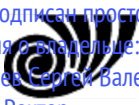


Документ подписан простой электронной подписью Информация о владельце: ФИО: Таскаев Сергей Валерьевич Должность: Ректор	 МИНОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИИ Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Челябинский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ЧелГУ»)	
Дата подписания: 08.04.2026 15:40:42 Уникальный программный ключ: 04c19ed8bfb98f3b6cb77a486b9a8788b8727273	Рабочая программа дисциплины "Гиперболическая геометрия" по направлению подготовки (специальности) 02.03.01 «Математика и компьютерные науки» направленности (профилю) Математические и компьютерные методы в фундаментальных и прикладных исследованиях ФГБОУ ВО «ЧелГУ»	стр. 1

Рабочая программа дисциплины (модуля)*

Гиперболическая геометрия

Направление подготовки (специальность)

02.03.01 Математика и компьютерные науки

Направленность (профиль)

Математические и компьютерные методы в фундаментальных и прикладных исследованиях

Присваиваемая квалификация (степень)

бакалавр

Форма обучения

очная

Год(ы) набора 2026

*Рабочая программа дисциплины (модуля) адаптирована для инклюзивного обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья

Челябинск 2026 г.



Содержание

1. Цели освоения дисциплины
2. Место дисциплины в структуре ОПОП
3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины (модуля)
4. Объем дисциплины (модуля)
5. Структура и содержание дисциплины (модуля)
6. Фонд оценочных средств
 - 6.1. Перечень видов оценочных средств
 - 6.2. Типовые контрольные задания и иные материалы для текущей аттестации
 - 6.3. Типовые контрольные вопросы и задания для промежуточной аттестации
 - 6.4. Критерии оценивания
7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)
 - 7.1. Рекомендуемая литература
 - 7.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет"
 - 7.3. Перечень информационных технологий
8. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)
9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)
10. Специальные условия освоения дисциплины обучающимися с инвалидностью и ограниченными возможностями здоровья



1. ЦЕЛИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Целью преподавания дисциплины является знакомство студентов с основными понятиями и методами гиперболической геометрии. Развитие у студентов логического мышления, навыков в умении использовать геометрические методы при решении прикладных задач, в том числе связанных с реализацией профессиональных функций.

Результаты обучения по дисциплине направлены на достижение индикаторов, соответствующих компетенциям УК-4 и ПК-1:

УК-4.1 Имеет представление о правилах и принципах деловой устной и письменной коммуникации на государственном языке Российской Федерации и иностранном(ых) языке(ах)

УК-4.2 Демонстрирует умение осуществлять деловую коммуникацию в устной и письменной формах, использовать методы и навыки делового общения

УК-4.3 Имеет навыки делового общения на государственном языке Российской Федерации и иностранном(ых) языке(ах)

ПК-1.1. Обладает знаниями об основных методах проведения научно-исследовательских разработок; о способах планирования и организации исследований

ПК-1.2. Демонстрирует умения: проводить поиск, изучение и обобщение научного опыта в соответствующей области исследований; определять цели и задачи планируемых исследований и разработок; проводить исследование, составлять его описание, формулировать выводы по полученным результатам

ПК-1.3. Имеет практический опыт (навыки): проведения научных исследований в соответствии с поставленной целью; составления отчетов по теме и по результатам проведенных научно-исследовательских разработок

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОПОП

Цикл (раздел) ОПОП: К.М.03.ДВ.01.01.03

2.1 Требования к предварительной подготовке обучающегося:

Изучение данной дисциплины опирается на знания по элементарной математике, полученные студентами в средней школе, а также требует предварительных знаний по дисциплинам:

Дифференциальная геометрия

Топология

Комплексный анализ

2.2 Дисциплины и практики, для которых освоение данной дисциплины (модуля) необходимо как предшествующее:

Знания по дисциплине могут быть полезны для подготовки и написания выпускной квалификационной работы.

