

Документ подписан простой электронной подписью Информация о владельце: ФИО: Гаскаев Сергей Валерьевич Должность: Ректор	МИНОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИИ Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Челябинский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ЧелГУ»)	
Дата подписания: 08.04.2026 15:40:42 Уникальный программный ключ: 04c19ed8bfb98f3b6cb77a486b9a8788b8727273	Рабочая программа дисциплины "Гладкие многообразия" по направлению подготовки (специальности) 02.03.01 Математика и компьютерные науки направленности (профилю) Математические и компьютерные методы в фундаментальных и прикладных исследованиях ФГБОУ ВО «ЧелГУ»	стр. 1

Рабочая программа дисциплины (модуля)*

Гладкие многообразия

Направление подготовки (специальность)

02.03.01 Математика и компьютерные науки

Направленность (профиль)

Математические и компьютерные методы в фундаментальных и прикладных исследованиях

Присваиваемая квалификация (степень)

бакалавр

Форма обучения

очная

Год(ы) набора 2026

*Рабочая программа дисциплины (модуля) адаптирована для инклюзивного обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья

Челябинск 2026 г.



Содержание

1. Цели освоения дисциплины
2. Место дисциплины в структуре ОПОП
3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины (модуля)
4. Объем дисциплины (модуля)
5. Структура и содержание дисциплины (модуля)
6. Фонд оценочных средств
 - 6.1. Перечень видов оценочных средств
 - 6.2. Типовые контрольные задания и иные материалы для текущей аттестации
 - 6.3. Типовые контрольные вопросы и задания для промежуточной аттестации
 - 6.4. Критерии оценивания
7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)
 - 7.1. Рекомендуемая литература
 - 7.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет"
 - 7.3. Перечень информационных технологий
8. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)
9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)
10. Специальные условия освоения дисциплины обучающимися с инвалидностью и ограниченными возможностями здоровья



1. ЦЕЛИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Целью преподавания дисциплины является знакомство с основными понятиями и методами теории римановых многообразий. Формирование у студентов логического мышления, навыков в умении использовать методы теории римановых многообразий при решении прикладных задач, связанных с реализацией профессиональных функций.

Результаты обучения по дисциплине направлены на достижение индикаторов, соответствующих компетенции ОПК-1:

ОПК-1.1. Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук

ОПК-1.2. Демонстрирует умения решать типовые задачи, формулируемые в рамках математических и (или) естественных наук

ОПК-1.3. Имеет навыки использования основных понятий, теорем, законов математики и (или) естественных наук для решения задач профессиональной деятельности

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОПОП

Цикл (раздел) ОПОП: Б1.О.23

2.1 Требования к предварительной подготовке обучающегося:

Изучение данной дисциплины требует предварительных знаний по дисциплинам:

Дифференциальная геометрия

Топология

Математический анализ

Дифференциальные уравнения

2.2 Дисциплины и практики, для которых освоение данной дисциплины (модуля) необходимо как предшествующее:

Знания по дисциплине могут быть полезны для научно-исследовательской работы бакалавров и написания выпускной квалификационной работы. Данная дисциплина является предшествующей для дисциплин:

Вычислительная топология

Гиперболическая геометрия

Теория сложности геометрических объектов (научный семинар)

3. КОМПЕТЕНЦИИ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

ОПК-1: Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности

Знать:

Для достижения ОПК-1.1: базовые понятия, полученные в области теории гладких многообразий

Уметь:

Для достижения ОПК-1.2: решать типовые задачи, формулируемые в рамках теории гладких многообразий

Владеть:

Для достижения ОПК-1.3: навыками использования основных понятий, теорем, законов теории гладких многообразий для решения задач профессиональной деятельности

В результате освоения дисциплины обучающийся должен

3.1 Знать:

3.1.1 способы использования фундаментальных знаний в области гладких многообразий в профессиональной деятельности

3.2 Уметь:



Рабочая программа дисциплины "Гладкие многообразия" по направлению подготовки (специальности)
02.03.01 "Математика и компьютерные науки" направленности (профилю) Математические и компьютерные
методы в фундаментальных и прикладных исследованиях ФГБОУ ВО «ЧелГУ»

стр. 4

3.2.1 использовать фундаментальные знания в области гладких многообразий в профессиональной деятельности

3.3 Владеть:

3.3.1 использования фундаментальных знаний в области гладких многообразий в профессиональной деятельности

