

Документ подписан простой электронной подписью Информация о владельце: ФИО: Гаскаев Сергей Валерьевич Должность: Ректор	МИНОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИИ Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Челябинский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ЧелГУ»)	
Дата подписания: 08.04.2026 16:55:16 Уникальный программный ключ: 04c19ed8bfb98f3b6cb77a486b9a8788b8322323	Рабочая программа дисциплины "Специальные функции" по направлению подготовки (специальности) 01.04.01 "Математика" направленности (профиль) Уравнения с дробными производными ФГБОУ ВО «ЧелГУ»	стр. 1

Рабочая программа дисциплины (модуля)*

Специальные функции

Направление подготовки (специальность)

01.04.01 Математика

Направленность (профиль)

Уравнения с дробными производными

Присваиваемая квалификация (степень)

магистр

Форма обучения

очная

Год(ы) набора 2026

*Рабочая программа дисциплины (модуля) адаптирована для инклюзивного обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья

Челябинск 2026 г.



Содержание

1. Цели освоения дисциплины
2. Место дисциплины в структуре ОПОП
3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины (модуля)
4. Объем дисциплины (модуля)
5. Структура и содержание дисциплины (модуля)
6. Фонд оценочных средств
 - 6.1. Перечень видов оценочных средств
 - 6.2. Типовые контрольные задания и иные материалы для текущей аттестации
 - 6.3. Типовые контрольные вопросы и задания для промежуточной аттестации
 - 6.4. Критерии оценивания
7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)
 - 7.1. Рекомендуемая литература
 - 7.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет"
 - 7.3. Перечень информационных технологий
8. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)
9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)
10. Специальные условия освоения дисциплины обучающимися с инвалидностью и ограниченными возможностями здоровья



1. ЦЕЛИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Целью курса "Специальные функции" является изучение фундаментальных свойств, методов анализа и приложений наиболее важных специальных функций, используемых в математической физике, дифференциальных уравнениях, теории вероятностей и других областях науки и техники. Курс нацелен на формирование у студентов глубокого понимания роли специальных функций как инструмента решения сложных математических задач и моделирования различных процессов и явлений.

Задачами изучения дисциплины являются:

- Ознакомление с основными определениями и свойствами специальных функций: Изучение гамма-функции, бета-функции, гипергеометрических функций, функций Бесселя, Лежандра, Миттаг-Леффлера, эллиптических функций и интегралов, а также других классов специальных функций.
- Освоение методов анализа специальных функций: Изучение асимптотических разложений, интегральных представлений, рекуррентных соотношений, производных и интегралов, а также других методов анализа, применимых к различным классам специальных функций.
- Изучение взаимосвязей между специальными функциями: Исследование связей и представлений одних специальных функций через другие, а также понимание общих принципов их классификации.
- Формирование навыков применения специальных функций для решения математических и физических задач: Рассмотрение примеров решения дифференциальных уравнений, интегральных уравнений, задач математической физики, теории вероятностей и других задач с использованием специальных функций.
- Изучение приложений специальных функций в различных областях: Рассмотрение примеров моделирования процессов в физике (теория колебаний, распространение волн, теплопроводность), механике (задачи теории упругости и пластичности), электротехнике (теория цепей), квантовой механике, статистике и других областях с использованием специальных функций.
- Развитие способности проводить анализ и интерпретацию решений, полученных с использованием специальных функций: Изучение поведения специальных функций при различных значениях параметров, их асимптотических свойств и особенностей, а также интерпретация полученных результатов в терминах моделируемых процессов.
- Создание целостной картины существующих математических методов и понятий, связанных со специальными функциями: Формирование понимания о роли специальных функций как мощного инструмента математического анализа и моделирования.
- Развитие навыков самостоятельного изучения современной научной литературы: Подготовка студентов к самостоятельному исследованию новых специальных функций и их приложений, а также к участию в научных проектах.

Результаты обучения по дисциплине направлены на достижение индикаторов:

ПК-1.1 Демонстрирует знание основных теоретических положений и методов в области проводимых научных исследований

ПК-1.2. Демонстрирует умения сбора и анализа информации по тематике проводимых исследований

ПК-1.3. Имеет практический опыт установления новых фактов и закономерностей в области научных исследований

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОПОП

Цикл (раздел) ОПОП:

ФТД.В.01

2.1 Требования к предварительной подготовке обучающегося:

Для успешного освоения дисциплины необходимы знания дисциплин «Математический анализ», «Линейная алгебра», «Дифференциальные уравнения», «Функциональный анализ», «Комплексный анализ». А также

Дополнительные главы комплексного анализа

2.2 Дисциплины и практики, для которых освоение данной дисциплины (модуля) необходимо как предшествующее:

Знания по данной дисциплине могут быть полезны для научно-исследовательской работы студентов.

Дробное интегро-дифференциальное исчисление

Методы решения дифференциальных уравнений



Уравнения в частных производных первого порядка
Вырожденные эволюционные уравнения в банаховых пространствах
Нелинейные уравнения в частных производных
Обобщенные симметрии дифференциальных уравнений
Численные методы решения дробных дифференциальных уравнений

3. КОМПЕТЕНЦИИ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

ПК-1: Способен проводить научно-исследовательскую работу в области дифференциальных уравнений

Знать:

основные теоретические положения, свойства и методы анализа специальных функций, необходимых для решения математических и прикладных задач.

Уметь:

собирать, анализировать и давать критическую оценку информации по тематике специальных функций, включая их теоретические основы, свойства и области применения в различных областях науки и техники.

