

Документ подписан простой электронной подписью Информация о владельце: ФИО: Таскаев Сергей Валерьевич Должность: Ректор Дата подписания: 04.06.2025 13:02:01 Уникальный программный ключ: 04c19ed88bf98f3b6cb77a486b9a8788b8323233	МИНОВЕРНАУКИ РОССИИ Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Челябинский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ЧелГУ»)	стр. 1
--	--	--------

Рабочая программа дисциплины (модуля)*
Алгебра

Направление подготовки (специальность)

01.03.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль)

Прикладная математика и искусственный интеллект

Присваиваемая квалификация (степень)

бакалавр

Форма обучения

очная

Год(ы) набора 2025

*Рабочая программа дисциплины (модуля) адаптирована для инклюзивного обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья

Челябинск 2025 г.



Содержание

1. Цели освоения дисциплины
2. Место дисциплины в структуре ОПОП
3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины (модуля)
4. Объем дисциплины (модуля)
5. Структура и содержание дисциплины (модуля)
6. Фонд оценочных средств
 - 6.1. Перечень видов оценочных средств
 - 6.2. Типовые контрольные задания и иные материалы для текущей аттестации
 - 6.3. Типовые контрольные вопросы и задания для промежуточной аттестации
 - 6.4. Критерии оценивания
7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)
 - 7.1. Рекомендуемая литература
 - 7.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет"
 - 7.3. Перечень информационных технологий
8. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)
9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)
10. Специальные условия освоения дисциплины обучающимися с инвалидностью и ограниченными возможностями здоровья



1. ЦЕЛИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Целью преподавания дисциплины является обеспечение фундаментальной подготовки в важной области современной математики, ознакомление с основами классической и современной алгебры, обучение основным алгебраическим методам решения задач, возникающих в других математических дисциплинах и в практике, ознакомление с историей развития алгебры и с вкладом российских ученых в развитие современной алгебраической науки.

Результаты обучения по дисциплине направлены на достижение индикаторов:

ОПК-1. Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОПОП

Цикл (раздел) ОПОП: Б1.О.02

2.1 Требования к предварительной подготовке обучающегося:

Данная дисциплина имеет разносторонние связи со многими математическими и специальными дисциплинами. Она основывается на знании числовых систем и функций, изученных в средней школе.

2.2 Дисциплины и практики, для которых освоение данной дисциплины (модуля) необходимо как предшествующее:

Данная дисциплина является предшествующей для дисциплин:

Комплексный анализ

Дифференциальные уравнения

Функциональный анализ

Вариационное исчисление и оптимальное управление

3. КОМПЕТЕНЦИИ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

ОПК-1: Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности

Знать:

Теоретические и практические основы алгебры

Уметь:

Использовать различные алгебраические объекты и структуры в задачах профессиональной деятельности

Владеть:

Методами решения задач с помощью аппарата алгебры

В результате освоения дисциплины обучающийся должен

3.1 Знать:

3.1.1 основные понятия математической логики и информатики; теоретические и практические основы алгебры; основные геометрические объекты, их свойства, геометрические методы анализа и решения прикладных задач; базовые понятия математического анализа, применяемые в математических науках, прикладной математике и информатике; различные типы дифференциальных уравнений и способы их решения; основные положения теории функции комплексной переменной; теоретические и практические положения функционального анализа; базовые определения и законы аналитической механики и теоретической физики; классические понятия вариационного исчисления и методы теории оптимального управления.

3.2 Уметь:



3.2.1 применять язык математической логики при анализе и решении задач профессиональной деятельности; использовать различные алгебраические объекты и структуры в задачах профессиональной деятельности; применять геометрические методы для анализа и решения прикладных задач; использовать математический аппарат в решении профессиональных задач; применять классические методы математического анализа в решении задач прикладной математики и информатики; создавать алгоритмы решения прикладных задач над полем комплексных чисел; использовать измерительную аппаратуру для определения значений физических характеристик объектов; применять вариационный подход и методы оптимального управления к решению практических задач.

3.3 Владеть:

3.3.1 создания алгоритмов решения прикладных задач; использования разных систем координат и их баз с целью оптимизации решения как задач фундаментальной математики, так и прикладных задач; программной реализации алгоритмов задач профессиональной деятельности; решения дифференциальных уравнений в математических моделях различных прикладных задач; проведения физических экспериментов в лабораторных условиях.

4. ОБЪЕМ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Общая трудоемкость	9 ЗЕТ
Часов по учебному плану : 324	Виды контроля в семестрах: экзамены 1, 2 зачеты 1
в том числе :	
аудиторные занятия : 170	
самостоятельная работа : 65,5	
часов на контроль : 63	
контактная работа: 195,5 ИКР: 25,5	

5. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Код занятия	Наименование разделов и тем /вид занятия/	Семестр / Курс	Часов	Литература
	Раздел 1. Группы, кольца поля			
1.1	Бинарные алгебраические операции. Группы, кольца поля. /Лек/	1	2	Л1.1 Л1.2 Л1.4Л2.1
1.2	Группы, кольца, поля. Примеры и приложения. /Пр/	1	2	Л1.1 Л1.2 Л1.4 Л2.1
1.3	Группы, кольца, поля. /Ср/	1	10	Л1.1 Л1.2 Л1.3 Л1.4Л2.1
	Раздел 2. Комплексные числа			
2.1	Комплексные числа. Основные понятия, операции в алгебраической форме. /Лек/	1	2	Л1.2 Л1.4Л2.1
2.2	Тригонометрическая форма. Формула Муавра. Извлечение корней из комплексных чисел. /Лек/	1	4	Л1.2 Л1.4Л2.1
2.3	Комплексные числа. Операции, вычисления степеней. /Пр/	1	2	Л1.2 Л1.4Л2.1
2.4	Тригонометрическая форма. Формула Муавра. Извлечение корней из комплексных чисел. /Пр/	1	4	Л1.2 Л1.4Л2.1
2.5	Контрольная работа 1 /Пр/	1	2	Л1.2 Л1.4Л2.1
2.6	Комплексные числа /Ср/	1	6	Л1.2 Л1.4Л2.1
	Раздел 3. Системы линейных уравнений. Матрицы и определители.			
3.1	Матрицы. Операции над матрицами, их свойства. /Лек/	1	2	Л1.2 Л1.4Л2.1
3.2	Определители и их свойства. /Лек/	1	4	Л1.2 Л1.4Л2.1
3.3	Системы линейных уравнений. Теорема Крамера. Метод Гаусса. Ранг матрицы. /Лек/	1	4	Л1.2 Л1.4Л2.1
3.4	Микросессия 1 /Лек/	1	2	Л1.2 Л1.4Л2.1
3.5	Операции над матрицами. /Пр/	1	2	Л1.2 Л1.4Л2.1



3.6	Вычисление определителей /Пр/	1	4	Л1.2 Л1.4Л2.1
3.7	Контрольная работа 2 /Пр/	1	2	Л1.2 Л1.4Л2.1
3.8	Решение систем линейных уравнений /Пр/	1	4	Л1.2 Л1.4Л2.1
3.9	Системы линейных уравнений. Матрицы и определители. /Ср/	1	6	Л1.2 Л1.4Л2.1
Раздел 4. Многочлены				
4.1	Многочлены от одной неизвестной. Операции над многочленами. /Лек/	1	2	Л1.2 Л1.4Л2.1
4.2	Делимость и деление с остатком многочленов. Алгоритм Евклида. НОД многочленов. Неприводимые многочлены. Основная теорема алгебры многочленов. Рациональные корни многочленов. /Лек/	1	6	Л1.2 Л1.4Л2.1
4.3	Многочлены от нескольких неизвестных. Симметрические многочлены. Формулы Виета. /Лек/	1	4	Л1.2 Л1.4Л2.1
4.4	Микросессия 2. Итоговая контрольная работа /Лек/	1	2	Л1.2 Л1.4Л2.1
4.5	Контрольная работа 3 /Пр/	1	2	Л1.2 Л1.4Л2.1
4.6	Сложение и умножение многочленов. /Пр/	1	2	Л1.2 Л1.4Л2.1
4.7	Делимость и деление с остатком многочленов. Алгоритм Евклида. НОД многочленов. /Пр/	1	2	Л1.2 Л1.4Л2.1
4.8	Многочлены от нескольких неизвестных. Симметрические многочлены. /Пр/	1	4	Л1.2 Л1.4Л2.1
4.9	Контрольная работа 4 /Пр/	1	2	Л1.2 Л1.4Л2.1
4.10	Многочлены /Ср/	1	6,9	Л1.2 Л1.4Л2.1
Раздел 5. Векторные пространства				
5.1	Векторные пространства. Примеры. Подпространства. /Лек/	2	4	Л1.3 Л1.4Л2.1
5.2	Линейные комбинации. Линейная зависимость. Линейная оболочка. /Лек/	2	4	Л1.3 Л1.4Л2.1
5.3	Базис (база) векторного пространства. Размерность. Координаты вектора в базе. Матрица перехода. /Лек/	2	4	Л1.3 Л1.4Л2.1
5.4	Многообразие. Фактор-пространство. Подпространство и многообразие решений систем линейных уравнений. /Лек/	2	4	Л1.3 Л1.4Л2.1
5.5	Сумма и пересечение подпространств. Прямая сумма подпространств и пространств. /Лек/	2	4	Л1.3 Л1.4Л2.1
5.6	Векторные пространства. Подпространства. Построение примеров. /Пр/	2	2	Л1.3 Л1.4Л2.1
5.7	Линейные комбинации. Линейная зависимость. База (базис). Координаты вектора в базе. /Пр/	2	4	Л1.3 Л1.4Л2.1
5.8	Контрольная работа 5 /Пр/	2	2	Л1.3 Л1.4Л2.1
5.9	Ранг матрицы. Фундаментальная система решений однородной системы линейных уравнений. /Пр/	2	4	Л1.3 Л1.4Л2.1
5.10	Сумма и пересечение подпространств. /Пр/	2	2	Л1.3 Л1.4Л2.1
5.11	Векторные пространства. /Ср/	2	8	Л1.3 Л1.4Л2.1
Раздел 6. Линейные операторы				
6.1	Линейные операторы, их свойства. Ядро и образ. /Лек/	2	4	Л1.3 Л1.4Л2.1
6.2	Микросессия 3 /Лек/	2	2	Л1.3 Л1.4Л2.1
6.3	Матрица линейного оператора. Собственные значения и собственные векторы. /Лек/	2	4	Л1.3 Л1.4Л2.1
6.4	Понятие о нормальной жордановой форме. Корневые векторы и подпространства. Циклические подпространства. Подобие матриц. /Лек/	2	4	Л1.3 Л1.4Л2.1
6.5	Примеры линейных операторов. Ядро и образ. Матрица линейного преобразования. Собственные значения и векторы /Пр/	2	2	Л1.3 Л1.4Л2.1
6.6	Матрица линейного преобразования. Собственные значения и векторы /Пр/	2	2	Л1.3 Л1.4Л2.1