4. ОБЪЕМ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Общая трудоемкость		3 ЗЕТ
Часов по учебному плану	: 108	Виды контроля в семестрах: зачеты 6
в том числе	:	
аудиторные занятия	: 64	
самостоятельная работа	: 43,8	
:	:	
контактная работа:	64,2	
ИКР:	0,2	

5. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Код занятия	Наименование разделов и тем /вид занятия/	Семестр / Курс	Часов	Литература
Раздел 1. Гладкие многообразия				
1.1	N-мерные многообразия /Лек/	6	4	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Л2.3
1.2	Касательное пространство /Лек/	6	4	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Л2.3
1.3	Кокасательное пространство /Лек/	6	4	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Л2.3
1.4	Полилинейные функции /Лек/	6	4	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Л2.3
1.5	N-мерные многообразия /Пр/	6	2	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Л2.3
1.6	N-мерные многообразия /Пр/	6	2	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Л2.3
1.7	Касательное пространство /Пр/	6	2	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Л2.3
1.8	Касательное пространство /Пр/	6	2	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Л2.3
1.9	Касательное пространство /Пр/	6	2	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Л2.3
1.10	Кокасательное пространство /Пр/	6	2	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Л2.3
1.11	Гладкие многообразия /Ср/	6	20	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Л2.3
Раздел 2. Тензорное исчисление				



Рабочая программа дисциплины "Гладкие многообразия" по направлению подготовки (специальности)
02.03.01 "Математика и компьютерные науки" направленности (профилю) Математические и компьютерные
методы в фундаментальных и прикладных исследованиях ФГБОУ ВО «ЧелГУ»

стр. 5

2.1	Тензоры /Лек/	6	4	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Л2.3
2.2	Операции над тензорами /Лек/	6	4	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Л2.3
2.3	Пространство тензоров /Лек/	6	4	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Л2.3
2.4	Тензорные поля /Лек/	6	2	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Л2.3
2.5	Ковариантное дифференцирование /Лек/	6	2	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Л2.3
2.6	Тензоры /Пр/	6	2	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Л2.3
2.7	Операции над тензорами /Пр/	6	2	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Л2.3
2.8	Операции над тензорами /Пр/	6	2	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Л2.3
2.9	Пространство тензоров /Пр/	6	2	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Л2.3
2.10	Пространство тензоров /Пр/	6	2	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Л2.3
2.11	Тензорные поля /Пр/	6	2	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Л2.3
2.12	Тензорные поля /Пр/	6	2	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Л2.3
2.13	Ковариантное дифференцирование /Пр/	6	2	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Л2.3
2.14	Ковариантное дифференцирование /Пр/	6	2	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Л2.3
2.15	Контрольная работа /Пр/	6	2	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Л2.3
2.16	Тензорное исчисление /Ср/	6	23,8	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Л2.3
Раздел 3. Иная контактная работа				
3.1	Индивидуальные консультации, текущий контроль /ИКР/	6	0,2	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Л2.3

6. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

6.1. Перечень видов оценочных средств



Опрос по теме «Гладкие многообразия»
Опрос по теме «Тензорное исчисление»
Итоговая контрольная работа

6.2. Типовые контрольные задания и иные материалы для текущей аттестации

Пример итоговой контрольной работы:

Для тензора $T = e_1 e^2 e^1 + e_1 e^1 e^2 + e_2 e^2 e^1 + e_2 e^1 e^2$, заданного в базисах $\{e_1, e_2\}$ касательного пространства $T_p M$ и $\{e^1, e^2\}$ кокасательного пространства, найти:

Значение $T(w, x_1, x_2)$, если $w = e^1 + 2e^2$, $x_1 = 2e_1 + e_2$, $x_2 = e_1 + e_2$.

Тензор, который получается в результате альтернирования тензора T .

Координаты тензора T в базисах $\{e_{1'}, e_{2'}\}$ и $\{e^{1'}, e^{2'}\}$, если $e_{1'} = e_1 + e_2$, $e_{2'} = 2e_1 + e_2$.

6.3. Типовые контрольные вопросы и задания для промежуточной аттестации

Вопросы для опросов:

1. Определение n -мерного многообразия
2. Функция перехода от одной карты к другой
3. Определение гладкого многообразия
4. Определение локальных координат на карте
5. Определение гладкой кривой
6. Определение касательного вектора
7. Теорема о связи координат касательного вектора в разных локальных системах координат
8. Определение касательного пространства
9. Определение ковектора
10. Определение координат ковектора в локальной системе координат
11. Понятие тензора
12. Определение равенства тензоров
13. Определение линейной комбинации тензоров
14. Определение операции умножения тензоров
15. Определение операции транспонирования тензора с помощью перестановки
16. Определение операции альтернирования тензора
17. Теорема о размерности пространства кососимметрических тензоров
18. Определение операции внешнего произведения тензоров
19. Определение операции опускания верхнего индекса тензора

6.4. Критерии оценивания

Балльно-рейтинговая система оценки знаний студента по дисциплине выстраивается на основе балловой оценки различных форм деятельности студентов. Промежуточный контроль осуществляется в форме опросов по каждому разделу и итоговой контрольной работы.