Владеть:

навыками применения специальных функций для построения, решения и анализа математических моделей, описывающих процессы и явления в различных областях, а также для установления новых фактов и закономерностей.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен

3.1	Знать:
3.1.1	основные теоретические положения, свойства и методы анализа специальных функций, необходимых для решения математических и прикладных задач.
3.2	Уметь:
3.2.1	собирать, анализировать и давать критическую оценку информации по тематике специальных функций, включая их теоретические основы, свойства и области применения в различных областях науки и техники.
3.3	Владеть:
3.3.1	применения специальных функций для построения, решения и анализа математических моделей, описывающих процессы и явления в различных областях, а также для установления новых фактов и закономерностей.

4. ОБЪЕМ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Общая трудоемкость		1 ЗЕТ
Часов по учебному плану	: 36	Виды контроля в семестрах: зачеты 2
в том числе	:	
аудиторные занятия	: 16	
самостоятельная работа	: 19,8	
:	:	
контактная работа:	16,2	
ИКР:	0,2	

5. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Код занятия	Наименование разделов и тем /вид занятия/	Семестр / Курс	Часов	Литература
	Раздел 1. Специальные функции			
1.1	Введение в специальные функции. Обзор основных функций /Пр/	2	1	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Э1 Э2 Э3



1.2	Гамма-функция: асимптотики, интегральные представления, связь с факториалом /Пр/	2	1	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Э1 Э2 Э3
1.3	Бета-функция: определение, свойства, интегральные представления /Пр/	2	1	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Э1 Э2 Э3
1.4	Применение гамма- и бета-функций в задачах дробного исчисления /Пр/	2	1	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Э1 Э2 Э3
1.5	Гипергеометрическая функция: определение, свойства, рядное представление /Пр/	2	1	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Э1 Э2 Э3
1.6	Вырожденная гипергеометрическая функция. Конфлюентная гипергеометрическая функция /Пр/	2	1	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Э1 Э2 Э3
1.7	Связь гипергеометрических функций с другими специальными функциями /Пр/	2	1	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Э1 Э2 Э3
1.8	Функции Миттаг-Леффлера: определение, свойства, интегральные представления /Пр/	2	2	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Э1 Э2 Э3
1.9	Обобщенные функции Миттаг-Леффлера /Пр/	2	1	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Э1 Э2 Э3
1.10	Связь функций Миттаг-Леффлера с дробными производными и интегралами /Пр/	2	1	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Э1 Э2 Э3
1.11	Применение функций Миттаг-Леффлера в моделях дробного порядка /Пр/	2	1	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Э1 Э2 Э3
1.12	Функции Бесселя: определение, свойства, интегральные представления /Пр/	2	1	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Э1 Э2 Э3
1.13	Функции Лежандра: определение, свойства, связь с ортогональными многочленами /Пр/	2	1	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Э1 Э2 Э3
1.14	Связь специальных функций и преобразование Лапласа /Пр/	2	1	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Э1 Э2 Э3
1.15	Обзор и применение специальных функций в различных прикладных задачах /Пр/	2	1	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Э1 Э2 Э3
1.16	Выполнение домашних работ, подготовка к контрольным работам. Подготовка к зачету. /Ср/	2	19,8	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1
Раздел 2. Иная контактная работа				
2.1	Индивидуальные консультации, текущий контроль /ИКР/	2	0,2	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1

6. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

6.1. Перечень видов оценочных средств

1. Доклад
2. Вопросы к зачету

6.2. Типовые контрольные задания и иные материалы для текущей аттестации

Темы докладов:

1. Гамма-функция: различные определения и интегральные представления, их эквивалентность и приложения.



- (Глубокий анализ различных определений и представлений гамма-функции, их взаимосвязь, применение в дробном исчислении.)
2. Бета-функция и ее связь с гамма-функцией. Приложения в теории дробного исчисления. (Подробное рассмотрение свойств бета-функции, ее связи с гамма-функцией и использование в вычислениях дробных производных и интегралов.)
 3. Гипергеометрические функции и их частные случаи: свойства, асимптотики, приложения. (Обзор различных видов гипергеометрических функций, их свойств и представлений, применение в решении дифференциальных уравнений.)
 4. Вырожденные гипергеометрические функции: свойства, представление, применение в моделях с дробными производными. (Анализ вырожденных гипергеометрических функций, их связи с другими специальными функциями и применение в уравнениях с дробными производными.)
 5. Функции Миттаг-Леффлера: различные обобщения, свойства и применение в теории дробных дифференциальных уравнений. (Подробное изучение обобщений функции Миттаг-Леффлера, их свойства и роль в решении дробных дифференциальных уравнений.)
 6. Специальные функции и преобразование Лапласа: взаимосвязь и применение для решения дробных дифференциальных уравнений. (Анализ использования преобразования Лапласа для решения задач, связанных со специальными функциями и дробными уравнениями.)
 7. Метод Фробениуса и его применение для нахождения решений дифференциальных уравнений, выражаемых через специальные функции. (Изучение метода Фробениуса и его применение для нахождения решений с помощью рядов, выраженных через специальные функции.)
 8. Интегральные представления специальных функций и их применение в анализе дробных операторов. (Подробный анализ интегральных представлений специальных функций и их связь с интегральными преобразованиями и дробными операторами.)
 9. Применение гамма- и бета-функций в вычислении дробных интегралов и производных, примеры и анализ. (Рассмотрение примеров использования гамма- и бета-функций для вычисления дробных производных и интегралов.)
 10. Решение дробных дифференциальных уравнений с использованием функций Миттаг-Леффлера. (Анализ применения функции Миттаг-Леффлера для решения различных классов дробных дифференциальных уравнений.)
 11. Моделирование аномальной диффузии с помощью дробных операторов и специальных функций. (Исследование моделей аномальной диффузии с использованием дробных производных и анализ решений с помощью специальных функций.)
 12. Дробное исчисление и вязкоупругость: использование специальных функций для моделирования реологических свойств материалов. (Применение дробного исчисления и специальных функций для моделирования вязкоупругого поведения материалов.)
 13. Применение специальных функций для решения дробных интегральных уравнений. (Изучение методов решения интегральных уравнений с дробными операторами и использование специальных функций.)
 14. Специальные функции в дробных системах управления. (Рассмотрение применения специальных функций для анализа и синтеза дробных систем управления.)
 15. Специальные функции в задачах дробной динамики. (Анализ применения специальных функций в задачах моделирования механических систем с дробными производными.)
 16. Обобщенные специальные функции: определение, свойства, приложения в дробном исчислении. (Изучение обобщенных специальных функций и их роли в теории дробных операторов.)
 17. Численные методы вычисления специальных функций для задач дробного исчисления.
 18. Связь специальных функций с теорией ортогональных многочленов и их применение в приближенных методах решения дробных уравнений. (Изучение связи специальных функций с ортогональными многочленами и их применение в численных методах для решения дробных уравнений.)
 19. Специальные функции в многомерном дробном исчислении и их применение в моделировании многомерных процессов. (Анализ многомерных дробных операторов и использование специальных функций для их исследования.)
 20. Современные исследования и новые направления в области применения специальных функций для уравнений с дробными производными. (Обзор последних научных достижений и перспективных направлений исследований в области применения специальных функций для дробных уравнений.)