6.7	Линейные операторы /Ср/	2	8	Л1.3 Л1.4Л2.1
Раздел 7. Пространство со скалярным произведением				
7.1	Пространство со скалярным произведением. Длина вектора. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца. /Лек/	2	4	Л1.3 Л1.4Л2.1
7.2	Ортогональность векторов и множеств. Ортонормированные базисы. Ортогональные суммы подпространств. /Лек/	2	4	Л1.3 Л1.4Л2.1
7.3	Функционалы в конечномерных пространствах со скалярным произведением. Сопряжённое преобразование. /Лек/	2	4	Л1.3 Л1.4Л2.1
7.4	Нормальные преобразования, их свойства. Канонический вид матрицы нормального преобразования. /Лек/	2	4	Л1.3 Л1.4Л2.1
7.5	Преобразования, сохраняющие скалярное произведение, и самосопряжённые преобразования, их свойства. Канонический вид матрицы таких преобразований. /Лек/	2	4	Л1.3 Л1.4Л2.1
7.6	Контрольная работа 6 /Пр/	2	2	Л1.3 Л1.4Л2.1
7.7	Скалярное произведение. Длина вектора. Ортогональность векторов. Ортонормированные базисы. Ортогональные суммы. /Пр/	2	2	Л1.3 Л1.4Л2.1
7.8	Канонический вид нормальных преобразований. /Пр/	2	2	Л1.3 Л1.4Л2.1
7.9	Канонический вид преобразований, сохраняющих скалярное произведение, и самосопряжённых преобразований. /Пр/	2	2	Л1.3 Л1.4Л2.1
7.10	Контрольная работа 7 /Пр/	2	2	Л1.3 Л1.4Л2.1
7.11	Пространство со скалярным произведением /Ср/	2	10	Л1.3 Л1.4Л2.1
Раздел 8. Квадратичные формы				
8.1	Квадратичные формы как отображения и как многочлены. Матрица квадратичной формы. Линейная классификация квадратичных форм. Алгоритм Лагранжа. /Лек/	2	4	Л1.3 Л1.4Л2.1
8.2	Ортогональная классификация квадратичных форм. /Лек/	2	4	Л1.3 Л1.4Л2.1
8.3	Закон инерции квадратичных форм. Положительная определённость квадратичных форм. Критерий Сильвестра. Задача о паре форм. /Лек/	2	4	Л1.3 Л1.4Л2.1
8.4	Микросессия 4. Итоговая контрольная работа /Лек/	2	2	Л1.3 Л1.4Л2.1
8.5	Квадратичные формы и их матрицы. Алгоритм Лагранжа. /Пр/	2	2	Л1.3 Л1.4Л2.1
8.6	Положительная определённость квадратичных форм. Критерий Сильвестра. /Пр/	2	2	Л1.3 Л1.4Л2.1
8.7	Контрольная работа 8 /Пр/	2	2	Л1.3 Л1.4Л2.1
8.8	Квадратичные формы /Ср/	2	10,6	Л1.3 Л1.4Л2.1
Раздел 9. Иная контактная работа				
9.1	Индивидуальные консультации, текущий контроль /ИКР/	1	11,1	Л1.1 Л1.2 Л1.3 Л1.4Л2.1
9.2	Индивидуальные консультации, текущий контроль /ИКР/	2	14,4	Л1.1 Л1.2 Л1.3 Л1.4Л2.1

6. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

6.1. Перечень видов оценочных средств

Контрольные работы;
Вопросы для микросессии;
Вопросы для экзамена.

6.2. Типовые контрольные задания и иные материалы для текущей аттестации

Пример контрольной работы №1:

1. Вычислите:
 $(2+3i)/(1-i)+(2-i)(1+3i)+11$.

2. Вычислите:
 $((1-i)/(1+i\sqrt{3}))^{45}$.

3. Вычислите, ответ запишите в алгебраической форме:



$(-4i)^{1/4}$.

4. Решите уравнение $z^2 - (3-3i)z + 4 - 12i = 0$.

5. Изобразите на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющий условию: $|z+i+3| \geq 3$.

Пример контрольной работы №2:

1. Для матриц A, B, C вычислите значения выражений:

а) $A \cdot B$; б) $2 \cdot C^2 - A^t \cdot B^t$

2. Определите число инверсий в перестановке.

3. Раскладывая по второму столбцу, вычислите определитель.

4. Приведением к треугольному виду вычислите определитель матрицы.

5. Найдите любым способом обратную матрицу к данной.

Вопросы к микросессии 1:

1. Бинарная операция. Два свойства бинарной операции. Определение группы. Примеры.

2. Определение поля, кольца. Примеры.

3. Понятие комплексного числа. Операции над комплексными числами в алгебраической форме.