Описание показателей и критериев оценивания компетенций для опросов и контрольной работы:

Опрос по теме «Гладкие многообразия» - 20 баллов

Опрос по теме «Тензорное исчисление» - 20 баллов

Итоговая контрольная работа - 60 баллов

Итоговая оценка выставляется по балльной системе. Суммируются баллы, полученные за опросы и контрольную работу. Итоговая оценка выставляется по 100-балльной шкале, исходя из полученной суммы баллов:

- от 0 до 49 баллов – «не зачтено»;
- от 50 до 100 баллов – «зачтено».

7. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

7.1. Рекомендуемая литература

7.1.1. Основная литература

	Авторы,	Заглавие	Издательство,	Ресурс
Л1.1	Киреев И. В., Кнауб Л. В., Левчук Д. В., Нужин Я. Н.	Тензорный анализ и дифференциальная геометрия: учебное пособие (https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=497726)	Красноярск : Сибирский федеральный университет (СФУ), 2017	ЭБС



	Авторы,	Заглавие	Издательство,	Ресурс
Л1.2	Кораблёв Ф. Г.	Тензорные поля на гладких многообразиях: учебное пособие (https://library.csu.ru/rbooks2/view2?code=local/007886/007886)	Челябинск : Издательство Челябинского государственног о университета, 2022	ЭБС
Л1.3	Горлач Б. А.	Тензорная алгебра и тензорный анализ (https://e.lanbook.com/book/211781)	Санкт- Петербург : Лань, 2022	ЭБС

7.1.2. Дополнительная литература

	Авторы,	Заглавие	Издательство,	Ресурс
Л2.1	Быков В. М.	Дифференциальная геометрия: текст лекций	Челябинск : Челябинский государственны й университет, 1993	
Л2.2	Фоменко А. Т.	Дифференциальная геометрия и топология: дополнительные главы	Москва : Издательство Московского государственног о университета, 1983	
Л2.3	Дегтярева О. М., Хузиахметова Р. Н., Хузиахметова А. Р., Емелина И. Д.	Элементы тензорного исчисления: учебное пособие (https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=500689)	Казань : Казанский национальный исследовательск ий технологически й университет (КНИТУ), 2018	ЭБС

7.3 Перечень информационных технологий

7.3.1 Программное обеспечение

LMS Moodle

7.3.2 Профессиональные базы данных и информационно-справочные системы

1. Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU (<https://elibrary.ru/defaultx.asp?>) eLIBRARY.RU : научная электронная библиотека : сайт. – Москва, 2000 – . – URL: <https://elibrary.ru>. – Режим доступа: для зарегистрир. пользователей. – Текст : электронный.

2. Реферативная база по математике MathSciNet (<https://mathscinet.ams.org/mathscinet/>) Mathematical Reviews (MR) : реферативная база данных / American Mathematical Society. – URL: <http://www.ams.org/mathscinet/>. – Яз. рус., англ. – Режим доступа: для зарегистрир. пользователей ЧелГУ. – Текст : электронный.

3. Web of Science (<https://apps.webofknowledge.com>) Web of Science : мультидисциплинарная реферативная база данных / компания Thomson Reuters. – Режим доступа: для зарегистрир. пользователей ЧелГУ. – Текст : электронный.

4. Scopus (<https://www.scopus.com>) Scopus : реферативная база данных / Elsevier BV. – URL: <http://www.scopus.com/>. – Яз. англ. – Режим доступа: для зарегистрир. пользователей ЧелГУ. – Текст : электронный.

8. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Для реализации дисциплины используются учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, а также помещения для самостоятельной работы.

Учебные аудитории укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения (мультимедийное устройство, проектор, ноутбук или стационарный компьютер).

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с подключением к сети "Интернет" и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду университета.



9. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

При изучении данной дисциплины используются лекции, практические (семинарские) занятия и самостоятельная работа студента. На лекциях и семинарских занятиях излагается основное содержание тем программы, рассматриваются основные методы и приёмы решения задач.