6.3. Типовые контрольные вопросы и задания для промежуточной аттестации

Вопросы для зачета:

1. Обзор основных специальных функций (гамма, бета, гипергеометрические, функции Бесселя, Лежандра, Миттаг-Леффлера).
2. Исторические аспекты и области применения.
3. Введение в гамма-функцию: определение, свойства, аналитическое продолжение.
4. Асимптотические разложения гамма-функции (формула Стирлинга).



5. Интегральные представления гамма-функции (интеграл Эйлера II рода).
6. Связь гамма-функции с факториалом и обобщенным факториалом.
7. Определение бета-функции (интеграл Эйлера I рода).
8. Свойства бета-функции: симметрия, связь с гамма-функцией.
9. Интегральные представления бета-функции.
10. Вычисление дробных производных и интегралов простых функций с использованием гамма-функции.
11. Связь бета-функции с обобщенными интегралами.
12. Примеры применения гамма- и бета-функции в решении интегральных уравнений.
13. Определение функции Миттаг-Леффлера.
14. Свойства функции Миттаг-Леффлера.
15. Интегральные представления.
16. Обобщения функции Миттаг-Леффлера: двухпараметрическая, многопараметрическая.
17. Свойства обобщенных функций Миттаг-Леффлера.
18. Представление решений дробных дифференциальных уравнений с помощью функций Миттаг-Леффлера.
19. Использование функций Миттаг-Леффлера в моделях аномальной диффузии, вязкоупругости и других процессах.
20. Применение преобразования Лапласа к решению уравнений со специальными функциями.

6.4. Критерии оценивания

Критерий выставления зачета:

Продолжительность зачета – 90 минут. За каждое выполненное задание билета студент может получить от 1 до 3 баллов. Если задание выполнено правильно, то оно оценивается 3 баллами. Если задание выполнено с ошибками, то баллы снижаются в зависимости от количества допущенных ошибок. Если допущена одна ошибка, то задание оценивается 2 баллами, допущены две ошибки – 1 балл. Если допущено более двух ошибок в задании или студент не выполнил какое-либо задание из билета, то за него он получает 0 баллов. Максимальное количество баллов за зачет – 6.

При подведении итогов учитываются результаты текущей аттестации. Полученные за текущую аттестацию баллы суммируются с баллами, полученными за каждый этап при прохождении промежуточной аттестации:

Оценка "не зачтено" выставляется за 19 и менее баллов;

Оценка "зачтено" выставляется за 20 и более баллов:

20-26 баллов (уровень 1);

27-30 баллов (уровень 2);

31-36 баллов (уровень 3).

Описание показателей и критериев оценивания компетенций для доклада:

В семестре 3 доклада. На доклад отводится 15-20 минут в конце пары (каждую пару 1 доклад). Каждый студент готовит доклад по одной из предложенных тем. Максимальное количество баллов за доклад - 10.

Оценка "зачтено" выставляется за 20-30 баллов, "не зачтено" - менее 20 баллов.

Полнота доклада оценивается по следующим критериям:

1. Полнота изложения теоретического материала
2. Достаточное количество примеров к теоретическому материалу
3. Приведены примеры к определениям и теоремам
4. Приведены контрпримеры, демонстрирующие при каких условиях не применимы теоремы.

7. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

7.1. Рекомендуемая литература

7.1.1. Основная литература

	Авторы,	Заглавие	Издательство,	Ресурс
ЛП.1	Карчевский М. М., Павлова М. Ф.	Уравнения математической физики. Дополнительные главы: учебное пособие для вузов (https://e.lanbook.com/book/489359)	Санкт-Петербург : Лань, 2025	ЭБС
ЛП.2	Байков В. А., Жиббер А. В.	Уравнения математической физики: учебник и практикум для вузов (https://urait.ru/bcode/562402)	Москва : Юрайт, 2025	ЭБС
ЛП.3	Полянин А. Д., Зайцев В. Ф., Журов А. И.	Нелинейные уравнения математической физики и механики. Методы решения: учебник и практикум для вузов (https://urait.ru/bcode/562002)	Москва : Юрайт, 2025	ЭБС



7.1.2. Дополнительная литература

	Авторы,	Заглавие	Издательство,	Ресурс
Л2.1	Арсенин В. Я.	Методы математической физики и специальные функции: учебное пособие для студентов вузов	Москва : Наука, 1984	

7.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет"

Э1	eLIBRARY.RU [Электронный ресурс] : электронная библиотека / Науч. электрон. б-ка – URL: http://elibrary.ru/defaultx.asp
Э2	Российский фонд фундаментальных исследований (РФФИ) - официальный сайт http://www.rfbr.ru/rffi/ru
Э3	Научная электронная библиотека. Монографии, изданные в издательстве Российской Академии Естествознания полнотекстовый ресурс научных и учебных изданий РАЕ https://www.monographies.ru/

7.3 Перечень информационных технологий

7.3.1 Программное обеспечение

LMS Moodle

Adobe Reader

7.3.2 Профессиональные базы данных и информационно-справочные системы

1. Web of Science (<https://apps.webofknowledge.com>) Web of Science : мультидисциплинарная реферативная база данных / компания Thomson Reuters. – Режим доступа: для зарегистрир. пользователей ЧелГУ. – Текст : электронный.

