'(\pi/4) = 0$. Найдём производную полученной функции $x' = -C_1 \sin t + C_2 \cos t$. Подставим в эту производную значение $t = \frac{\pi}{4}$

и приравняем к нулю, то есть $-C_1\frac{\sqrt{2}}{2} + C_2\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$. Из последнего выражения следует, что $C_2 = 1$.

Таким образом, допустимая экстремаль имеет вид $x = \sin t + \cos t$.

Пример 1.7.5. Решить задачу с подвижной границей

$$J[x] = \int_0^{t_1} \left(tx' + x'^2\right)dt \to \text{extr}, \text{ при условии } x(0) = 0,\ x(t_1) = 1.$$

Решение. В этой задаче подвижной является правая граница, при этом функция $\varphi_1 = 1$. Выпишем функцию $F(t, x, x') = tx' + x'^2$. Составим уравнение Эйлера, для этого найдём $F_x = 0$, $F_{x'} = t + 2x'$. Уравнение Эйлера для функционала в исследуемой задаче имеет вид

$$x' = C_1 t - ½\, t.$$

Общее решение этого уравнения будет $x = C_1 t - ¼\, t^2 + C_2$.

Из граничного условия $x(0) = 0$ следует, что $C_2 = 1$. Составим условие трансверсальности для правой границы $(F - (x' - \varphi_1')F_{x'})|_{t\,=\,t_1} = 0$. Это условие запишется в виде $(tx' + x'^2 - (x' - 0)(t + 2x'))|_{t\,=\,t_1} = 0$. Подставим в последнее выражение функцию x, получим

$$t_1\,(C_1 - ½t_1) - (C_1 - ½t_1)(\,t_1 + 2(C_1 - ½t_1)) = 0.$$

После преобразования условие трансверсальности примет вид

$$½t_1^2 + 2C_1^2 - 2t_1C_1 = 0.$$

Запишем условие $x(t_1) = \varphi_1(t_1)$ для функции $x = C_1 t - ¼t^2$ и найдём константу $C_1 = \frac{1}{t_1} + \frac{t_1}{4}$. Подставим выражение для C_1 в условие трансверсальности, получим

$$\frac{t_1^2}{2} + 2\left(\frac{1}{t_1} + \frac{t_1}{4}\right)^2 - 2 - \frac{t_1^2}{2} = 0.$$

Решаем полученное уравнение относительно t_1, находим два значения $t_1^1 = 2$ и $t_1^2 = -2$. Значение $t_1^2 = -2$ не удовлетворяет условиям задачи, так как не выполнено неравенство $t_1 > 0$. Найдём константу $C_1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} = 1$.

Таким образом, допустимая экстремаль имеет вид $x_0 = -\frac{t^2}{4} + t$.

Докажем, что на полученной экстремали достигается экстремум функционала путём непосредственного нахождения приращения функционала. Зададим приращение аргумента функционала — произвольную непрерывно дифференцируемую функцию $h(t)$, удовлетворяющую условию $h(0) = h(t_1) = 0$, и найдём приращение на экстремали $x_0 = -\frac{t^2}{4} + t$

$$\Delta J = J[x_0 + h] - J[x_0] =$$

$$\int_0^{t_1} \left(t(x'_0 + h') + (x'_0 + h')^2 \right) dt - \int_0^{t_1} \left(tx'_0 + x'^2_0 \right) dt = \int_0^{t_1} \left(th' + 2x'_0 h' + h'^2 \right) dt.$$

Рассмотрим отдельно второй интеграл, для нахождения которого применим метод интегрирования по частям. Учтём также, что $h(0) = h(t_1) = 0$

$$-2\int_0^{t_1} \frac{t}{2} h' dt = -\int_0^{t_1} t dh = -th\Big|_0^{t_1} + \int_0^{t_1} h dt = \int_0^{t_1} h dt.$$

Рассмотрим отдельно первый интеграл, для нахождения которого применим метод интегрирования по частям. Учтём также, что $h(0) = h(t_1) = 0$

$$\int_0^{t_1} th' dt = \int_0^{t_1} t dh = th\Big|_0^{t_1} - \int_0^{t_1} h dt = -\int_0^{t_1} h dt.$$

Поэтому приращение функционала запишется в виде

$$\Delta J = \int_0^{t_1} \left(h - h + h'^2 \right) dt = \int_0^{t_1} h'^2 dt \geq 0 .$$

Поскольку приращение функционала $\Delta J \geq 0$, то на экстремали $x_0 = -\frac{t^2}{4} + t$ реализуется минимум.

Пример 1.7.6. Найти допустимые экстремали в задаче с подвижной границей

$$J[x] = \int_0^{t_1} x'^3 dt \to \text{extr}, \text{ при условии } x(0) = 0,\ x(t_1) = 1 - t_1.$$

Решение. В этой задаче подвижной является правая граница, при этом функция $\varphi_1 = 1 - t$. Выпишем функцию $F(t, x, x') = x'^3$. Функция F зависит только от x', поэтому решением уравнения Эйлера будет линейная функция $x = C_1t + C_2$.

Из граничного условия $x(0) = 0$ следует, что $C_2 = 0$. Составим условие трансверсальности для правой границы $(F - (x' - \varphi_1')F_{x'})|_{t = t_1} = 0$. Это условие запишется в виде $(x'^3 - (x' + 1)3x'^2)|_{t = t_1} = 0$. Подставим в последнее выражение функцию x, получаем $(C_1^3 - (C_1 + 1)3C_1^2) = 0$. После преобразования условие трансверсальности примет вид $C_1^2(-2C_1 - 3) = 0$. Решаем полученное уравнение относительно C_1, находим два значения константы $C_1^1 = 0$ и $C_1^2 = -{}^3/_2$.

Запишем условие $x(t_1) = \varphi_1(t_1)$ для функции $x = C_1t$, следовательно, выполняется соотношение $C_1t_1 = 1 - t_1$. Отсюда находим два значения $t_1^1 = 1$ и $t_1^2 = -2$. Значение $t_1^2 = -2$ не удовлетворяет условиям задачи, так как не выполнено неравенство $t_1 > 0$. Следовательно, $t_1 = 1$, $C_1 = 0$.

Таким образом, допустимая экстремаль имеет вид $x_0 \equiv 0$.

Задачи для самостоятельного решения

1.7.1. В задаче со свободной границей найти допустимые экстремали:

а) $J[x] = \int_0^2 (x'^2 + 2tx)dt \to extr;$ $x(0) = 0;$

б) $J[x] = \int_0^1 (x'^2 + 2x + 6x')dt \to extr;$ $x(0) = 0;$

в) $J[x] = \int_0^1 (2xx' + x'^2)dt \to extr;$

г) $J[x] = \int_0^{\frac{1}{2}} (-x'^2 + x)dt \to extr;$ $x(0) = 0;$

д) $J[x] = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (x'^2 - x^2 + 4x\cos t)dt \to extr;$ $x(0) = 0;$

е) $J[x] = \int_1^2 (x'^2 + 2x + xx')dt \to extr;$

ж) $J[x] = \int_0^1 (x'^2 + 2x - xx')dt \to extr.$

1.7.2. Найти допустимые экстремали в задаче с подвижной границей:

а) $J[x] = \int_0^{t_1} x'^2 dt \to$ extr, при условии $x(0) = 0$, $x(t_1) = -1 - t_1$;

б) $J[x] = \int_0^{t_1} x'^2 dt \to$ extr, при условии $x(0) = 0$, $x(t_1) = \frac{2}{1-t_1}$;

в) $J[x] = \int_0^{t_1} \sqrt{1+x'^2}\,dt \to$ extr, при условии $x(0) = 0$, $x(t_1) = \frac{2}{t_1{}^2}$;

г) $J[x] = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1+x'^2}\,dt \to$ extr, при условии $x(t_0) = t_0^2 + 2$, $x(t_1) = t_1$;

д) $J[x] = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1+x'^2}\,dt \to$ extr, при условии $x(t_0) = t_0^2$, $x(t_1) = t_1 - 5$.

1.8. ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

В рассмотренных задачах решения должны были удовлетворять некоторым краевым условиям. Но во многих приложениях вариационного исчисления на решение задачи, кроме краевых условий, накладываются некоторые дополнительные условия, так называемые условия связи. К таким задачам относится изопериметрическая задача.

Задачи на условный экстремум встречаются и в конечномерных задачах, когда аргументы функции многих переменных, экстремум которой нужно найти, связаны некоторыми функциональными соотношениями. Для решения этих задач обычно используют метод множителей Лагранжа. Этот универсальный метод, основанный на введении множителей Лагранжа и составлении функции Лагранжа, применим и для функционалов.

Изопериметрической задачей (с закреплёнными концами) в классическом вариационном исчислении называется следующая задача в пространстве $C^1[a, b]$:

$$J_0[x] = \int_a^b F_0(t, x, x')dt \to extr\,; \qquad (1.8.1)$$

$$J_i[x] = \int_a^b F_i(t, x, x')dt = l_i, \quad i = 1, ..., m; \tag{1.8.2}$$

$$x(a) = A, x(b) = B. \tag{1.8.3}$$

Здесь $F_i : R^3 \to R$, $i = 0, \ldots, m$ — функции трёх переменных. Константы $l_1, \ldots, l_m$ — заданные фиксированные числа.

Определение 1.8.1. Ограничения вида (1.8.2) называются изопериметрическими. Функции F_i, $i = 0, \ldots, m$, называются интегрантами. Функция $x \in C^1[a, b]$, удовлетворяющая изопериметрическим условиям (1.8.2) и условиям на концах (1.8.3), называется допустимой.

Определение 1.8.2. Будем говорить, что допустимая функция x_0 доставляет в задаче (1.8.1) слабый минимум (максимум), если существует $\varepsilon > 0$, такое, что для любой допустимой функции x, для которой $\|x_0 - x\| < \varepsilon$, выполняется неравенство $J_0[x_0] \le J_0[x]$ ($J_0[x_0] \ge J_0[x]$).

Правило решения

1. Составить функцию Лагранжа:

$L = L(t, x, x', \lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(t, x, x')$, где $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ — множители Лагранжа.

2. Выписать необходимое условие экстремума — уравнение Эйлера для функции L:

$$L_x - \frac{d}{dt} L_{x'} = 0.$$

3. Найти допустимые экстремали, то есть допустимые решения уравнения Эйлера для функции L при векторе множителей Лагранжа λ, не равном нулю. При этом бывает полезно отдельно рассмотреть случаи $\lambda_0 = 0$ и $\lambda_0 \ne 0$. Во втором случае можно положить λ_0 равным единице или любой другой, отличной от нуля константе.

4. Отыскать решение среди найденных допустимых экстремалей или доказать, что решения нет.

Теорема 1.8.1. (Правило множителей Лагранжа для изопериметрической задачи). Пусть U — открытое множество в пространстве R^3, функции $Fi : U \to R$, $i = 0, \ldots, m$ — непрерывные вместе со своими частными производными F_{ix}, $F_{ix'}$, функция $x \in C^1[a, b]$, удовлетворяет (1.8.2), (1.8.3). Тогда, если $x(t)$ доставляет слабый экстремум в изопериметрической задаче вариационного исчисления, тогда найдутся множители Лагранжа λ_0, λ_1, …, λ_m, не все равные нулю, и такие, что для функции L выполнено уравнение Эйлера.

$$L_x(t) - \frac{d}{dt} L_{x'}(t) = 0.$$

Пример 1.8.1. Решить изопериметрическую задачу

$$J[x] = \int_0^1 x'^2 dt \to \text{extr, при условии } \int_0^1 x dt = 0,\ x(0) = 1,\ x(1) = 0.$$

Решение. Составим функцию Лагранжа $L(t, x, x') = \lambda_0 x'^2 + \lambda_1 x$. Составим уравнение Эйлера, для этого найдём $L_x = \lambda_1$, $L_{x'} = 2\lambda_0 x'$. Уравнение Эйлера в исследуемой задаче имеет вид

$$\lambda_1 - 2\lambda_0 x'' = 0.$$

Рассмотрим случай $\lambda_0 = 0$. В этом случае из уравнения Эйлера следует, что $\lambda_1 = 0$. Получили противоречие с тем, что набор множителей Лагранжа должен быть ненулевым.

Рассмотрим случай $\lambda_0 \neq 0$. Положим, что $\lambda_0 = ½$, тогда общее решение уравнения Эйлера будет $x = ½\, \lambda_1 t^2 + C_1 t + C_2$.

Из граничного условия $x(0) = 1$ следует, что $C_2 = 1$. Из условия $x(1) = 0$ следует, что $½\lambda_1 + C_1 + 1 = 0$.

Воспользуемся теперь интегральным ограничением $\int_0^1 x dt = \int_0^1 \left(\frac{\lambda_1}{2} t^2 - \left(1 + \frac{\lambda_1}{2}\right) t + 1 \right) dt = 0$. Находим интеграл, получаем $-\frac{\lambda_1}{12} + \frac{1}{2} = 0.$

Следовательно, константы $\lambda_1 = 6$, $C_1 = –4$.

Таким образом, допустимая экстремаль имеет вид $x_0 = 3t^2 - 4t + 1$.

Докажем, что на полученной экстремали достигается экстремум функционала путём непосредственного нахождения приращения функционала. Зададим приращение аргумента функционала — произвольную непрерывно дифференцируемую функцию $h(t)$, удовлетворяющую условиям $h(0) = h(1) = 0$, $\int_0^1 h dt = 0$. Найдём приращение на экстремали $x_0 = 3t^2 - 4t + 1$:

$$\Delta J = J[x_0 + h] - J[x_0] = \int_0^1 \left(x_0' + h'\right)^2 dt - \int_0^1 x_0'^2 dt = \int_0^1 \left(2x_0'h' + h'^2\right) dt.$$

Рассмотрим отдельно первый интеграл, для нахождения которого применим метод интегрирования по частям. Учтём также, что $h(0) = h(1) = 0$ и $\int_0^1 h dt = 0$.

Поэтому

$$2\int_0^1 (6t-4)h' dt = 2\int_0^1 (6t-4) dh = \underbrace{2(6t-4)h\Big|_0^1}_{=0} - 12\int_0^1 h dt = 0.$$

Приращение функционала запишется в виде $\Delta J = \int_0^1 h'^2 dt \geq 0$.

Поскольку приращение функционала $\Delta J \geq 0$, то на полученной экстремали $x_0 = 3t^2 - 4t + 1$ реализуется минимум.

Пример 1.8.2. Решить изопериметрическую задачу

$$J[x] = \int_0^1 x'^2 dt \to \text{extr}, \text{ при условии } \int_0^1 txdt = 0,\ x(0) = -4,\ x(1) = 4.$$

Решение. Составим функцию Лагранжа $L(t, x, x') = \lambda_0 x'^2 + \lambda_1 tx$. Составим уравнение Эйлера, для этого найдём $L_x = \lambda_1 t$, $L_{x'} = 2\lambda_0 x'$. Уравнение Эйлера в исследуемой задаче имеет вид

$$\lambda_1 t - 2\lambda_0 x'' = 0.$$

Рассмотрим случай $\lambda_0 = 0$. В этом случае из уравнения Эйлера следует, что $\lambda_1 = 0$. Получили противоречие с тем, что набор множителей Лагранжа должен быть ненулевым.

Рассмотрим случай $\lambda_0 \neq 0$. Положим, что $\lambda_0 = ½$, тогда общее решение уравнения Эйлера будет $x = C_1 t^3 + C_2 t + C_3$. Заметим, что в этом решении константы переобозначены.

Из граничного условия $x(0) = -4$ следует, что $C_3 = -4$. Из условия $x(1) = 4$ следует, что $C_1 + C_2 = 8$.

Воспользуемся теперь интегральным ограничением $\int_0^1 txdt = \int_0^1 t\left(C_3t^3 + C_2t - 4\right)dt = 0$. Находим этот интеграл, получаем соотношение $\frac{C_1}{5} + \frac{C_2}{3} - 2 = 0$. Учитывая полеченное ранее уравнение для C_1, C_2, определяем константы $C_1 = 5$, $C_2 = 3$.

Таким образом, допустимая экстремаль имеет вид $x_0 = 5t^3 + 3t - 4$.

Докажем, что на полученной экстремали достигается экстремум функционала путём непосредственного нахождения приращения функционала. Зададим приращение аргумента функционала — произвольную непрерывно дифференцируемую функцию $h(t)$, удовлетворяющую условиям $h(0) = h(1) = 0$, $\int_0^1 thdt = 0$. Найдём приращение на экстремали $x_0 = 5t^3 + 3t - 4$

$$\Delta J = J[x_0 + h] - J[x_0] = \int_0^1 \left(x_0' + h'\right)^2 dt - \int_0^1 x_0'^2 dt = \int_0^1 \left(2x_0'h' + h'^2\right)dt.$$

Рассмотрим отдельно первый интеграл, для нахождения которого применим метод интегрирования по частям. Учтём также, что $h(0) = h(1) = 0$ и $\int_0^1 thdt = 0.$

Поэтому

$$2\int_0^1 \left(15t^2 + 3\right)h'dt = 2\int_0^1 \left(15t^2 + 3\right)dh = \underbrace{2\left(15t^2 + 3\right)h\Big|_0^1}_{=0} - 2\int_0^1 30thdt = 0.$$

Приращение функционала запишется в виде $\Delta J = \int_0^1 h'^2 dt \geq 0$.

Поскольку приращение функционала $\Delta J \geq 0$, то на экстремали $x_0 = 5t^3 + 3t - 4$ реализуется минимум.

Пример 1.8.3. Найти тело вращения минимального объёма с заданной площадью осевого сечения.

Решение. Пусть ось Ox выбранной системы координат совпадает с осью вращения, тогда для ответа на вопрос задачи нужно найти минимум функционала

$$J[x] = \pi\int_a^b x^2 dt \text{ при условии } 2\int_a^b x dt = S,\ x(a) = A,\ x(b) = B.$$

Составим функцию Лагранжа $L(t, x, x') = \lambda_0 x^2 + \lambda_1 x$. Составим уравнение Эйлера, для этого найдём $L_x = 2\lambda_0 x + \lambda_1$, $L_{x'} = 0$. Уравнение Эйлера в исследуемой задаче имеет вид

$$2\lambda_0 x + \lambda_1 = 0.$$

Рассмотрим случай $\lambda_0 = 0$. В этом случае из уравнения Эйлера следует, что $\lambda_1 = 0$. Получили противоречие с тем, что набор множителей Лагранжа должен быть ненулевым.

Рассмотрим случай $\lambda_0 \neq 0$. Положим, что $\lambda_0 = ½$, тогда общее решение уравнения Эйлера будет $x = -½\lambda_1$. Решение такого уравнения существует только, если $A = B = -½\lambda_1$ и $S = -\lambda_1(b - a)$, то есть искомым телом является цилиндр.

Пример 1.8.4. Решить задачу Дидоны (см. пример 1.1.2.)

$$J[x] = \int_{-a}^{a} x dt \to \text{extr}, \text{ при условии } \int_{-a}^{a}\sqrt{1+x'^2}\,dt = l,\ x(-a) = x(a) = 0.$$

Решение. Составим функцию Лагранжа $L(t, x, x') = \lambda_0 x + \lambda_1\sqrt{1+x'^2}$. Составим уравнение Эйлера, для этого найдём $L_x = \lambda_0$, $L_{x'} = \left(\frac{\lambda_1 x'}{\sqrt{1+x'^2}}\right)$. Уравнение Эйлера в исследуемой задаче имеет вид

$$\lambda_0 - \frac{d}{dt}\left(\frac{\lambda_1 x'}{\sqrt{1+x'^2}}\right) = 0.$$

Рассмотрим случай $\lambda_0 = 0$. В этом случае из уравнения Эйлера следует, что $\frac{d}{dt}\left(\frac{\lambda_1 x'}{\sqrt{1+x'^2}}\right) = 0$. Значит, $\frac{\lambda_1 x'}{\sqrt{1+x'^2}} = const$, следовательно, $x' = C_1$. Откуда $x = C_1 t + C_2$. Их граничных условий $x(-a) = x(a) = 0$, следует, что $C_1 = C_2 = 0$.

Получили, что $x \equiv 0$, однако такая функция не удовлетворяет постановке задачи.

Рассмотрим случай $\lambda_0 \neq 0$. Положим, что $\lambda_0 = 1$. В этом случае из уравнения Эйлера следует, что $\frac{\lambda_1 x'}{\sqrt{1+x'^2}} = t + C$. Выразим из этого уравнения $x' = \pm\frac{t+C}{\sqrt{\lambda^2-(t+C)^2}}$. Интегрируем последнее уравнение, находим $x = \pm\sqrt{\lambda^2-(t+C)^2} + C_3$.

Запишем последнее условие в виде $(x + C_3)^2 + (t + C)^2 = \lambda^2$ — уравнение окружности.

Из граничных условий $x(-a) = x(a) = 0$ следует, что $C = 0$, $\lambda^2 = C_3 + a^2$.

Окончательно, решение задачи — это окружность, заданная уравнением $(x + C_3)^2 + (t + C)^2 = C_3 + a^2$.

Пример 1.8.6. Ракету требуется вывести в заданный момент времени T на заданную высоту h и израсходовать при этом как можно меньше топлива. Начальная скорость ракеты равна v.

Решение. Проведём формализацию этой задачи. Обозначим скорость ракеты $v = x$. Получаем следующую изопериметрическую задачу

$$\int_0^T (x' + g)^2 dt \to \min, \int_0^T x dt = h, x(0) = v.$$

Составим функцию Лагранжа $L(t, x, x') = \lambda_0(x' + g)^2 + \lambda_1 x$. Составим уравнение Эйлера, для этого найдём $L_x = \lambda_1$, $L_{x'} = 2\lambda_0(x' + g)$. Уравнение Эйлера в исследуемой задаче имеет вид

$$2\lambda_0 (x' + g) = \lambda_1.$$

Рассмотрим случай $\lambda_0 = 0$. В этом случае из уравнения Эйлера следует, что $\lambda_1 = 0$. Получили противоречие с тем, что набор множителей Лагранжа должен быть ненулевым.

