Фонд оценочных средств
для промежуточной аттестации

по дисциплине

Алгебра

Направление подготовки (специальность)
10.05.01 Компьютерная безопасность

Направленность (профиль)
специализация № 1 «Анализ безопасности компьютерных систем»

Присваиваемая квалификация
специалист по защите информации

Форма обучения
очная

Челябинск 2025 г.

Содержание

1. ПАСПОРТ ФОНДА ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

Специальность 10.05.01 Компьютерная безопасность.
Специализация № 1 «Анализ безопасности компьютерных систем».
Дисциплина: **Алгебра.**
Семестр (семестры) изучения: 1,2,3 семестры.
Форма (формы) промежуточной аттестации:
экзамены 1, 2, 3 семестры.
Используется балльно-рейтинговая система для оценивания результатов.

2. ПЕРЕЧЕНЬ ФОРМИРУЕМЫХ КОМПЕТЕНЦИЙ

2.1. Компетенции, закреплённые за дисциплиной

Изучение дисциплины «Алгебра» направлено на формирование следующих компетенций:

Коды компетенции согласно ФГОС (ОПОП ВО)	**Содержание компетенций согласно ФГОС (ОПОП ВО)**	**Индикаторы достижения компетенции согласно ОПОП**	**Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине**
1	**2**	**3**	**4**
ОПК-3	Способен на основании совокупности математических методов разрабатывать, обосновывать и реализовывать процедуры решения задач профессиональной деятельности;	ОПК-3.1 Знает основные свойства важнейших алгебраических систем: групп, колец, полей; основы линейной алгебры и важнейшие свойства векторных пространств над произвольными полями; основные свойства колец многочленов над кольцами и полями; основные свойства отображений важнейших алгебраических систем. ОПК-3.2 Умеет производить стандартные алгебраические операции в основных числовых и конечных полях, кольцах, а также оперировать с подстановками, многочленами, матрицами, в том числе с использованием компьютерных программ; решать системы линейных уравнений над полями, приводить матрицы и квадратичные формы к каноническому виду; производить оценку качества полученных решений прикладных задач. ОПК-3.3 Владеет методами решения	Знать: – основные понятия и методы алгебры. Уметь: – использовать алгебраические методы и модели для решения прикладных задач; – решать типовые задачи по алгебре, – выполнять операции с алгебраическими объектами. Владеть: – алгебраическими методами решения прикладных задач; – навыками решения типовых линейных уравнений; – навыками решения стандартных задач в векторных пространствах; – методами нахождения канонических форм линейных преобразований.

		стандартных алгебраических, матричных, подстановочных уравнений в алгебраических структурах; навыками решения типовых линейных уравнений над полем и кольцом вычетов; навыками решения стандартных задач в векторных пространствах и методами нахождения канонических форм линейных преобразований.	

3. СОДЕРЖАНИЕ ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

3.1. Виды оценочных средств

№ п/п	Код компетенции / планируемые результаты обучения	Контролируемые темы/ разделы	Наименование оценочного средства для текущего контроля	Наименование оценочного средства на промежуточной аттестации/№ задания
1.	ОПК-3	Раздел 1. Алгебраические структуры		Вопросы к экзамену 1 семестр 1-4.
2.	ОПК-3	Раздел 2. Комплексные числа	Контрольная работа №1. Решение задач. Максимальное количество баллов за работу -- 20 баллов.	Вопросы к экзамену1 семестр 5-8.
3.	ОПК-3	Раздел 3. Матрицы, определители, системы	Контрольная работа №2. Решение задач. Максимальное количество баллов за контрольную работу -- 20 баллов.	Вопросы к экзамену 1 семестр 9-29.
4.	ОПК-3	Раздел 4. Многочлены	Контрольная работа №3. Решение задач. Максимальное количество баллов за работу -- 20 баллов.	Вопросы к экзамену 1 семестр 30-49.
5.	ОПК-3	Раздел 5. Линейные пространства и линейные преобразования	Контрольная работа №4 (линейные пространства). Контрольная работа №5 (линейные преобразования). Решение задач. Максимальное количество баллов за работу -- 20 баллов.	Вопросы к экзамену 2 семестр 50-91.
6.	ОПК-3	Раздел 6. Пространства со скалярным произведением Раздел 7. Квадратичные формы	Контрольная работа №6. Решение задач. Максимальное количество баллов за работу -- 20 баллов.	Вопросы к экзамену 2 семестр 92-111.
7.	ОПК-3	Раздел 8. Основные структуры	Контрольная работа №7. Решение задач. Максимальное количество баллов за работу -- 20 баллов.	Вопросы к экзамену 3 семестр 1-7.
8.	ОПК-3	Раздел 9. Конечные поля	Коллоквиум. .Максимальное количество баллов за коллоквиум -- 20 баллов.	Вопросы к экзамену 3 семестр 8-24.
9.	ОПК-3	Раздел 10. Многочлены над конечными полями.	Контрольная работа №8. Решение задач.	Вопросы к экзамену 3 семестр 25-29.

			Максимальное количество баллов за работу -- 20 баллов.	

Типовые задания, критерии и показатели оценивания в рамках текущего контроля представлены в рабочей программе дисциплины (модуля). Полные комплекты оценочных средств и контрольно-измерительных материалов хранятся на кафедре.