Геометрическое представление комплексных чисел.

4. Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме. (Доказать.)

5. Формула возведения в степень комплексного числа. (Доказать.)

6. Извлечение корней из комплексных чисел. (Доказать.) Геометрическая интерпретация.

7. Доказать, что комплексные числа образуют поле.

8. Модуль, сопряжение комплексного числа и их свойства. (Доказать.)

9. Доказать, что все комплексные корни из 1 степени n образуют группу относительно операции умножения.

10. Определение матрицы. Операции с матрицами. Свойства операций с матрицами.

11. Определитель матрицы 2, 3-го порядка. Перестановки на множестве из n элементов. Четность перестановки. Доказать, что транспозиция меняет четность перестановки. Понятие определителя n-го порядка.

12. Алгебраическое дополнение и минор элемента матрицы. Формула разложения определителя матрицы по строке.

13. Свойства определителя. (Доказать.)

14. Определитель Вандермонда (доказать).

15. Система линейных уравнений, ее матричная запись. Совместность, определенность системы линейных уравнений.

16. Правило Крамера решения систем линейных уравнений. (Доказать.)

17. Элементарные преобразования строк матрицы. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений.

18. Определение обратной матрицы. Способы ее нахождения, свойства. (Доказать.)

19. Определение ранга матрицы. Теорема о ранге.

20. Теорема Кронекера-Капелли, ее следствие.

Пример контрольной работы №3:

1. Найти общее решение и одно частное решение системы. Сделать проверку.

2. Решить матричное уравнение.

3. Решить систему методом Крамера:

4. Найти решение системы. Сделать проверку.

Пример контрольной работы №4:

1. Даны многочлены: $f(x) = x^5 - x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 9x + 9$, $g(x) = x^4 - 3x^2 - 10x - 6$. Найдите их НОД и его линейное разложение.

2. Разложите многочлен $2x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x + 1$ по степеням $x-1$.

3. Выразите многочлен в виде многочлена от элементарных симметрических.

4. Представьте в виде суммы простейших над полем R рациональную дробь: $(3^2+4+5)/((+6)^2*(^2+3+3))$

Вопросы к микросессии 2:

1. Построение кольца многочленов от одного неизвестного.

2. Кольца без делителей нуля. Примеры.

3. Теорема о делении с остатком в кольце многочленов и в кольце целых чисел.

4. Свойства делимости многочленов и целых чисел.

5. Наибольший общий делитель для многочленов, его свойства, алгоритм Евклида для многочленов.

6. Теорема о линейном представлении наибольшего общего делителя.

7. Взаимно простые многочлены и их свойства.

8. Неприводимость многочленов, основная теорема арифметики многочленов.



9. Понятие производной многочлена. Теорема о кратных множителях многочлена и его производной. Отделение кратных множителей многочлена с помощью алгоритма Евклида.
10. Корни многочленов. Теорема Безу. Схема Горнера.
11. Теорема о числе корней и степени многочлена.
12. Функциональное и алгебраическое равенство многочленов. Теорема об однозначности задания многочлена своими значениями.
13. Интерполяционные формулы Лагранжа и Ньютона.
14. Решение уравнений третьей и четвертой степени.
15. Построение кольца многочленов от нескольких неизвестных.
16. Симметрические многочлены, формулы Виета.
17. Основная теорема о симметрических многочленах.
18. Теорема о существовании корня неприводимого многочлена в некотором расширении поля и следствие из нее.
19. Основная теорема алгебры многочленов.
20. Рациональные корни многочленов над полем рациональных чисел.

Пример контрольной работы №5:

1. Вычислить: $((2-2i)/(\sqrt{3}-i))^{120}$.
2. Вычислить определитель 4 порядка.
3. Даны матрицы A, B, C. Найти значение выражения $A^{(-1)} \cdot (B+C)$.
4. Решить систему, выполнить проверку.
5. Найти НОД многочленов $f(x)=x^5-5x^4+7x^3-2x^2+4x-8$, $g(x)=x^4-x^3-x+1$ и его линейное разложение.
6. Найти все рациональные корни многочлена $125x^4-126x+1$

Пример контрольной работы №6:

1. Проверить, что векторы $\{e_i\}$ образуют базис и найти координаты вектора x в этом базисе, если: $e_1=(-1,2,1)$; $e_2=(-2,-1,-3)$; $e_3=(3,0,-1)$; $x=(8,-4,-4)$.
2. Для системы векторов $\{a_i\}$ выделить максимальную линейно независимую подсистему. Выразить оставшиеся векторы через векторы этой системы: $a_1=(4,-2,3,3)$; $a_2=(1,3,0,3)$; $a_3=(-10,-2,-6,-12)$; $a_4=(8,-4,6,6)$.
3. Даны два базиса: $\{e_i\}$; $\{f_i\}$. Найти координаты вектора x в базисе $\{f_i\}$, если известно его разложение по базису $\{e_i\}$: $e_1=(11,5,-15)$; $e_2=(-2,-2,0)$; $e_3=(7,4,3)$; $f_1=(-1,2,-3)$; $f_2=(2,2,0)$; $f_3=(4,-1,-2)$.
4. Проверить, образует ли указанное множество подпространство: последовательности вещественных чисел, имеющие предел a из \mathbb{R}^n , в пространстве всех последовательностей вещественных чисел.