Рассмотрим случай $\lambda_0 \neq 0$. Положим, что $\lambda_0 = ½$, тогда общее решение уравнения Эйлера будет

$$x = Ct^2 + At + B, C = ½\lambda_1.$$

Подставим эту функцию в равенства

$$\int_0^T x\,dt = h,\ x(0) = v,\ x'(T) + g = 0.$$

Будем иметь

$$\frac{C}{3}T^3 + \frac{A}{2}T^2 + BT - h = 0,\ B = v,\ 2CT + A + g = 0.$$

Из этих уравнений следует, что

$$C = -\frac{3}{2}\frac{h - vT}{T^3} - \frac{3}{2}\frac{g}{T},\ A = 3\frac{h - vT}{T^2} + \frac{g}{2},\ B = v.$$

Задачи для самостоятельного решения

1.8.1. Решить изопериметрические задачи:

а) $J[x] = \int_0^1 x'^2 dt \to \text{extr},\ \int_0^1 tx\,dt = 0,\ x(0) = 0,\ x(1) = 1;$

б) $J[x] = \int_0^1 x'^2 dt \to \text{extr},\ \int_0^1 x\,dt = 1,\ \int_0^1 tx\,dt = 0,\ x(0) = 0,\ x(1) = 0;$

в) $J[x] = \int_0^\pi x'^2 dt \to \text{extr},\ \int_0^\pi x\cos t\,dt = \frac{\pi}{2},\ x(0) = 1,\ x(\pi) = -1;$

г) $J[x] = \int_0^\pi x'^2 dt \to \text{extr},\ \int_0^\pi x\sin t\,dt = 0,\ x(0) = 1,\ x(\pi) = 1;$

д) $J[x] = \int_0^1 \left(x'^2 + x^2\right)dt \to \text{extr},\ \int_0^1 xe^t dt = \frac{e^2 + 1}{4},\ x(0) = 0,\ x(1) = \text{e};$

е) $J[x] = \int_1^2 t^2 x'^2 dt \to \text{extr},\ \int_1^2 tx\,dt = \frac{7}{3},\ x(1) = 1,\ x(2) = 2.$

1.8.2. Найти допустимые экстремали в изопериметрической задаче

а) $J[x] = \int_0^\pi x\sin t\,dt \to \text{extr},\ \int_0^\pi x'^2 dt = \frac{3\pi}{2},\ x(0) = 0,\ x(\pi) = \pi;$

б) $J[x] = \int_0^1 \left(x'^2 + x^2\right)dt \to \text{extr},\ \int_0^1 xe^{-t} dt = \frac{1 - 3e^{-2}}{4},\ x(0) = 0,\ x(1) = e^{-1};$

в) $J[x] = \int_1^2 t^3 x'^2 dt \to \text{extr}$, $\int_1^2 x dt = 2$, $x(1) = 4$, $x(2) = 1$;

г) $J[x_1, x_2] = \int_0^1 x'_1 x'_2 dt \to \text{extr}$, $\int_0^1 x_1 dt = 1$, $\int_0^1 x_2 dt = 0$,

$x_1(0) = x_1(1) = x_2(0) = 0$, $x_2(1) = 1$;

д) $J[x_1, x_2] = \int_0^1 x'_1 x'_2 dt \to \text{extr}$, $\int_0^1 t x_1 dt = 0$, $\int_0^1 t x_2 dt = 0$,

$x_1(0) = x_1(1) = x_2(0) = 0$, $x_2(1) = 1$;

е) $J[x_1, x_2] = \int_0^1 (x_1 + x_2) dt \to \text{extr}$, $\int_0^1 x'_1 x'_2 dt = 0$,

$x_1(0) = x_2(0) = 0$, $x_1(1) = 1$, $x_2(1) = -3$;

ж) $J[x_1, x_2] = \int_0^1 t(x_1 - x_2) dt \to \text{extr}$, $\int_0^1 x'_1 x'_2 dt = -\frac{4}{5}$;

$x_1(0) = x_2(0) = x_2(1) = 0$, $x_1(1) = 2$.

1.9. ЗАДАЧА ЛАГРАНЖА

Задачей Лагранжа называется следующая экстремальная задача в пространстве: $\Xi = C^1(\Delta, R^n) \times C(\Delta, R^r) \times R^2$:

$$J_0[x, u, t_0, t_1] \to inf,$$

$$\Phi(x, u, t_0, t_1) = x' - \varphi(t, x, u) = 0, \tag{1.9.1}$$

$$J_i[x, u, t_0, t_1] \le 0,\ i = 1, \dots, k, \tag{1.9.2}$$

$$J_i[x, u, t_0, t_1] = 0,\ i = k + 1, \dots, m, \tag{1.9.3}$$

где $J_i[x, u, t_0, t_1] = \int_{t_0}^{t_1} F_i(t, x, u) dt + f_i(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1))$, $i = 0, \dots, m$.

Здесь Δ — заданный конечный отрезок, $t_0, t_1 \in \Delta$, $F_i : R \times R^n \times R^r \to R$ — функции $(n + r + 1)$ переменных, $f_i : R \times R^n \times R \times R^n \to R$ — функции $(2n + 2)$ переменных, $\varphi : R \times R^n \times R^r \to R^n$ — вектор-функция $(n + r + 1)$ переменных.

Определение 1.9.1. Функционал J_0 называется целевым функционалом. Равенства (1.9.3) называются связями типа равенств. Неравенства (1.9.2) называются связями типа неравенств. Ограничение (1.9.1) называется дифференциальной связью, вектор-функция $x = (x_1, ..., x_n)$ — фазовой переменной, вектор-функция $u = (u_1, ..., u_r)$ — управлением. Функции $u_j\ (t)$, $j = 1, \ldots, n$ называются управлениями.

Определение 1.9.2. Четвёрка (x, u, t_0, t_1) называется *управляемым процессом* в задаче Лагранжа, если $x \in C^1(\Delta, R^n)$, $u \in C(\Delta, R^r)$, $t_0, t_1 \in \mathrm{int}\Delta$, $t_0 < t_1$, и всюду на отрезке $[t_0, t_1]$ выполняется дифференциальная связь (1.9.1), и *допустимым управляемым процессом*, если эта четвёрка является управляемым процессом и, кроме того, выполнены ограничения (1.9.2), (1.9.3).

Определение 1.9.2. Допустимый управляемый процесс $\xi = (x, u, t_0, t_1)$ называется оптимальным в слабом смысле процессом, или слабым минимумом в задаче Лагранжа, если существует такое $\delta > 0$, что для любого допустимого управляемого процесса $\psi = (y, v, \tau_0, \tau_1)$, удовлетворяющего условию $\|\xi - \psi\|_\Xi < \delta$, выполнено неравенство $J_0[\xi] \le J_0[\psi]$.

Теорема 1.9.1. (Правило множителей Лагранжа для задачи Лагранжа). Пусть $\xi = (x, u, t_0, t_1)$ — оптимальный (в слабом смысле) процесс в задаче Лагранжа, и при этом функции φ, F_i, $i = 0, 1, ..., m$, и их частные производные по x и u непрерывны, а f_i, $i = 0, 1, ..., m$, непрерывно дифференцируемы. Тогда найдутся множители Лагранжа $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ и $p(t) \in C^1([t_0, t_1], R^n)$, не равные одновременно нулю, и такие, что для функции Лагранжа

$$\mathcal{L}(x, u, t_0, t_1;\ p, \lambda) = \int_{t_0}^{t_1} L dt + l =$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=0}^{m} \lambda_i F_i(t, x, u) + p(t)\big(x' - \varphi(t, x, u)\big) \right) dt + \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)), \tag{1.9.4}$$

выполнены условия:

а) дополняющей нежёсткости:

$$\lambda_i J_i = 0,\ i = 1, \ldots, k;$$

б) неотрицательности:

$$\lambda_i \geq 0,\ i = 0, \ldots, k;$$

в) стационарности по x — уравнение Эйлера

$$L_x - \frac{d}{dt} L_{x'} = 0$$

для лагранжиана

$$L = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i F_i(t, x, u) + p(t)\big(x' - \varphi(t, x, u)\big);$$

г) трансверсальности по x:

$$L_{x'} - l_{x(t_0)}\big|_{t=t_0} = 0,\ L_{x'} + l_{x(t_1)}\big|_{t=t_1} = 0$$

для терминанта

$$l = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i\big(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)\big);$$

д) стационарности по u:

$$L_u = 0;$$

е) стационарности по t_0, t_1:

$$\mathcal{L}_{t_0} = 0,\ \mathcal{L}_{t_1} = 0$$

(условие стационарности по t_0, t_1 выписывается только для подвижных концов).

Правило решения

1. Составить функцию Лагранжа (1.9.4).

2. Выписать необходимые условия оптимального в слабом смысле процесса $\xi = (x, u, t_0, t_1)$:

а) дополняющей нежёсткости:

$$\lambda_i J_i = 0,\ i = 1, \ldots, k;$$

б) неотрицательности:

$$\lambda_i \geq 0,\ i = 0, \ldots, k;$$

в) стационарности по x — уравнение Эйлера

$$L_x - \frac{d}{dt} L_{x'} = 0;$$

г) трансверсальности по x:

$$L_{x\prime} - l_{x(t_0)}\big|_{t=t_0} = 0, L_{x\prime} + l_{x(t_1)}\big|_{t=t_1} = 0;$$

д) стационарности по u:

$$L_u = 0;$$

е) стационарности по t_0, t_1:

$$\mathcal{L}_{t_0} = 0, \mathcal{L}_{t_1} = 0$$

(условие стационарности по t_0, t_1 выписывается только для подвижных концов).

3. Найти допустимые управляемые процессы, для которых выполняются условия пункта 2 с множителями Лагранжа $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ и $p(t)$, одновременно не равными нулю. При этом отдельно рассмотреть случаи $\lambda_0 = 0$ и $\lambda_0 \neq 0$. Во втором случае можно положить λ_0 равным единице или любой другой положительной константе.

4. Среди всех найденных в пункте 3 допустимых экстремальных процессов отыскать решение или доказать, что решения нет.

Пример 1.9.1. Решить задачу Лагранжа

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} u^2 dt \to \min,$$

при условии $x'' + x = u$, $x(0) = x'(0) = 0$, $x(\pi/2) = 1$.

Решение. Приведём задачу к виду задачи Лагранжа, сделав замену переменных $x_1 = x$, $x_2 = x'$. Тогда

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} u^2 dt \to \min,$$

$$x'_1 = x_2,\ x_2' = u - x_1,\ x_1(0) = x_2(0) = 0,\ x_1(\pi/2) = 1.$$

Составим функцию Лагранжа

$$\mathcal{L} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} L dt + l = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\lambda_0 u^2 + p_1(x'_1 - x_2) + p_2(x'_2 + x_2 - u)\right) dt +$$

$$+ \lambda_1 x_1(0) + \lambda_2 x_2(0) + \lambda_3 \left(x_1\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1\right).$$

Необходимые условия:

а) система уравнений Эйлера для лагранжиана

$$L = \lambda_0 u^2 + p_1(x'_1 - x_2) + p_2(x'_2 + x_2 - u):$$

$$L_{x_i}(t) - \frac{d}{dt} L_{x_i'}(t) = 0, i = 1, 2 \ \Leftrightarrow -p'_1 + p_2 = 0, -p'_2 - p_1 = 0;$$

б) трансверсальность по x для терминанта

$$l = \lambda_1 x_1(0) + \lambda_2 x_2(0) + \lambda_3 \left(x_1\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1\right):$$

$$L_{x_i'} - l_{x_i(t_0)}\Big|_{t=t_0} = 0, \ L_{x_i'} + l_{x_i(t_1)}\Big|_{t=t_1} = 0 \Leftrightarrow$$

$$p_1(0) = \lambda_1, \ p_2(0) = \lambda_2, \ p_1(\pi/2) = -\lambda_3, \ p_2(\pi/2) = 0;$$

в) стационарность по u:

$$L_u = 0 \Leftrightarrow 2\lambda_0 u - p_2 = 0.$$

Если $\lambda_0 = 0$, то из условия «в» следует, что $p_2 \equiv 0$; тогда из «а», что $p_1 \equiv 0$, и, значит, в силу условия «б» $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ — все множители Лагранжа — нули. Итак, при $\lambda_0 = 0$ допустимых экстремалей нет.

Положим $\lambda_0 = ½$. Из системы уравнений Эйлера вытекает, что $p_2'' + p_2 = 0$. Общее решение этого дифференциального уравнения: $p_2 = C_1 \sin t + C_2 \cos t$. Поскольку $p_2(\pi/2) = 0$, то $p_2 = C_2 \cos t$. Значит, по условию стационарности $u = C_2 \cos t$. Таким образом, получили дифференциальное уравнение $x'' + x = C_2 \cos t$. Общее решение будет $x = (C_3 + C_4 t)\sin t + C_5 \cos t$. Неизвестные константы C_3, C_4, C_5 определяются из заданных условий на концах. Единственная допустимая экстремальная пара: $(x_0, u_0) = (2/\pi \ t \sin t, 4/\pi \cos t)$.

Покажем с помощью непосредственной проверки, что пара (x_0, u_0) доставляет минимум функционалу. Возьмём такие функцию h и управление v, чтобы пара $(x_0 + h, u_0 + v)$ была допустимой. Для этого надо взять функцию $h \in C^2[0, \pi/2]$, $h(0) = h'(0) = h(\pi/2) = 0$, и управление $v = h'' + h$. Имеем

$$\Delta J = J[x_0 + h, u_0 + v] - J[x_0, u_0] =$$

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} u_0 v\, dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} v^2 dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} u_0(h'' + h)\, dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} v^2 dt.$$

Интегрируя по частям в первом интеграле с учётом условий на концах функции h и управления v, получим

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} u_0(h'' + h)\, dt = 2u_0 h'\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (hu_0 - u'_0 h')dt =$$

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} hu_0 dt - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} u'_0 dh = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} hu_0 dt - 2u'_0 h\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} u''_0 h dt =$$

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (u''_0 + u_0) h dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{4}{\pi}\cos t + \frac{4}{\pi}\cos t\right) h dt = 0.$$

Окончательно, приращение функционала $\Delta J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} v^2 dt$.

Таким образом, $\Delta J \geq 0$ и, следовательно, пара $(x_0, u_0) = (2/\pi\ t\sin t, 4/\pi \cos t)$ доставляет минимум в задаче.

Пример 1.9.2. Найти допустимые экстремали

$$\int_0^1 \left(u^2 + 4xu + 5x^2\right) dt \to \min,$$

при условии $x' = 2x + u$, $x(0) = 0$, $x(1) = 4\text{sh}1$.

Решение. Составим функцию Лагранжа

$$\mathcal{L} = \int_0^1 L dt + l = \int_0^1 \big(\lambda_0(u^2 + 4xu + 5x^2) + p(x' - 2x - u)\big) dt +$$

$$+ \lambda_1 x(0) + \lambda_2(x(1) - 4\text{sh}1).$$

Необходимые условия:

а) система уравнений Эйлера для лагранжиана

$$L = \lambda_0(u^2 + 4xu + 5x^2) + p(x' - 2x - u):$$

$$L_x(t) - \frac{d}{dt}L_{x'}(t) = 0 \Leftrightarrow 4\,\lambda_0\, u + 10\,\lambda_0\, x - 2\,p - p' = 0;$$

б) трансверсальность по x для терминанта $l = \lambda_1 x_1(0) + \lambda_2 x_2(0) + \lambda_3 x_1\left(\frac{\pi}{2}\right)$:

$$L_{x'} - l_{x(t_0)}\Big|_{t=t_0} = 0,\ L_{x'} + l_{x(t_1)}\Big|_{t=t_1} = 0 \Leftrightarrow$$

$$p(0) = \lambda_1,\ p(1) = -\lambda_2;$$

в) стационарность по u:

$$L_u = 0 \Leftrightarrow 2\lambda_0 u + 4\lambda_0 x - p = 0.$$

Если $\lambda_0 = 0$, то из условия «в» следует, что $p \equiv 0$; тогда в силу условия «б» $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ — все множители Лагранжа — нули. Получили противоречие. Итак, при $\lambda_0 = 0$ допустимых экстремалей нет.

Положим $\lambda_0 = ½$. Из условия «в» следует, что $u + 2\,x = p$ или $x' = p$, поэтому $x'' = p'$.

Из уравнения Эйлера вытекает, что

$$2\,u + 5x - 2(u + 2x) - x'' = 0.$$

После упрощения получаем уравнение

$$x'' - x = 0.$$

Общее решение этого дифференциального уравнения: $x = C_1e^t + C_2e^{-t}$. Используя граничные условия $x(0) = 0$, $x(1) = 4\text{sh}1$, находим константы $C_1 = 2$, $C_2 = -2$. Значит, $x_0 = 4\text{sh}t$. Найдём функцию $u_0 = x' - 2x = 4\text{ch}t - 8\text{sh}t$.

Таким образом, допустимая пара функций $(x_0, u_0) = (4\text{sh}t, 4\text{ch}t - 8\text{sh}t)$.

Пример 1.9.3. Решить задачу Лагранжа

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} u^2 dt + x^2(0) \to \min,$$

при условии $x'' + x = u$, $x(\pi/2) = 1$.

Решение. Приведём задачу к виду задачи Лагранжа, сделав замену переменных $x_1 = x$, $x_2 = x'$. Тогда

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} u^2 dt + x_1^2(0) \to \min,$$

$$x'_1 = x_2,\ x_2' = u - x_1,\ x_1(\pi/2) = 1.$$

Составим функцию Лагранжа

$$\mathcal{L} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} L dt + l\ = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\lambda_0 u^2 + p_1(x'_1 - x_2) + p_2(x'_2 + x_2 - u)\big) dt +$$

$$+ \lambda_0 x_1{}^2(0) + \lambda_1 \left(x_1\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1\right).$$

Необходимые условия:

а) система уравнений Эйлера для лагранжиана

$$L = \lambda_0 u^2 + p_1(x'_1 - x_2) + p_2(x'_2 + x_2 - u):$$

$$L_{x_i}(t) - \frac{d}{dt} L_{x_i{}'}(t) = 0, i = 1, 2\ \Leftrightarrow\ -p'_1 + p_2 = 0,\ -p'_2 - p_1 = 0;$$

б) трансверсальность по x для терминанта $l = \lambda_0 x_1{}^2(0) + \lambda_1 \left(x_1\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1\right.$:

$$L_{x_i{}'} - l_{x_i(t_0)}\big|_{t=t_0} = 0,\ L_{x_i{}'} + l_{x_i(t_1)}\big|_{t=t_1} = 0 \Leftrightarrow$$

$$p_1(0) = 2\lambda_0 x_1(0),\ p_2(0) = 0,\ p_1(\pi/2) = -\lambda_1,\ p_2(\pi/2) = 0;$$

в) стационарность по u:

$$L_u = 0 \Leftrightarrow 2\lambda_0 u - p_2 = 0.$$

Если $\lambda_0 = 0$, то из условия «в» следует, что $p_2 \equiv 0$; тогда из условия «а» $p_1 \equiv 0$, и, значит, в силу условия «б» $\lambda_1 = 0$ — все множители Лагранжа — нули. Итак, при $\lambda_0 = 0$ допустимых экстремалей нет.

Положим, что множитель $\lambda_0 = ½$. Из системы уравнений Эйлера вытекает, что $p_2'' + p_2 = 0$. Общее решение этого дифференциального уравнения: $p_2 = C_1 \sin t + C_2 \cos t$. Поскольку $p_2(0) = 0$ и $p_2(\pi/2) = 0$, то $p_2 \equiv 0$. Значит, по условию стационарности $u \equiv 0$. Таким образом, получили дифференциальное уравнение $x'' + x = C_2 \cos t$. Общее решение будет $x = C_3 \cos t + C_4 \sin t$. Неизвестные константы C_3, C_4 определяются из заданных условий на концах $x(\pi/2) = 1$, $p_1(0) = x(0) = 0$. Единственная допустимая экстремальная пара $(x_0, u_0) = (\sin t, 0)$.

Покажем с помощью непосредственной проверки, что пара (x_0, u_0) доставляет минимум функционалу. Возьмём такие функцию h и управление v, чтобы пара $(x_0 + h, u_0 + v)$ была допустимой. Для этого надо взять функцию $h \in C^2[0, \pi/2]$, $h(\pi/2) = 0$, и управление $v = h'' + h$. Имеем

$$\Delta J = J[x_0 + h, u_0 + v] - J[x_0, u_0] =$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} u_0 v\, dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} v^2 dt + 2x_0(0)h(0) + h^2(0).$$

Поскольку $u_0 \equiv 0$ и $x_0(0) = \sin 0 = 0$, то приращение функционала будет $\Delta J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} v^2 dt + h^2(0)$.

Таким образом, $\Delta J \geq 0$ и, следовательно, пара $(x_0, u_0) = (\sin t, 0)$ доставляет минимум в задаче.

Пример 1.9.4. Решить задачу Чаплыгина (см. пример 1.1.3).

Решение. Имеем следующую задачу Лагранжа

$$\int_0^T (x_2(t)(v + w\cos u) - x_1(t)\, w\sin u)dt \to \min,$$

$$x_1(0) - x_1(T) = 0,\ x_2(0) - x_2(T) = 0,\ x_1'(t) = v + w\cos u,\ x_2'(t) = w\sin u.$$

Применяем правило множителей Лагранжа. Составим функции

$$L(t, x_1, x_2, x_1', x_2', u) = \lambda_0 x_2(v + w\cos u) - \lambda_0 x_1 w\sin u +$$

$$+ p_1(t)(x_1' - v - w\cos u) + p_2(t)(x_2' - w\sin u),$$

$$l(x_1(0), x_2(0), x_1(T), x_2(T)) = \lambda_1 (x_1(0) - x_1(T)) + \lambda_2(x_2(0) - x_2(T)).$$

Необходимые условия:

а) система уравнений Эйлера

$$L_{x_i}(t) - \frac{d}{dt}L_{x_i'}(t) = 0, i = 1, 2 \Leftrightarrow$$

$$p_1'(t) = -\lambda_0 w\sin u,\ p_2'(t) = \lambda_0(v + w\cos u);$$

б) трансверсальность по x для терминанта

$$L_{x'} - l_{x(t_0)}\big|_{t=t_0} = 0,\ L_{x'} + l_{x(t_1)}\big|_{t=t_1} = 0 \Leftrightarrow$$

$$p_1(0) = \lambda_1,\ p_2(0) = \lambda_2,\ p_1(\mathrm{T}) = \lambda_1,\ p_2(\mathrm{T}) = \lambda_1;$$

в) стационарность по u:

$$L_u = 0 \Leftrightarrow -\lambda_0 x_2 \sin u - \lambda_0 x_1 \cos u + p_1(t)\sin u - p_2(t)\cos u = 0.$$

Рассмотрим случай $\lambda_0 = 0$. Тогда из «а» и «б» следует, что $p_1(t) = \lambda_1$, $p_2(t) = \lambda_2$. Отсюда из «а» получим равенство $\lambda_1 \sin u - \lambda_2 \cos u = 0$. Поскольку хотя бы одно из чисел λ_1 и λ_2 отлично от нуля, то из предыдущего равенства следует, что $u = \mathrm{const}$. Поэтому условия замкнутости траектории примут вид

$$x_1(0) - x_1(T) = (v + w\cos u)\, T = 0,\ x_2(0) - x_2(T) = (w\sin u)T = 0.$$

Отсюда получим противоречивые равенства

$$\cos u = -\frac{v}{w} \neq -1,\ \sin u = 0.$$

Пусть число $\lambda_0 \neq 0$. Полагаем $\lambda_0 = 1$. Тогда из уравнений движения и из формул условия «а» получим, что $x_1'(t) - p_2'(t) = 0$, $x_2'(t) + p_1'(t) = 0$. Следовательно,

$$x_1(t) - p_2(t) = 2a = \mathrm{const},\ x_2(t) + p_1(t) = 2b = \mathrm{const}.$$

Подставим эти равенства в формулы «б», получаем

$$(x_1(t) - a)\cos u + (x_2(t) - b)\sin u = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\cos u = \pm\frac{x_2 - b}{\sqrt{(x_1 - a)^2 + (x_2 - b)^2}},\ \sin u = \mp\frac{x_1 - a}{\sqrt{(x_1 - a)^2 + (x_2 - b)^2}}.$$

Покажем, что если выполнены эти равенства, то функция

$$V(x_1, x_2) = \sqrt{(x_1 - a)^2 + (x_2 - b)^2} \pm \frac{v}{w} x_2$$

является первым интегралом системы уравнений движения. В самом деле, производная этой функции в силу системы уравнений движения равна

$$\frac{x_1 - a}{\sqrt{(x_1 - a)^2 + (x_2 - b)^2}}\ (v + w\cos u) + \frac{x_2 - b}{\sqrt{(x_1 - a)^2 + (x_2 - b)^2}}\ w\sin u \pm v\sin u =$$

$$= \frac{x_1 - a}{\sqrt{(x_1 - a)^2 + (x_2 - b)^2}}\, v \pm v\sin u = 0.$$

Пусть $x_1(0) = 0$ и $x_2(0) = 0$. Тогда из формулы для функции $V(x_1, x_2)$ получаем уравнение траектории

$$\sqrt{(x_1 - a)^2 + (x_2 - b)^2} \pm \frac{v}{w} x_2 = \sqrt{a^2 + b^2},$$

которое является уравнением эллипса.

Пример 1.9.5. Решить задачу о перехвате цели (см. пример 1.1.4).