3.2. Содержание оценочных средств

3.2.1. Примеры контрольных работ

Контрольная работа №1,вариант 1

1. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} 2iz_1 + (3+2i)z_2 = 5+3i \\ iz_1 + (2+i)z_2 = 3+i. \end{cases}$$

2. Вычислить выражение $(1+i)^{16}\overline{(\sqrt{3}+i)}^{16}$.

3. Доказать, что произведение двух комплексных чисел является вещественным тогда и только тогда, когда одно из них отличается от сопряженного к другому вещественным множителем.

4. Вычислить $\sqrt[5]{\dfrac{i}{1-i\sqrt{3}}}$.

Контрольная работа №2, вариант 1

1. Исследовать совместность и найти обще решение и одно частное решение системы уравнений
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 4 \\ 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 4x_4 + x_5 = 11 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 6 \end{cases}.$$

2. Исследовать систему и найти общее решение в зависимости от значения параметра λ
$$\begin{cases} 6x_1 + 11x_2 + 4x_3 + 8x_4 = 6 \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4 \\ 4x_1 + 14x_2 + x_3 + 7x_4 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + \lambda x_4 = 7 \end{cases}.$$

3. Будет ли полем множество чисел вида $a + b\sqrt{2}$ (a и b — целые числа) относительно обычных операций сложения и умножения действительных чисел?

4. Найти обратную для следующей матрицы
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Контрольная работа №3, вариант 1

1. Найти НОД многочленов $f(x)$ и $g(x)$ и его линейное представление:
$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1,\ g(x) = x^4 - 2x + 1.$

2. Разложить многочлен $g(x)$ по степеням $x + 1$.

3. Найти сумму кубов корней многочлена
$$x^3 - x^2 + x - 1.$$

4. Найти все рациональные корни многочлена
$$8x^4 - 9x + 1.$$

Контрольная работа №4, вариант 1

1. Доказать линейную независимость систем функций $\{\sin x, \sin 2x, \ldots, \sin nx\}$.

2. Проверить, образуют ли подпространство векторы пространства $\mathbb{R}^n$, координаты которых удовлетворяют уравнению $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = a$, где $a \in \mathbb{R}$ — заданное число.

3. Доказать, что каждая из систем векторов $E = \{(2,1,2),\ (3,-1,4),\ (2,4,1)\}$ и $F = \{(-1,0,1), (2,1,0),\ (1,2,-1)\}$ является базисом, найти матрицу перехода от E к F и координаты вектора $x = (8,-4,4)$ в базисах E и F.

4. Найти размерность линейной оболочки системы векторов $\{a_1 = (1,-1,-2,1),\ a_2 = (2,2,-1,-1),\ a_3 = (1,-1,-1,1),\ a_4 = (1,-5,-3,4),\ a_5 = (-1,-2,1,1)\}$.

Контрольная работа №5, вариант 1

1. Доказать, что два вектора $(-10, 4, 8, 4, 17)$ и $(8, -5, -9, 2, -9)$ лежат в линейной оболочке $L = Lin((0, 0, 0, -4, -7), (3, 0, -1, 0, -5), (-5, 2, 4, 0, 5), (-6, 2, 5, -5, 2))$, и дополнить систему, состоящую из этих двух векторов, до базиса линейной оболочки L.

2. Найти базисы суммы и пересечения подпространств
$$\mathrm{Lin}\big((1, 2, 3, 4), (-2, -1, 0, 1), (1, 2, 4, 8)\big) \quad \text{и} \quad \mathrm{Lin}\big((1, 1, 1, 1), (1, -2, 4, -8)\big).$$

3. Для системы
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ 7x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$
найти ранг основной матрицы и фундаментальную систему решений.

4. Задано отображение φ из $\mathbf{R}^3$ в $\mathbf{R}^2$ формулой
$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + 3x_3, 3x_1 + 2x_2 + x_3).$$
   (a) Проверить, что φ — линейный оператор.
   (b) Записать его матрицу в стандартных базисах $\mathbf{R}^3$ и $\mathbf{R}^2$.
   (c) Найти базисы его ядра и образа.

Контрольная работа № 6,вариант 1

1. Линейное преобразование пространства $\mathbb{R}^3$ задано матрицей

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

в ортонормированном базисе евклидова пространства. Будет ли оно иметь ортонормированный базис из собственных векторов?

2. Пусть в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$

$$L =< (1,-1,1,-1),(1,-2,1,-2),(3,3,3,3) >$$

Найти ортонормированные базисы пространства L и $L^{\perp}$.

3. Линейное преобразование унитарного пространства $\mathbb{C}^2$ задано матрицей

$$\begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$$

в ортонормированном базисе. Найти ортонормированный базис из собственных векторов.

4. Привести с помощью алгоритма Лагранжа к диагональному виду $2x_1x_3 + x_2^2$.

Контрольная работа №7

Пусть a, b, c, d, e - это, соответственно, количество букв в ваших фамилии, полном имени, отчестве, день и месяц вашего рождения.