Пример контрольной работы №7:

1. Найти базис суммы и базис пересечения линейных оболочек $\text{Lin}(a_1, a_2, a_3)$ и $\text{Lin}(b_1, b_2, b_3)$, где $a_1=(2,1,0,1)$, $a_2=(3,-1,-2,-3)$, $a_3=(9,2,-2,0)$; $b_1=(3,-2,0,2)$, $b_2=(3,-1,-2,-3)$, $b_3=(-2,3,-2,-7)$.
2. Найти фундаментальную систему решений системы линейных уравнений.
3. Найти базис ядра и базис образа линейного оператора, заданного (в стандартных базисах) матрицей.
4. Найти хотя бы один прообраз вектора $x=(-4,-9,-5)$ при линейном операторе, заданном матрицей (в стандартных базисах).

Вопросы к микросессии 3:

1. Определение векторного пространства. Теорема о простейших свойствах векторного пространства (доказать).
2. Определение подпространства. Теорема о свойствах подпространства (доказать).
3. Определение линейной зависимости и линейной независимости векторов. Теорема о линейно зависимых независимых множествах (доказать).
4. Критерий линейной зависимости (доказать).
5. Теорема об очистке линейно полного множества (доказать).
6. Определение базы. Теорема о выборе базы (доказать).
7. Теорема о дополнении до базы (доказать).
8. Критерий базы (доказать). Определение координат вектора в базе.
9. Определение размерности пространства. Теорема о размерности пространства (доказать).
10. Определение матрицы перехода от одной базы к другой. Теорема о свойствах матрицы перехода (доказать).
11. Теорема о пересечении подпространств (доказать).
12. Теорема о строении линейной оболочки (доказать).
13. Теорема о сумме двух подпространств (доказать).
14. Теорема о размерности суммы двух подпространств (доказать).



15. Определение прямой суммы двух подпространств.
16. Теорема о прямой сумме двух подпространств (доказать).
17. Определение ранга матрицы.
18. Теорема о пространстве решений однородной системы линейных уравнений (доказать).
19. Теорема о размерности пространства решений однородной системы линейных уравнений (доказать).
20. Определение линейного оператора. Теорема о свойствах линейных операторов (доказать).
21. Операции над линейными операторами. Доказать, что линейные операторы образуют пространство.
22. Матрица линейного оператора. Теорема о задании линейного оператора на базе и матрицей.
23. Теорема о связи матриц линейного преобразования в разных базах (доказать).
24. Определение ядра и образа линейного преобразования. Доказать, что ядро линейного преобразования является подпространством. Доказать, что образ линейного преобразования является подпространством.
25. Характеристический многочлен линейного преобразования. Теорема Гамильтона-Кэли.
26. Собственные векторы и собственные значения линейного преобразования. Теорема о нахождении собственных значений.

Вопросы к микросессии 4:

1. Определение и примеры нормальной жордановой формы матрицы.
2. Определение корневого вектора, корневого подпространства. Теоремы о корневых подпространствах, о разложении на корневые подпространства, о нормальной жордановой форме матрицы.
3. Инвариантные подпространства. Теорема об одномерных инвариантных подпространствах.
4. Доказать, что собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям, линейно независимы.
5. Критерий диагонализуемости линейного преобразования.
6. Пространства со скалярным произведением. Теорема о простейших свойствах таких пространств.
7. Теорема Коши-Буняковского-Шварца.
8. Теорема о свойствах нормы вектора.
9. Ортогональность векторов и подпространств. Теорема об ортогональных множествах векторов, процесс ортогонализации.
10. Ортогональное дополнение. Теорема об ортогональном дополнении.
11. Теорема о связи между ортонормированными базисами в пространстве со скалярным произведением.
12. Линейные функционалы. Теорема о строении линейного функционала на пространстве со скалярным произведением.
13. Сопряженное преобразование. Теорема существования сопряженного преобразования.
14. Теорема о свойствах сопряженных преобразований.
15. Теорема о матрице сопряженного преобразования.
16. Нормальные преобразования. Теорема о собственных векторах и собственных значениях нормального преобразования.
17. Преобразование, сохраняющее скалярное произведение. Критерий сохранения скалярного произведения линейным преобразованием.
18. Определение самосопряженного преобразования. Доказательство теоремы о вещественности собственных значений самосопряженного преобразования.
19. Два понятия квадратичной формы (как функции и как многочлена), связь между ними.
20. Теорема о матрице квадратичной формы.
21. Закон инерции квадратичных форм.
22. Критерий положительной определенности квадратичных форм.

Пример контрольной работы №8:

Линейное отображение φ задано в некотором базисе матрицей .

1. Найти собственные значения и собственные векторы отображения φ .
2. Выяснить, можно ли матрицу привести к диагональному виду. В случае положительного ответа выписать ее диагональный вид.
3. Найти минимальный многочлен матрицы.
4. Найти нормальную жорданову форму матрицы.
5. Найти жорданов базис и матрицу отображения φ в этом базисе.
6. Сделать проверку.