Имеем следующую задачу Лагранжа:

$$\int_{t_0}^{t_1} 1dt + t_0 \to \min, \quad \int_{t_0}^{t_1} \left(u_1^2(t) + u_2^2(t)\right) dt - \mu \le 0,$$

$$x_1(t_0) = 0,\ x_2(t_0) = 0,\ x_3(t_0) = 0,\ x_4(t_0) = 0,$$

$$x_1(t_1) + l - vt_1 = 0,\ x_2(t_1) - h = 0,$$

$$x_1' = x_3,\ x_2' = x_4,\ x_3' = u_1,\ x_4' = -g + u_2.$$

Для нахождения оптимального управления применим правило множителей Лагранжа. Составим функции

$$H = -\lambda_0 - \lambda_1(u_1^2 + u_2^2) + \psi_1(t)x_3 + \psi_2(t)x_4 + \psi_3(t)u_1 + \psi_4(t)(-g + u_2);$$

$$l = \lambda_0 t_0 - \lambda_1 \mu + \lambda_2 x_1(t_0) + \lambda_3 x_2(t_0) + \lambda_4 x_3(t_0) + \lambda_5 x_4(t_0) +$$

$$+ \lambda_6(x_1(t_1) + l - vt_1) + \lambda_7(x_2(t_1) - h).$$

Запишем уравнения Эйлера по переменным x_i:

$$\psi_1' = 0,\ \psi_2' = 0,\ \psi_3' = -\psi_1,\ \psi_4' = -\psi_2;$$

условия трансверсальности:

$$\psi_1(t_0) = \lambda_2,\ \psi_2(t_0) = \lambda_3,\ \psi_3(t_0) = \lambda_4,\ \psi_4(t_0) = \lambda_5,$$

$$\psi_1(t_1) = -\lambda_6,\ \psi_2(t_1) = -\lambda_7,\ \psi_3(t_1) = 0,\ \psi_4(t_1) = 0;$$

условия оптимальности по переменным u_i:

$$2\lambda_1 u_1(t) - \psi_3(t) = 0, 2\lambda_1 u_2(t) - \psi_4(t) = 0;$$

и условия оптимальности по переменным t_0 и t_1:

$$-\lambda_0 - \lambda_1(u_1^2(t_0) + u_2^2(t_0)) + \psi_1(t_0)x_3(t_0) + \psi_2(t_0)x_4(t_0) +$$

$$+\psi_3(t_0)u_1(t_0) + \psi_4(t_0)(-g + u_2(t_0)) + \lambda_0 = 0,$$

$$\lambda_0 + \lambda_1(u_1^2(t_1) + u_2^2(t_1)) - \psi_1(t_1)x_3(t_1) - \psi_2(t_1)x_4(t_1) - \lambda_6 v = 0. \quad (22)$$

Запишем условие дополняющей нежёсткости

$$\lambda_1 \left(\int_{t_0}^{t_1} (u_1^2(t) + u_2^2(t))dt - \mu\right) = 0$$

и условия согласования знаков $\lambda_0 \geq 0$, $\lambda_1 \geq 0$.

Допустим, что множитель $\lambda_1 = 0$. Тогда из уравнений выше следует, что все функции $\psi_i(t) = 0$. Отсюда, используя условия трансверсальности и оптимальности по переменным t_0 и t_1, получим, что все остальные множители Лагранжа равны нулю. Получили противоречие.

Положим $\lambda_1 = 0{,}5$. Тогда из уравнений Эйлера, используя условия трансверсальности, получим

$$\psi_1(t) = A,\ \psi_2(t) = B,\ \psi_3(t) = A(t_1 - t),\ \psi_4(t) = B(t_1 - t),$$

где A и B — некоторые постоянные. Отсюда и из условия оптимальности по переменным u_i следует вид управлений

$$u_1(t) = A(t_1 - t),\ u_2(t) = B\,(t_1 - t).$$

Подставляя эти управления в уравнения движения и используя начальные условия, будем иметь:

$$x_3(t) = -0{,}5A(t_1 - t)^2 + 0{,}5A(t_1 - t_0)^2,$$

$$x_1(t) = \frac{1}{6}A\{(t_1 - t)^3 - (t_1 - t_0)^3 + 3(t - t_0)(t_1 - t_0)^2\},$$

$$x_4(t) = -g(t - t_0) - 0{,}5B(t_1 - t)^2 + 0{,}5B(t_1 - t_0)^2,$$

$$x_2(t) = -\frac{g}{2}(t - t_0)^2 + \frac{1}{6}B\{(t_1 - t)^3 - (t_1 - t_0)^3 + 3\,(t - t_0)(t_1 - t_0)^2\}.$$

Таким образом, условия встречи принимают вид

$$A(t_1 - t_0)^3 = 3(vt_1 - l),\ B(t_1 - t_0)^3 - \frac{3g}{2}(t_1 - t_0)^2 = 3h. \qquad (27)$$

Подставим управления $u_1(t) = A(t_1 - t)$, $u_2(t) = B(t_1 - t)$ в условие дополняющей нежёсткости. Получим

$$(A^2 + B^2)(t_1 - t_0)^3 = 3\mu.$$

Подставим функции $\psi_i(t)$ и управления в условие оптимальности по t_0. Тогда, учитывая начальные условия, получим, что

$$(A^2 + B^2)(t_1 - t_0) = 2gB.$$

Отсюда и из уравнения $(A^2 + B^2)(t_1 - t_0)^3 = 3\mu$ следует равенство

$$B(t_1 - t_0)^2 = \frac{3\mu}{2g}.$$

Подставляя это соотношение в уравнение $B(t_1 - t_0)^3 - \frac{3g}{2}(t_1 - t_0)^2 = 3h$, получим

$$(t_1 - t_0)^2 - \frac{\mu}{g^2}(t_1 - t_0) + \frac{2h}{g} = 0.$$

Это квадратное уравнение имеет действительные корни

$$t_1 - t_0 = \frac{\mu}{2g^2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{8hg^3}{\mu^2}}\right)$$

тогда и только тогда, когда его дискриминант неотрицателен. Отсюда следует условие на начальный запас ресурсов

$$\mu \geq g\sqrt{8hg}\,.$$

Таким образом, если запас ресурсов не удовлетворяет этому неравенству, то перехват цели невозможен.

Из формулы $B(t_1 - t_0)^2 = \frac{3\mu}{2g}$ выразим значение B и подставим его в формулу $(A^2 + B^2)(t_1 - t_0)^3 = 3\mu$. Получим

$$A^2 = -\frac{9\mu^2}{4g^2(t_1 - t_0)^4} + \frac{3\mu}{(t_1 - t_0)^3} = \frac{3\mu^2}{4g^2(t_1 - t_0)^4}\left(-3 + (t_1 - t_0)\frac{4g^2}{\mu}\right).$$

Подставим сюда формулу $t_1 - t_0 = \frac{\mu}{2g^2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{8hg^3}{\mu^2}}\right)$. Будем иметь

$$A^2 = \frac{3\mu^2}{4g^2(t_1 - t_0)^4}\left(-1 \pm 2\sqrt{1 - \frac{8hg^3}{\mu^2}}\right).$$

Поскольку $A^2 \geq 0$, то из предыдущей формулы получим, что в формуле нужно брать знак плюс. Взяв знак «плюс» в предыдущей формуле, получим, что должно выполняться неравенство

$$-1 + 2\sqrt{1 - \frac{8hg^3}{\mu^2}} \geq 0 \Leftrightarrow \mu \geq g\sqrt{\frac{32}{3}hg}\,.$$

Если запас ресурсов не удовлетворяет этому неравенству, то перехват цели невозможен.

Таким образом,

$$t_1 - t_0 = \frac{\mu}{2g^2}\, a,\ A = \pm\, 2\, \frac{g^3}{\mu a^2}\sqrt{-9+6a}\,,$$

$$B = \frac{6g^3}{\mu a^2}\,,\ a = 1 + \sqrt{1 - \frac{8hg^3}{\mu^2}}\,.$$

Если

$$A = 0 \Leftrightarrow h = \frac{3\mu^2}{32\,g^3}\,,$$

то $u_1(t) = 0$. Это значит, что ракета всё время поднимается вертикально вверх.

Подставим полученные формулы в условие встречи. Отсюда найдём момент запуска ракеты

$$t_0 = \frac{\mu^2 a}{12\,vg^3}\,\left[\,\pm\sqrt{-9+6a} + 12\frac{g^3}{\mu^2 a}l - 6\frac{g}{\mu}v\,\right].$$

Поскольку $t_0 \ge 0$, то для осуществлении встречи необходимо, чтобы

$$\sqrt{-9+6a} + 12\frac{g^3}{\mu^2 a}l \ \ge 6\frac{g}{\mu}v.$$

Если

$$-\sqrt{-9+6a} + 12\frac{g^3}{\mu^2 a}l \ge 6\frac{g}{\mu}v,$$

то момент запуска ракеты определяется формулой

$$t_0 = \frac{\mu^2 a}{12\,vg^3}\,\left[-\sqrt{-9+6a} + 12\frac{g^3}{\mu^2 a}l - 6\frac{g}{\mu}v\right].$$

В этом случае $A < 0$ и, следовательно, $x_1(t) < 0$. Это значит, что ракета, поднимаясь вверх, идёт навстречу цели.

Пусть это неравенство не выполнено. Тогда момент t_0 определяется формулой

$$t_0 = \frac{\mu^2 a}{12 v g^3}\ [\sqrt{-9+6a} + 12\frac{g^3}{\mu^2 a} l - 6\frac{g}{\mu} v].$$

В этом случае $A > 0$ и, следовательно, $x_1(t) > 0$. Это значит, что ракета, поднимаясь вверх, движется за целью.

Задачи для самостоятельного решения

1.9.1. Решить задачи Лагранжа:

а) $\int_0^1 u^2 dt \to \text{extr}$, $x'' - x = u$, $x(0) = 1$;

б) $\int_0^1 u^2 dt \to \text{extr}$, $x'' - x = u$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$;

в) $\int_0^1 u^2 dt \to \text{extr}$, $x'' - x = u$, $x(0) = \text{sh}0$, $x(1) = \text{ch}1$, $x'(1) = \text{ch}1 + \text{sh}1$;

г) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} u^2 dt \to \text{extr}$, $x'' + x = u$, $x'(0) = 1$;

д) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} u^2 dt \to \text{extr}$, $x'' + x = u$, $x(0) = 1$, $x'(0) = -\pi/2$, $x(\pi/2) = 0$, $x'(\pi/2) = 1$;

е) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} u^2 dt + x^2(0) \to \text{extr}$, $x'' + x = u$, $x(\pi/2) = 0$, $x'(\pi/2) = 1$;

ж) $\int_0^1 u^2 dt + x^2(0) \to \text{extr}$, $x'' - x = u$, $x(0) = 1$.

1.9.2. Найти допустимые экстремали в задаче Лагранжа:

а) $\int_0^1 \left(u^2 - 8xu + 17x^2\right) dt \to \text{extr}$, $x' = -4x + u$, $x(0) = 0$, $x(1) = 2\text{sh}1$;

б) $\int_0^1 \left(u^2 - 6xu + 10x^2\right) dt \to \text{extr}$, $x' = -3x + u$, $x(0) = 0$, $x(1) = 2\text{sh}1$.

ГЛАВА 2. ОСНОВЫ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

2.1. ВВЕДЕНИЕ. ПРИМЕРЫ ЗАДАЧ

Будем рассматривать объект, состояние которого в фиксированный момент времени описывается набором из n чисел $x_1, x_2, ..., x_n$. Например, если объект есть движение материальной точки в пространстве, то x_1, x_2, x_3 — координаты точки; если объект — электрическая цепь, то $x_1, x_2, ..., x_n$ — напряжения или токи в различных участках цепи, если объект — течение химической реакции, то $x_1, x_2, ..., x_n$ — количества различных ингредиентов, катализаторов. Эти числа называют координатами фазового состояния, вектор $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ называется фазовым вектором. Состояние объекта в каждый момент времени можно изобразить точкой (вектором) n-мерного пространства R^n, которое называется фазовым пространством.

Движение объекта проявляется в том, что его фазовые координаты меняются с течением времени t, то есть фазовый вектор является вектор-функцией $x = x(t)$. При движении объекта фазовая точка $x(t)$ описывает в фазовом пространстве R^n кривую — фазовую траекторию. Обычно фазовые координаты являются инерционными (меняются плавно), так что вектор-функция $x(t)$ непрерывна.

Пусть множество $S \subset R^n$ представляет собой совокупность всех фазовых состояний $(x_1, x_2, ..., x_n)$, в которых объекту разрешается находиться. Тогда при движении объекта его состояние $x(t)$ в каждый момент времени t должно подчиняться условию

$$x(t) \in S \subset R^n,$$

которое называется фазовым ограничением.

Предположим, что объект находится под воздействием управления, параметры которого в каждый момент времени описываются набором из r чисел $u_1, u_2, ..., u_r$ (например, углы поворота руля, мощность двигателя; в химической реакции — количество добавляемых или убираемых ингредиентов и т. д.). Этот набор чисел составляет вектор управления $u = (u_1, u_2, ..., u_r)$, его можно изобразить точкой (или вектором) r-мерного пространства R^r. Управление — вектор-функция $u = u(t)$ — обычно является кусочно-непрерывной функцией (может иметь конечное число скачков в моменты переключения управления). Параметры управления не могут быть совершенно произвольными из-за конструктивных особенностей объекта, ограниченности ресурсов, условий эксплуатации объекта. Это значит, что в пространстве R^r управляющих параметров выделяется некоторое множество U, называемое областью управления. В любой момент времени точки $u(t)$ должны принадлежать этому множеству:

$$u(t) \in U \subset R^r.$$

Это условие называется ограничением на управление. Кусочно-непрерывные функции управления $u(t)$, значения которых попадают в область управления, называются допустимыми управлениями. В дальнейшем имеем в виду допустимые управления.

Чтобы указать, как именно фазовая траектория объекта $x(t)$ определяется по выбранному управлению $u(t)$, надо задать закон движения объекта (управляемой системы). Будем предполагать, что закон движения объекта задаётся системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$x' = f(t, x, u), \tag{2.1.1}$$

где $f(t, x, u)$ — известная вектор-функция, непрерывная, как функция $n + r + 1$ переменных, и имеющая непрерывные частные производные по фазовым переменным $x_1, x_2, ..., x_n$.

При фиксированном допустимом управлении $u(t)$ система дифференциальных уравнений (2.1.1) превращается в нормальную систему обыкновенных дифференциальных уравнений с n неизвестными функциями $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$. Её решение называется фазовой траекторией, соответствующей выбранному управлению $u(t)$.

Говорят, что управление $u(t)$, определённое на отрезке времени $[t_0, t_1]$, переводит объект из фазового состояния x^0 в фазовое состояние x^1, если соответствующая этому управлению фазовая траектория — решение системы дифференциальных уравнений (2.1.1) с начальным условием $x(t_0) = x^0$

удовлетворяет фазовому ограничению $\forall t \in [t_0, t_1]$ $x(t) \in S$ и в момент времени t_1 попадает в фазовое состояние $x(t_1) = x^1$. Таким образом, задача управления состоит в том, чтобы найти какое-нибудь допустимое управление $u(t)$ (кусочно-непрерывную функцию из области управления U), чтобы задача

$$x' = f(t, x, u),\ x(t_0) = x^0,\ x(t_1) = x^1 \qquad (2.1.2)$$

имела решение $x = x(t)$, удовлетворяющее фазовому ограничению $x(t) \in S$.

Если эта задача имеет решение при любых краевых условиях (то есть всегда найдётся допустимое управление $u(t)$, переводящее объект (2.1.1) из любого состояния x^0 в любое другое состояние x^1), то говорят, что система (2.1.2) управляема.

Если система (2.1.2) управляема, то обычно она имеет бесконечное множество решений: имеется бесконечное множество допустимых управлений, переводящих объект (2.1.1) из фазового состояния x^0 в фазовое состояние x^1 по различным траекториям $x = x(t)$. Поэтому ставится задача оптимального выбора: среди допустимых управлений, решающих задачу (2.1.2), выбрать такое, при котором управляемый процесс будет наилучшим в каком-либо смысле. Другими словами, если качество процесса оценивается некоторой числовой характеристикой (себестоимость, время процесса и т. п.), то задача заключается в том, чтобы выбором подходящего управления обеспечить максимальное или минимальное значение этой числовой характеристики. Такую числовую характеристику можно задать функционалом $J[x, u]$, значение которого определяется фазовой траекторией $x(t)$ и управлением $u(t)$.

Задача оптимального управления состоит в отыскании управления $u(t)$, обеспечивающего экстремум этого функционала. Управление $u(t)$, обеспечивающее экстремум функционала $J[x, u]$, называется оптимальным управлением, а соответствующая этому уравнению фазовая траектория $x(t)$ — оптимальной траекторией.

Пример 2.1.1. Задача оптимального быстродействия

Материальная точка движется по прямой под действием управляемой силы, ограниченной по величине. Пусть $x(t)$ — координата точки в момент времени t. Управление движением начинается в момент времени $t = 0$ в точке $x(0) = x_0$ со скоростью $x'(0) = x'_0$ и должно закончиться за наименьшее время T в точке $x(T) = 0$ со скоростью $x'(T) = 0$. Управлением $u(t)$ является сила, ограниченная по величине: $-1 \le u(t) \le 1$, поэтому область управления $U = [-1, 1]$. Крайние значения $u(t) = -1$ и $u(t) = 1$ означают включение двигателя на полную мощность в отрицательном и положительном направлениях оси Ox соответственно. При движении в положительном направлении оси Ox скорость положительна: $x'(t) > 0$, а при движении в отрицательном направлении — отрицательна: $x'(t) < 0$.

Ускорение движения $x''(t)$ создаётся управлением (силой) $u(t)$, и по второму закону Ньютона имеем уравнение движения $x''(t) = u(t)$, $|u| \le 1$.

В начальный момент времени $t = 0$ заданы начальное положение x_0 и начальная скорость x'_0. Требуется как можно быстрее перевести точку в состояние $x(T) = 0$, $x'(T) = 0$.

Обозначим $x_1 = x$, $x_2 = x'$. Тогда получаем следующую задачу

$$T \to \min,\ x'_1 = x_2,\ x'_2 = u,\ |u| \le 1, \tag{2.1.3}$$

$$x_1(0) = x_0,\ x_2(0) = x'_0,\ x_1(T) = 0,\ x_2(T) = 0. \tag{2.1.4}$$

По внешней записи эта задача напоминает задачу Лагранжа. Однако в ней имеется геометрическое ограничение на выбор управления, чего нет в задаче Лагранжа. От этого ограничения можно освободиться, перейдя к новому управлению v, положив $u = \cos v$. Тогда получим

$$T \to \min,$$

$$x'_1 = x_2,\ x'_2 = \cos v,\ x_1(0) = x_0,\ x_2(0) = x'_0,\ x_1(T) = 0,\ x_2(T) = 0.$$

Рассмотрим эту задачу как задачу Лагранжа, в которой управления ищутся в классе непрерывных функций. Необходимые условия слабого локального минимума принимают вид

$$\psi_1'(t) = 0,\ \psi_2'(t) = -\psi_1(t);\ \psi_2(t)\sin v(t) = 0.$$

Отсюда находим, что $\psi_2(t) = C_1 t + C_2$. Числа C_1 и C_2 не равны одновременно нулю, в противном случае $\psi_1(t) \equiv 0$ и $\psi_2(t) \equiv 0$. Следовательно, $\sin v(t) = 0$. Поэтому $u(t) = \cos v(t) = \pm 1$. Поскольку управление ищется в классе непрерывных функций, то либо $u(t) \equiv 1$, либо $u(t) \equiv -1$. Подставив эти управления в уравнения движения (2.1.3), получим, что

$$x_1 = u\frac{x_2^2}{2} + x_0 - u\frac{x_0'^2}{2}.$$

Отсюда видно, что постоянным управлением $u(t) = \pm 1$ в начало координат можно попасть только из точек, удовлетворяющих условию

$$x_0 = \frac{x_0'^2}{2} \text{ или } x_0 = -\frac{x_0'^2}{2}.$$

Можно показать, что из любого начального состояния можно попасть в начало координат, если использовать управление, имеющее один разрыв, а именно

$$u(t) = 1 \text{ при } 0 \le t < \tau,\ u(t) = -1 \text{ при } \tau \le t \le T,$$

$$\text{или } u(t) = -1 \text{ при } 0 \le t < \tau,\ u(t) = 1 \text{ при } \tau \le t \le T.$$

Таким образом, приходим к необходимости искать управление в классе разрывных функций.

Пример 2.1.2. Задача об определении функции налога

Пусть x — годовой доход налогоплательщика. Задача состоит в определении функции налога $y(x)$. Сделаем следующие предположения:

1. Функция налога с ростом годового дохода должна расти (кто больше получает, тот должен больше платить). Это означает, что производная

$$y'(x) = u \ge 0.$$

2. С ростом годового дохода должен расти реальный доход $x - y(x)$ (должен быть стимул к зарабатыванию больших денег). Это означает, что производная реального дохода должна быть неотрицательной:

$$(x - y(x))' \ge 0 \Leftrightarrow y'(x) = u \le 1.$$

При выборе функции налога государство имеет цель собрать определённую сумму денег. Пусть $\varphi(x)$ — функция распределения количества налогоплательщиков в зависимости от годового дохода, то есть доля налогоплательщиков, годовой доход которых находится от x до $x + \Delta x$, приблизительно равняется величине $\varphi(x)\Delta x$. Таким образом, собранная сумма равняется числу налогоплательщиков, умноженному на $\int_0^X \varphi(x)y(x)dx$.

Здесь посредством X обозначен наибольший годовой доход среди налогоплательщиков.

На выбор функции налога имеем ограничение в виде равенства

$$\int_0^X \varphi(x)y(x)dx = c = const.$$

Обозначим через $f(z)$ количество удовольствия, которое получает индивидуум, обладая суммой денег z. Тогда суммарное количество удовольствия населения при выбранной налоговой политике задаётся интегралом

$$\int_0^X \varphi(x) f(x - y(x))dx.$$

Таким образом, можно рассмотреть следующую задачу

$$\int_0^X \varphi(x) f(x - y(x))dx \to \max,$$

$$\int_0^X \varphi(x)y(x)dx = c, \ y'(x) = u, \ 0 \le u \le 1.$$

2.2. ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Задачей оптимального управления (в понтрягинской форме) будем называть следующую задачу в пространстве $KC^1[\Delta, R^n] \times KC[\Delta, R^r] \times R^2$:

$$J_0[x, u, t_0, t_1] \to \inf,$$

$$x' = \varphi(t, x, u), \tag{2.2.1}$$

$$u(t) \in U, \ \forall t \in \Delta, \tag{2.2.2}$$

$$J_i[x, u, t_0, t_1] \leq 0,\ i = 1, \ldots, k, \qquad (2.2.3)$$

$$J_i[x, u, t_0, t_1] = 0,\ i = k + 1, \ldots, m, \qquad (2.2.4)$$

где $J_i[x, u, t_0, t_1] = \int_{t_0}^{t_1} F_i(t, x, u)dt + f_i(t_0,\ x(t_0), t_1, x(t_1))$, $i = 0, \ldots, m$.

Здесь Δ — заданный конечный отрезок, $t_0, t_1 \in \operatorname{int}\Delta$, $t_0 < t_1$, $F_i : R \times R^n \times R^r \to R$ — функции $(n + r + 1)$ переменных, $f_i : R \times R^n \times R \times R^n \to R$ — функции $(2n + 2)$ переменных, $\varphi : R \times R^n \times R^r \to R^n$ — вектор-функция $(n + r + 1)$ переменных, U — произвольное множество из R^r. Частным случаем задачи оптимального управления является задача, в которой один из концов или даже оба закреплены.

Определение 2.1.1. Функционал J_0 называется целевым функционалом, вектор-функция $x = (x_1, ..., x_n)$ — фазовой переменной, вектор-функция и $u = (u_1, ..., u_r)$ — управлением. Ограничение (2.2.1) называется дифференциальной связью, должно выполняться во всех точках непрерывности управления u на интервале (t_0, t_1).

Определение 2.1.2. Четвёрка (x, u, t_0, t_1) называется управляемым процессом в задаче оптимального управления, если $x \in KC^1(\Delta, R^n)$, $u \in KC(\Delta, R^r)$ и выполняются дифференциальная связь (2.2.1) и ограничения типа включения (2.2.2). Управляемый процесс является допустимым, если, кроме того, выполнены ограничения (2.2.3), (2.2.4).