1. Для многочлена $x^6 + (a+1)x^5 + (b+1)x^4 + (c+1)x^3 + ax^2 + bx + 1 \in \mathbb{F}_3[X]$ найти разложение в произведение неприводимых над тем полем, над которым он рассмотрен.

2. Пусть $f_1(x) = x^4 + x + 1, f_2(x) = x^4 + x^2 + 1, f_3(x) = x^4 + x^3 + 1 \in \mathbb{F}_2$. Пусть $g_1(x) = ax^2 + bx + c$, $g_2(x) = (a+1)x^2 + (b+1)x + a$, $g_3(x) = (a+1)x^2 + bx + 1$. Воспользовавшись китайской теоремой об остатках, решить систему

$$\begin{cases} h \equiv g_1(mod\ f_1), \\ h \equiv g_2(mod\ f_2), \\ h \equiv g_3(mod\ f_3) \end{cases} .$$

3. Доказать, что факторкольцо $K[X]/(x^4 + x^3 + x + 1)$ не может быть полем, каким бы ни было коммутативное кольцо K с единицей.

4. Доказать, что
   - делитель нуля в кольце с единицей является необратимым элементом этого кольца;
   - элемент в конечном кольце с единицей необратим тогда и только тогда, когда является делителем нуля.

Контрольная работа №8

1. Пусть поле F_{64} построено с помощью неприводимого над F_2 многочлена $x^6+x^5+x^2+x+1$ и α — корень этого многочлена. Найти минимальный многочлен элемента $\beta = \alpha^5 + 1$.

2.1. Найти все примитивные элементы поля F_{37}.
2.2 Проверить, является ли многочлен $x^4 + 2x^3 + x + 1$ над F_3 примитивным.

3.1. Построить 8- круговой многочлен $Q_8(x)$ над полем F_q нечетной характеристики.
3.2. Построить 12- круговой многочлен $Q_{12}(x)$ над полем F_q характеристики 5.

4. Найти поле разложения многочлена $x^4 - 5x^2 + 6$ над $\mathbb{Q}$.

3.2.2. Перечень вопросов к экзаменам

Вопросы к экзамену. 1 семестр

1. Алгебраические операции. Ассоциативные, коммутативные операции, нейтральные элементы.
2. Определение группы, примеры групп, свойства группы, симметрическая группа.
3. Определение кольца, примеры колец.
4. Определение поля, примеры полей. Характеристика поля. Теорема о характеристике.
5. Построение поля комплексных чисел.
6. Свойства сопряжение комплексных чисел.
7. Тригонометрическая форма комплексного числа, формула Муавра.
8. Корни из комплексного числа, теорема о корнях из единицы.
9. Понятия матрицы, операции над матрицами. Теорема о свойствах сложения матриц и умножения матрицы на элемент кольца.
10. Произведение матриц. Теорема о свойствах произведения матриц.
11. Понятие обратимости матриц. Примеры обратимых и необратимых матриц над кольцами. Теорема о свойствах обратимых матриц.
12. Доказать, что обратимые матрицы над кольцом образуют группу по умножению.
13. Понятие транспонирования матрицы. Теорема о свойствах транспонирования матриц.
14. Понятия подстановки и перестановки. Четность перестановок и подстановок. Доказать, что транспозиция меняет четность перестановки.
15. Два определения определителя и их равносильность.
16. Теорема об определителе транспонированной матрицы. О равноправии строк и столбцов в определителе.
17. Теорема об определителе полураспавшейся матрицы.

18. Теорема об определителе треугольной матрицы.
19. Теорема о кососимметричности определителя.
20. Теорема о линейности определителя.
21. Миноры и алгебраические дополнения. Теорема о свойствах алгебраических дополнений. Разложение определителя по строчке и столбцу.
22. Понятие присоединенной матрицы. Теорема о присоединенной матрице.
23. Теорема об определителе произведения двух матриц.
24. Теорема об обратной матрице.
25. Определитель Вандермонда и циркулянт.
26. Вычисление обратной матрицы с помощью элементарных преобразований строк. Обоснование метода.
27. Понятие решения системы линейных уравнений, совместные и несовместные системы. Теорема об элементарных преобразованиях.
28. Алгоритм Гаусса и следствия из него.
29. Теорема Крамера.
30. Построение кольца многочленов от одного неизвестного.
31. Кольца без делителей нуля. Примеры.
32. Теорема о делении с остатком в кольце многочленов и в кольце целых чисел.
33. Свойства делимости многочленов и целых чисел.
34. Наибольший общий делитель для многочленов, его свойства, алгоритм Евклида для многочленов.
35. Теорема о линейном представлении наибольшего общего делителя.
36. Взаимно простые многочлены и их свойства.
37. Неприводимость многочленов, основная теорема арифметики многочленов.
38. Понятие производной многочлена. Теорема о кратных множителях многочлена и его производной. Отделение кратных множителей многочлена с помощью алгоритма Евклида.
39. Корни многочленов. Теорема Безу. Схема Горнера.
40. Теорема о числе корней и степени многочлена.
41. Функциональное и алгебраическое равенство многочленов. Теорема об однозначности задания многочлена своими значениями.
42. Интерполяционные формулы Лагранжа и Ньютона.
43. Решение уравнений третьей и четвертой степени.
44. Построение кольца многочленов от нескольких неизвестных.
45. Симметрические многочлены, формулы Виета.
46. Основная теорема о симметрических многочленах.
47. Теорема о существовании корня неприводимого многочлена в некотором расширении поля и следствие из нее.
48. Основная теорема алгебры многочленов.
49. Рациональные корни многочленов над полем рациональных чисел.