Подготовка к процедуре защиты и защита выпускной квалификационной работы

3. КОМПЕТЕНЦИИ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

УК-4: Способен осуществлять деловую коммуникацию в устной и письменной формах на государственном языке Российской Федерации и иностранном(ых) языке(ах)

Знать:

Для достижения УК-4.1: терминологию гиперболической геометрии на русском и английском языках; принципы построения устного и письменного высказывания на русском и английском языках в профессиональной сфере

Уметь:

Для достижения УК-4.2: применять на практике деловую коммуникацию в устной и письменной формах на русском и английском языках основных терминах гиперболической геометрии

Владеть:

Для достижения УК-4.3: навыками чтения и перевода текстов по гиперболической геометрии на английском языке

ПК-1: Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, при проведении научно-исследовательских разработок



Рабочая программа дисциплины "Гиперболическая геометрия" по направлению подготовки (специальности) 02.03.01 "Математика и компьютерные науки" направленности (профилю) Математические и компьютерные методы в фундаментальных и прикладных исследованиях ФГБОУ ВО «ЧелГУ»

стр. 4

Знать:

Для достижения ПК-1.1: формулировки результатов классических задач гиперболической топологии

Уметь:

Для достижения ПК-1.2: проводить поиск, изучение и обобщение научного опыта в гиперболической геометрии

Владеть:

Для достижения ПК-1.3: навыками решения задач профессиональной области, используя аппарат гиперболической геометрии

В результате освоения дисциплины обучающийся должен

3.1	Знать:
3.1.1	строгие доказательства основных утверждений
3.2	Уметь:
3.2.1	сформулировать следствия полученного результата
3.3	Владеть:
3.3.1	навыками формулирования результата решения и научного исследования

4. ОБЪЕМ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Общая трудоемкость	5 ЗЕТ
Часов по учебному плану : 180	Виды контроля в семестрах: экзамены 7
в том числе :	
аудиторные занятия : 50	
самостоятельная работа : 99,7	
часов на контроль : 27	
контактная работа: 53,3	
ИКР: 3,3	

5. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Код занятия	Наименование разделов и тем /вид занятия/	Семестр / Курс	Часов	Литература
	Раздел 1. Гиперболическая геометрия			
1.1	"Начала" Евклида и пятый постулат /Лек/	7	2	Л1.1 Л1.2 Л1.3 Л1.4 Л1.5Л2.1 Л2.2 Л2.3
1.2	Конечные геометрии /Лек/	7	2	Л1.1 Л1.2 Л1.3 Л1.4 Л1.5Л2.1 Л2.2 Л2.3
1.3	Проективная геометрия /Лек/	7	4	Л1.1 Л1.2 Л1.3 Л1.4 Л1.5Л2.1 Л2.2 Л2.3
1.4	Лобачевский и его геометрия /Лек/	7	2	Л1.1 Л1.2 Л1.3 Л1.4 Л1.5Л2.1 Л2.2 Л2.3
1.5	Модель Пуанкаре геометрии Лобачевского /Лек/	7	2	Л1.1 Л1.2 Л1.3 Л1.4 Л1.5Л2.1 Л2.2 Л2.3
1.6	Модель Клейна геометрии Лобачевского /Лек/	7	2	Л1.1 Л1.2 Л1.3 Л1.4 Л1.5Л2.1 Л2.2 Л2.3
1.7	Группы движений Евклидовой плоскости /Лек/	7	2	Л1.1 Л1.2 Л1.3 Л1.4 Л1.5Л2.1 Л2.2 Л2.3