Определение 2.1.3. Допустимый управляемый процесс $\xi = (x, u, t_0, t_1)$ называется оптимальным, если существует такое $\delta > 0$, что для любого допустимого управляемого процесса $\psi = (y, v, \tau_0, \tau_1)$, удовлетворяющего условию $\|(x, t_0, t_1) - (y, \tau_0, \tau_1)\|_{C(\Delta, R^n) \times R^2} < \delta$, выполнено неравенство $J_0[\xi] \leq J_0[\psi]$.

Теорема 2.1.1. (Принцип максимума Понтрягина). Пусть $\xi = (x^0, u^0, t_0, t_1)$ — оптимальный процесс в задаче оптимального управления, при этом функции φ, F_i, $i = 0, 1, ..., m$, и их частные производные по x непрерывны, а функции f_i, $i = 0, 1, ..., m$ непрерывно дифференцируемы. Тогда найдутся множители Лагранжа $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ и $p(t) \in KC^1([t_0, t_1], R^n)$, не равные одновременно нулю, и такие, что для функции Лагранжа

$$\mathcal{L}(x, u, t_0, t_1;\ p, \lambda) = \int_{t_0}^{t_1} L dt + l =$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=0}^{m} \lambda_i F_i(t, x, u) + p(t)\big(x' - \varphi(t, x, u)\big) \right) dt + \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)),$$

(2.2.5)

выполнены условия:

а) дополняющей нежёсткости:

$$\lambda_i J_i = 0,\ i = 1, \ldots, k;$$

б) неотрицательности:

$$\lambda_i \geq 0,\ i = 0, \ldots, k;$$

в) стационарности по x — уравнение Эйлера

$$L_x - \frac{d}{dt} L_{x'} = 0$$

для лагранжиана

$$L = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i F_i(t, x, u) + p(t)\big(x' - \varphi(t, x, u)\big);$$

г) трансверсальности по x:

$$L_{x'} - l_{x(t_0)}\big|_{t=t_0} = 0,\ L_{x'} + l_{x(t_1)}\big|_{t=t_1} = 0$$

для терминанта

$$l = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i\big(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)\big);$$

д) оптимальности по u:

$$\min_{u \in U} L(t, x^0, u) = L(t, x^0, u^0);$$

е) стационарности по t_0, t_1:

$$\mathcal{L}_{t_0} = 0, \mathcal{L}_{t_1} = 0$$

(условие стационарности по t_0, t_1 выписывается только для подвижных концов).

Правило решения

1. Составить функцию Лагранжа (2.2.5).

2. Выписать необходимые условия оптимального процесса

$$\xi = (x^0, u^0, t_0, t_1):$$

а) дополняющей нежёсткости:

$$\lambda_i J_i 0,\ i = 1, \ldots, k;$$

б) неотрицательности:

$$\lambda_i \geq 0,\ i = 0, \ldots, k;$$

в) стационарности по x — уравнение Эйлера

$$L_x - \frac{d}{dt} L_{x'} = 0;$$

г) трансверсальности по x:

$$L_{x\prime} - l_{x(t_0)}\big|_{t=t_0} = 0,\ L_{x\prime} + l_{x(t_1)}\big|_{t=t_1} = 0;$$

д) оптимальности по u — принцип минимума в лагранжевой форме

$$\min_{u \in U} L(t, x^0, u) = L(t, x^0, u^0)$$

или в гамильтоновой (понтрягинской) форме в виде принципа максимума

$$\max_{u \in U} H(t, x^0, u, p) = H(t, x^0, u^0, p),$$

где $H(t, x, u, p) = p\varphi(t, x, u) - \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(t, x, u)$ — функция Понтрягина;

е) стационарности по t_0, t_1:

$$\mathcal{L}_{t_0} = 0, \mathcal{L}_{t_1} = 0$$

(условие стационарности по t_0, t_1 выписывается только для подвижных концов);

3. Найти допустимые управляемые процессы, для которых выполняются условия п. 2 с множителями Лагранжа $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ и $p(t)$, одновременно не равными нулю. При этом отдельно рассмотреть случаи

$\lambda_0 = 0$ и $\lambda_0 \neq 0$. Во втором случае можно положить λ_0 равным единице или любой другой положительной константе.

4. Среди всех найденных в п. 3 допустимых экстремальных процессов отыскать решение или доказать, что решения нет.

Пример 2.2.1. Решить задачу оптимального управления

$$\int_0^4 \left(x'^2 + x\right)dt \to \inf; \quad |x'| \le 1, \quad x(0) = 0.$$

Решение. Приведём задачу к виду задач оптимального управления, введя управление u:

$$\int_0^4 \left(u^2 + x\right) \to \inf; \qquad x' = u, \quad u \in [-1,1], \quad x(0) = 0.$$

Функция Лагранжа:

$$\mathcal{L} = \int_0^4 (\lambda_0(u^2 + x) + p(x' - u))dt + \lambda x(0).$$

Необходимые условия:

а) уравнение Эйлера для лагранжиана $L = \lambda_0(u^2 + x) + p(x' - u)$:

$$L_x - \frac{d}{dt} L_{x'} = 0 \Leftrightarrow p' = \lambda_0;$$

б) трансверсальность по x:

$$L_{x\prime} - l_{x(t_0)}\big|_{t=t_0} = 0, L_{x\prime} + l_{x(t_1)}\big|_{t=t_1} = 0 \Leftrightarrow p(0) = \lambda, p(4) = 0;$$

в) оптимальность по u:

$$\min_{u \in [-1,1]} (\lambda_0 u^2 - pu).$$

Если $\lambda_0 = 0$, то из условия «а» $p' = 0$ и из «б» $p = \lambda = 0$ — все множители Лагранжа оказались нулями. Получили противоречие.

Полагаем $\lambda_0 = 1$. Тогда из «а» $p' = 1$ и из «б» $p = t - 4$.

Рассмотрим теперь функцию $g(u) = u^2 - pu$ и найдём её минимум на отрезке $[-1, 1]$. Для этого построим график этой функции. Вершина параболы $u_{в} = \frac{p}{2}$ может располагаться внутри отрезка $[-1, 1]$ или вне этого отрезка (рис. 2.2.1). В зависимости от этого находим минимум функции $g(u)$ на отрезке $[-1, 1]$ и, следовательно, определяем управление u^0.

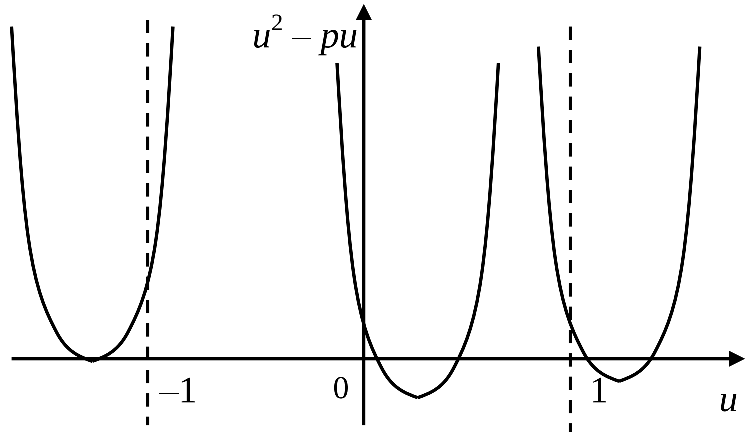

Рис. 2.2.1 График функции $g(u) = u^2 - pu$

Находим

$$u^0 = \begin{cases} 1, & \dfrac{p}{2} > 1, \\ \dfrac{p}{2}, & -1 \le \dfrac{p}{2} \le 1, \\ -1, & \dfrac{p}{2} < -1. \end{cases} = \begin{cases} 1, & \dfrac{t-4}{2} > 1, \\ \dfrac{t-4}{2}, & -1 \le \dfrac{t-4}{2} \le 1, \\ -1, & \dfrac{t-4}{2} < -1. \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{t-4}{2}, & 2 \le t \le 4, \\ -1, & 0 \le t < 2. \end{cases}$$

Здесь учтено, что t принимает значение из отрезка [0, 4].

Значит,

$$x'^0 = u^0 = \begin{cases} \dfrac{t-4}{2}, & 2 \le t \le 4, \\ -1, & 0 \le t < 2. \end{cases}$$

Следовательно,

$$x^0 = \begin{cases} \dfrac{t^2}{4} - 2t + c_1, & 2 \le t \le 4, \\ -t + c_2, & 0 \le t < 2. \end{cases}$$

Из начального условия $x(0) = 0$ находим константу $c_2 = 0$. Далее используем условие непрерывности функции x^0 при $t = 2$ и определяем константу $c_1 = 1$.

Окончательно,

$$x^0 = \begin{cases} \dfrac{t^2}{4} - 2t + 1, & 2 \le t \le 4, \\ -t, & 0 \le t \le 2. \end{cases}$$

Покажем с помощью непосредственной проверки, что x^0 доставляет минимум функционалу. Возьмём такую функцию h, чтобы функция $x^0 + h$ была допустимой. Для этого надо взять функцию $h \in C^2[0, \pi/2]$, такую, что $h(0) = 0$ и выполнено условие $|x'_0 + h'| \le 1$. Имеем

$$\Delta J = J[x^0 + h] - J[x^0] =$$

$$= 2\int_0^4 x'^0 h'\, dt + \int_0^4 h'^2 dt + \int_0^4 h\, dt.$$

Интегрируя по частям в первом интеграле с учётом условий на концах функции h и условия $x'^0 = (t - 4)/2$, при $2 \le t \le 4$, получим

$$2\int_0^4 x'^0 h'\, dt = x'^0 h|_0^4 - 2\int_0^4 x''^0\, h dt =$$

$$= x'^0(4)h(4) - 2\int_0^2 0\, dh - 2\int_2^4 \frac{1}{2} h dt = -\int_0^4 h\, dh.$$

Окончательно,

$$\Delta J = \int_0^4 h'^2 dt \ \ge 0.$$

Таким образом, $\Delta J \ge 0$ и, следовательно, x^0 доставляет минимум в задаче.

Пример 2.2.2. Решить задачу оптимального управления

$$\int_0^{\frac{7\pi}{4}} x \sin t dt \to \inf; \quad |x'| \le 1, \quad x(0) = 0.$$

Решение. Приведём задачу к виду задач оптимального управления, введя управление u:

$$\int_0^{\frac{7\pi}{4}} x \sin t dt \to \inf; \quad x' = u, \quad |u| \le 1, \quad x(0) = 0.$$

Функция Лагранжа:

$$\mathcal{L} = \int_0^{\frac{7\pi}{4}} (\lambda_0 x \sin t + p(x' - u))dt + \lambda x(0).$$

Необходимые условия:

а) уравнения Эйлера для лагранжиана $L = \lambda_0(u^2 + x) + p(x' - u)$:

$$L_x - \frac{d}{dt}L_{x'} = 0 \Leftrightarrow p' = \lambda_0 \sin t\,;$$

б) трансверсальность по x:

$$L_{x'} - l_{x(t_0)}\big|_{t=t_0} = 0,\ L_{x'} + l_{x(t_1)}\big|_{t=t_1} = 0 \Leftrightarrow p(0) = \lambda, p\left(\frac{7\pi}{4}\right) = 0;$$

в) оптимальность по u:

$$\min_{u\in[-1,1]}(-pu).$$

Если $\lambda_0 = 0$, то из условия «а» $p' = 0$ и из «б» $p = \lambda = 0$ — все множители Лагранжа оказались нулями. Получили противоречие.

Полагаем $\lambda_0 = 1$. Тогда из «а» $p' = \sin t$, то есть $p = -\cos t + c_1$. Поскольку $p\left(\frac{7\pi}{4}\right) = 0$, то $c_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Рассмотрим теперь функцию $g(u) = -pu$ и найдём её минимум на отрезке $[-1, 1]$. Для этого построим график этой функции (рис. 2.2.2).

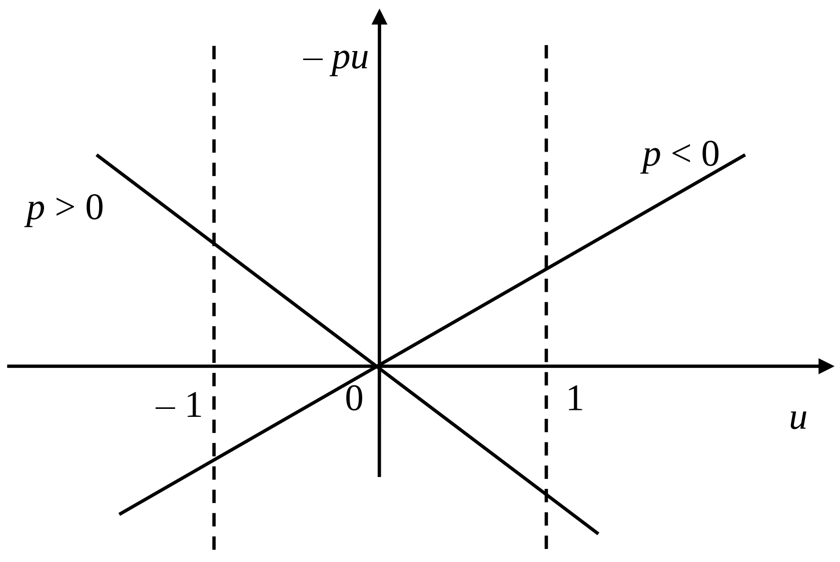

Рис. 2.2.2. График функции $g(u) = -pu$

Следовательно, определяем управление u^0

$$u^0 = \begin{cases} 1, & p \ge 0, \\ [-1, 1], & p = 0, \\ -1, & p < 0. \end{cases}$$

Здесь запись [–1, 1] означает, что управление u^0 может принимать любое значение из указанного отрезка.

Определим теперь промежутки знакопостоянства функции $p = -\cos t + \frac{\sqrt{2}}{2}$. Построим график этой функции (рис. 2.2.3).

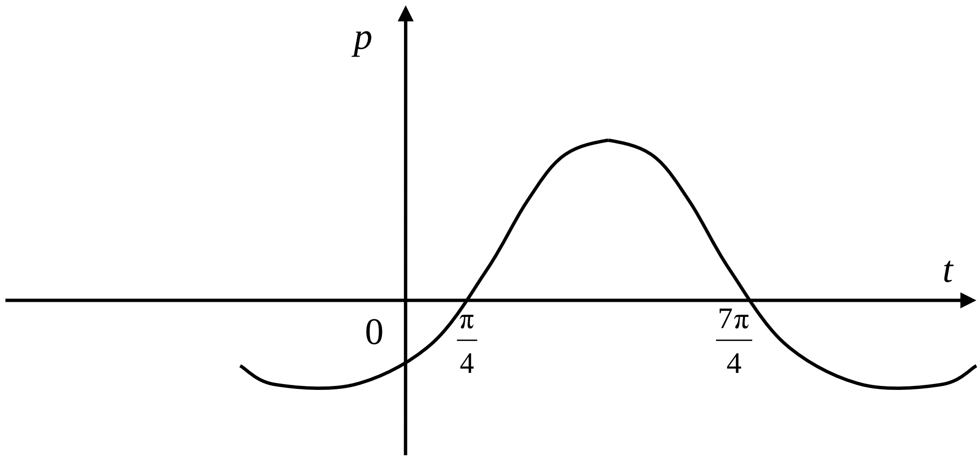

Рис. 2.2.3 График функции $p = -\cos t + \frac{\sqrt{2}}{2}$

Определяем, что $p \geq 0$ при $t \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right]$ и $p < 0$ при $t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

Поэтому управление

$$u^0 = \begin{cases} 1, & \frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{7\pi}{4}, \\ -1, & 0 \leq t < \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Значит,

$$x'^0 = u = \begin{cases} 1, & \frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{7\pi}{4}, \\ -1, & 0 \leq t < \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Следовательно,

$$x^0 = \begin{cases} t + c_1, & \frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{7\pi}{4}, \\ -t + c_2, & 0 \leq t < \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Из начального условия $x(0) = 0$ находим константу $c_2 = 0$. Далее используем условие непрерывности функции x^0 при $t = \pi/4$ и определяем константу $c_1 = -\pi/2$.

Окончательно,

$$x^0 = \begin{cases} t - \dfrac{\pi}{2}, & \dfrac{\pi}{4} \le t \le \dfrac{7\pi}{4}, \\ -t, & 0 \le t < \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Покажем с помощью непосредственной проверки, что x^0 доставляет минимум функционалу. Возьмём такую функцию h, чтобы функция $x^0 + h$ была допустимой. Для этого надо взять функцию $h \in C^2[0, 7\pi/4]$, такую, что $h(0) = 0$ и выполнено условие $|x'_0 + h'| \le 1$. Имеем

$$\Delta J = J[x^0 + h] - J[x^0] =$$

$$= \int_0^{\frac{7\pi}{4}} h \sin t \, dt = \int_0^{\frac{7\pi}{4}} hp' \, dt = \int_0^{\frac{7\pi}{4}} h \, dp = hp|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{7\pi}{4}} h'p \, dt =$$

$$= h\left(\frac{7\pi}{4}\right) p\left(\frac{7\pi}{4}\right) - h(0)p(0) - \int_0^{\frac{7\pi}{4}} h'p \, dt = -\int_0^{\frac{7\pi}{4}} h'p \, dt.$$

Поскольку $|x'_0 + h'| \le 1$, то для $p \ge 0$ получим, что $x'_0 = 1$ и, следовательно, $h' \le 0$. Аналогично, для $p \le 0$ получим, что $x'_0 = -1$ и, следовательно, $h' \ge 0$. Поэтому $h'p \le 0$.

Окончательно,

$$\Delta J = -\int_0^{\frac{7\pi}{4}} h'p \, dt \ge 0.$$

Таким образом, $\Delta J \ge 0$ и, следовательно, x^0 доставляет минимум в задаче.

Пример 2.2.3. Задача об изнурении и о нападении

Две противоборствующие стороны производят вооружения, часть которых могут выставлять на поле боя, а часть направлять на удары по тылам противника. Пусть $x_i(t)$ — количество единиц вооружения в момент времени t у i-й стороны, $i = 1, 2$. Пусть первая сторона направляет на поле боя $ux_1(t)$ единиц вооружения, а оставшуюся часть $(1 - u)x_1(t)$ направляет для нанесения удара по тылам противника. Здесь параметр $0 \le u \le 1$. Вторая сторона все имеющиеся ресурсы выставляет на поле боя. Считаем, что динамика изменения единиц вооружения описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$x_1'(t) = w,\ x_2'(t) = a - c(1 - u)x_1(t).$$

Здесь w, a, c — положительные константы. Второе уравнение показывает, что скорость роста единиц вооружения у второй стороны убывает пропорционально числу единиц вооружения первой стороны, направленных для удара по тылам второй стороны. Считаем, что бой длится заданный промежуток времени T. Выигрыш первой стороны определяется средним количеством разницы единиц вооружения сторон, находившихся на поле боя $\int_0^T \left(u\,x_1(t) - b\,x_2(t) \right) dt$. Здесь b — некоторое положительное число.

Пусть заданы $x_1(0) = A > 0$, $x_2(0) = B > 0$. Тогда $x_1(t) = A + wt$. Обозначим $x(t) = x_2(t)$. Получаем следующую задачу:

$$\int_0^T (b\,x(t) - (A + wt)u)\,dt \to \min,\ x'(t) = a - c\,(1 - u)(A + wt),$$

$$x(0) = B,\ 0 \le u \le 1.$$

Запишем функции

$$f^* = \lambda_0(bx - (wt + A)\,u) + \psi(t)(x' - a + c\,(1 - u)(A + wt)),$$

$$l = \lambda_1(x(0) - B).$$

Выпишем условия принципа максимума. Будем иметь:

1. $\lambda_0 \ge 0$.

2. Уравнение Эйлера: $\psi'(t) = \lambda_0 b$.

3. Условия трансверсальности: $\psi(0) = \lambda_1$, $\psi(T) = 0$.

4. Условие минимума $(wt + A)(-\lambda_0 - \psi(t)c)u \to \min$, $0 \le u \le 1$.

Допустим, что число $\lambda_0 = 0$.Тогда из уравнения Эйлера и из второго условия трансверсальности получим равенство $\psi(t) = 0$. Отсюда и из первого условия трансверсальности следует, что $\lambda_1 = 0$. Этого быть не может.

Положим $\lambda_0 = 1$. Тогда $\psi(t) = b(t - T)$. Из условия минимума

$$(-1 + b(T - t)c)u \to \min,\ 0 \le u \le 1$$

получим, что $u(t) = 0$ при $b(T - t)c > 1$ и $u(t) = 1$ при $b(T - t)c < 1$.

Пусть момент боя достаточно мал, а именно $T < (bc) - 1$. Тогда управление $u(t) = 1$ при $0 \le t \le T$. В этом случае первая сторона выставляет все ресурсы на поле боя.

Пусть момент боя достаточно велик, а именно $T \ge (bc)^{-1}$. В этом случае $u(t) = 0$ при $0 \le t < T - bc - 1$ и $u(t) = 1$ при $\mathrm{T} - bc - 1 < t \le T$.

Это означает, что вначале первая сторона направляет все ресурсы для нанесения удара по тылам противника, а затем всё выставляет на поле боя.

Пример 2.2.4. Задача об определении функции налога (см. пример 2.1.2)

Пусть x — годовой доход налогоплательщика. Задача состоит в определении функции налога $y(x)$. Сделаем следующие предположения:

1. Функция налога с ростом годового дохода должна расти (кто больше получает, тот должен больше платить). Это означает, что производная

$$y'(x) = u \ge 0.$$

2. С ростом годового дохода должен расти реальный доход $x - y(x)$ (должен быть стимул к зарабатыванию больших денег). Это означает, что производная реального дохода должна быть неотрицательной

$$(x - y(x))' \ge 0 \Leftrightarrow y'(x) = u \le 1.$$

При выборе функции налога государство имеет цель собрать определённую сумму денег. Пусть $\varphi(x)$ — функция распределения количества налогоплательщиков в зависимости от годового дохода, то есть доля налогоплательщиков, годовой доход которых находится от x до $x + \Delta x$, приблизительно равняется $\varphi(x)\Delta x$.

Таким образом, собранная сумма равняется числу налогоплательщиков, умноженному на $\int_0^X \varphi(x)y(x)dx$. Здесь посредством X обозначен наибольший годовой доход среди налогоплательщиков.

Таким образом, на выбор функции налога имеем ограничение в виде равенства

$$\int_0^X \varphi(x)y(x)dx = c = \text{const}.$$

Считаем, что при $0 < x < X$ функция распределения $\varphi(x) > 0$.

Обозначим через $g(z)$ функцию полезности денег. Будем считать, что функция полезности $g(z)$ является вогнутой. Тогда суммарное количество полезности денег, оставшегося у населения после уплаты налога, задаётся интегралом

$$\int_0^X \varphi(x)g(x - y(x))dx.$$

Таким образом, для определения функции налога, можно рассмотреть следующую задачу

$$\int_0^X (-\varphi(x)g(x - y(x)))\,dx \to \min,$$

$$\int_0^X \varphi(x)y(x)dx = c,\ y(0) = 0,$$

$$y'(x) = u,\ 0 < a \le u \le b < 1.$$

Поскольку функция $g(z)$ является вогнутой, то выпуклой по переменной y является функция $-\varphi(x)g(x - y)$.