Вопросы к экзамену. 2 семестр

50. Определение векторного пространства. Простейшие свойства векторных пространств.
51. Определение подпространства, основные свойства подпространства.

52. Определение линейной зависимости и линейной независимости векторов, свойства линейно зависимых и независимых векторов.
53. Критерий линейной зависимости.
54. Теорема об очистке линейно полного множества, определение базиса.
55. Теорема о выборе базиса.
56. Теорема о дополнении до базиса.
57. Критерий базиса.
58. Определение координат вектора в базисе, свойства координат вектора.
59. Размерность пространства, теорема о размерности, следствия из нее.
60. Матрица перехода, свойства матрицы перехода.
61. Теорема о монотонности размерности подпространств.
62. Теорема о пересечении подпространств.
63. Линейная оболочка, теорема о линейной оболочке.
64. Сумма подпространств, теорема о сумме подпространств.
65. Теорема о размерности суммы подпространств.
66. Прямая сумма подпространств, теорема о прямой сумме подпространств.
67. Дополнение к подпространству, теорема о существовании дополнения к подпространству.
68. Прямая сумма пространств, теорема о прямой сумме пространств.
69. Три понятия ранга матрицы, доказать, что строчный ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях строк.
70. Доказать, что столбцовый ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях столбцов.
71. Доказать, что строчный ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях столбцов.
72. Доказать, что столбцовый ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях строк.
73. Доказать, что столбцовый ранг матрицы равен строчному рангу матрицы.
74. Доказать, что при элементарных преобразованиях строк минорный ранг матрицы не меняется.
75. Теорема Кронекера-Капелли.
76. Теорема об описании структуры решений системы линейных уравнений.
77. Теорема о размерности пространства решений системы линейных однородных уравнений.
78. Определение линейного оператора, теорема о свойствах линейных операторов.
79. Операции над линейными операторами, теорема о свойствах операций над линейными операторами.
80. Теорема о задании линейного оператора на базисе и матрицей.
81. Теорема о свойствах матриц линейных операторов.
82. Линейные функционалы.
83. Линейные преобразования пространства .
84. Матрицы линейных преобразований в разных базисах.
85. Определение определителя матрицы линейного преобразования, доказать, что определитель линейного преобразования определен корректно.
86. Инвариантные подпространства, свойства инвариантных подпространств.

87. Характеристический многочлен линейного преобразования, теорема о характеристическом многочлене.
88. Теорема Гамильтона-Кэли.
89. Собственные векторы и собственные значения, теорема о нахождении собственных значений.
90. Теорема об одномерных инвариантных подпространствах.
91. Доказать, что собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям линейно независимы.
92. Пространства со скалярным произведением, простейшие свойства таких пространств.
93. Теорема Коши-Буняковского-Шварца.
94. Свойства нормы вектора.
95. Ортогональность векторов и подпространств, теорема об ортогональных множествах векторов, процесс ортогонализации Грама-Шмидта.
96. Ортогональное дополнение, теорема об ортогональном дополнении.
97. Теорема о связи между ортонормированными базисами в пространстве со скалярным произведением.
98. Линейные функционалы, теорема о линейном функционале на пространстве со скалярным произведением.
99. Сопряженное преобразование, теорема существования сопряженного преобразования.
100. Теорема о свойствах сопряженных преобразований.
101. Теорема о матрице сопряженного преобразования.
102. Нормальные преобразования, теорема о собственных векторах и собственных значениях нормального преобразования.
103. Критерий сохранения скалярного произведения линейным преобразованием.
104. Два понятия квадратичной формы (как функции и как многочлена), связь между ними.
105. Теорема о матрице квадратичной формы.
106. Теорема Лагранжа о приведении квадратичной формы к каноническому виду.
107. Теорема о приведении квадратичной формы к диагональному виду с помощью перехода к ортонормированному базису.
108. Закон инерции квадратичных форм.
109. Линейная классификация квадратичных форм.
110. Критерий положительной определенности квадратичных форм.
111. Критерий Сильвестра.

Вопросы к экзамену. 3 семестр

1. Определение группы, гомоморфизм, изоморфизм и автоморфизм групп. Подгруппы. Критерий подгруппы. Теорема Кэли.
2. Порождающее множество группы. Теорема о строении группы, порожденной множеством элементов.
3. Порядок элемента. Циклические группы. Теорема о циклических группах.
4. Смежные классы. Теорема Лагранжа. Нормальная подгруппа. Фактор-группа.
5. Теорема о гомоморфизме для групп.