Для наиболее эффективного изучения дисциплины обучающемуся рекомендуется:

- посещать лекционные занятия, кратко и вдумчиво конспектировать материал лекции, с указанием даты проведения лекции и темы;
- посещать практические (семинарские) занятия, на которых рассматриваются основные методы и приёмы решения задач. Рекомендуется перед каждым практическим занятием выполнить домашнее задание, что позволит лучше усвоить предыдущий материал, и изучить лекционный материал по предстоящей теме;
- самостоятельно прорабатывать материал как после каждого занятия, так и по завершению темы, что позволяет связать воедино полученные сведения и составить цельную картину.

При обучении лиц с ограниченными возможностями здоровья электронное обучение, дистанционные образовательные технологии предусматривают возможность приема-передачи информации в доступных для них формах.

Реализация дисциплины с применением электронного обучения, дистанционных образовательных технологий (далее – ЭО, ДОТ) осуществляется на основании «Положения о реализации основных и дополнительных образовательных программ с применением электронного обучения и дистанционных образовательных технологий в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Челябинский государственный университет», «Положения о порядке зачета обучающимся по основным профессиональным образовательным программам высшего образования в ФГБОУ ВО «ЧелГУ» результатов освоения в организациях, осуществляющих образовательную деятельность, учебных предметов, курсов, дисциплин (модулей), практик, дополнительных образовательных программ» посредством электронной информационно-образовательной среды ФГБОУ ВО «ЧелГУ». В исключительных случаях (форс-мажор и т.п.) при реализации образовательной деятельности с применением ЭО, ДОТ могут применять компоненты, не входящие в перечень электронной информационно-образовательной среды.

10. СПЕЦИАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ ОБУЧАЮЩИМИСЯ С ИНВАЛИДНОСТЬЮ И ОГРАНИЧЕННЫМИ ВОЗМОЖНОСТЯМИ ЗДОРОВЬЯ

Освоение дисциплины инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья осуществляется с использованием специальных технических средств и информационных технологий, предоставляемых Ресурсным учебно-методическим центром по обучению инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья ЧелГУ по запросу обучающегося (мобильные специальные технические средства для лиц с нарушениями зрения и с нарушением слуха, ассистивные информационные технологии).

При необходимости для обучающихся с нарушениями зрения на рабочих местах для проведения практических или лабораторных занятий устанавливается специальное программное обеспечение (программа речевой навигации, речевые синтезаторы, экранные лупы).

В учебные аудитории обеспечивается беспрепятственный доступ для обучающихся с инвалидностью и с ограниченными возможностями здоровья. В каждой аудитории, где обучаются инвалиды и лица с ограниченными возможностями здоровья, предусматривается соответствующее количество мест для обучающихся с учетом нарушений их здоровья.

Для освоения дисциплины инвалидам и лицам с ограниченными возможностями здоровья предоставляется доступ к печатным источникам, имеющимся в научной библиотеке ЧелГУ, с помощью специальных технических средств; доступ с помощью специальных технических и программных средств к электронным источникам, представленным в форме электронного документа в фонде научной библиотеки ЧелГУ или электронно-библиотечных системах.

Учебно-методические материалы для обучающихся из числа инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья предоставляются в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и особенностям восприятия информации.

Для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья освоение дисциплины может быть частично или полностью осуществлено с использованием дистанционных образовательных технологий.

При проведении промежуточной аттестации по дисциплине обучающимся с инвалидностью и с ограниченными возможностями здоровья обеспечивается по их заявлению предоставление в доступной форме в зависимости от их индивидуальных особенностей инструкции о порядке проведения промежуточной аттестации, оценочных средств и возможности ответов на задания (письменно на бумаге, набор ответов на компьютере, письменно шрифтом Брайля, с использованием услуг ассистента, устно).

При проведении процедуры оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья предусматривается использование предоставленных ЧелГУ или собственных технических средств,



МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Челябинский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ЧелГУ»)

Рабочая программа дисциплины "Гладкие многообразия" по направлению подготовки (специальности)
02.03.01 "Математика и компьютерные науки" направленности (профилю) Математические и компьютерные
методы в фундаментальных и прикладных исследованиях ФГБОУ ВО «ЧелГУ»

стр. 9

необходимых им в связи с их индивидуальными особенностями. При необходимости инвалидам и лицам с ограниченными возможностями здоровья предоставляется дополнительное время для подготовки ответа на задания, процедура оценивания результатов обучения по дисциплине может проводиться в несколько этапов.