2. SpringerLink Международная реферативная база данных научных изданий (<https://www.springer.com>)

8. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Для реализации дисциплины используются учебные аудитории для проведения занятий семинарского типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, а также помещения для самостоятельной работы.

Учебные аудитории укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения: доска, парты, мультимедийное и аудиооборудование.

Для семинарских занятий используются аудитории оснащенные обычной доской, партами, переносным мультимедийным и аудиооборудованием (в случае необходимости).

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с подключением к сети "Интернет" и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду университета.

9. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

При изучении данной дисциплины используются семинарские (практические) занятия и самостоятельная работа студента. На практических занятиях излагается основное содержание тем программы, рассматриваются основные методы и подходы.

Для наиболее эффективного изучения дисциплины обучающемуся рекомендуется:

- посещать занятия, кратко и вдумчиво конспектировать материал, с указанием даты проведения занятия и темы;
- самостоятельно прорабатывать материал как после каждого занятия, так и по завершению темы, что позволяет связать воедино полученные сведения и составить цельную картину.

В случае применения при обучении дисциплины электронного обучения, дистанционных образовательных технологий общение обучающихся и преподавателя осуществляется в режиме реального времени (онлайн-лекции (вебинары), чаты, видео-конференции и др.) или отложенного времени (система дистанционного обучения Moodle, форумы, электронная почта и др.).

Большую часть времени обучающиеся самостоятельно работают с учебно-методическими материалами. Студенты имеют возможность консультироваться с преподавателем по всем вопросам, возникающим в ходе самостоятельной работы посредством электронной почты, социальных сетей и т.п.

Доступ обучающегося к учебным ресурсам в режиме отложенного времени, самостоятельной работы осуществляется через сеть Интернет в удобном для него месте, времени и темпе.

При обучении лиц с ограниченными возможностями здоровья электронное обучение, дистанционные образовательные технологии предусматривают возможность приема-передачи информации в доступных для них формах.

Реализация дисциплины с применением электронного обучения, дистанционных образовательных технологий (далее



– ЭО, ДОТ) осуществляется на основании «Положения о реализации основных и дополнительных образовательных программ с применением электронного обучения и дистанционных образовательных технологий в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Челябинский государственный университет», «Положения о порядке зачета обучающимися по основным профессиональным образовательным программам высшего образования в ФГБОУ ВО «ЧелГУ» результатов освоения в организациях, осуществляющих образовательную деятельность, учебных предметов, курсов, дисциплин (модулей), практик, дополнительных образовательных программ» посредством электронной информационно-образовательной среды ФГБОУ ВО «ЧелГУ». В исключительных случаях (форс-мажор и т.п.) при реализации образовательной деятельности с применением ЭО, ДОТ могут применять компоненты, не входящие в перечень электронной информационно-образовательной среды.

10. СПЕЦИАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ ОБУЧАЮЩИМИСЯ С ИНВАЛИДНОСТЬЮ И ОГРАНИЧЕННЫМИ ВОЗМОЖНОСТЯМИ ЗДОРОВЬЯ

Освоение дисциплины инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья осуществляется с использованием специальных технических средств и информационных технологий, предоставляемых Ресурсным учебно-методическим центром по обучению инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья ЧелГУ по запросу обучающегося (мобильные специальные технические средства для лиц с нарушениями зрения и с нарушением слуха, ассистивные информационные технологии).

При необходимости для обучающихся с нарушениями зрения на рабочих местах для проведения практических или лабораторных занятий устанавливается специальное программное обеспечение (программа речевой навигации, речевые синтезаторы, экранные лупы).

В учебные аудитории обеспечивается беспрепятственный доступ для обучающихся с инвалидностью и с ограниченными возможностями здоровья. В каждой аудитории, где обучаются инвалиды и лица с ограниченными возможностями здоровья, предусматривается соответствующее количество мест для обучающихся с учетом нарушений их здоровья.

Для освоения дисциплины инвалидам и лицам с ограниченными возможностями здоровья предоставляется доступ к печатным источникам, имеющимся в научной библиотеке ЧелГУ, с помощью специальных технических средств; доступ с помощью специальных технических и программных средств к электронным источникам, представленным в форме электронного документа в фонде научной библиотеки ЧелГУ или электронно-библиотечных системах.

Учебно-методические материалы для обучающихся из числа инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья предоставляются в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и особенностям восприятия информации.

Для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья освоение дисциплины может быть частично или полностью осуществлено с использованием дистанционных образовательных технологий.

При проведении промежуточной аттестации по дисциплине обучающимся с инвалидностью и с ограниченными возможностями здоровья обеспечивается по их заявлению предоставление в доступной форме в зависимости от их индивидуальных особенностей инструкции о порядке проведения промежуточной аттестации, оценочных средств и возможности ответов на задания (письменно на бумаге, набор ответов на компьютере, письменно шрифтом Брайля, с использованием услуг ассистента, устно).

При проведении процедуры оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья предусматривается использование предоставленных ЧелГУ или собственных технических средств, необходимых им в связи с их индивидуальными особенностями. При необходимости инвалидам и лицам с ограниченными возможностями здоровья предоставляется дополнительное время для подготовки ответа на задания, процедура оценивания результатов обучения по дисциплине может проводиться в несколько этапов.