6. Кольцо, подкольцо, идеалы, фактор-кольцо. Теорема о гомоморфизме для колец.
7. Теорема о фактор-кольце целых чисел.
8. Поле. Характеристика поля. Теорема о простом поле.
9. Теорема о фактор-кольце многочленов.
10. Расширение поля. Присоединение элементов к полю. Простое расширение поля. Порождающий элемент простого расширения.
11. Алгебраическое расширение поля. Минимальный многочлен. Свойства минимального многочлена.
12. Теорема о существовании простого алгебраического расширения поля.
13. Теорема о изоморфизме простого алгебраического расширения и фактор-кольца многочленов.
14. Поле разложения многочленов. Теорема о существовании и единственности поля разложения (формулировка).
15. Конечные поля. Теорема о числе элементов в конечном поле.
16. Основная теорема о конечных полях.
17. Теорема о строении мультипликативной группы конечного поля. Примитивный элемент.
18. Степень расширения поля над подполем. Теорема о башне.
19. Теорема о алгебраичности конечного расширения поля.
20. Теорема о базисе простого алгебраического расширения. Следствия.
21. Теорема о порядках подполей конечного поля.
22. Теорема о расширении конечного поля.
23. Примитивный многочлен. Теорема о существовании примитивного многочлена.
24. Автоморфизмы конечных полей.
25. Теорема о поле разложения неприводимого многочлена над конечным полем. Следствия.
26. Циклотомическое (круговое) поле. Теорема о подгруппе циклотомического поля.
27. Круговые многочлены. Теоремы о круговых многочленах.
28. Теорема о свойствах круговых полей.
29. О представлении элементов в конечных полях.

3.2.3. Перечень вопросов к коллоквиуму (3 семестр)

1. Определение группы. Примеры групп.
2. Подгруппы. Критерий подгруппы.
3. Смежные классы. Теорема Лагранжа.
4. Порождение. Циклические группы.
5. Автоморфизмы.
6. Основная теорема о циклических группах.
7. Порядок элемента в группе. Свойства порядка.
8. Кольца. Подкольца. Критерий подкольца. Идеалы. Фактор-кольца.
9. Поля. Характеристика поля.

10. Подполя. Критерий подполя.
11. Конечные поля. Основная теорема о конечных полях.
12. Алгоритм построения конечного поля. Вычисления в конечных полях.
13. Строение мультипликативной группы конечного поля.
14. Примитивный элемент.
15. Подполя конечных полей.
16. Автоморфизмы конечных полей.
17. Множество неподвижных элементов. След и норма.
18. Минимальный многочлен элемента.
19. Существование неприводимых многочленов над конечным полем.
20. Порядок многочлена и его свойства.
21. Дискретный логарифм и логарифм Якоби.
22. Линейные рекуррентные последовательности.
23. Характеристический многочлен и сопровождающая матрица последовательности.

3.2.4. Пример билета к экзамену (1 семестр)

Экзамен по алгебре, специальность 10.05.01 — Компьютерная безопасность
Билет 1

1. Алгебраическое расширение поля. Минимальный многочлен. Свойства минимального многочлена.
2. Теорема о свойствах круговых полей.
3. Построить поле F_{125} как фактор-кольцо с помощью подходящего неприводимого многочлена и найти в нем все подполя (выписать элементы).
4. Покажите, что число $\sqrt{2} + i$ имеет степень 4 над $\mathbb{Q}$.

Составитель В.В.Кораблева
Зав.кафедрой КБиПА А.Н. Ручай

3.2.5. Пример типовых задач к экзамену (1 семестр)

Типовые задачи для подготовки к экзамену, 1 семестр

1. **Алгебраическая операция и ее свойства**
   На множестве $\mathbb{N}$ задана алгебраическая операция $*$ следующим образом: $x * y = xy + 2$. Проверить корректность задания алгебраической операции и выполнение основных свойств (ассоциативность, коммутативность, наличие нейтрального, обратного элементов).

2. **Комплексные числа**
   (a) Найти значение выражения $(2+i)(1-i)+\frac{3+i}{i}$.
   (b) Записать в тригонометрической форме число $\frac{1-i}{-\sqrt{3}+i}$.
   (c) Вычислить $\left(\frac{2-2i}{\sqrt{3}-i}\right)^{120}$.
   (d) Записать в алгебраической форме элементы множества $\sqrt[4]{-16}$.

3. **Матрицы**
   Для матриц $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 8 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ найти
   (a) $B \cdot A$;
   (b) $A \cdot B + 2C$;
   (c) значение многочлена $f(x) = x^3 - 3x + 2$ от матрицы C.

4. **Определители**
   (a) Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.
   (b) Найти A^{-1}, где $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.
   (c) Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} * X = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & 5 \\ -6 & -4 & 2 \end{pmatrix}$.

5. **Системы линейных уравнений**
   (a) Решить систему уравнений методом Крамера: $\begin{cases} x - y + 2z = 2, \\ 2x + 3y - 2z = 3, \\ 2x - y + 3z = 4. \end{cases}$
   (b) Найти общее решение системы линейных уравнений $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2. \end{cases}$

6. **Многочлены**
   (a) Найти наибольший общий делитель многочленов $f(x) = x^5 - 4x^4 + 7x^3 - 7x^2 + 4x - 1$ и $g(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 + 4$ и его линейное разложение.
   (b) Определить кратность корня $x = 1$ многочлена $f(x)$.
   (c) Разложить многочлен $f(x)$ по степеням $x - 2$.
   (d) Найти сумму чисел, обратных комплексным корням многочлена $f(x)$.
   (e) Выразить через элементарные симметрические многочлены многочлен $x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_1^2x_4^2 + x_2^2x_3^2 + x_2^2x_4^2 + x_3^2x_4^2$.