Пример контрольной работы №9:

1. В евклидовом пространстве дана линейная оболочка $L = \langle (3, 0, 0, 3), (3, -6, -9, 3), (6, -7, 9, 0) \rangle$
(а) С помощью процесса ортогонализации построить ортогональный базис подпространства L ;



- (b) Найти ортогональное дополнение к L .
2. Найти для вектора $x=(1,1,1)$ и подпространства L , заданного системой.
(a) проекцию вектора и его ортогональную составляющую;
(b) расстояние от вектора до подпространства;
(c) угол между вектором и подпространством.
3. Выяснить, является ли положительно определенной квадратичная форма и с помощью метода Лагранжа привести ее к каноническому виду. Выписать матрицы A, Q, T, T^{-1} . Сделать проверку.

Пример контрольной работы №10:

1. Найти собственные значения и собственные векторы линейного отображения, заданного матрицей.
2. Найти ортогональный базис линейной оболочки: $L=\langle(2,1,3,-1),(7,4,3,-3),(5,7,7,8)\rangle$
3. Дополнить до ортогонального базиса пространства V ортогональный базис, найденный в пункте 2. Найти ортогональное дополнение к L .
4. Привести к каноническому виду квадратичную форму. Выписать соответствующую матрицу линейного преобразования.
5. Проверить, является ли линейное преобразование φ , заданное в некотором ортонормированном базисе матрицей нормальным, самосопряженным, ортогональным?

6.3. Типовые контрольные вопросы и задания для промежуточной аттестации

Вопросы для подготовки к экзамену:

1. Определение векторного пространства. Простейшие свойства векторных пространств.
2. Определение подпространства, основные свойства подпространства.
3. Определение линейной зависимости и линейной независимости векторов, свойства линейно зависимых и независимых векторов.
4. Критерий линейной зависимости.
5. Теорема об очистке линейно полного множества, определение базиса.
6. Теорема о выборе базиса.
7. Теорема о дополнении до базиса.
8. Критерий базиса.
9. Определение координат вектора в базисе, свойства координат вектора.
10. Размерность пространства, теорема о размерности, следствия из нее.
11. Матрица перехода, свойства матрицы перехода.
12. Теорема о монотонности размерности подпространств.
13. Теорема о пересечении подпространств.
14. Линейная оболочка, теорема о линейной оболочке.
15. Сумма подпространств, теорема о сумме подпространств.
16. Теорема о размерности суммы подпространств.
17. Прямая сумма подпространств, теорема о прямой сумме подпространств.
18. Дополнение к подпространству, теорема о существовании дополнения к подпространству.
19. Прямая сумма пространств, теорема о прямой сумме пространств.
20. Три понятия ранга матрицы, доказать, что строчный ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях строк.
21. Доказать, что столбцовый ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях столбцов.
22. Доказать, что строчный ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях столбцов.
23. Доказать, что столбцовый ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях строк.
24. Доказать, что столбцовый ранг матрицы равен строчному рангу матрицы.
25. Доказать, что при элементарных преобразованиях строк минорный ранг матрицы не меняется.
26. Теорема Кронекера-Капелли.
27. Теорема об описании структуры решений системы линейных уравнений.
28. Теорема о размерности пространства решений системы линейных однородных уравнений.
29. Определение линейного оператора, теорема о свойствах линейных операторов.
30. Операции над линейными операторами, теорема о свойствах операций над линейными операторами.
31. Теорема о задании линейного оператора на базисе и матрицей.
32. Теорема о свойствах матриц линейных операторов.
33. Линейные функционалы.
34. Линейные преобразования пространства .



35. Матрицы линейных преобразований в разных базисах.
36. Определение определителя матрицы линейного преобразования, доказать, что определитель линейного преобразования определен корректно.
37. Инвариантные подпространства, свойства инвариантных подпространств.
38. Характеристический многочлен линейного преобразования, теорема о характеристическом многочлене.
39. Теорема Гамильтона-Кэли.
40. Собственные векторы и собственные значения, теорема о нахождении собственных значений.
41. Теорема об одномерных инвариантных подпространствах.
42. Доказать, что собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям линейно независимы.
43. Пространства со скалярным произведением, простейшие свойства таких пространств.
44. Теорема Коши-Буняковского-Шварца.
45. Свойства нормы вектора.
46. Ортогональность векторов и подпространств, теорема об ортогональных множествах векторов, процесс ортогонализации Грама-Шмидта.
47. Ортогональное дополнение, теорема об ортогональном дополнении.
48. Теорема о связи между ортонормированными базисами в пространстве со скалярным произведением.
49. Линейные функционалы, теорема о линейном функционале на пространстве со скалярным произведением.
50. Сопряженное преобразование, теорема существования сопряженного преобразования.
51. Теорема о свойствах сопряженных преобразований.
52. Теорема о матрице сопряженного преобразования.
53. Нормальные преобразования, теорема о собственных векторах и собственных значениях нормального преобразования.
54. Критерий сохранения скалярного произведения линейным преобразованием.
55. Два понятия квадратичной формы (как функции и как многочлена), связь между ними.
56. Теорема о матрице квадратичной формы.
57. Теорема Лагранжа о приведении квадратичной формы к каноническому виду.
58. Теорема о приведении квадратичной формы к диагональному виду с помощью перехода к ортонормированному базису.
59. Закон инерции квадратичных форм.
60. Линейная классификация квадратичных форм.
61. Критерий положительной определенности квадратичных форм.
62. Критерий Сильвестра.