WORKING PROGRAM OF THE COURSE (MODULE)*

Special Functions

Scientific specialty

01.04.01 Mathematics

Direction

Fractional Differential Equations

Degree

Master’s

Mode of study

Full-time

Enrollment Year 2026

* The work program of the course (module) is adapted for inclusive education of disabled people and people with disabilities

Chelyabinsk, 2026



Table of Contents

1. Goals of mastering the course
2. Place of the course in the structure of the educational program
3. Competencies of the student, formed as a result of mastering the course (module)
4. Scope of the course (module)
5. Structure and content of the course (module)
6. Fund of assessment means
 - 6.1 List of types of assessment tools
 - 6.2 Typical control tasks and other materials for current certification
 - 6.3. Typical control questions and assignments for interim certification
 - 6.4. Evaluation Criteria
7. Educational, methodical and informational support of the course (module)
 - 7.1 Recommended literature
 - 7.2 List of resources of information and telecommunication network “Internet”
 - 7.3. List of information technologies
8. Material and technical support of the course (module)
9. Methodical instructions for students to master the course (module)
10. Special conditions for mastering the course of students with disabilities and disabilities



1. GOALS OF MASTERING THE COURSE

The purpose of the Special Functions course is to study the fundamental properties, analysis methods, and applications of the most important special functions used in mathematical physics, differential equations, probability theory, and other fields of science and technology. The course aims to provide students with a deep understanding of the role of special functions as a tool for solving complex mathematical problems and modeling various processes and phenomena.

The goals of the course include:

- Introduction to the basic definitions and properties of special functions: The study of gamma functions, beta functions, hypergeometric functions, Bessel, Legendre, Mittag-Leffler functions, elliptic functions and integrals, as well as other classes of special functions.
- Mastering the methods of special function analysis: The study of asymptotic expansions, integral representations, recurrence relations, derivatives and integrals, as well as other analysis methods applicable to various classes of special functions.
- The study of the relationships between special functions: The study of the relationships and representations of some special functions through others, as well as understanding the general principles of their classification.
- Formation of skills in using special functions to solve mathematical and physical problems: Consideration of examples of solving differential equations, integral equations, problems of mathematical physics, probability theory and other problems using special functions.
- Exploring applications of special functions in various fields: Consideration of examples of modeling processes in physics (theory of vibrations, wave propagation, thermal conductivity), mechanics (problems of elasticity and plasticity theory), electrical engineering (circuit theory), quantum mechanics, statistics and other fields using special functions.
- Developing the ability to analyze and interpret solutions obtained using special functions: Studying the behavior of special functions at various parameter values, their asymptotic properties and features, as well as interpreting the results obtained in terms of simulated processes.
- Creating a holistic picture of existing mathematical methods and concepts related to special functions: Formation of understanding about the role of special functions as a powerful tool for mathematical analysis and modeling.
- Developing the skills of independent study of modern scientific literature: Preparing students for independent research of new special functions and their applications, as well as for participation in scientific projects.

The results of training in the course are aimed at achieving the following indicators:

PC-1.1 Demonstrates knowledge of the basic theoretical principles and methods in the field of scientific research

PC-1.2. Demonstrates the ability to collect and analyze information on the subject of ongoing research

PC-1.3. Has practical experience in establishing new facts and patterns in the field of scientific research

2. PLACE OF THE COURSE IN THE STRUCTURE OF THE EDUCATIONAL PROGRAM

Cycle (section) curriculum: OC.V.01

2.1 Requirements for the student's pre-training:

To successfully master the discipline, knowledge of the disciplines "Mathematical Analysis", "Linear Algebra", "Differential equations", "Functional Analysis", "Complex Analysis" is required. And also

To successfully master the discipline, knowledge of the disciplines "Mathematical Analysis", "Linear Algebra", "Differential

2.2 Courses and practices for which the development of this course (module) is necessary as a precursor:

Knowledge of this course can be useful for students' research work.

Fractional Integro-Differential Calculus

Methods for Solving Fractional Differential Equations



Work program of the course (module) "Special Functions" in the scientific specialty 01.04.01 "Mathematics" direction "Fractional Differential Equations" FSBEI HE "CSU"	pp. 4
Partial differential equations of the first order	
Degenerate Evolution Equations in Banach Spaces	
Nonlinear Partial Differential Equations	
Numerical Methods for Solving Fractional Differential Equations	

3. COMPETENCIES OF THE STUDENT, FORMED AS A RESULT OF MASTERING THE COURSE (MODULE)

PC-1: Able to carry out research work in the field of differential equations

Know:
the main theoretical provisions, properties and methods of analysis of special functions necessary for solving mathematical and applied problems.
Be able to:
Collect, analyze, and critically evaluate information on the subject of special functions, including their theoretical foundations, properties, and applications in various fields of science and technology.
Possess:
skills in applying special functions to construct, solve, and analyze mathematical models describing processes and phenomena in various fields, as well as to establish new facts and patterns.

As a result of mastering the course, the student must

3.1 Know:
3.1.1 the main theoretical provisions, properties and methods of analysis of special functions necessary for solving mathematical and applied problems.
3.2 Be able to:
3.2.1 Collect, analyze, and critically evaluate information on the subject of special functions, including their theoretical foundations, properties, and applications in various fields of science and technology.
3.3 Possess:
3.3.1 skills in applying special functions to construct, solve, and analyze mathematical models describing processes and phenomena in various fields, as well as to establish new facts and patterns.