3.2.6. Пример типовых задач к экзамену (2 семестр)

Типовые задачи для подготовки к экзамену, 2 семестр

1. Выяснить, являются ли линейно независимыми следующая система $a_1 = (4, -5, 2, 6)$, $a_2 = (2, -2, 1, 3)$, $a_3 = (6, -3, 3, 9)$ $a_4 = (4, -1, 5, 6)$ векторов в $\mathbb{R}^4$.

2. Проверить, образуют ли подпространство векторы пространства $\mathbb{R}^n$, координаты которых удовлетворяют уравнению $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = a$, где $a \in \mathbb{R}$ – заданное число.

3. Доказать, что каждая из систем векторов

   $E = \{(2, 1, 2), (3, -1, 4), (2, 4, 1)\}$ и

   $F = \{(-1, 0, 1), (2, 1, 0), (1, 2, -1)\}$

   является базисом, найти матрицу перехода от E к F и координаты вектора $x = (8, -4, 4)$ в базисах E и F.

4. Найти размерность и какой-нибудь базис линейной оболочки системы векторов

   $a_1 = (1, -1, -2, 1)$, $a_2 = (2, , 2-1, -1)$, $a_3 = (1, -1, -1, 1)$, $a_4 = (1, -5, 1, 1)$.

5. Найти базис суммы и пересечения линейных оболочек

   $S =< (1, 3, -2, 1), (3, 1, 0, 1), (9, 4, -1, 4) >$ и

   $T =< (-1, -2, 1, 1), (-1, -9, 6, 1), (-1, 5, -4, 1) >$.

6. Найти общее решение и фундаментальную систему решений системы:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 + 5x_4 + 3x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_3 - x_4 - x_5 = 0 \\ x_2 + 2x_3 - x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

7. Найти систему линейных уравнений, задающую линейную оболочку системы векторов $< (1, 1, 4, 1), (-1, 0, 3, 2), (-1, 1, 10, 5) >$.

8. Отображение $\varphi \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ задано правилом:

   $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (-x_1 + x_2 - 3x_3, x_1 - x_2 + 3x_3, -x_2 + 2x_3, x_1 + x_3)$.

   Выяснить, является ли φ линейным отображением, найти его матрицу в базисах пространства

   $\mathbb{R}^3$: $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ и

   $\mathbb{R}^4$: $f_1 = (1, 0, 0, 0)$, $f_2 = (1, 1, 0, 0)$, $f_3 = (1, 1, 1, 0)$, $f_4 = (1, 1, 1, 1)$.

   Найти базис ядра и базис образа отображения φ.

9. Пусть линейное отображение $A \colon V \to W$ в базисах $\{e_1, e_2, e_3\}$ пространства V и $\{f_1, f_2\}$ пространства W имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Найти матрицу отображения A в базисах $\{e_1 + e_2 + e_3, -e_1 + e_2, e_1 + e_2\}$ и $\{2f_1 + f_2, f_1 + f_2\}$.

10. Линейное преобразование A задано матрицей
$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
в некотором базисе. Найти:

(a) собственные векторы и собственные значения преобразования A;

(b) жорданову нормальную форму матрицы A.

11. С помощью процесса ортогонализации построить ортогональный базис линейной оболочки следующей системы векторов $\{(1, 2, 2, -1), (1, 1, -5, 3), (3, 2, 8, -7)\}$.

12. Найти базис ортогонального дополнения линейной оболочки L системы векторов $< (1, 1, 1, 1), (1, 2, 2, -1), (1, 0, 0, 3) >$.

13. Пусть $\{e_1, e_2\}$ – ортонормированный базис метрического векторного пространства и преобразование A имеет в базисе $\{e_1, e_1 + e_2\}$ матрицу
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$
Найти матрицу преобразования A в этом базисе.

14. Найти собственный ортонормированный базис и матрицу в этом базисе оператора, заданного в некотором ортонормированном базисе матрицей
$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

15. На векторном пространстве $\mathbb{C}$ над полем $\mathbb{R}$ задано отображение $f(u, v) = Re(u\overline{v})$. Проверить, будет ли данное отображение билинейной формой. В случае положительного ответа найти матрицу данной билинейной формы в базисе $\{1, i\}$.

16. Пусть билинейная форма f задана в базисе $\{e_1, e_2, e_3\}$ матрицей
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$
Найти:

(a) значение билинейной формы $f(x, y)$ на векторах $x = (1, 0, 3)$, $y = (-1, 2, -4)$, заданных своими координатами в базисе $\{e_1, e_2, e_3\}$;

(b) матрицу билинейной формы f в базисе $\{e_1 - e_2, e_1 + e_3, e_1 + e_2 + e_3\}$.

17. Методом Лагранжа привести квадратичную форму
$$3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$$
к каноническому виду.