6.4. Критерии оценивания

Суммарный балл экзамена оценивается 32 баллами. Экзамен состоит из 4 вопросов. Форма проведения экзамена – письменная. Максимальная оценка за каждый вопрос составляет 8 баллов. При оценке каждого вопроса используется шкала оценки:

- 8 баллов – вопрос раскрыт полностью, ошибок в ответе нет;
- 7 баллов – вопрос раскрыт не полностью (не менее 90%), ошибок в ответе нет;
- 6 баллов – вопрос раскрыт не полностью (не менее 80%), ошибок в ответе нет;
- 5 баллов – вопрос раскрыт не полностью (не менее 80%), 1-2 негрубые ошибки;
- 4 балла – вопрос раскрыт не полностью (не менее 80%), присутствуют грубые ошибки (не более двух);
- 3 балла – вопрос раскрыт удовлетворительно, имеются существенные недостатки по полноте и содержанию ответа;
- 2 балла – ответ не является логически законченным и обоснованным, поставленный вопрос раскрыт неудовлетворительно с точки зрения полноты и глубины изложения материала;
- 1 балл – в ответе приводятся бессистемные сведения, относящиеся к поставленному вопросу, но не дающие ответа на него;
- 0 баллов – отсутствует ответ на вопрос или содержание ответа не совпадает с поставленным вопросом.

7. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

7.1. Рекомендуемая литература

7.1.1. Основная литература

	Авторы,	Заглавие	Издательство,	Ресурс
Л1.1	Кострикин А. И.	Введение в алгебру: учебник (https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=62951)	Москва : МЦНМО, 2009	ЭБС
Л1.2	Кострикин А. И.	Введение в алгебру: учебник (https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63140)	Москва : МЦНМО, 2009	ЭБС



	Авторы,	Заглавие	Издательство,	Ресурс
Л1.3	Кострикин А. И.	Введение в алгебру: учебник (https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63144)	Москва : МЦНМО, 2009	ЭБС
Л1.4	Кострикин А. И.	Сборник задач по алгебре: задачник: сборник задач и упражнений (https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63274)	Москва : МЦНМО, 2009	ЭБС

7.1.2. Дополнительная литература

	Авторы,	Заглавие	Издательство,	Ресурс
Л2.1	Артамонов В. А., Бахтурин Ю. А., Винберг Э. Б., Голод Е. С., Исковских В. А., Латышев В. Н., Кострикин А. И.	Сборник задач по алгебре: учебник для вузов	Москва : Физматлит, 2001	

7.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет"

Э1	Глухов, М. М. Алгебра : учебник для вузов / М. М. Глухов, В. П. Елизаров, А. А. Нечаев. — 4-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 608 с. — ISBN 978-5-8114-9182-7. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. https://e.lanbook.com/book/187793			
Э2	Проскураков, И. В. Сборник задач по линейной алгебре : учебное пособие для вузов / И. В. Проскураков. — 16-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 476 с. — ISBN 978-5-8114-9039-4. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. https://e.lanbook.com/book/183752			
Э3	Курош, А. Г. Курс высшей алгебры / А. Г. Курош. — 24-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2023. — 432 с. — ISBN 978-5-507-46865-2. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. : https://e.lanbook.com/book/322661			
Э4	Фаддеев, Д. К. Задачи по высшей алгебре : учебник / Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский. — 17-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 288 с. — ISBN 978-5-8114-0427-8. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. https://e.lanbook.com/book/210164			
Э5	Мальцев, А. И. Основы линейной алгебры : учебник / А. И. Мальцев. — 5-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 480 с. — ISBN 978-5-8114-1009-5. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. https://e.lanbook.com/book/210299			
Э6	Икрамов, Х. Д. Задачник по линейной алгебре : учебное пособие / Х. Д. Икрамов ; под редакцией В. В. Воеводина. — 2-е изд. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 320 с. — ISBN 5-8114-0670-3. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. https://e.lanbook.com/book/210110			

7.3 Перечень информационных технологий

7.3.1 Программное обеспечение

LMS Moodle

7.3.2 Профессиональные базы данных и информационно-справочные системы

1. Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU (<https://elibrary.ru/defaultx.asp?>) eLIBRARY.RU : научная электронная библиотека : сайт. — Москва, 2000 — . — URL: <https://elibrary.ru>. — Режим доступа: для зарегистрир. пользователей. — Текст : электронный.
2. Реферативная база по математике MathSciNet (<https://mathscinet.ams.org/mathscinet/>) Mathematical Reviews (MR) : реферативная база данных / American Mathematical Society. — URL: <http://www.ams.org/mathscinet/>. — Яз. рус., англ. — Режим доступа: для зарегистрир. пользователей ЧелГУ. — Текст : электронный.
3. Web of Science (<https://apps.webofknowledge.com>) Web of Science : мультидисциплинарная реферативная база данных / компания Thomson Reuters. — Режим доступа: для зарегистрир. пользователей ЧелГУ. — Текст : электронный.
4. Scopus (<https://www.scopus.com>) Scopus : реферативная база данных / Elsevier BV. — URL: <http://www.scopus.com/>. — Яз. англ. — Режим доступа: для зарегистрир. пользователей ЧелГУ. — Текст : электронный.

8. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)



Для реализации дисциплины используются учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, а также помещения для самостоятельной работы.