4. SCOPE OF THE COURSE (MODULE)

Total labor intensity	1 Credits
Curriculum hours : 36 including: classroom training: 16 independent work: 19,8 : кон contact work: 16,2 OCW: 0,2	Types of control in semesters: credits 2

5. STRUCTURE AND CONTENT OF THE COURSE (MODULE)

Class code	Name of sections and topics /type of lesson/	Semester / Course	Hours	Literature
	Section 1. Special functions			
1.1	An introduction to special functions. Overview of the main functions /Pr/	2	1	L1.1 L1.2 L2.1 L2.2 L2.3 W1 W2 W3



Work program of the course (module) "Special Functions" in the scientific specialty 01.04.01 "Mathematics" direction "Fractional Differential Equations" FSBEI HE "CSU"				pp. 5
1.2	Gamma function: asymptotics, integral representations, relation with factorial /Pr/	2	1	L1.1 L1.2 L2.1 L2.2 L2.3 W1 W2 W3
1.3	Beta function: definition, properties, integral representations /Pr/	2	1	L1.1 L1.2 L2.1 L2.2 L2.3 W1 W2 W3
1.4	Application of gamma and beta functions in fractional calculus problems /Pr/	2	1	L1.1 L1.2 L2.1 L2.2 L2.3 W1 W2 W3
1.5	Hypergeometric function: definition, properties, row representation /Pr/	2	1	L1.1 L1.2 L2.1 L2.2 L2.3 W1 W2 W3
1.6	A degenerate hypergeometric function. Confluent hypergeometric function /Pr/	2	1	L1.1 L1.2 L2.1 L2.2 L2.3 W1 W2 W3
1.7	The relationship of hypergeometric functions with other special functions / Pr/	2	1	L1.1 L1.2 L2.1 L2.2 L2.3 W1 W2 W3
1.8	Mittag-Leffler functions: definition, properties, integral representations/Pr/	2	2	L1.1 L1.2 L2.1 L2.2 L2.3 W1 W2 W3
1.9	Generalized Mittag-Leffler functions /Pr/	2	1	L1.1 L1.2 L2.1 L2.2 L2.3 W1 W2 W3
1.10	The relationship of Mittag-Leffler functions with fractional derivatives and integrals/Pr/	2	1	L1.1 L1.2 L2.1 L2.2 L2.3 W1 W2 W3
1.11	Application of Mittag-Leffler functions in fractional order models /Pr/	2	1	L1.1 L1.2 L2.1 L2.2 L2.3 W1 W2 W3
1.12	Bessel functions: definition, properties, integral representations / Pr/	2	1	L1.1 L1.2 L2.1 L2.2 L2.3 W1 W2 W3
1.13	Legendre functions: definition, properties, relation to orthogonal polynomials /Pr/	2	1	L1.1 L1.2 L2.1 L2.2 L2.3 W1 W2 W3
1.14	The connection of special functions and the Laplace transform/Pr/	2	1	L1.1 L1.2 L2.1 L2.2 L2.3 W1 W2 W3
1.15	Overview and application of special functions in various applications /Pr/	2	1	L1.1 L1.2 L2.1 L2.2 L2.3 W1 W2 W3
1.16	Doing homework, preparing for exams. Preparation for the credit. /IndW/	2	18,8	L1.1 L1.2 L2.1 L2.2 L2.3
Section 2. Other contact work				
2.1	Individual consultations, ongoing monitoring /OCW/	2	0,2	L1.1 L1.2 L2.1 L2.2 L2.3

6. FUND OF ASSESSMENT MEANS

6.1. List of types of assessment tools

1. Report
2. Questions for credit

6.2. Typical control tasks and other materials for current certification

Topics of the reports:

1. Gamma function: various definitions and integral representations, their equivalence and applications.



- (In-depth analysis of various definitions and representations of the gamma function, their interrelation, application in fractional calculus.)
2. The beta function and its relation to the gamma function. Applications in the theory of fractional calculus. (Detailed consideration of the properties of the beta function, its relation to the gamma function, and the use of fractional derivatives and integrals in calculations.)
 3. Hypergeometric functions and their special cases: properties, asymptotics, applications. (An overview of various types of hypergeometric functions, their properties and representations, and their application in solving differential equations.)
 4. Degenerate hypergeometric functions: properties, representation, application in models with fractional derivatives. (Analysis of degenerate hypergeometric functions, their connections with other special functions and their application in fractional differential equations.)
 5. Mittag-Leffler functions: various generalizations, properties and applications in the theory of fractional differential equations. (A detailed study of generalizations of the Mittag-Leffler function, their properties and their role in solving fractional differential equations.)
 6. Special functions and Laplace transform: interrelation and application for solving fractional differential equations. (Analysis of the use of the Laplace transform to solve problems related to special functions and fractional equations.)
 7. The Frobenius method and its application to find solutions to differential equations expressed in terms of special functions. (The study of the Frobenius method and its application to finding solutions using series expressed in terms of special functions.)
 8. Integral representations of special functions and their application in the analysis of fractional operators. (Detailed analysis of integral representations of special functions and their relation to integral transformations and fractional operators.)
 9. Application of gamma and beta functions in the calculation of fractional integrals and derivatives, examples and analysis. (Consider examples of using gamma and beta functions to calculate fractional derivatives and integrals.)
 10. Solving fractional differential equations using Mittag-Leffler functions. (Analysis of the application of the Mittag-Leffler function to solve various classes of fractional differential equations.)
 11. Simulation of anomalous diffusion using fractional operators and special functions. (Investigation of anomalous diffusion models using fractional derivatives and analysis of solutions using special functions.)
 12. Fractional calculus and viscoelasticity: the use of special functions for modeling rheological properties of materials. (Application of fractional calculus and special functions for modeling viscoelastic behavior of materials.)
 13. Application of special functions for solving fractional integral equations. (Study of methods for solving integral equations with fractional operators and the use of special functions.)
 14. Special functions in fractional control systems. (Consideration of the application of special functions for the analysis and synthesis of fractional control systems.)
 15. Special functions in fractional dynamics problems. (Analysis of the application of special functions in problems of modeling mechanical systems with fractional derivatives.)
 16. Generalized special functions: definition, properties, applications in fractional calculus. (Study of generalized special functions and their role in the theory of fractional operators.)
 17. Numerical methods for calculating special functions for fractional calculus problems.
 18. The connection of special functions with the theory of orthogonal polynomials and their application in approximate methods of solving fractional equations. (Study of the relationship of special functions with orthogonal polynomials and their application in numerical methods for solving fractional equations.)
 19. Special functions in multidimensional fractional calculus and their application in modeling multidimensional processes. (Analysis of multidimensional fractional operators and the use of special functions to study them.)
 20. Modern research and new directions in the field of application of special functions for fractional differential equations. (An overview of recent scientific achievements and promising areas of research in the field of application of special functions for fractional equations.)