Предположим, функция $g(z)$ является дифференцируемой. Тогда из условия вогнутости следует, что её производная $g'(z)$ не возрастает. Считаем, что

$$g'(z_1) < g'(z_2) \text{ при } 0 < z_2 < z_1.$$

Запишем условия принципа максимума с $\lambda_0 = 1$. Запишем функцию

$$f^*(x, y, y') = -\varphi(x)f(x - y(x)) + \lambda\varphi(x)y + \psi(x)(y' - u),$$

$$l(y(0), y(X)) = -\lambda c + \lambda y(0). \text{ ??}$$

Поэтому уравнение Эйлера и условие трансверсальности имеют вид

$$\psi'(x) = \varphi(x)f\,'(x - y(x)) + \lambda\varphi(x),\ \psi(X) = 0.$$

Из условия минимума

$$\psi(x)(y' - u) \to \min \text{ при } < a \le u \le b$$

находим оптимальное управление

$$u(x) = a \text{ при } \psi(x) < 0;\ u(x) = b \text{ при } \psi(x) > 0;$$

$$u(x) \text{ не определено при } \psi(x) = 0.$$

Производная функции $x - y(x)$ строго больше нуля. Поэтому эта функция строго возрастает. Следовательно, функция $h(x) = f'(x - y(x)) + \lambda$ строго убывает. Поэтому на отрезке $[0, X]$ она может иметь не более одного нуля. Этим же свойством обладает и функция $\psi'(x) = \varphi(x)h(x)$.

Случай 1. Пусть $\psi'(x) > 0$ при всех $x \in (0, X)$. Тогда, учитывая равенство $\psi(X) = 0$, получим, что $\psi(x) < 0$ при всех $x \in (0, X)$. В этом случае получим, что $u(x) = a$ при всех $x \in [0, X]$.

Случай 2. Пусть $\psi'(x) < 0$ при всех $x \in (0, X)$. Тогда, учитывая равенство $\psi(X) = 0$, получим, что $\psi(x) > 0$ при всех $x \in (0, X)$. Поэтому $u(x) = b$ при всех $x \in [0, X]$.

Случай 3. Существует число $0 < x_1 < X$, такое, что $\psi'(x_1) = 0$. Предположим, что в некоторой точке $x^* \in (0, x_1)$, производная $\psi'(x^*) < 0$. Тогда $h(x^*) < 0$. Функция $h(x)$ строго убывает, поэтому $h(x_1) < 0$. Отсюда получим неравенство $\psi'(x_1) = \varphi(x_1)h(x_1) < 0$, которое противоречит допущению, что $\psi'(x_1) = 0$. Следовательно, $\psi'(x) > 0$ при $0 < x < x_1$ и $\psi'(x) < 0$ при $x_1 < x < X$. Тогда, учитывая равенство $\psi(X) = 0$, получим, что возможны два случая.

Случай 3.1. Существует число $0 < t < x_1$, такое, что $\psi(x) < 0$ при всех $x \in (0, t)$ и $\psi(x) > 0$ при всех $x \in (t, X)$.

Случай 3.2. При $0 \le x < X$ выполнено неравенство $\psi(x) > 0$.

Оптимальное управление имеет не более одного переключения, а именно:

$$u(x) = a \text{ при } 0 \le x < t;\ u(x) = b \text{ при } t < x \le X.$$

Функция налога равняется

$$y(x) = ax \text{ при } 0 \le x < t;\ y(x) = b\,(x - t) + at \text{ при } t < x \le X.$$

Чтобы найти точку переключения t, подставим функцию налога в уравнение связи. Будем иметь

$$a \int_0^t x\varphi(x)\,dx + b\int_t^X \varphi(x)(x-t)\,dx + at\int_t^X \varphi(x)\,dx = c$$

или

$$a \int_0^t x\varphi(x)\,dx + b\int_t^X x\varphi(x)\,dx - (b-a)\,t\int_t^X \varphi(x)\,dx = c.$$

Отсюда и из равенства $\int_0^X \varphi(x)\,dx = 1$ получим, что

$$a \int_0^t x\varphi(x)\,dx + b\,\Big(\int_0^X x\varphi(x)\,dx - \int_0^t x\varphi(x)\,dx\Big) -$$

$$- (b-a)\,t\,\Big(1 - \int_0^t \varphi(x)\,dx\Big) = c.$$

Перепишем это уравнение в виде

$$\zeta(t) = \frac{b}{b-a}\int_0^X x\varphi(x)\,dx - \frac{c}{b-a},$$

$$\zeta(t) = \int_0^t x\varphi(x)\,dx + t\,\Big(1 - \int_0^t \varphi(x)\,dx\Big).$$

Поскольку $\int\limits_0^t \varphi(x)\,dx < 1$, то производная $\zeta'(t) = 1 - \int\limits_0^t \varphi(x)\,dx > 0$. Отсюда и из равенства $\zeta(0) = 0$ следует, что функция $\zeta(t) > 0$ и строго возрастает. Поэтому, если правая часть в уравнении меньше нуля, то есть

$$\int\limits_0^X x\varphi(x)\,dx < \frac{c}{b},$$

то уравнение не имеет корня при $0 \le t \le X$. Пусть

$$\int\limits_0^X x\varphi(x)\,dx \ge \frac{c}{b}.$$

Если в этом неравенстве стоит знак равенства, то уравнение (19) выполнено при $t = 0$. Пусть теперь неравенство строгое. Условие существования корня в уравнении принимает вид

$$\zeta(X) = \int\limits_0^X x\varphi(x)\,dx \ge \frac{b}{b-a} \int\limits_0^X x\varphi(x)\,dx - \frac{c}{b-a}.$$

Это условие равносильно неравенству

$$\int\limits_0^X x\varphi(x)\,dx \le \frac{c}{a}.$$

Обозначим через $\bar{x} = \int\limits_0^X x\varphi(x)\,dx$ средний годовой доход налогоплательщиков. Тогда неравенства, которые дают условия возможности сбора заданной суммы, принимают вид

$$\frac{c}{b} \le \bar{x} \le \frac{c}{a}.$$

Пример 2.2.5. Оптимальное управление процессом частичной продажи оборудования

На предприятии в момент времени t имеется $x(t)$ единиц оборудования. Предполагается, что за время от t до $t + \Delta t$:

1) эксплуатация единицы оборудования приносит прибыль, равную $b\Delta t + \text{o}(\Delta t)$ денежных единиц, здесь b — положительная постоянная, а $t^{-1}\,\text{o}(\Delta t) \to 0$ при $\Delta t \to 0$;

2) можно продать часть оборудования по цене a денежных единиц за единицу оборудования, здесь a — положительная постоянная;

3) количество единиц оборудования, которое можно продать за время от t до $t + \Delta t$ находится в пределах от 0 до $r\Delta t + \text{o}(\Delta t)$, здесь r — положительная постоянная;

4) за время от t до $t + \Delta t$ полностью изнашивается $k\Delta t + \text{o}(\Delta t)$ процентов единиц оборудования, здесь k — положительная постоянная.

Считается, что за время $T > 0$ оборудование морально устаревает и его можно продать по цене σ денежных единиц за единицу оборудования. Считаем, что $\sigma < a$.

Составим математическую модель. Введём ещё одну переменную $y(t)$, равную количеству денежных единиц, получаемых к моменту времени t от эксплуатации оборудования. Тогда на основании сформулированных выше допущений имеем

$$x(t + \Delta t) = x(t) - kx(t)\Delta t - ur\Delta t + o(\Delta t),$$

$$y(t + \Delta t) = y(t) + bx(t)\Delta t + aur\Delta t + o(\Delta t).$$

Здесь посредством $u \in [0,\ 1]$ обозначена использованная доля квоты продажи оборудования. Переходя к пределу при $\Delta t \to 0$ в равенствах

$$\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} = -kx(t) - ur + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t},$$

$$\frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t} = bx(t) + aur + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

получим систему дифференциальных уравнений

$$x'(t) = -kx(t) - ur,$$

$$y'(t) = bx(t) + aur.$$

Суммарная прибыль предприятия с учётом возможной продажи оборудования в момент времени T по цене σ денежных единиц за единицу оборудования равна $y(T) + \sigma x(T)$ денежных единиц. Эту величину требуется максимизировать.

Таким образом, имеем следующую задачу оптимального управления:

$$\int_0^T (-bx - aur)dt - \sigma x(T) \to \min,$$

$$x(0) - x_0 = 0,$$

$$x' = -kx - ur,\ 0 \le u \le 1.$$

Запишем условия принципа максимума Л. С. Понтрягина с $\lambda_0 = 1$. Имеем

$$f^*(t, x, x', u) = -bx - aur + \psi(t)(x' + kx + ur),$$

$$l(x(0), x(T)) = -\sigma x(T) + \lambda(x(0) - x_0).$$

Запишем уравнение Эйлера для переменной x

$$\psi'(t) = -b + k\psi(t),$$

условие минимума для управления u

$$u(-a + \psi(t))r \to \min,\ 0 \le u \le 1$$

и условия трансверсальности

$$\psi(0) = \lambda,\ \psi(T) = \sigma.$$

Из первого уравнения и третьего условия находим, что

$$\psi(t) = e^{-k(T-t)}(\sigma - \frac{b}{k}) + \frac{b}{k}.$$

Из второго условия находим, что оптимальное управление имеет вид

$$u(t) = 1 \text{ при } \psi(t) < a,\ u(t) = 0 \text{ при } \psi(t) > a.$$

Найдём момент переключения τ оптимального управления, который является корнем уравнения $\psi(t) = a$ при $0 \le t \le T$. Это уравнение может иметь не более одного корня.

Из условия $\sigma < a$ следует, что $\psi(T) - a = \sigma - a < 0$.

Случай 1. Пусть $e^{-kT}(b - \sigma k) < (b - ak)$.

Тогда

$$\psi(0) - a = e^{-k\,T}\,(\sigma - \frac{b}{k}) + \frac{b}{k} - a > 0.$$

Следовательно, уравнение $\psi(t) = a$ при $0 \le t \le T$ имеет корень. Найдём его. Имеем

$$e^{-k(T-\tau)} = \frac{b-ak}{b-\sigma k}.$$

Отметим, что из условия $e^{-k\,T}(b - \sigma k) < (b - ak)$ следует неравенство $\frac{b-ak}{b-\sigma k} > 0$. Поэтому

$$\tau = T + \frac{1}{k}\,ln\,\frac{b-ak}{b-\sigma k}.$$

Таким образом, оптимальное управление в рассматриваемом случае равно

$$u(t) = 0 \text{ при } 0 \le t < \tau \text{ и } u(t) = 1 \text{ при } \tau < t \le T.$$

Это значит, что до момента времени τ оборудование не продаётся, оно ещё достаточно новое и её эксплуатация приносит прибыль. Начиная с момента времени τ оборудование начинает продаваться, причём на максимально возможную величину.

Случай 2. Пусть неравенство $e^{-k\,T}(b - \sigma k) < (b - ak)$ не выполнено. Тогда $\psi(0) - a \le 0$. Следовательно, $\psi(0) - a < 0$ при всех $0 < t \le T$. Стало быть, оптимальное управление $u(t) = 1$ при всех $0 < t \le T$. Это значит, что продавать оборудование нужно с самого начала.

Проанализируем условие $e^{-k\,T}(b - \sigma k) < (b - ak)$. Обозначим

$$\varphi(T) = e^{-k\,T}(b - \sigma k) - (b - ak).$$

Очевидно, что эта функция может обращаться в нуль при $T > 0$ не больше, чем один раз. Поскольку $\sigma < a$, то $\varphi(0) > 0$. Далее, $\varphi(T) \to ak - b$ при $T \to +\infty$.

Пусть $ak \geq b$. Тогда $\varphi(T) > 0$ при всех $T > 0$. Значит условие $e^{-kT}(b - \sigma k) < (b - ak)$ не выполнено и оптимальное управление $u(t) = 1$ при всех $0 < t \leq T$. Этот случай означает следующее. Прибыль $b\Delta t + o(\Delta t)$ от эксплуатации единицы оборудования меньше, чем величина $a(k\Delta t + o(\Delta t))$ прибыли от продажи изношенной части единицы оборудования.

Пусть $ak < b$. Тогда уравнение $\varphi(T) = 0$ при $T > 0$ имеет корень

$$T_0 = -\frac{1}{k}\ ln\ \frac{b - ak}{b - \sigma k}.$$

Тогда, если время морального устаревания оборудования $T \leq T_0$, то условие $e^{-kT}(b - \sigma k) < (b - ak)$ не выполнено и оптимальное управление $u(t) = 1$ при всех $0 < t \leq T$. Следовательно, оборудование нужно продавать с самого начала.

Пусть $T > T_0$. Тогда получим, что $\tau = T - T_0$. Значит, на промежутке $0 \leq t \leq T - T_0$ оборудование не продаётся, а затем продаётся на максимально возможную величину.

Задачи для самостоятельного решения

2.2.1. Решить задачу оптимального управления:

а) $\int_0^4 \left(x'^2 + x\right)dt \to \inf; \quad |x'| \leq 1, \quad x(4) = 0$;

б) $\int_{-\pi}^{\pi} x \sin t dt \to \inf; \quad |x'| \leq 1, \quad x(\pi) = x(-\pi) = 0$;

в) $\int_0^T \left(x'^2 + x\right)dt \to \inf; \quad |x'| \leq 1, \quad x(0) = 2$;

г) $\int_0^1 \left(x'^2 + x\right)dt \to \inf; \quad |x'| \leq 1, \quad x(0) = x(1) = 0;$

д) $\int_0^1 x dt \to \inf; \quad |x''| \leq 2, \quad x(0) = x'(0) = 0$;

е) $\int_0^2 x dt \to \inf; \quad |x''| \leq 2, \quad x'(0) = x'(2) = x(2)$;

ж) $\int_0^4 x dt \to \inf; \quad |x''| \leq 2, \quad x(0) + x(4) = 0, \quad x'(0) = x'(4) = 0$;

з) $\int_0^3 \left(x'^2 - x\right)dt \to \inf; \quad |x'| \le 2, \quad x(0) = 0$;

и) $\int_0^6 \left(x'^2 - x\right)dt \to \inf; \quad |x'| \le 1, \quad x(0) = x(6) = 0$;

к) $\int_0^1 \left(x'^2 - 6x\right)dt \to \inf; \quad |x'| \le 10, \quad x(0) = 1$.

2.3. ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО БЫСТРОДЕЙСТВИЯ

Материальная точка движется по прямой под действием управляемой силы, ограниченной по величине. Её уравнение движения имеет вид $x'' = u$, $|u| \le 1$. В начальный момент времени $t = 0$ заданы начальное положение $x(0) = A$ и начальная скорость $x'(0) = B$. Требуется как можно быстрее перевести точку в состояние $x(T) = 0$, $x'(T) = 0$.

Приведём задачу к виду задач оптимального управления, сделав замену переменных $x_1 = x$, $x_2 = x'$. Тогда будем иметь следующую задачу:

$$T \to \min,$$

$$x'_1 = x_2,\ x'_2 = u,$$

$$x_1(0) = A,\ x_2(0) = B,\ x_1(T) = 0,\ x_2(T) = 0,$$

$$|u| \le 1.$$

Функция Лагранжа

$$\mathcal{L} = \int_0^T \left(p_1(x'_1 - x_2) + p_2(x'_2 - u)\right)dt + \lambda_0 T + \lambda_1\left(x_1(0) - A\right) + \lambda_2\left(x_2(0) - B\right) + \lambda_3 x_1(T) + \lambda_4 x_2(T).$$

Необходимые условия:

а) уравнения Эйлера для лагранжиана L

$$p'_1 = 0,\ p'_2 = -p_1,\ \text{следовательно},\ p_2(t) = Ct + C_1;$$

б) условие трансверсальности

$$p_1(0) = \lambda_1,\ p_1(\mathrm{T}) = -\lambda_3,\ p_2(0) = \lambda_2,\ p_2(T) = -\lambda_4;$$

в) оптимальность по u (не зависящие от u слагаемые не выписываем)

$$\min_{u \in [-1,\,1]} \left(-p_2 u\right) = -p_2 u^0.$$

Учитывая «б», получим, что

$$u^0 = \begin{cases} 1, & p_2 > 0 \\ -1, & p_2 < 0 \end{cases},$$

причём $p_2 \neq 0$, так как в этом случае все множители Лагранжа равны нулю;

г) стационарность по T

$\mathcal{L}_T = 0 \Leftrightarrow p_1(T)\big(x_1'(T) - x_2(T)\big) + p_2(T)\big(x_2'(T) - u(T)\big) + \lambda_0 + \lambda_3 x_1'(T) + \lambda_4 x_2'(T) = 0$.

Учитывая то, что

$$x'_1(T) = x_2(T) = 0,\ p_2(T) = -\lambda_4,$$

получаем, что $p_2(T)u(T) = \lambda_0$. Используя «в», получим, что $|p_2(T)| = \lambda_0$.

Рассмотрим два случая.

Случай 1. Пусть $\lambda_0 = 0$. Из условия «г» следует, что $p_2(T) = 0$. Учитывая «а», получим

$$p_2(t) = Ct - CT = C(t - T).$$

Тогда из «в» следует, что управление постоянно, то есть $u^0 \equiv 1$ или $u^0 \equiv -1$.

Подставив эти управления в уравнения движения, получим, что при $u^0 \equiv -1$

$$x_2(t) = -t + C_1,\ x_1 = -(T - t)^2/2 + C_2.$$

Из граничных условий следует, что $T = B$, $A = -B^2/2$.

Аналогично при $u^0 \equiv 1$, получим, что

$$x_2(t) = -T + t,\ x_1 = (t - T)^2/2 + C_2.$$

Из граничных условий следует, что $-T = B$, $A = B^2/2$.

Отсюда видно, что постоянным управлением $u^0(t) = \pm 1$ в начало координат можно попасть только из точек, удовлетворяющих условию

$$A = -B^2/2 \text{ или } A = B^2/2.$$

Случай 2. Пусть $\lambda_0 = 1$. Тогда из «г» вытекает, что $|p_2(T)| = 1$, то есть имеются две возможности:

$$p_2^+(\mathrm{t}) = C(t - T) + 1,\ p_2^-(t) = C(t - T) - 1.$$

Этим возможностям в силу «в» соответствуют управления

$$u^+(t) = \begin{cases} -1, & 0 \le t < \tau \\ 1, & \tau < t \le T \end{cases} \text{ и } u^-(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < \tau \\ -1, & \tau < t \le T. \end{cases}$$

Для тех значений t, для которых $u^0(t) = 1$ имеем

$$x'_2(t) = 1 \Rightarrow x'_1(t) = t + C_1 \Rightarrow x_1(t) = (t + C_1)^2/2 + C_2 = x_2^2/2 + C_2.$$

Таким образом, фазовая траектория, соответствующая этим значениям t, является частью параболы $x_1 = x_2^2/2 + C_2$. Направление движения по этой параболе определяется из условия возрастания x_2, так как $x'_2 = 1$ (рис. 2.3.1).

Аналогично получаем, что для тех значений t, для которых $u^0(t) = 1$, фазовая траектория — часть параболы $x_1 = x_2^2/2 + C_3$, а направление движения определяется из условия убывания x_2, так как в этом случае $x'_2 = –1$.

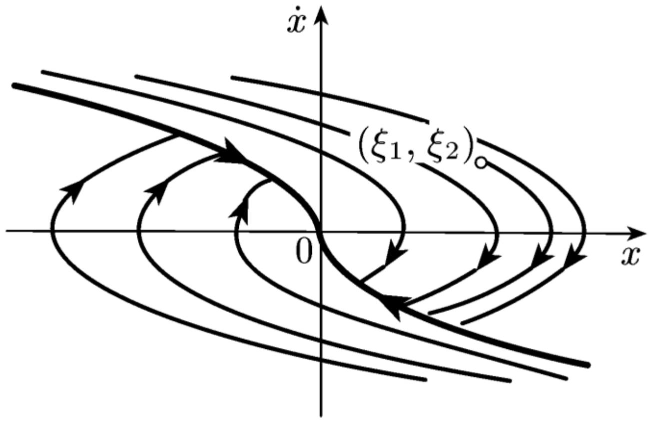

Рис. 2.3.1 Фазовые траектории

К рассмотренной задаче оптимального быстродействия сводится целый класс других задач. Приведём несколько примеров.

Пример 2.3.1. Модель взаимодействия в сообществе

Д. Хоманс сформулировал постулаты, описывающие поведение устойчивой группы людей во внешней среде.

Постулат 1. Если деятельность изменяется, то взаимодействие, вообще говоря, также изменяется, и наоборот.

Постулат 2. Лица, которые часто взаимодействуют друг с другом, стремятся любить друг друга.

Постулат 3. Если взаимодействия между членами группы часто осуществляются во внешней системе, то чувство любви между членами группы растёт, и это чувство, в свою очередь, способствует проявлению взаимодействия во внешней системе.

Постулат 4. Лица, которые имеют чувства любви друг к другу, будут выражать это чувство сверх деятельности внешней системы, и эта деятельность в дальнейшем будет усиливать чувство любви.

Постулат 5. Чем более часто люди взаимодействуют друг с другом, тем более в некотором отношении они становятся похожими, как в своей деятельности, так и в чувствах.

Исходя из этой вербальной модели Хоманс сделал вывод, что увеличение объёма деятельности, навязанное внешней системой, увеличивает степень дружелюбия среди членов группы и внутригрупповую деятельность.

Саймон осуществил перевод этих постулатов в математическую модель.

Введём следующие обозначения: $T(t)$ — мера интенсивности взаимодействия среди членов группы в момент времени t; $I(t)$ — мера дружелюбия в группе; $W(t)$ — мера деятельности, выполненная группой; $F(t)$ — мера объёма внешне навязанной деятельности (внешняя система).

Из постулатов 1, 2 и 3 следует, что

$$T(t) = a_1 I(t) + a_2 W(t),\ a_i > 0.$$

На основании постулатов 3, 4 и 5 можем записать

$$\frac{I(t+\Delta t) - I(t)}{\Delta t} \approx b_1 T(t) - b_2 I(t),\ b_i > 0;$$

$$\frac{W(t+\Delta t) - W(t)}{\Delta t} \approx c_1 I(t) + c_2 F(t) - c_3 W(t),\ c_i > 0.$$

Отметим, что выражение $b_2 I(t)(c_3 W(t))$ берётся со знаком минус в этой формуле. Это означает, что чем больше мера дружелюбия в группе (мера деятельности, выполненной группой), тем меньше её темп роста.

Перейдём к пределу при $\Delta t \to 0$. Получим дифференциальные уравнения

$$I'(t) = b_1 T(t) - b_2 I(t),\ W'(t) = c_1 I(t) + c_2 F(t) - c_3 W(t).$$

Подставим сюда формулу для $T(t)$. Будем иметь

$$I'(t) = f_1 I(t) + f_2 W(t),\ W'(t) = c_1 I(t) - c_3 W(t) + c_2 F(t).$$

Здесь обозначено $f_1 = b_1 a_1 - b_2$, $f_2 = b_1 a_2 > 0$.

Рассмотрим случай, когда внешним воздействием можно управлять, причём его величина ограничена, то есть $F_1 \le F(t) \le F_2$. Цель управления заключается в выводе в заданные состояния меры дружелюбия в группе и деятельности, выполненной группой. Критерием выбора управления является время.

Покажем, что оптимальное внешнее воздействие имеет не более одного переключения.

Имеем

$$det(A - \lambda E) = det\begin{pmatrix} f_1 - \lambda & f_2 \\ c_1 & -c_3 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + \lambda(c_3 - f_1) - f_1 c_3 - f_2 c_1.$$

Дискриминант этого квадратного уравнения равен

$$(c_3 - f_1)^2 + 4(f_1 c_3 + f_2 c_1) = (c_3 + f_1)^2 + 4 f_2 c_1 > 0.$$

Следовательно, все собственные значения матрицы A являются действительными числами. Наконец, векторы

$$\begin{pmatrix} 0 \\ c_2 \end{pmatrix} \text{и} \begin{pmatrix} c_2 f_2 \\ -c_2 c_3 \end{pmatrix}$$

являются линейно независимыми.