Учебные аудитории укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения (мультимедийное устройство, проектор, ноутбук или стационарный компьютер).

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с подключением к сети "Интернет" и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду университета.

9. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

При изучении данной дисциплины используются лекции, практические (семинарские) занятия и самостоятельная работа студента. На лекциях и семинарских занятиях излагается основное содержание тем программы, рассматриваются основные методы и приёмы решения задач.

Для наиболее эффективного изучения дисциплины обучающемуся рекомендуется:

- посещать лекционные занятия, кратко и вдумчиво конспектировать материал лекции, с указанием даты проведения лекции и темы;
- посещать практические (семинарские) занятия, на которых рассматриваются основные методы и приёмы решения задач. Рекомендуется перед каждым практическим занятием выполнить домашнее задание, что позволит лучше усвоить предыдущий материал, и изучить лекционный материал по предстоящей теме;
- самостоятельно прорабатывать материал как после каждого занятия, так и по завершению темы, что позволяет связать воедино полученные сведения и составить цельную картину.

В случае применения при обучении дисциплины электронного обучения, дистанционных образовательных технологий общение обучающихся и преподавателя осуществляется в режиме реального времени (онлайн-лекции (вебинары), чаты, видео-конференции и др.) или отложенного времени (система дистанционного обучения Moodle, MS Office365, форумы, электронная почта и др.).

Большую часть времени обучающиеся самостоятельно работают с учебно-методическими материалами. Студенты имеют возможность консультироваться с преподавателем по всем вопросам, возникающим в ходе самостоятельной работы посредством электронной почты, социальных сетей и т.п.

Доступ обучающегося к учебным ресурсам в режиме отложенного времени, самостоятельной работы осуществляется через сеть Интернет в удобном для него месте, времени и темпе.

При обучении лиц с ограниченными возможностями здоровья электронное обучение, дистанционные образовательные технологии предусматривают возможность приема-передачи информации в доступных для них формах.

Реализация дисциплины с применением электронного обучения, дистанционных образовательных технологий (далее – ЭО, ДОТ) осуществляется на основании «Положения о реализации основных и дополнительных образовательных программ с применением электронного обучения и дистанционных образовательных технологий в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Челябинский государственный университет», «Положения о порядке зачета обучающимся по основным профессиональным образовательным программам высшего образования в ФГБОУ ВО «ЧелГУ» результатов освоения в организациях, осуществляющих образовательную деятельность, учебных предметов, курсов, дисциплин (модулей), практик, дополнительных образовательных программ» посредством электронной информационно-образовательной среды ФГБОУ ВО «ЧелГУ». В исключительных случаях (форс-мажор и т.п.) при реализации образовательной деятельности с применением ЭО, ДОТ могут применять компоненты, не входящие в перечень электронной информационно-образовательной среды.

10. СПЕЦИАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ ОБУЧАЮЩИМИСЯ С ИНВАЛИДНОСТЬЮ И ОГРАНИЧЕННЫМИ ВОЗМОЖНОСТЯМИ ЗДОРОВЬЯ

Освоение дисциплины инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья осуществляется с использованием специальных технических средств и информационных технологий, предоставляемых Ресурсным учебно-методическим центром по обучению инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья ЧелГУ по запросу обучающегося (мобильные специальные технические средства для лиц с нарушениями зрения и с нарушением слуха, ассистивные информационные технологии).

При необходимости для обучающихся с нарушениями зрения на рабочих местах для проведения практических или лабораторных занятий устанавливается специальное программное обеспечение (программа речевой навигации, речевые синтезаторы, экранные лупы).

В учебные аудитории обеспечивается беспрепятственный доступ для обучающихся с инвалидностью и с ограниченными возможностями здоровья. В каждой аудитории, где обучаются инвалиды и лица с ограниченными возможностями здоровья, предусматривается соответствующее количество мест для обучающихся с учетом нарушений их здоровья.



Для освоения дисциплины инвалидам и лицам с ограниченными возможностями здоровья предоставляется доступ к печатным источникам, имеющимся в научной библиотеке ЧелГУ, с помощью специальных технических средств; доступ с помощью специальных технических и программных средств к электронным источникам, представленным в форме электронного документа в фонде научной библиотеки ЧелГУ или электронно-библиотечных системах.

Учебно-методические материалы для обучающихся из числа инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья предоставляются в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и особенностям восприятия информации.

Для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья освоение дисциплины может быть частично или полностью осуществлено с использованием дистанционных образовательных технологий.

При проведении промежуточной аттестации по дисциплине обучающимся с инвалидностью и с ограниченными возможностями здоровья обеспечивается по их заявлению предоставление в доступной форме в зависимости от их индивидуальных особенностей инструкции о порядке проведения промежуточной аттестации, оценочных средств и возможности ответов на задания (письменно на бумаге, набор ответов на компьютере, письменно шрифтом Брайля, с использованием услуг ассистента, устно).

При проведении процедуры оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья предусматривается использование предоставленных ЧелГУ или собственных технических средств, необходимых им в связи с их индивидуальными особенностями. При необходимости инвалидам и лицам с ограниченными возможностями здоровья предоставляется дополнительное время для подготовки ответа на задания, процедура оценивания результатов обучения по дисциплине может проводиться в несколько этапов.