6.3. Typical control questions and assignments for interim certification

Questions for the credit:

1. Overview of the main special functions (gamma, beta, hypergeometric, Bessel, Legendre, Mittag-Leffler functions).
2. Historical aspects and areas of application.
3. Introduction to the gamma function: definition, properties, analytical continuation.
4. Asymptotic decompositions of the gamma function (Stirling formula).



5. Integral representations of the gamma function (Euler integral of the second kind).
6. The relation of the gamma function to the factorial and generalized factorial.
7. Definition of the beta function (Euler integral of the first kind).
8. Properties of the beta function: symmetry, relation to the gamma function.
9. Integral representations of the beta function.
10. Calculation of fractional derivatives and integrals of simple functions using the gamma function.
11. The relation of the beta function to generalized integrals.
12. Examples of the use of gamma and beta functions in solving integral equations.
13. Definition of the Mittag-Leffler function.
14. Properties of the Mittag-Leffler function.
15. Integral representations.
16. Generalizations of the Mittag-Leffler function: two-parameter, multiparametric.
17. Properties of generalized Mittag-Leffler functions.
18. Representation of solutions of fractional differential equations using Mittag-Leffler functions.
19. The use of Mittag-Leffler functions in models of anomalous diffusion, viscoelasticity and other processes.
20. Application of the Laplace transform to solving equations with special functions.

6.4. Evaluation criteria

Scoring criterion:

The duration of the credit is 90 minutes. The student can receive from 1 to 3 points for each completed task of the ticket. If the task is performed correctly, it is evaluated with 3 points. If the task is performed with mistakes, the points are reduced depending on the number of mistakes made. If one mistake is made, the building is evaluated with 2 points, if two mistakes are made, the building is evaluated with 1 point. If more than two mistakes are made in a task or the student has not completed any task from the ticket, he/she receives 0 points for it. The maximum number of points for credit is 6.

When summarizing the results, the results of current attestation are taken into account. The points received for the current certification are summarized with the points received for each stage during the intermediate certification:

A grade of “fail” is awarded for 19 or fewer points;

A grade of “pass” is awarded for 20 or more points:

20-26 points (level 1);

27-30 points (level 2);

31-36 points (level 3).

Description of indicators and criteria for assessing competencies for the report:

There are 3 reports in the semester. 15-20 minutes are allocated for the report at the end of the pair (each pair 1 report). Each student prepares a report on one of the proposed topics. The maximum number of points for the reports is 30.

The grade “pass” is given for 20-30 points, “fail” - less than 20 points.

The completeness of the report is evaluated by the following criteria:

1. Completeness of presentation of theoretical material
2. Sufficient number of examples to the theoretical material
3. Examples are given for definitions and theorems
4. Counterexamples are given to show under what conditions the theorems do not apply.

7. EDUCATIONAL, METHODOLOGICAL AND INFORMATIONAL SUPPORT OF THE COURSE

7.1. Recommended literature

7.1.1. Basic literature

	Authors, compilers	Title	Publisher, year	Resource
L1.1	Dunaev A. S., Shlychkov V. I.	Special functions in Parts 2 Part 1: Handbook for universities (https://urait.ru/bcode/538968)	Moscow : Yurait, 2024	ELS
L1.2	Dunaev A. S., Shlychkov V. I.	Special functions in Parts 2 Part 1: Handbook for universities (https://urait.ru/bcode/538968)	Moscow : Yurait, 2024	ELS

7.1.2. Further reading

	Authors, compilers	Title	Publisher, year	Resource
L2.1	Arsenin V. Ya.	Mathematical physics methods and special functions: a textbook for university students	Moscow : Nauka Publ., 1984	



	Authors, compilers	Title	Publisher, year	Resource
L2.2	Zorich V. A.	Mathematical analysis. Part 1: textbook	Moscow : Nauka Publ., 1981	
L2.3	Zorich V. A.	Mathematical analysis. Part 2: [textbook for universities specializing in Mathematics and Mechanics]	Moscow : Nauka Publ., 1984	

7.2. List of resources of the information and telecommunication network “Internet”

W1	eLIBRARY.RU [Electronic resource] : electronic library / Scientific Electronic Library - URL: http://elibrary.ru/defaultx.asp
W2	Russian Foundation for Basic Research (RFBR) - official website http://www.rfbr.ru/rffi/ru
W3	Scientific electronic library. Monographs published in the publishing house of the Russian Academy of Natural Sciences full-text resource of scientific and educational publications RAE https://www.monographies.ru/

7.3 List of information technologies

7.3.1 Software

LMS Moodle

Adobe Reader

7.3.2 Professional databases and reference systems

1. Web of Science (<https://apps.webofknowledge.com>) Web of Science : multidisciplinary abstract database / Thomson Reuters Company. - Access mode: for registered users of CSU. - Text : electronic.

2. SpringerLink International Abstract Database of Scientific Publications (<https://www.springer.com>)

8. MATERIAL AND TECHNICAL SUPPORT OF THE COURSE (MODULE)

For the realization of the course are used classrooms for seminars, group and individual consultations, current control and interim certification, as well as rooms for independent work.