4. ПОРЯДОК ПРОВЕДЕНИЯ И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

4.1. Порядок проведения промежуточной аттестации

В ходе изучения дисциплины «Алгебра» студент должен выполнить 8 контрольных работ и сдать один коллоквиум:

в 1-м семестре – 3 контрольные работы,

во 2-м семестре – 3 контрольные работы,

в 3-м семестре – 2 контрольные работы и коллоквиум.

Каждая из контрольных работ, коллоквиум и экзамен оценивается в 20 баллов. Нарушение сроков без уважительной причины ведет за собой снижение баллов за контрольную работу и коллоквиум на 2 балла за каждую неделю задержки.

Билеты для экзамена содержат 4 задания (2 практических задачи и 2 теоретических вопроса). За каждое выполненное задание билета студент может получить от 2 до 5 баллов:

- Если задание выполнено правильно, то оно оценивается 5 баллами.
- Если задание выполнено с ошибками, то баллы снижаются в зависимости от количества допущенных ошибок.
- Если допущена одна ошибка, то здание оценивается 4 баллами, допущены две ошибки – 3 баллами, допущены три ошибки – 2 баллами.
- Если задание выполнено частично, и выполненная часть задания не содержит ошибок, то оно оценивается 2 баллами.
- Если допущено более трех ошибок в задании или студент выполнил менее половины задания из билета, то за него он получает 0 баллов.

Сводная таблица рейтинга успеваемости (1,2 семестр)

№	Перечень контрольных мероприятий в семестре	Максимальное кол-во баллов
1	Контрольные работы	3x20=60
2	Активная работа на занятиях в течение семестра	5
3	Посещаемость (все занятия)	5
4	Выполнение всех домашних заданий	10
5	Экзамен	20
	Итого	100

Сводная таблица рейтинга успеваемости (3 семестр)

№	Перечень контрольных мероприятий в семестре	Максимальное кол-во баллов
1	Контрольные работы	2x20=40
2	Коллоквиум	20
3	Активная работа на занятиях в течение семестра	5
4	Посещаемость (все занятия)	5

5	Выполнение всех домашних заданий	10
6	Экзамен	20
	Итого	100

Критерии оценивания экзамена (1,2,3 семестр)

№ п/п	Набранные баллы	Оценка
1	Менее 50	неудовлетворительно
2	50 – 69	удовлетворительно
3	70 – 90	хорошо
4	91 – 100	отлично

4.2. Критерии оценивания промежуточной аттестации по видам оценочных средств.

4.2.1 Критерии оценивания контрольной работы

Максимальный балл за контрольную работу – 20 баллов.

Максимальный балл за задание – 5 баллов.

Отлично/зачтено/5 баллов	**Хорошо/зачтено/4 балла**	**Удовлетворительно/зачтено/3 балла**	**Неудовлетворительно/не зачтено/2 балла**
Работа выполнена в срок, обучающийся отлично знает материал, умеет анализировать проблему и может грамотно прокомментировать выполненную работу. Задание решено правильно, дан полный, развернутый ответ на поставленный вопрос.	Работа выполнена в срок, обучающийся хорошо знает материал, умеет анализировать проблему и может грамотно прокомментировать выполненную работу. Обучающийся допускает незначительные ошибки. Выполнено 3/4 задания, дан полный, развернутый ответ на поставленный вопрос, однако были допущены неточности в определении понятий, терминов и др.	Работа выполнена и сдана позднее, чем предполагалось, и при этом обучающийся хорошо знает материал, умеет анализировать проблему и может грамотно прокомментировать выполненную работу. Обучающийся допускает незначительные ошибки. Выполнено 1/2 задания, дан неполный ответ на поставленный вопрос.	Работа не выполнена, либо обучающийся не может ответить на контрольные вопросы, не ориентируется в основных понятиях, излагает материал с трудом, с грубыми фактическими и языковыми ошибками, либо отказывается от ответов на вопросы. Выполнено менее 1/2 задания, на поставленный вопросы ответ отсутствует или неполный, допущены существенные ошибки в терминах и понятиях.
Высокий уровень освоения проверяемых компетенций	Средний уровень освоения проверяемых компетенций	Базовый уровень освоения проверяемых компетенций	Недостаточный уровень освоения проверяемых компетенций

4.2.2. Критерии оценивания ответа на коллоквиуме

Максимальный балл за коллоквиум – 20 баллов.

Критерии	Отлично/зачтено/16-20 баллов	Хорошо/зачтено/11-15 баллов	Удовлетворительно/зачтено/6-10 баллов	Неудовлетворительно/не зачтено/0-5 баллов
1. Полнота изложения вопроса 2. Правильность и/или аргументированность изложения	Студентом дан полный, в логической последовательности развернутый ответ на поставленный вопрос, где он продемонстрировал знания предмета.	Студентом дан развернутый ответ на поставленный вопрос, где студент демонстрирует знания. Однако допускает неточность в ответе.	Студентом дан ответ, свидетельствующий в основном о знании процессов изучаемой дисциплины, отличающийся недостаточной глубиной и полнотой раскрытия темы, знанием основных вопросов теории, недостаточным умением давать аргументированные ответы и приводить примеры. Допускает несколько ошибок в содержании ответа.	Студентом дан ответ, который содержит ряд серьезных неточностей, обнаруживающий незнание процессов изучаемой предметной области, отличающийся неглубоким раскрытием темы, незнанием основных вопросов теории, отсутствием логичности и последовательности. Студент не способен ответить на вопросы даже при дополнительных наводящих вопросах преподавателя.
Уровень освоения проверяемых компетенций	высокий	средний	базовый	недостаточный

4.2.3. Критерии оценивания ответа на экзамене

Максимальный балл за экзамен – 20 баллов.
Максимальный балл за задание – 5 баллов.