Пример 2.3.2. Пусть $x(t)$ — средняя заработная плата, а $y(t)$ — средняя цена в момент времени t. В качестве показателя среднего жизненного уровня можно взять число $z(t) = \dfrac{x(t)}{y(t)}$. Будем считать, что процентный прирост заработной платы за время от t до $t + \Delta t$, приходящийся на единицу времени, обратно пропорционален показателю среднего жизненного уровня. Считаем, что процентный прирост средней цены за время от t до $t + \Delta t$, приходящийся на единицу времени, прямо пропорционален показателю среднего жизненного уровня. Тогда

$$\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{x(t)\Delta t} = f + \frac{a}{z(t)}, \quad \frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{y(t)\Delta t} = c + b\,z(t),$$

где a и b — неотрицательные числа. Переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим систему дифференциальных уравнений

$$x'(t) = fx(t) + ay(t),\ y'(t) = bx(t) + cy(t).$$

Допустим, что имеется возможность влиять как на ценообразование, так и на изменение заработной платы. Тогда

$$x'(t) = fx(t) + ay(t) + u_1,\ y'(t) = bx(t) + cy(t) + u_2.$$

Рассмотрим задачу о выводе в заданное состояние средней заработной платы $x(t)$ и средней цены $y(t)$ за минимальное время. Будем считать, что ограничения на выбор управления имеют вид

$$\alpha_i \le u_i \le \beta_i,\ i = 1,2.$$

Покажем, что оптимальное внешнее воздействие имеет не более одного переключения.

Из уравнений движения имеем, что характеристическое уравнение

$$det\,(A - \lambda E) = det\begin{pmatrix} f-\lambda & a \\ b & c-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

принимает вид

$$\lambda^2 - \lambda(c + f) + fc - ab = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda(c + f) + 0,25(f + c)^2 = 0,25((f + c)^2 + 4ab).$$

Следовательно, собственные значения матрицы A являются действительными числами. Далее

$$\overline{b_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \overline{b_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A\overline{b_1} = \begin{pmatrix} f \\ b \end{pmatrix},\ A\overline{b_2} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}.$$ Точка

Таким образом, если $b \neq 0$, то векторы $\overline{b_1}$ и $A\overline{b_1}$ являются линейно независимыми. Если же $a \neq 0$, то линейно независимыми являются векторы $\overline{b_2}$ и $A\overline{b_2}$.

Задачи для самостоятельного решения

2.3.1. Решить задачу оптимального быстродействия

а) $T \to \min$, $x'' = u$, $|u| \leq k$,

$x(0) = 2$, $x'(0) = 2$, $x(T) = 0$, $x'(T) = 0$;

б) $T \to \min$, $x'' = u$, $|u| \leq k$,

$x(0) = 7$, $x'(0) = -2$, $x(T) = 0$, $x'(T) = 0$.

2.4. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ МИНИМУМА В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Рассмотрим задачу оптимального управления с фиксированными моментами времени $a < b$:

$$\int_a^b (f_0(t, \overline{p}(t)) + g_0(t, \overline{u}(t)))dt + l_0(\overline{p}(a), \overline{p}(b)) \to \min, \tag{2.4.1}$$

$$\int_a^b (f_s(t, \overline{p}(t)) + g_s(t, \overline{u}(t)))dt + l_s(\overline{p}(a), \overline{p}(b)) = 0, \; s = 1, \ldots, \nu, \tag{2.4.2}$$

$$\int_a^b (f_q(t, \overline{p}(t)) + g_q(t, \overline{u}(t)))dt + l_q(\overline{p}(a), \overline{p}(b)) \leq 0, \; q = \nu + 1, \ldots, m, \tag{2.4.3}$$

$$p_j'(t) = \varphi_j(t, \overline{p}(t), \overline{u}(t)), \; j = 1, \ldots, n, \tag{2.4.4}$$

$$\overline{u}(t) \in U. \tag{2.4.5}$$

Здесь обозначено $\overline{p}(t) = (p_1(t), \ldots, p_n(t)) \in R^n$, $\overline{u}(t) = (u_1(t), \ldots, u_k(t)) \in R^k$.

Предположим, что связи типа равенств задаются линейными функциями

$$f_s(t, \overline{p}) = \sum_{i=1}^{n} c_{si}(t) p_i ,$$

$$l_s(\bar{p}(a),\ \bar{p}(b)) = \sum_{i=1}^{n} (h_{si}p_i(a) + v_{si}p_i(b)),\ s = 1, \ldots, \nu, \tag{2.4.6}$$

а управляемый процесс (2.4.4) задаётся системой линейных дифференциальных уравнений, то есть

$$\varphi_j(t, \bar{p}, \bar{u}) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{ji}(t)p_i + \sum_{r=1}^{k} w_{jr}(t)u_r,\ j = 1, \ldots, n. \tag{2.4.7}$$

Относительно функций $f_q(t, \bar{p})$ и $l_q(\bar{p}(a),\ \bar{p}(b))$ при $q = 0,\ \nu + 1,\ \ldots,\ m$ сделаем предположение, что они являются выпуклыми относительно переменных $\bar{p}$, $\bar{p}(a)$, $\bar{p}(b)$ и имеют непрерывные частные производные по этим переменным. Считаем также, что непрерывными на отрезке $[a, b]$ являются функции $c_{si}(t)$, $\varphi_{ji}(t)$ и $w_{sr}(t)$. Относительно функций $g_i(t, \bar{u})$, $i = 0, 1, \ldots, n$ предполагаем, что для любой кусочно-непрерывной функции $\bar{u} : [a, b] \to U$ сложная функция $g_i(t, \bar{u}(t))$ является интегрируемой на рассматриваемом отрезке $[a, b]$.

Возьмём дифференцируемую функцию $\bar{\psi}(t) = (\psi_1(t), \ldots, \psi_n(t)) \in R^n$ и множители Лагранжа $\lambda_0 = 1, \lambda_1, \ldots, \lambda_\nu, \ldots, \lambda_m$ и составим функции:

$$f(t, \bar{p}) = \sum_{s=0}^{m} \lambda_s f_s(t, \bar{p}),\ g(t, \bar{u}) = \sum_{s=0}^{m} \lambda_s g_s(t, \bar{u}),$$

$$l(\bar{p}(a), \bar{p}(b)) = \sum_{s=0}^{m} \lambda_s l_s(\bar{p}(a), \bar{p}(b)),$$

$$f^*(t, \bar{p},\ \bar{p}',\ \bar{u}) = f(t, \bar{p}) + g(t, \bar{u}) + \sum_{j=1}^{n} \psi_j(t)[p'_j(t) - \varphi_j(t, \bar{p}, \bar{u})].$$

Отметим, что если множители Лагранжа удовлетворяют условию согласования знаков $\lambda_{\nu+1} \geq 0, \ldots, \lambda_m \geq 0$, то эти функции являются выпуклыми по переменным $\bar{p}$, $\bar{p}(a)$ и $\bar{p}(b)$.

Пусть управляемый процесс $(\bar{p}^*(.),\ \bar{u}^*(.))$ является оптимальным. Запишем для него условия принципа максимума Л. С. Понтрягина $\lambda_0 = 1$:

1) условия согласования знаков: $\lambda_0 = 1$, $\lambda_{\nu+1} \geq 0, \ldots, \lambda_m \geq 0$;

2) условия дополняющей нежёсткости:

$$\lambda_q \left(\int_a^b [f_q(t, \overline{p}^*(t)) + g_q(t, \overline{u}^*(t))]dt + l_q(\overline{p}^*(a), \overline{p}^*(b)) \right) = 0$$

для всех $q = \nu + 1, \ldots, m$;

3) уравнения Эйлера по переменным p_i:

$$\psi_i'(t) = \frac{\partial f\left(t, \overline{p}^*(t)\right)}{\partial p_i} - \sum_{j=1}^{n} \psi_j(t) \frac{\partial \varphi_j\left(t, \overline{p}^*(t), \overline{u}^*(t)\right)}{\partial p_i},$$

которые принимают вид

$$\psi_i'(\mathrm{t}) = \frac{\partial f\left(t, \overline{p}^*(t)\right)}{\partial p_i} - \sum_{j=1}^{n} \varphi_{ji}(t)\, \psi_j(t); \qquad (2.4.8)$$

4) условия оптимальности по переменным u_r: в каждой точке $t \in [a, b]$, где управление $\overline{u}^*(t)$ является непрерывным, выполнено равенство

$$f^*(t, \overline{p}^*(t), \frac{d\,\overline{p}^*(t)}{dt}, \overline{u}^*(t)) = \min_{\overline{u} \in U} f^*(t, \overline{p}^*(t), \frac{d\,\overline{p}^*(t)}{dt}, \overline{u}).$$

Это равенство записывается следующим образом:

$$g\left(t, \overline{u}^*(t)\right) - \sum_{j=1}^{n} \psi_j(t) \left(\sum_{r=1}^{k} w_{jr}(t)\, u^*_r(t) \right) =$$

$$= \min_{\overline{u} \in U} \left[g(t, \overline{u}) - \sum_{j=1}^{n} \psi_j(t) \left(\sum_{r=1}^{k} w_{jr}(t) u_r \right) \right]; \qquad (2.4.9)$$

5) условия трансверсальности:

$$\psi_i(a) = \frac{\partial l\left(\overline{p}^*(a), \overline{p}^*(b)\right)}{\partial p_i(a)}, \quad \psi_i(b) = -\frac{\partial l\left(\overline{p}^*(a), \overline{p}^*(b)\right)}{\partial p_i(b)}. \qquad (2.4.10)$$

Покажем, что, если управляемый процесс $(\overline{p}^*(.), \overline{u}^*(.))$ удовлетворяет принципу максимума Понтрягина, то он является оптимальным.

Используя условия дополняющей нежёсткости и связи (2.4.2), получим

$$\int_a^b (f_0(t, \bar{p}^*(t)) + g_0(t, \bar{u}^*(t)))dt + l_0(\bar{p}^*(a),\ \bar{p}^*(b)) =$$

$$= \int_a^b (f\left(t, \bar{p}^*(t)\right) + g\left(t, \bar{u}^*(t)\right))dt + l(\bar{p}^*(a),\ \bar{p}^*(b)) =$$

$$= \int_a^b \{ f\left(t, \bar{p}^*(t)\right) + g\left(t, \bar{u}^*(t)\right) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} [\psi_j(t)(\frac{d p_j^*(t)}{dt} - \sum_{i=1}^{n} \varphi_{ji}(t)p^*_i(t) - \sum_{r=1}^{k} w_{jr}(t)u^*_r(t))]\}dt +$$

$$+ l(\bar{p}^*(a),\ \bar{p}^*(b)).$$

Отсюда, применяя формулу интегрирования по частям, получим

$$\int_a^b (f_0(t, \bar{p}^*(t)) + g_0(t, \bar{u}^*(t)))dt + l_0(\bar{p}^*(a),\ \bar{p}^*(b)) =$$

$$= \int_a^b \{ f\left(t, \bar{p}^*(t)\right) + g\left(t, \bar{u}^*(t)\right) -$$

$$- \sum_{j=1}^{n} [\psi'_j(t)p_j^*(t) + \psi_j(t) (\sum_{i=1}^{n} \varphi_{ji}(t)p^*_i(t) + \sum_{r=1}^{k} w_{jr}(t)u^*_r(t))]\}dt +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} [\psi_j(b)p_j^*(b) - \psi_j(a)p_j^*(a)] + l(\bar{p}^*(a),\ \bar{p}^*(b)). \qquad (2.4.11)$$

Функции

$$f^*(t, \bar{p}) = f(t, \bar{p}) - \sum_{j=1}^{n} [\psi'_j(t)p_j + \psi_j(t) \sum_{i=1}^{n} \varphi_{ji}(t)p_i(t)]),$$

$$l^*(\bar{p}(a),\ \bar{p}(b)) = \sum_{j=1}^{n} [\psi_j(b)p_j(b) - \psi_j(a)p_j(a)] + l(\bar{p}(a),\ \bar{p}(b))$$

являются выпуклыми по переменным $\bar{p}$, $\bar{p}(a)$, $\bar{p}(b)$. Из равенств (2.4.8) следует, что

$$\frac{\partial f^*\left(t, \bar{p}^*(t)\right)}{\partial p_i} = 0 \text{ при всех } i = 1, \ldots, n.$$

Следовательно,

$f^*(t, \overline{p}^*(t)) \le f^*(t, \overline{p})$ для любого $\overline{p} \in R^n$. (2.4.12)

Из условий трансверсальности (2.4.9) следует

$$\frac{\partial l^*\left(\overline{p}^*(a), \overline{p}^*(b)\right)}{\partial p_i(a)} = 0, \quad \frac{\partial l^*\left(\overline{p}^*(a), \overline{p}^*(b)\right)}{\partial p_i(b)} = 0 \text{ при всех } i = 1,\ldots, n.$$

Поэтому

$l^*(\overline{p}^*(a), \overline{p}^*(b)) \le l^*(\overline{p}(a), \overline{p}(b))$ для любых $\overline{p}(a) \in R^n$ и $\overline{p}(b) \in R^n$. (2.4.13)

Возьмём любой допустимый управляемый процесс ($\overline{p}(.)$, $\overline{u}(.)$), удовлетворяющий связям (2.4.2) и (2.4.3). Тогда

$$\int_a^b (f_0(t, \overline{p}(t)) + g_0(t, \overline{u}(t)))dt + l_0(\overline{p}(a), \overline{p}(b)) \ge$$

$$\ge \int_a^b (f(t, \overline{p}(t)) + g(t, \overline{u}(t)))dt + l(\overline{p}(a), \overline{p}(b)) =$$

$$= \int_a^b \{ f(t, \overline{p}(t)) + g(t, \overline{u}(t)) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} [\psi_j(t)(\frac{dp_j(t)}{dt} - \sum_{i=1}^{n} \varphi_{ji}(t)p_i(t) - \sum_{r=1}^{k} w_{jr}(t)u_r(t))]\}dt +$$

$$+ l(\overline{p}(a), \overline{p}(b)) =$$

$$= \int_a^b \{ f(t, \overline{p}(t)) + g(t, \overline{u}(t)) -$$

$$- \sum_{j=1}^{n} [\psi'_j(t)p_j(t) + \psi_j(t)(\sum_{i=1}^{n} \varphi_{ji}(t)p_i(t) + \sum_{j=1}^{n} w_{jr}(t)u_r(t))]\}dt +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} [\psi_j(b)p_j(b) - \psi_j(a)p_j(a)] + l(\overline{p}(a), \overline{p}(b)) =$$

$$= \int_a^b \{f^*(t, \overline{p}(t)) + g(t, \overline{u}(t)) - \sum_{j=1}^{n}[\psi_j(t) \sum_{r=1}^{k} w_{jr}(t)u_r(t))]\}dt +$$

$$+\, l^*(\,\overline{p}(a),\ \overline{p}(b)) \geq \int_a^b f^*(t, \overline{p}^{\,*}(t))dt +$$

$$+\int_a^b \{\, g(t, \overline{u}(t)) - \sum_{j=1}^{n}[\,\psi_j(t) \sum_{r=1}^{k} w_{jr}(t)u_r(t))]\}dt +$$

$$+\, l^*(\,\overline{p}^*(a),\ \overline{p}^*(b)) \geq \int_a^b f^*(t, \overline{p}^{\,*}(t))\, dt +$$

$$+\int_a^b \{\, g\Big(t, \overline{u}^*(t)\Big) - \sum_{j=1}^{n}[\,\psi_j(t) \sum_{r=1}^{k} w_{jr}(t)\, u^*_r(t))]\}\, dt +$$

$$+\, l^*(\,\overline{p}^*(a),\ \overline{p}^*(b)) = \int_a^b (f_0(t, \overline{p}^*(t)) + g_0(t, \overline{u}^*(t)))dt + l_0(\,\overline{p}^*(a),\ \overline{p}^*(b)).$$

Таким образом, показано, что управляемый процесс $(\,\overline{p}^*(.),\ \ \overline{u}^*(.))$ является оптимальным.

2.5. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ НОРМЫ НАКОПЛЕНИЯ В МОДЕЛИ СОЛОУ ПРИ МАКСИМИЗАЦИИ СРЕДНЕЙ ВЕЛИЧИНЫ УДЕЛЬНОГО ПОТРЕБЛЕНИЯ НА ЗАДАННОМ ПРОМЕЖУТКЕ ВРЕМЕНИ

1. *Постановка задачи*. В однопродуктовой модели Солоу экономика рассматривается как единое целое, в котором производится универсальный продукт. Он может потребляться как в непроизводственной сфере (*непроизводственное потребление*), так и в производственной (*инвестирование*). Состояние экономики в этой модели задаётся пятью переменными: L — наличные трудовые ресурсы; K — наличные производственные фонды; Y — конечный продукт; C — размер непроизводственного потребления; I — размер инвестирования. Конечный продукт используется на непроизводственное потребление и на инвестиции. Поэтому выполнено равенство $Y = C + I$.

Считаем, что количество конечного продукта определяется с помощью производственной функции $Y = F(K, L)$, которая является однородной. Это значит, что при любом числе $\tau > 0$ выполнено равенство $F(\tau K, \tau L) = \tau F(K, L)$.

Далее $I = uY$, $C = (1 - u)Y$, $0 \le u \le 1$. Здесь параметр u является *нормой накопления*, то есть это доля конечного продукта, идущего на инвестирование. Считается, что трудовые ресурсы и производственные фонды используются полностью. Выбытие фондов происходит с *коэффициентом выбытия* v. Отсюда, учитывая процесс инвестирования, получим, что $K'(t) = uY(t) - vK(t)$. Обозначим через w коэффициент прироста трудовых ресурсов. Тогда $L'(t) = wL(t)$.

Таким образом, имеем следующую замкнутую модель:

$$K'(t) = uF(K(t), L(t)) - vK(t), L'(t) = wL(t), C(t) = (1 - u) F(K(t), L(t)).$$

Введём новые переменные $x = \dfrac{K}{L}$ — средняя фондовооружённость, $y = \dfrac{Y}{L}$ — производительность труда, $c = \dfrac{C}{L}$ — удельное потребление. Из условия однородности производственной функции получим следующее равенство: $F(K, L) = LF(\dfrac{K}{L}, 1) = Lf(x)$; $f(x) = F(x, 1)$. Отсюда и из предыдущих соотношений получается замкнутая модель

$$x' = uf(x) - (v + w)x, y = f(x), c = (1 - u)f(x), 0 \le u \le 1.$$

Считаем, что производственная функция $F(K, L)$ является вогнутой. Отсюда следует вогнутость функции $f(x)$. Предположим, что цель выбора нормы накопления заключается в том, чтобы сделать среднее значение удельного потребления $\dfrac{1}{T}\int_0^T c(t)\,dt$ на заданном промежутке времени $[0, T]$ как можно больше. Тогда получается следующая задача оптимального управления:

$$\int_0^T (u - 1)f(x)dt \to \min, x(0) - x_0 = 0, x' = uf(x) - Bx, 0 \le u \le 1. \qquad (2.5.1)$$

Здесь обозначено $B = v + w$.

Если производственная функция $F(K, L) = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$, $A > 0$, $0 < \alpha < 1$ (является функцией *Кобба — Дугласа*), то $f(x) = Ax^{\alpha}$. Тогда оптимальная норма накопления получается из решения следующей задачи оптимального управления:

$$\int_0^T (u-1)x^{\alpha}dt \to \min, x(0) - x_0 = 0, x' = uAx^{\alpha} - Bx, 0 \le u \le 1. \quad (2.5.2)$$

2. *Достаточные условия оптимальности нормы накопления*. Оптимальное управление в задаче (2.5.1) будем искать с помощью принципа максимума Л. С. Понтрягина. При этом предполагаем, что функция $f(x)$ имеет непрерывную производную при $x > 0$, является вогнутой и неотрицательной.

Вначале покажем, что при любом управлении $u(t) \in [0, 1]$ решение $x(t)$ уравнения (2.5.1) удовлетворяет неравенству $x(t) > 0$ при $0 \le t \le T$. В самом деле, имеем неравенство $x'(t) \ge -Bx(t)$ при $x(t) \ge 0$. Отсюда следует, что $(x(t)e^{Bt})' \ge 0 \Rightarrow x(t)e^{Bt} \ge x(0) > 0 \Rightarrow x(t) > 0$.

Условия принципа максимума принимают следующий вид:

$$\psi'(t) = (1 - \psi(t))u(t)f'(x(t)) - f'(x(t)) + \psi(t)B; \psi(T) = 0; \quad (2.5.3)$$

$$x'(t) = u(t)f(x(t)) - Bx(t); x(0) = x_0 > 0; \quad (2.5.4)$$

$$(\psi(t) - 1)\, u \to \max, 0 \le u \le 1 \Leftrightarrow u(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } \psi(t) < 1, \\ 1, & \text{при } \psi(t) > 1, \\ \text{любое } u \in [0,1], & \text{при } \psi(t) = 1. \end{cases} \quad (2.5.5)$$

Покажем, что норма накопления, определяемая из предыдущих равенств, является оптимальной. Возьмём произвольную допустимую норму накопления $u^*(t)$. Пусть $x^*(t)$ — соответствующее решение дифференциального уравнения (2.5.1), тогда

$$\int_0^T (u^*(t) - 1)f(x^*(t))dt =$$

$$= \int_0^T \{(u^*(t) - 1)f(x^*(t)) + \psi(t)(x^{*\prime}(t) - u^*(t)f(x^*(t)) + Bx^*(t))\}dt =$$

$$= \int_0^T \{u^*(t)(1 - \psi(t))f(x^*(t)) - f(x^*(t)) - \psi'(t)x^*(t) +$$

$$+\ \psi(t)Bx^*(t))\}dt - \psi(0)x(0).$$

Отсюда и из вида управления (2.5.5) получим, что

$$\int_0^T (u^*(t)-1)f(x^*(t))dt \geq$$

$$\geq \int_0^T \{u(t)(1-\psi(t))f(x^*(t)) - f(x^*(t)) - \psi'(t)x^*(t) +$$

$$+\ \psi(t)Bx^*(t))\}dt - \psi(0)x(0).$$

Из вогнутости функции $f(x)$ и из неравенства $u(t)(1-\psi(t)) \leq 0$ следует, что подынтегральная функция

$$\varphi(x) = u(t)(1-\psi(t))f(x) - f(x) - \psi'(t)x + \psi(t)Bx$$

является выпуклой. Согласно (2.5.3), её производная $\varphi'(x(t)) = 0$. Поэтому $\varphi(x(t)) \leq \varphi(x^*(t))$. Следовательно,

$$\int_0^T (u^*(t)-1)f(x^*(t))d \ \geq$$

$$\geq \int_0^T \{u(t)(1-\psi(t))f(x(t)) - f(x(t)) - \psi'(t)x(t) +$$

$$+\ \psi(t)Bx(t))\}dt - \psi(0)x(0) = \int_0^T (u(t)-1)f(x(t))dt.$$

3. *Вычисление оптимальной нормы накопления в случае функции Кобба — Дугласа*. Сделаем замену переменной $z = x^{1-\alpha}$. Тогда уравнения (2.5.3) и (2.5.4) принимают следующий вид:

$$\psi' = \alpha(1-\psi)Az^{-1}u - \alpha Az^{-1} + \psi B;\ \psi(T) = 0; \tag{2.5.6}$$

$$z' = (1-\alpha)(uA - Bz),\ z(0) = z_0 > 0. \tag{2.5.7}$$

Введём две функции, с помощью которых будут записаны оптимальные управления. Положим

$$T(\alpha) = -\frac{1}{\alpha B}\ln(1-\alpha),\ F(T) = \begin{cases} 1-e^{-\alpha BT}, & T \leq T(\alpha), \\ \alpha\,(1-\alpha)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\,e^{(1-\alpha)BT}, & T(\alpha) < T. \end{cases} \tag{2.5.8}$$

График функции $F(T)$ изображён на рис. 2.5.1. Отметим, что $1 - e^{-\alpha BT} < F(T)$ при $T > T(\alpha)$. В самом деле,

$$e^{-\alpha BT} < F(T) \Leftrightarrow 1 - e^{-\alpha BT} < \alpha(1-\alpha)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} e^{(1-\alpha)BT} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 < [\alpha(1-\alpha)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} e^{BT} + 1]e^{-\alpha BT} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow R(T) = e^{\alpha BT} - \alpha(1-\alpha)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} e^{BT} - 1 < 0.$$

Имеем равенство $R(T(\alpha)) = (1 - \alpha)^{-1} - \alpha(1-\alpha)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}(1-\alpha)^{\frac{-1}{\alpha}} - 1 = 0$. Далее производная $R'(T) = \alpha B e^{\alpha BT}(1 - (1-\alpha)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} e^{(1-\alpha)BT})$ равна нулю при $T = T(\alpha)$ и строго меньше нуля при $T > T(\alpha)$. Отсюда и получим требуемое неравенство $R(T) < 0$ при $T > T(\alpha)$.