The classrooms are equipped with specialized furniture and technical means of education: blackboard, desks, multimedia and audio equipment.

For seminars, classrooms equipped with a blackboard, desks, portable multimedia and audio equipment (if necessary) are used.

The rooms for independent work of students are equipped with computer equipment with Internet connection and access to the electronic information and educational environment of the University.

9. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Seminar (practical) classes and independent work of the student are used in the study of this course. At practical classes the main content of the program topics is presented, the main methods and approaches are considered.

For the most effective study of the course the student is recommended:

- attend classes, briefly and thoughtfully outline the material, indicating the date of the class and the topic;
- independently study the material both after each lesson and at the end of the topic, which allows you to link the information received and make a complete picture.

In the case of application of e-learning, distance learning technologies in teaching the course, communication between students and teacher is carried out in real time (online lectures (webinars), chats, video conferences, etc.) or delayed time (distance learning system Moodle, forums, e-mail, etc.).

Most of the time students work independently with teaching and learning materials. Students have the opportunity to consult with the instructor on all issues arising in the course of independent work through e-mail, social networks, etc.

Access of the student to learning resources in the mode of deferred time, independent work is carried out through the Internet at a convenient place, time and pace.

When training persons with disabilities, e-learning, distance education technologies provide for the possibility of receiving and transmitting information in accessible forms.



Implementation of the course with the use of e-learning, distance education technologies (hereinafter - EE, DOT) is carried out on the basis of the "Regulations on the implementation of basic and additional educational programs with the use of e-learning and distance education technologies in the federal state budgetary educational institution of higher education 'Chelyabinsk State University', "Regulations on the procedure for crediting students on basic professional educational programs of higher education In exceptional cases (force majeure, etc.) in the implementation of educational activities with the use of E-Learning, DOT may apply components that are not included in the list of electronic information and educational environment.

10. SPECIAL CONDITIONS FOR MASTERING THE COURSE OF STUDENTS WITH DISABILITIES AND DISABILITIES

The mastering of the course by disabled persons and persons with disabilities is carried out with the use of special technical means and holo-information technologies provided by the Resource Educational and Methodological Center for Education of Disabled Persons and Persons with Disabilities of CSU at the request of the student.

1. Mobile special technical means for persons with visual impairments: portable computer with Braille input/output with speech synthesizer "EIBraile-W14J G2"; laptops with NVDA screen access software; electronic magnifiers for remote viewing; portable video magnifiers; tiflo player; digital dictaphones.

2. Mobile special technical means for persons with hearing impairments: free sound field system with built-in compatibility with FM devices; radio class "Sonet-RSM" with transmitter, behind-the-ear inductor and induction loop; information system for the hearing impaired portable "Istok" A2 with built-in player - sound informer; document camera; programmable hearing aids for individual use.

3. assistive information technologies: screen access software with speech synthesis NVDA; screen magnification programs; speech synthesis programs for computers and laptops; speech synthesis programs for mobile devices; on-screen keyboard; screen magnifier.

If necessary, special software (NVDA speech navigation program, speech synthesizers, screen magnifiers) is installed at workplaces for practical or laboratory classes for students with visual impairments.

Unimpeded access to classrooms is provided for students with disabilities and students with disabilities. In each classroom, where students with disabilities and persons with disabilities, provides an appropriate number of seats for students, taking into account their health problems.

To master the course, disabled people and persons with disabilities are provided with access to printed sources available in the CSU scientific library, with the help of special technical means; access to electronic sources, presented in the form of electronic documents in the collection of the CSU scientific library or electronic library systems, with the help of special hardware and software (workstation for blind users with screen access software with speech synthesis NVDA, workstation with computerized

Educational and methodical materials for students with disabilities and persons with disabilities are provided in forms adapted to the limitations of their health and perception of information:

For persons with visual impairments:

- in printed form in enlarged font,
- in the form of an electronic document,
- in the form of an audio file,
- in printed form in Braille.

For persons with hearing impairments:

- in printed form,
- in the form of an electronic document.

For persons with mobility impairments:

- In printed form,
- in the form of an electronic document,
- in the form of an audio file.

This list can be specified depending on the contingent of students.

For persons with disabilities and persons with disabilities mastering the course can be partially or fully implemented using distance education technologies (Moodle, Adobe Connect Pro, etc.).

In the mastering of the course by disabled people and persons with disabilities is used individual work. Individual work means two forms of interaction with the teacher: individual training work (consultations), i.e. additional explanation of the educational material and in-depth study of the material with those students who are interested in it, and individual educational work. Individual consultations are aimed at individualizing learning and establishing educational contact between the teacher and a disabled student or a student with disabilities.

When conducting the procedure for assessing the learning outcomes of disabled people and persons with disabilities in the course provides the following additional requirements depending on the individual characteristics of students:



a) instruction on the order of the assessment procedure is provided in an accessible form (orally, in written form, in written form in Braille, orally with the use of sign language interpreter);

b) accessible form of providing assessment tasks (in printed form, in printed form in enlarged font, in printed form in Braille, in the form of an electronic document, tasks are read out by an assistant, tasks are provided with the use of sign language interpreter);

c) an accessible form of providing answers to tasks (in writing on paper, typing answers on a computer, in writing in Braille, using the services of an assistant, orally).

When conducting the procedure for evaluating the learning outcomes of persons with disabilities and persons with disabilities, the use of technical means necessary for them due to their individual characteristics is envisaged. These means may be provided by CSU or the university's own technical means may be used. If necessary, persons with disabilities and persons with disabilities are given additional time to prepare an answer to the tasks, the procedure of assessment of learning outcomes in the course can be conducted in several stages.

The procedure of assessment of learning outcomes for persons with disabilities and persons with disabilities is allowed using distance learning technologies.