Критерии	Отлично/зачтено/5 баллов	Хорошо/зачтено/4 балла	Удовлетворительно/зачтено/3 балла	Неудовлетворительно/не зачтено/2 балла
1. Полнота изложения теоретического материала; 2. Полнота и правильность решения практического задания;	Студентом дан полный, в логической последовательности развернутый ответ на поставленный вопрос, где он продемонстрировал	Студентом дан развернутый ответ на поставленный вопрос, где он демонстрирует знания, приобретенные на лекционных и	Студентом дан ответ, свидетельствующий в основном о знании процессов изучаемой дисциплины, отличающийся недостаточной	Студентом дан ответ, который содержит ряд серьезных неточностей, обнаруживающий незнание процессов изучаемой предметной области,

3. Правильность и/или аргументированность изложения (последовательность действий)	знания предмета в полном объеме учебной программы, достаточно глубоко осмысливает дисциплину, самостоятельно, и исчерпывающе отвечает на дополнительные вопросы, приводит собственные примеры по проблематике поставленного вопроса, решил предложенные практические задания без ошибок.	семинарских занятиях, а также полученные посредством изучения обязательных учебных материалов по курсу, дает аргументированные ответы, приводит примеры, ответ логичен и последователен. Однако студент допускает неточность в ответе. Решил предложенные практические задания с небольшими неточностями.	глубиной и полнотой раскрытия темы, знанием основных вопросов теории, слабо сформированными навыками анализа явлений, процессов, недостаточным умением давать аргументированные ответы и приводить примеры, ответ недостаточно логичен и последователен ответа. Допускает несколько ошибок в содержании ответа и решении практических заданий.	отличающийся неглубоким раскрытием темы, незнанием основных вопросов теории, несформированными навыками анализа явлений, процессов, неумением давать аргументированные ответы, отсутствием логичности и последовательности. Выводы поверхностны. Решение практических заданий не выполнено. Студент не способен ответить на вопросы даже при дополнительных наводящих вопросах преподавателя.
Уровень освоения проверяемых компетенций	высокий	средний	базовый	недостаточный

4.3. Результаты промежуточной аттестации и уровни сформированности компетенций

При оценивании результатов усвоения дисциплины применяется балльно-рейтинговая система.

В течение учебного семестра студенты за каждый вид работы получают баллы. Итоговая оценка складывается из суммы баллов, полученных в семестре, и за ответ на зачете и экзамене.

Критерии оценивания экзамена (1,2,3 семестр)

№ п/п	Набранные баллы	Оценка
1.	Менее 60	неудовлетворительно
2.	61 – 74	удовлетворительно
3.	75 – 90	хорошо
4.	91 – 100	отлично

Особенности проведении процедуры оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья обозначены в рабочей программе дисциплины (модуля).

Уровни сформированности компетенций определяется следующим образом:

1. Высокий уровень сформированности компетенций соответствует оценке «Отлично»:
   - предполагает формирование компетенций на высоком уровне, готовность к самостоятельной профессиональной деятельности,
   - студент способен аргументировать собственную точку зрения по дискуссионным вопросам дисциплины, решать ситуационные задачи, формулировать собственные выводы.
2. Средний уровень соответствует оценке «Хорошо»:
   - предполагает формирование компетенций на достаточном уровне,
   - студент способен давать развернутые ответы на теоретические и практические вопросы дисциплины на уровне не ниже оценки «Хорошо».
3. Базовый уровень соответствует оценке «Удовлетворительно»:
   - предполагает формирование компетенций на начальном уровне,
   - студент способен давать ответы на теоретические и практические вопросы дисциплины на уровне не ниже оценки «Удовлетворительно»,
   - студент способен отвечать на вопросы в закрытой форме. Количество правильных ответов – не менее 50%.
4. Низкий уровень соответствует оценке «Неудовлетворительно».

Специальность 10.05.01 Компьютерная безопасность
Специализация № 1 «Анализ безопасности компьютерных систем»
Фонд оценочных средств по дисциплине «Алгебра»
2025 год набора, очная форма обучения

Фонд оценочных средств дисциплины (модуля) одобрен и рекомендован:
Проректор по учебной работе утверждено 24.02.25 А.А. Саламатов

Ученым советом математического факультета

Протокол заседания № 6 от 20.02.2025

Председатель Ученого совета
математического факультета согласовано Е.А. Сбродова

Заседанием кафедры компьютерной безопасности и прикладной алгебры

Протокол заседания № 8 от 01.02.2025

Заведующий кафедрой согласовано А. Н. Ручай

Автор (составитель) Кораблева В.В.

Структура рабочей программы соответствует приказу ректора ФГБОУ ВО «ЧелГУ» от «13» апреля 2021 г. № 247-1