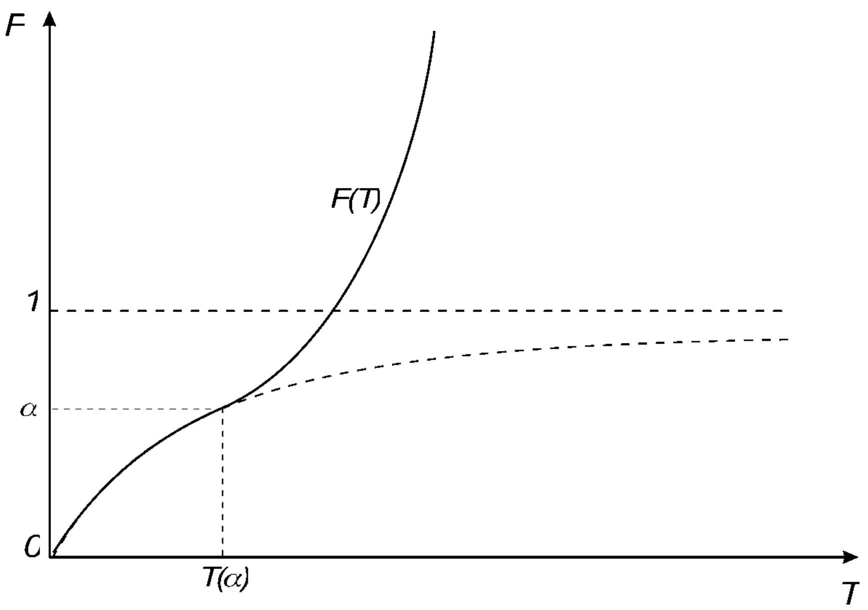

Рис. 2.5.1 График функции $F(T)$

Введём ещё одну функцию

$$H(T) = 1 - (1-\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} e^{(1-\alpha)BT}. \tag{2.5.9}$$

Эта функция убывает с ростом T и обращается в ноль в точке

$$T_1(\alpha) = \frac{1}{1-\alpha}\left(-\frac{1}{\alpha B} ln(1-\alpha)\right) = \frac{T(\alpha)}{1-\alpha} > T(\alpha). \tag{2.5.10}$$

Далее $H(T(\alpha)) = 1 - (1-\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} e^{(1-\alpha)BT(\alpha)} = 1 - (1-\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} (1-\alpha)^{\frac{-(1-\alpha)}{\alpha}} = \alpha$.

С помощью графиков введённых функций $F(T)$ и $H(T)$ верхний правый угол плоскости $(T;\ \frac{B}{A}z_0)$ разбивается на четыре области (рис. 2.5.2).

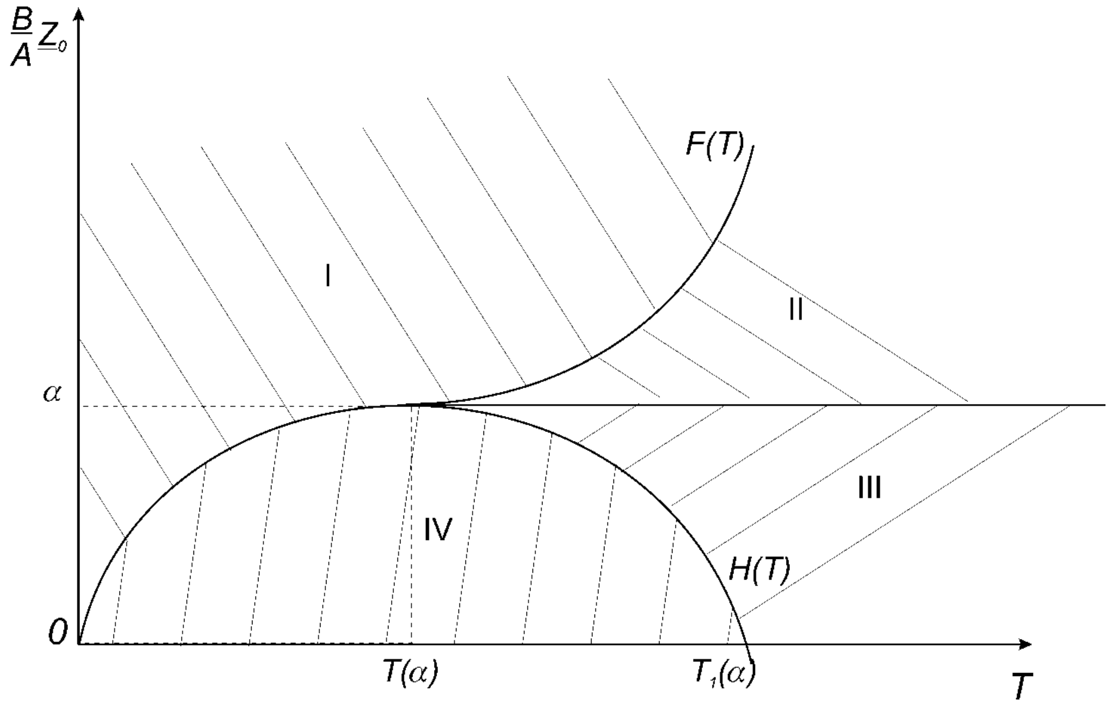

Рис. 2.5.2 Разбивка на области

Лемма 2.5.1. Пусть точка $(T;\ \frac{B}{A}z_0)$ принадлежит области I, то есть выполнено неравенство

$$\frac{B}{A}z_0 \geq F(T). \qquad (2.5.11)$$

Тогда

$$u(t) = 0,\ z(t) = z_0 e^{-(1-\alpha)Bt} \text{ при } 0 \leq t \leq T. \qquad (2.5.12)$$

Лемма 2.5.2. Пусть точка $(T;\ \frac{B}{A}z_0)$ принадлежит области II, то есть выполнены неравенства

$$\alpha \leq \frac{B}{A}z_0 < F(T). \qquad (2.5.13)$$

Тогда

$$u(t)=\begin{cases}0, & 0\le t<\tau;\\ \alpha, & \tau\le t<r;\\ 0, & r\le t\le T,\end{cases}\quad z(t)=\begin{cases}z_0 e^{-(1-\alpha)Bt}, & 0\le t<\tau;\\ \alpha\dfrac{A}{B}, & \tau\le t<r;\\ \alpha\dfrac{A}{B}e^{-(1-\alpha)B(t-r)}, & r\le t\le T.\end{cases}\tag{2.5.14}$$

Здесь

$$\tau=\frac{1}{(1-\alpha)B}\,ln\left(\frac{B\,z_0}{\alpha\,A}\right)\ge 0,\ r=T+\frac{1}{\alpha\,B}\,ln(1-\alpha)=T-T(\alpha)\ge 0.\tag{2.5.15}$$

Лемма 2.5.3. Пусть точка (T; $\frac{B}{A}z_0$) принадлежит области III, то есть выполнены неравенства

$$\max(0;H(T))<\frac{B}{A}z_0\le\alpha;\ T\ge T(\alpha).\tag{2.5.16}$$

Тогда

$$u(t)=\begin{cases}1, & 0\le t<\theta;\\ \alpha, & \theta\le t<r;\\ 0, & r\le t\le T,\end{cases}\quad z(t)=\begin{cases}(z_0-\dfrac{A}{B})e^{-(1-\alpha)Bt}+\dfrac{A}{B}, & 0\le t<\theta;\\ \alpha\dfrac{A}{B}, & \theta\le t<r;\\ \alpha\dfrac{A}{B}e^{-(1-\alpha)B(t-r)}, & r\le t\le T.\end{cases}\tag{2.5.17}$$

Здесь обозначено

$$\theta=\frac{1}{(1-\alpha)B}\,ln\frac{1-\dfrac{B\,z_0}{A}}{1-\alpha}.\tag{2.5.19}$$

Лемма 2.5.4. Пусть точка (T; $\frac{B}{A}z_0$) принадлежит области IV, то есть выполнены неравенства

$$0<\frac{B\,z_0}{A}\le\min(F(T);H(T)),\ 0<T\le T_1(\alpha).\tag{2.5.20}$$

Тогда

$$u(t) = \begin{cases} 1,\ 0 \le t < \upsilon\,; \\ 0,\ \upsilon \le t \le T, \end{cases} \quad z(t) = \begin{cases} \left(z_0 - \dfrac{A}{B}\right)e^{-(1-\alpha)Bt} + \dfrac{A}{B}, & 0 \le t < \upsilon\,; \\ \dfrac{A}{B}\left(1 - e^{-\alpha B(T-\upsilon)}\right)e^{-(1-\alpha)B(t-\upsilon)}, & \upsilon \le t \le T. \end{cases} \tag{2.5.21}$$

Здесь число υ является корнем уравнения

$$\varphi(\upsilon) = 1 - e^{(-\alpha T + \upsilon)B} = \frac{B}{A} z_0. \tag{2.5.22}$$

Полученные четыре вида оптимального управления в зависимости от начального условия и конечного момента времени T изображены на рис. 2.5.3.

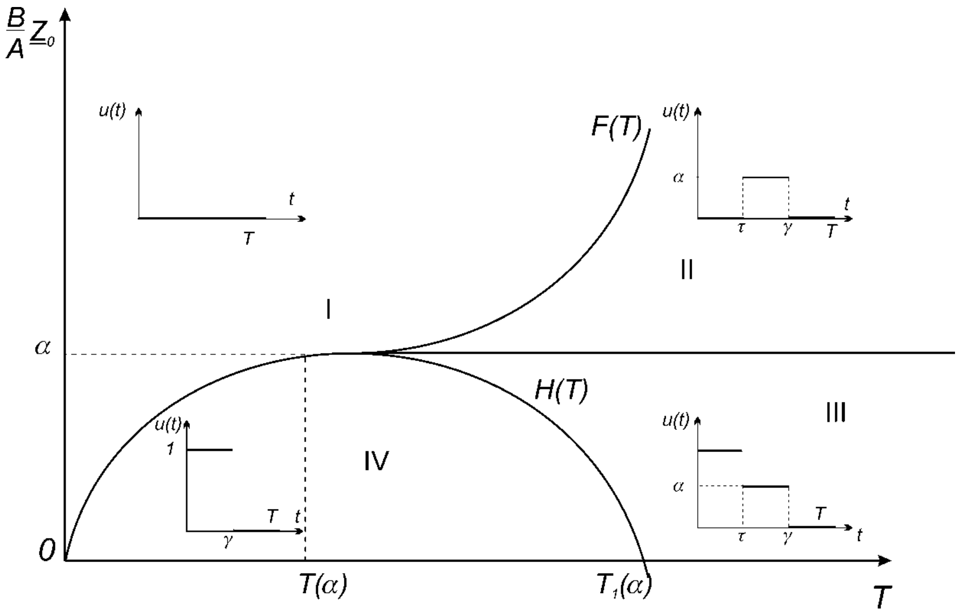

Рис. 2.5.3. Оптимальное управление в каждой области

4. *Вычисление предела среднего значения удельного потребления при оптимальной норме потребления.* В случае постоянной нормы накопления u число $z^* = \dfrac{u\,A}{B}$ является точкой равновесия дифференциального уравнения (2.5.7). Если начальное состояние $z(0) > 0$, то решение $z(t) \to z^*$ при $t \to \infty$. Следовательно, в рассматриваемом случае удельное потребление равно

$$c(t) = A(1-u)\,z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(t) \to (1-u)A\left(\frac{u\,A}{B}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \text{ при } t \to \infty.$$

Решая экстремальную задачу

$$(1-u)A\left(\frac{u\,A}{B}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \to \max \text{ при } 0 \le u \le 1,$$

находим, что максимальное значение предельного удельного потребления достигается при $u = \alpha$ и равно

$$c_{\max}(\infty) = (1-\alpha)A\left(\frac{\alpha\,A}{B}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}.$$

Покажем, что среднее значение удельного потребления при оптимальном управлении

$$\frac{1}{T}\int_0^T c(t)\,dt \to c_{\max}(\infty) \text{ при } T \to \infty.$$

В самом деле, среднее удельное потребление равно

$$J(T) = \frac{A}{T}\int_0^T (1-u(t))\,z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(t)dt. \qquad (2.5.23)$$

Поскольку требуется вычислить предельное значение этого выражения, то нужно рассматривать случаи, когда точка $(T;\ \frac{B}{A}z_0)$ принадлежит области II или области III.

Пусть эта точка принадлежит области II. Тогда из формул (2.5.14) и (2.5.5) следует, что $J(T) = J_1(T) + J_2(T) + J_3(T)$. Здесь обозначено

$$J_1(T) = \frac{A}{T\alpha\,B}\,z_0^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\left(1-\left(\frac{B\,z_0}{\alpha A}\right)^{-\frac{B\,z_0}{\alpha\,A}}\right),\quad J_3(T) = \frac{A}{T\,B}\left(\alpha\frac{A}{B}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}},$$

$$J_2(T) = \frac{A}{T}(1-\alpha)\left(\alpha\frac{A}{B}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\left(T + \frac{1}{\alpha\,B}\,ln(1-\alpha) - \frac{1}{1-\alpha}\,ln\frac{B\,z_0}{\alpha\,A}\right).$$

Отсюда видно, что

$$J(T) \to (1-\alpha)A\left(\frac{\alpha\,A}{B}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \text{ при } T \to \infty. \qquad (2.5.24)$$

Пусть эта точка принадлежит области III. Тогда из формул (2.5.17) и (2.5.18) следует, что $J(T) = J^*(T) + J_3(T)$. Здесь обозначено

$$J_*(T) = \frac{A}{T}(1-\alpha)\left(\alpha\frac{A}{B}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(T + \frac{1}{\alpha B}\, ln\,(1-\alpha) - \frac{1}{1-\alpha}\, ln\, \frac{1-\frac{Bz_0}{A}}{1-\alpha}).$$

Таким образом, условие (2.5.24) выполнено и в этом случае.

ГЛАВА 3. ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Задание 1

Вычислить функционал $J = \int_{a_2}^{a_1} F dx$ для заданных функций x_1, x_2 (табл.1).

Написать уравнение Эйлера для функции F.

Таблица 1

№	F	x_1	x_2	a_1	A_2
1	x^2x'	$\sin t$	$\cos 2t$	$\pi/4$	$\pi/3$
2	xx'	$t^2 + 1$	$t + e^t$	0	2
3	$tx + x'$	e^{4t}	$\sqrt{t^2+1}$	1	2
4	$tx' - x$	$\mathrm{arctg}\, t$	e^{2t}	1	2
5	$2tx - x'$	e^{3t}	$\sin 2t$	$\pi/6$	$\pi/3$
6	$e^t x + x'$	$\sin t$	t^2	$\pi/4$	$\pi/2$
7	$x'\sin t + x^2$	$\cos t$	$\sin t$	$\pi/6$	$\pi/3$
8	$xx'\cos t$	$\sin t$	e^t	$\pi/4$	$\pi/3$
9	$xx'\sin t$	$\cos t$	e^{2t}	0	$\pi/4$
10	$e^x t + tx'$	$t + 1$	t^2	1	2
11	$x'^2 + 3x^2$	$\sqrt{t^2+3}$	te^t	1	2
12	$2te^x + \dfrac{x'}{1+t}$	t^2	t	1	2
13	$x - x'^2$	$t^2 - x_2' + x_1'^2 - x_2'^2 + (x_1 - x_2)^2 t$	te^t	0	1
14	$tx' + x^2$	e^t	$\frac{1}{4}t^2 + t$	0	1
15	$e^x t - xe^t$	t^2	$t + 1$	1	2
16	$x'^2 + x$	$\mathrm{arctg}\, t$	$\sin t$	0	1
17	$t^2x'^2$	e^{2t}	$1/t$	1	2
18	$x'^2 - x\sin t$	e^t	t^2	0	$\pi/4$
19	$e^x t - x't$	$4t$	t^2	1	2
20	$x'^2 + 4x$	te^t	$t^3 - t^2$	1	2
21	$\dfrac{x'}{t-1} + te^x$	t	t^2	1	2
22	xx'^2	$\sin 2t$	$\cos 3t$	$\pi/6$	$\pi/2$
23	$x' - xe^t$	$\cos t$	t^2	1	2

24	$x'xtgt$	sin$t$	sin$2t$	π/6	π/3
25	$\frac{x'^3}{t+1}+tx$	$t^3 + t$	t^2	0	1

Задание 2

Найти экстремаль функционала в простейшей задаче вариационного исчисления

$$J[x] = \int_1^2 \left((N+2)tx - x'^2\right)dt \to extr, \quad x(1) = \frac{N}{3}, \quad x(2) = \frac{N}{2},$$

где N — это номер студента в списке группы.

Задание 3

Найти экстремаль функционала, зависящего от двух функций

$$J[x_1, x_2] = \int_a^b F\ dt;$$

$$x_1(a) = A,\ x_1(b) = B,\ x_2(a) = C,\ x_2(b) = D.$$

Таблица 2

№	F	a	b	A	B	C	D
1	$2x_1'x_2' + x_1^2 + x_2^2 - 2x'$	0	π/2	2	$e^{\frac{\pi}{2}}$	0	$e^{\frac{\pi}{2}}$
2	$2x_1'x_2' + x_1^2 + 16x_2^2 + 2x'$	0	π/4	4	$4e^{\frac{\pi}{2}}$	1	$e^{\frac{\pi}{2}}$
3	$x'^2 - 4x'\cos 2t + 5\sin 3t$	0	1	0	2	0	4
4	$x_2' + x_1'^2 - x_2'^2 + (x_1 - x_2)^2$	0	1	0	2	–2	–6
5	$2x_1'x_2' - x_1^2 - x_2^2 - 2x_1'$	0	π/2	–2	–2chπ/2	2	2chπ/2
6	$x_1'x_2' + 6t(x_1 + x_2)$	0	1	0	0	0	0
7	$12tx_2 - x_1'^3 + x_2'^2$	–1	1	0	2	–1	3
8	$x_2'^2 - x_1'^2 - 2x_1 + 4x_2^2$	0	1	0	3/2	0	2sh2
9	$x_1'x_2' + e^t x_1 + e^{-t} x_2$	0	1	1	1/e	e	1
10	$2x_1'x_2' - 8x_1\sin 2t + x_2' + 12x_2 t$	0	1	0	1	0	sin2
11	$2x_1' + x_1'^2 - x_2'^2 + (x_1 + x_2)^2$	0	1	0	2	0	4
12	$x_2' + x_1'^2 - x_2'^2 + (x_1 - x_2)^2$	0	1	0	2	–2	–6

13	$4x_1'x_2' + 2x_1^{\ 2} + 2x_2^{\ 2} - 4x'$	0	π/2	2	$e^{\frac{\pi}{2}}$	0	$e^{\frac{\pi}{2}}$
14	$4x_1'x_2' + 2x_1^{\ 2} + 32x_2^{\ 2} + 4x'$	0	π/4	4	$4e^{\frac{\pi}{2}}$	1	$e^{\frac{\pi}{2}}$
15	$2x'^2 - 8x'\cos 2t + 10\sin 3t$	0	1	0	2	0	4
16	$4x_2' + 4x_1'^2 - 4x_2'^2 + 4(x_1 - x_2)^2$	0	1	0	2	–2	–6
17	$2x_1'x_2' - 2x_1^{\ 2} - 2x_2^{\ 2} - 4x_1'$	0	π/2	–2	–2chπ/2	2	2chπ/2
18	$2x_1'x_2' + 12t(x_1 + x_2)$	0	1	0	0	0	0
19	$24tx_2 - 2x_1'^3 + 2x_2'^2$	–1	1	0	2	–1	3
20	$2x_2'^2 - 2x_1'^2 - 4x_1 + 8x_2^{\ 2}$	0	1	0	3/2	0	2sh2
21	$2x_1'x_2' + 2e^t x_1 + 2e^{-t}x_2$	0	1	1	1/*e*	*e*	1
22	$4x_1'x_2' - 16x_1\sin 2t + 2x_2' + 24x_2 t$	0	1	0	1	0	sin2
23	$4x_1' + 2x_1'^2 - 2x_2'^2 + 2(x_1 + x_2)^2$	0	1	0	2	0	4
24	$2x_2' + 2x_1'^2 - 2x_2'^2 + 2(x_1 - x_2)^2$	0	1	0	2	–2	–6
25	$2x_2' + 2x_1'^2 - 2x_2'^2 + 2(x_1 - x_2)^2$	0	1	0	2	–2	–6

Задание 4

Найти экстремаль функционала в задаче со свободной границей

$$J[x] = \int_0^1 F_2 dt \to extr, \quad x(1) = A \text{ (табл. 3).}$$

Задание 5

Найти экстремаль функционала и концы отрезка t_0, t_1 в задаче с подвижной границей

$$J[x] = \int_{t_0}^{t_1} F_1 dt \to extr, \quad x(t_0) = \varphi(t_0), \quad x(t_1) = \psi(t_1) \text{ (табл. 3).}$$

Примечание: если в задании (табл. 2) указано, что $x(0) = 0$, то полагаем $t_0 = 0$.

Таблица 3

№	F_1	φ(*t*)	ψ(*t*)	F_2	*A*
1	$\sqrt{1+2x'^2}$	$2t - 1$	$4t^2 - 5$	$2x'^2 + 3x$	4
2	$4x'^2$	$t + 1$	$6t^2 - 7$	$4x'^2 + x^2$	5

3	$-4x + 2x'^2$	$x(0) = 0$	$3t^2 - 8$	$9x'^2 - x^2$	1
4	$3x'^2 + 1/3$	$x(0) = 0$	$2t^2 - 9$	$x'^2 + x' - 2x$	3
5	$-6x'^2$	$8t^2$	$t - 10$	$x'^2 + x' + 3x$	5
6	$3{,}5x'^2 - 7x$	$x(0) = 0$	$3t^2 - 8$	$x'^2 + x^2$	1
7	$1/5 + 5x'^2$	$x(0) = 0$	$5t^2 - 7$	$x'^2 + x$	0
8	$7x'^2$	$t + 7$	$2t^2 - 3$	$2x'^2 + 3x' - 4x$	4
9	$\sqrt{1+5x'^2}$	$5t - 3$	$t^2 - 2$	$5x'^2 + 6x' + 9x$	6
10	$8x'^2 - 16x$	$x(0) = 0$	$7t^2 - 1$	$16x'^2 - 4x^2$	1
11	$2x'^2 + ½$	$x(0) = 0$	$5t^2 - 3$	$25x'^2 + 9x^2$	2
12	$6x'^2$	$t + 3$	$3t^2 - 4$	$4x'^2 + 3x^2$	3
13	$-5x'^2$	$3t^2$	$t - 5$	$16x'^2 - x^2$	7
14	$\sqrt{1+7x'^2}$	$7t - 4$	$2t^2 - 7$	$x'^2 + 2x' + x$	2
15	$3x'^2 - 6x$	$x(0) = 0$	$2t^2 - 5$	$3x'^2 + 4x' - x$	3
16	$4x'^2 + ¼$	$x(0) = 0$	$6t^2 - 4$	$2x'^2 + x^2$	6
17	$-3x'^2$	$7t^2$	$t - 9$	$4x'^2 - x$	8
18	$\sqrt{1+3x'^2}$	$3t - 5$	$3t^2 - 9$	$4x'^2 + x' - 4x$	9
19	$4x'^2 - 5x$	$x(0) = 0$	$5t^2 - 11$	$36x'^2 + x^2$	3
20	$9x'^2 + 1/9$	$x(0) = 0$	$4t^2 - 13$	$36x'^2 - 9x^2$	5
21	$12x'^2$	$t + 11$	$13t^2 - 3$	$4x'^2 - 7x'$	2
22	$-8x'^2$	$15t^2$	$t - 14$	$8x'^2 + 10x'$	7
23	$\sqrt{1+6x'^2}$	$9t - 1$	$3t^2 - 13$	$2x'^2 + 2x' - 3x$	5
24	$x'^2 - 9x$	$x(0) = 0$	$9t^2 - 17$	$5x'^2 + 3x' + x$	7
25	$10x'^2 + 1/10$	$x(0) = 0$	$7t^2 - 19$	$100x'^2 - 25x^2$	3

Задание 6

Найти экстремаль функционала в изопериметрической задаче

$$J[x_1, x_2] = \int_0^1 \left(x_1'^2 + x_2'^2\right) dt \to \text{extr}, \quad x_1(0) = N, \quad x_1(1) = N+1,$$
$$x_2(0) = \frac{N}{2}, \quad x_2(1) = \frac{N+1}{2}, \quad \int_0^1 t x_1 dt = N, \quad \int_0^1 t x_2 dt = N+1,$$

где N — это номер студента в списке группы.

Задание 7

Найти экстремаль функционала в задаче Лагранжа

$$J[x_1, x_2] = \int_0^1 \left(x_1'^2 + x_2'^2\right) dt \to \text{extr}, \quad x_1(0) = \frac{N}{2}, \quad x_1(1) = \frac{N}{3},$$
$$x_2(0) = \frac{N+1}{2}, \quad x_2(1) = \frac{N+1}{3}, \quad x_1 + x_2' = Nt^2 - t - N,$$

где N — это номер студента в списке группы.

Задание 8

Решить задачу оптимального управления (табл. 4)

$$\int_0^1 F \, dt \to \min, \; x(0) = A, \; |x'| \le B.$$

Таблица 4

№	F	A	B
1	x'^2	1	1
2	$x'^2 - 2x$	1	3
3	$x'^2 - 4x$	2	4
4	$x'^2 + 2x$	1	5
5	$x'^2 + 4x$	2	4
6	$x'^2 - 6x$	1	7
7	$x'^2 - 10x$	0	11
8	$x'^2 + 6x$	1	10
9	$x'^2 + 10x$	0	10
10	$x'^2 - 6x$	1	1
11	$x'^2 + 2x$	1	4
12	$x'^2 + 4x$	2	5
13	$x'^2 - 6x$	1	6
14	$x'^2 - 10x$	0	10
15	$x'^2 - 6x$	1	10

16	$x'^2 + 10x$	0	8
17	$x'^2 + 2x$	1	6
18	$x'^2 + 4x$	2	3
19	$x'^2 - 4x$	2	2
20	$x'^2 - 6x$	1	5
21	$x'^2 + 6x$	1	8
22	$x'^2 + 10x$	0	6
23	$x'^2 - 10x$	0	8
24	$x'^2 - 2x$	1	5
25	x'^2	1	2

Задание 9

Решить задачу оптимального быстродействия (табл. 5)

$$T \to \min,$$

$$x'' = u,\ |u| \le k,$$

$$x(0) = A,\ x'(0) = B,\ x(T) = 0,\ x'(T) = 0.$$

Таблица 5

№	A	B	k
1	–2	2	1
2	–2	0	1
3	–2	–2	1
4	1	2	1
5	1	1	1
6	0	1	1
7	0	–1	1
8	–2	1	1
9	–2	–1	1
10	–2	0	1
11	1	1	1
12	1	–1	1
13	2	0	1
14	–1	1	2
15	–1	0	2
16	–2	–1	2

17	1	–1	2
18	1	2	2
19	0	2	2
20	0	–2	2
21	–2	1	1
22	–1	1	1
23	–2	0	1
24	2	0	1
25	2	1	1

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Задаёт ли отображение норму в указанном пространстве?

а) $\|x\|_{C[a,b]} = \int_a^b |x(t)|dt$;

б) $\|x\|_{C[a,b]} = \sqrt{\int_a^b |x(t)|^2 dt}$;

в) $\|x\|_{C^1[a,b]} = |x(a)| + \max\limits_{t\in[a,b]} |x'(t)|$;

г) $\|x\|_{C^1[a,b]} = \int_a^b |x(a)|dt + \max\limits_{t\in[a,b]} |x'(t)|$.

2. Проверить по определению нормы, что в пространстве R^n нормой элемента $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ являются…

а) $\|x\| = \max\limits_{1\le k\ge n} |x_k|$;

б) $\|x\| = \max\limits_{1\le k\ge n} |x_k|$.

3. Являются ли функции линейно зависимыми (функции рассматриваются в той области, в которой они определены)?

а) $x^2 + 2$, $3x^2 - 1$, $x + 4$;

б) $x^2 - x+ 3$, $2x^2 + x$, $2x - 4$;

в) $2x^2 - x+ 4$, $x^2 + 2x - 1$, $x^2 + 1$;

г) $\cos 2x$, $\sin^2 x$, 1;

д) x^2, 0, e^x.

4. Найти значение функционала $J[x] = x(1) + \sqrt{\int_0^1 x^2(t)dt}$ в точках:

а) $x_1 = 4$;

б) $x_2 = \sqrt{t^3}$;

в) $x_2 = -\sqrt{t^3}$.

5. Пусть $J[x] = \int_0^1 x(t)dt$. В какой из точек $x_1 = t^2$, $x_2 = t^3$ значение функционала наименьшее?

6. Пользуясь определением, найти вариацию функционала $J[x]$:

а) $J[x] = x(1)$;

б) $J[x] = x^2(1)$;

в) $J[x] = \int_0^1 x^2(t)dt$;

г) $J[x] = \int_0^1 x(t)x'(t)dt$;

д) $J[x] = \int_0^1 \left(x'(t) + x''(t)\right)dt$.

7. Написать систему уравнений Эйлера — Пуассона для функционала

$$J[x_1, x_2, x_3] = \int_a^b F(t, x_1, x_2, x_3, x'_1, x'_2, x'_3, x''_1, x''_2, x''_3)dt.$$

8. Написать систему уравнений Эйлера — Пуассона для функционала

$$J[x_1, x_2, x_3] = \int_a^b \left(t\cos(x_1 x'_2) + x_3 \sin(tx''_1)\right)dt.$$

9. Написать естественные краевые условия для задачи со свободными границами

$$J[x] = \int_1^2 \left(\sin(tx) + t^2 x'^2\right)dt \to extr.$$

10. Написать условия трансверсальности для задачи с подвижными границами

$$J[x] = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sin(tx) + t^2 x'^2\right)dt \to extr, \quad x(t_1) = t_1^2,\ x(t_2) = t_2 - 5.$$

11. Для задачи с левой свободной и правой подвижной границей написать естественное граничное условие и условие трансверсальности соответственно

$$J[x] = \int_0^{t_1} \sqrt{1 + x'^2}\,dt \to extr, \quad x(t_1) = \frac{1}{t_1^2}.$$

12. Запишите условия трансверсальности на правом конце в вариационной задаче

$$J[x] = \int_a^b A(t,x)\sqrt{1 + x'^2}\,dt, \quad x(a) = x_a, \quad x(b) = \varphi(b),$$

функционал которой определён на множестве непрерывно дифференцируемых функций. Предполагается, что значения a, x_a фиксированы, $A(t, \varphi(t)) \neq 0$, а $\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема.

13. Выведите формулу для вариации функционала в задаче со свободными концами (предполагается, что $x \in C^2[a, b]$)

$$J[x] = \int_a^b F(t, x, x', x'')dt .$$

14. Получите условия трансверсальности на правом конце в вариационной задаче

$$J[x, y] = \int_a^b F(t, x, y, x', y')dt \to extr, \quad x(a) = x_a,\ y(a) = y_a,\ y(b) = \varphi(b, x(b)),$$

функционал которой определён на множестве пар гладких функций, значения a, x_a, y_a фиксированы.

15. Используя методы вариационного исчисления, найдите расстояние от начала координат до плоской кривой $x^2y = 1$.

16. Используя методы вариационного исчисления, найдите кратчайшее расстояние между двумя кривыми на плоскости:

$y = x^2$ и $y = x - 5$;

$y = x^2 + 2$ и $y = x$.

17. Написать функцию Лагранжа для функционала

$$J[x, y] = \int_0^1 \left(x'^2 + y'^2\right)dt, \text{ при условии } x' = y.$$

18. Написать функцию Лагранжа для функционала

$$J[x, y, z] = \int_0^1 \left(x \sin t + z'y + \cos y'\right)dt, \text{ при условиях } zt = x' + \cos t,\ x = y' - t.$$

19. Написать функцию Лагранжа для функционала

$$J[x, y] = \int_0^1 t(x - y)dt, \text{ при условиях } \int_0^1 x'y'dt = -\frac{4}{5}, \quad \int_0^1 xy^2 dt = 0 .$$

20. С помощью принципа максимума запишите полную систему необходимых условий в следующих задачах оптимального управления:

$$\int_0^T udt + x_2^2(T) \to \inf\ ; \quad |u| \le 1,$$

$$x'_1 = -x_2,\ x'_2 = x_1 + 2u,\ x_1(0) = A,\ x_2(0) = B\ ;$$

$$\int_0^T udt + x_1^2(0) \to \inf\ ; \quad |u| \le 1,$$

$$x'_1 = x_2,\ x'_2 = -x_1 + u,\ x_1(T) = A,\ x_2(T) = B\ .$$

21. Установите вид следующей задачи вариационного исчисления:

а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x''^2 - 2x'^2 + x^2 - 2e^t\right)dt \to \text{extr};$

$x(0) = 2,\ x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,\ x'(0) = 1,\ x'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\left(2 + \frac{\pi}{2}\right);$

б) $\int\limits_0^1 (x'^2 + xx' + 4x^2)dt + x^2(0) + x^2(1) \to \text{extr};$

в) $\int\limits_0^1 \left(x'^2 + t^2\right)dt \to \min;$ $\qquad x(0) = 1,\ x(1) = 2,\ \int\limits_0^1 xdt = 1;$

г) $\int\limits_0^1 \left(x''^2 + 4x'x'' + x'^2 - 2e^t\right)dt \to \text{extr};$ $\qquad x(0) = 1,\ x(1) = 1 + e,$

$x'(0) = 2,\ x'(1) = 1 + e.$

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1.2.1

а) $\|y\|_{C[0,2]} = \sqrt{5}$, $\|y\|_{C^1[0,2]} = \sqrt{5}(\pi + 1)$;

б) $\|y\|_{C[0,2]} = \sqrt{10}$, $\|y\|_{C^1[0,2]} = \sqrt{10}(\pi + 1)$;

в) $\|y\|_{C[0,2]} = 9$, $\|y\|_{C^1[0,2]} = 15$;

г) $\|y\|_{C[0,2]} = 4$, $\|y\|_{C^1[0,2]} = 8$.

1.2.2. $\|y\|_{C[0,1]} = \frac{4}{27}$, $\|y\|_{C^1[0,1]} = \frac{31}{27}$.

1.2.3

а) $\delta J(x,h) = \int_a^b (x'h + xh')dt$;

б) $\delta J(x,h) = \int_a^b hdt$;

в) $\delta J(x,h) = 2\int_a^b (xh - x'h')dt$;

г) $\delta J(x,h) = \int_0^{\pi} (x' \cos x \cdot h + \sin x \cdot h')dt$;

д) $\delta J(x,h) = \int_{-1}^{0} (th - 2x'h')dt$;

е) $\delta J(x,h) = \int_0^{\pi} (2x''h'' - 2xh)dt$;

ж) $\delta J(x,h) = \int_0^1 (xt^2 - x'^2)dt$.

1.3.1

а) $x_0 = -t^3$, максимум;

б) решений нет;

в) $x_0 = 4/t - 1$, минимум;

г) $x_0 = -¼t^2 + ¼t$, максимум;

д) $x_0 = t^3/12 + 1/12t$, минимум;

е) $x_0 = t$, минимум;

ж) $x_0 = -¼t^2 + 3/4t$, минимум;

з) $x_0 = -1/24t^4 + 1/24t$, максимум;

и) $x_0 = \ln t$, минимум;

к) $x_0 = t - e\ln t$, минимум;

л) $x_0 = e/t - \ln t$, максимум;

м) $x_0 = -4/t + 7$, минимум;

н) $x_0 = e^t$, минимум.

1.3.2

а) $x = \frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{ch} 1}$;

б) $x = \ln t$;

в) $x = \cos t + \sin t - 1$;

г) $x = \frac{\pi}{4}\sin t - \frac{t}{2}$;

д) $x = -\operatorname{sh}\frac{\pi}{2} \cdot \sin t + 2\operatorname{sh} t$;

е) $x = t + 4$;

ж) $x = \sin 2t$;

з) $x = t\cos t$;

и) $x = -\frac{\pi}{2}\sin t - t\sin t$;

к) $x = te^{2-t}$.

1.4.1

а) $x_1 = \sin t$, $x_2 = \sin t$;

б) $x_1 = t$, $x_2 = -\frac{e^t}{1-e^2} + \frac{e^{2-t}}{1-e^2}$;

в) $x_1 = \frac{t^2}{2} + 1$, $x_2 = 1$;

г) $x_1 = -\frac{t^3}{6} - \frac{5t}{6} + 1$, $x_2 = t$;

д) $x_1 = \sin 2t$, $x_2 = -\frac{t^2}{2} + \left(\frac{32+\pi^2}{8\pi}\right)t$.

1.5.1

а) $x = ½t^6 + 3/2t^3 - 3t^2 + t$, максимум;

б) $x = t^3 - t^2$, минимум;

в) $x = t^4 + 4t^3 + 6t^2 - 4t + 1$, минимум.

1.5.2

а) $x = \frac{\pi}{\pi - 4}(t - 1 + \cos t - \sin t)$;

б) $x = te^t$;

в) $x = \frac{1}{t+1}$;

г) $x = \cos t$;

д) $x = t^4$;

е) $x = t - \sin t$.

1.6.1

а) $x = \operatorname{ch} t$, минимум;

б) $x = e^t + \sin t$, минимум;

в) $x = \ln t + 1$, минимум.

1.6.2

а) $x = \cos t - \sin t$;

б) $x = \cos t + \sin t$;

в) $x \equiv 0$;

г) $x \equiv 0$.

1.7.1

а) $x = \frac{t^3}{6} - 2t$;

б) $x = \frac{t^2}{2} - 4t$;

в) $x \equiv 0$;

г) $x = -\frac{t^2}{4} + \frac{1}{4}t$;

д) $x = \left(t - 1 - \frac{\pi}{4}\right)\sin t$;

е) $x = \frac{t^2}{2} - \frac{7}{2}t + 8$;

ж) $x = \frac{t^2}{2} + \frac{3}{2}t + 3$.

1.7.2

а) $x = -2t$, $t_1 = 1$;

б) $x = 9t$, $t_1 = 1/3$;

в) $x = \frac{\sqrt{2}}{2}t, t_1 = \sqrt[6]{2}$;

г) $x = -t + \frac{11}{4}, t_0 = \frac{1}{2}, t_1 = \frac{11}{8}$;

д) $x = -t + \frac{3}{4}, t_0 = \frac{1}{2}, t_1 = \frac{23}{8}$.

1.8.1

а) $x = 2{,}5t^3 - 1{,}5t$, минимум;

б) $x = 60t^3 - 96t^2 + 36t$, минимум;

в) $x = \cos t$, минимум;

г) $x = -2/\pi \sin t + t/\pi$, минимум;

д) $x = te^t$, минимум;

е) $x = t$, минимум.

1.8.2

а) $x = -\sin t + t$ и $x = \sin t + t$;

б) $x = te^{-t}$;

в) $x = \frac{4}{t^2}$;

г) $x_1 = -6t^2 + 6t$, $x_2 = 3t^2 - 2t$;

д) $x_1 \equiv 0$, $x_2 = 2{,}5t^3 - 1{,}5t$;

е) $x_1 = 3t^2 - 6t$, $x_2 = 3t^2 - 2t$ и $x_1 = -3t^2$, $x_2 = -3t^2 + 4t$;

ж) $x_1 = -t^3 + 3t$, $x_2 = t^3 - t$ и $x_1 = t^3 + t$, $x_2 = -t^3 + t$.

1.9.1

а) $x = e^{-t} + C\mathrm{sh}t$, $C \in R$, $u \equiv 0$, минимум;

б) $x = \mathrm{ch}t$, $u \equiv 0$, минимум;

в) $x = t\mathrm{ch}t$, $u = 2\mathrm{sh}t$, минимум;

г) $x = \sin t + C\cos t$, $C \in R$, $u \equiv 0$, минимум;

д) $x = (t - \pi/2)\sin t$, $u = 2\cos t$, минимум;

е) $x = \dfrac{-2(t+2)\cos t}{4+\pi}$, $\quad u = \dfrac{4\sin t}{4+\pi}$, минимум;

ж) $x = \mathrm{ch}t$, $u \equiv 0$, минимум.

1.9.2

а) $x = 2\mathrm{sh}t$, $u = 2\mathrm{ch}t + 8\mathrm{sh}t$;

б) $x = 2\mathrm{sh}t$, $u = 2\mathrm{ch}t - 6\mathrm{sh}t$.

2.2.1

а) $x^0 = \begin{cases} \dfrac{t^2}{4} - 3, & 0 \le t \le 2, \\ t - 4, & 2 \le t < 4. \end{cases} \quad u^0 = \begin{cases} \dfrac{t}{2}, & 0 \le t \le 2, \\ 1, & 2 < t \le 4. \end{cases}$

б) $x^0 = \begin{cases} t + \pi, & -\pi \le t \le -\dfrac{\pi}{2}, \\ -t, & \dfrac{-\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2} \\ t - \pi, & \dfrac{\pi}{2} \le t < \pi. \end{cases} \quad u^0 = \begin{cases} 1, & -\pi \le t \le -\dfrac{\pi}{2}, \\ -1, & \dfrac{-\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2} \\ 1, & \dfrac{\pi}{2} \le t < \pi. \end{cases}$

в) $x^0 = \begin{cases} \dfrac{t^2}{4} - \dfrac{3t}{2} + \dfrac{9}{4}, & 1 \le t \le 3, \\ -t + 4, & 0 \le t \le 1. \end{cases} \quad u^0 = \begin{cases} \dfrac{t-3}{2}, & 1 \le t \le 3, \\ -1, & 0 \le t \le 1. \end{cases} \quad T^* = 3.$

г) $x^0 = \dfrac{t^2}{4} - \dfrac{t}{4}, \quad u^0 = \dfrac{t}{2} - \dfrac{1}{4};$

д) $x^0 = -t^2, \quad u^0 = -2;$

е) $x^0 = \begin{cases} t^2 - 2, & 0 \le t \le 1, \\ -t^2 + 4t - 4, & 1 \le t < 2. \end{cases} \quad u^0 = \begin{cases} 2, & 0 \le t \le 1, \\ -2, & 1 < t \le 2. \end{cases}$

ж) $x^0 = \begin{cases} -t^2, & 0 \le t \le 1, \\ t^2 - 4t + 2, & 1 < t < 3 \\ -t^2 + 8t - 16, & 3 \le t < 4. \end{cases}$ $\quad u^0 = \begin{cases} -2, & 0 \le t \le 1, \\ 2, & 1 < t < 3 \\ 1, & \dfrac{\pi}{2} \le t < \pi. \end{cases}$

з) $x^0 = -\dfrac{t^2}{4} + \dfrac{3t}{2}, \quad u^0 = \dfrac{3}{2} - \dfrac{t}{2};$

и) $x^0 = \begin{cases} -\dfrac{t^2}{2} + \dfrac{3}{2}t - \dfrac{1}{4}, & 1 \le t \le 5, \\ t, & 0 \le t < 1 \\ -t + 6, & 5 \le t \le 6. \end{cases}$ $\quad u^0 = \begin{cases} -\dfrac{t}{2} + \dfrac{3}{2}, & 1 \le t \le 5, \\ 1, & 0 \le t < 1 \\ -1, & 5 \le t \le 6. \end{cases}$

з) $x^0 = \dfrac{3t^2}{2} + \dfrac{3t}{2} + 1, \quad u^0 = 3 - 3t.$

2.3.1

а) $x^0 = \begin{cases} -\dfrac{(t+2)^2}{2} + 9, & 0 \le t \le 1, \\ \dfrac{(t-T)^2}{2}, & 1 \le t \le 4. \end{cases}$ $\quad u^0 = \begin{cases} -1, & 0 \le t \le 1, \\ 1, & 1 < t \le 4. \end{cases}$ T = 4.

б) $x^0 = \begin{cases} -\dfrac{(2-t)^2}{2} + 4, & 0 \le t \le 4, \\ \dfrac{(t-T)^2}{2}, & 4 \le t \le 6. \end{cases}$ $\quad u^0 = \begin{cases} -1, & 0 \le t \le 4, \\ 1, & 4 < t \le 6. \end{cases}$ T = 6.

Список рекомендуемой литературы

1. Алексеев, В. М. Сборник задач по оптимизации. Теория. Примеры. Задачи : учеб. пособие / В. М. Алексеев, Э. М. Галеев, В. М. Тихомиров. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Физматлит, 2005. 256 с.: ил. (Классический университетский учебник).

2. Абдрахманов, В. Г. Элементы вариационного исчисления и оптимального управления. Теория, задачи, индивидуальные задания : учеб. пособие / В. Г. Абдрахманов, А. В. Рабчук. СПб. : Лань, 2014. 112 с.

3. Белецкий, В. В. Очерки о движении космических тел / В. В. Белецкий. М. : Наука, 1972. 360 с.

4. Благодатских, В. И. Введение в оптимальное управление / В. И. Благодатских. М. : Высш. шк., 2001. 239 с.

5. Гюнтер, Н. М. Курс вариационного исчисления / Н. М. Гюнтер. СПб. : Лань, 2009. 320 с.

6. Краснов, М. Л. Вариационное исчисление : задачи и примеры с подроб. решениями / М. Л. Краснов, Г. И. Макаренко, А. И. Киселёв. М. : Либроком, 2010. 170 с.

7. Лагоша, Б. А. Оптимальное управление в экономике : учеб. пособие / Б. А. Лагоша. М. : Финансы и статистика, 2003. 192 с.

8. Малыхин, В. И. Математическое моделирование экономики / В. И. Малыхин. М. : Изд-во Ун-та Рос. акад. образования, 1998. 160 с.

9. Основы теории оптимального управления / под ред. В. Ф. Кротова. М. : Высш. шк., 1990. 431 с.

10. Пантелеев, А. В. Вариационное исчисление в примерах и задачах / А. В. Пантелеев. М. : Вузов. кн. , 2012. 228 с.

11. Папонян, С. С. Математические методы в социальной психологии / С. С. Папонян. М. : Наука, 1983. 343 с.

12. Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко. М. : Наука, 1969. 384 с.

13. Ухоботов, В. И. Правило множителей Лагранжа в задачах вариационного исчисления и оптимального управления : учеб. пособие / В. И. Ухоботов. Челябинск : Изд-во Челяб. гос. ун-та, 2006. 146 с.

Учебное издание

КЛАССИЧЕСКОЕ УНИВЕРСИТЕТСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

НИКИТИНА Светлана Анатольевна
УХОБОТОВ Виктор Иванович

ОСНОВЫ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ И ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Учебное пособие

Редактор *Е. П. Мезяева*
Вёрстка и дизайн обложки *Т. В. Ростуновой*

Подписано в печать 05.05.16
Формат 60 × 84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. ... Уч.-изд. л. 8,3.
Тираж 100 экз. Заказ
Цена договорная

ФГБОУ ВО «Челябинский государственный университет»
454001 Челябинск, ул. Братьев Кашириных, 129

Издательство Челябинского государственного университета
454021 Челябинск, ул. Молодогвардейцев, 57б