1.8	Группы движений гиперболической плоскости /Лек/	7	4	Л1.1 Л1.2 Л1.3 Л1.4 Л1.5Л2.1 Л2.2 Л2.3
1.9	Сферическая геометрия /Лек/	7	2	Л1.1 Л1.2 Л1.3 Л1.4 Л1.5Л2.1 Л2.2 Л2.3
1.10	Трёхмерные гиперболические многообразия /Лек/	7	2	Л1.1 Л1.2 Л1.3 Л1.4 Л1.5Л2.1 Л2.2 Л2.3
1.11	Построение трёхмерных гиперболических многообразий /Лек/	7	4	Л1.1 Л1.2 Л1.3 Л1.4 Л1.5Л2.1 Л2.2 Л2.3
1.12	Вычисление объёмов гиперболических многообразий /Лек/	7	4	Л1.1 Л1.2 Л1.3 Л1.4 Л1.5Л2.1 Л2.2 Л2.3
1.13	Многообразия наименьшего объёма /Лек/	7	2	Л1.1 Л1.2 Л1.3 Л1.4 Л1.5Л2.1 Л2.2 Л2.3
1.14	Проективная геометрия /Пр/	7	4	Л1.1 Л1.2 Л1.3 Л1.4 Л1.5Л2.1 Л2.2 Л2.3
1.15	Модели гиперболической геометрии /Пр/	7	4	Л1.1 Л1.2 Л1.3 Л1.4 Л1.5Л2.1 Л2.2 Л2.3
1.16	Группы изометрий /Пр/	7	2	Л1.1 Л1.2 Л1.3 Л1.4 Л1.5Л2.1 Л2.2 Л2.3
1.17	Гиперболические многообразия /Пр/	7	4	Л1.1 Л1.2 Л1.3 Л1.4 Л1.5Л2.1 Л2.2 Л2.3
1.18	Контрольная работа /Пр/	7	2	Л1.1 Л1.2 Л1.3 Л1.4 Л1.5Л2.1 Л2.2 Л2.3
1.19	Гиперболическая геометрия /Ср/	7	99,7	Л1.1 Л1.2 Л1.3 Л1.4 Л1.5Л2.1 Л2.2 Л2.3
Раздел 2. Экзамен				
2.1	/Экзамен/	7	27	Л1.1 Л1.2 Л1.3 Л1.4 Л1.5Л2.1 Л2.2 Л2.3
Раздел 3. Иная контактная работа				
3.1	Индивидуальные консультации, текущий контроль /ИКР/	7	3,3	Л1.1 Л1.2 Л1.3 Л1.4 Л1.5Л2.1 Л2.2 Л2.3

6. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

6.1. Перечень видов оценочных средств

Контрольная работа, экзамен.

6.2. Типовые контрольные задания и иные материалы для текущей аттестации

Пример контрольной работы:

1. Даны координаты вершин треугольника $A(2;3)$; $B(5;7)$; $C(7;6)$. Найти длины сторон треугольника и площадь треугольника ABC .
2. Вычислить объем дополнительного пространства узла 8-ка.

6.3. Типовые контрольные вопросы и задания для промежуточной аттестации



Вопросы для экзамена:

1. «Начала» Евклида и пятый постулат. Формулировка пятого постулата в евклидовой геометрии и сферической геометрии. Что является точками и прямыми в этих геометриях?
2. Конечная геометрия. Примеры.
3. Проективная геометрия.
4. Сферическая геометрия.
5. Псевдосфера как модель гиперболической геометрии.
6. Модель Бельтрами – Клейна в диске.
7. Модель Пуанкаре в диске.
8. Модель Пуанкаре в верхней полуплоскости.
9. Доказательство теоремы, что вертикальные полупрямые являются геодезическими в гиперболической плоскости H^2 .
10. Три преобразования гиперболической плоскости H^2 .
11. Теорема о преобразованиях гиперболической плоскости.
12. Доказать теорему, что любая полуокружность, ортогональная вещественной оси, может быть получена из вертикальной полупрямой при помощи подходящей инверсии.
13. Доказать теорему, что любая вертикальная полупрямая может быть получена из полуокружности, при помощи подходящей инверсии.
14. Доказать, что полуокружность, ортогональная вещественной оси, является геодезической в H^2 .
15. Теорема о существовании инверсии, которая точку $Q(p;q)$ переводит в точку $P(a;\beta)$.
16. Теорема об инверсии, которая полуокружность переведет в полупрямую в случае, когда прямые пересекаются.
17. Доказать, что инверсия является инволюцией.
18. Доказать, что дробно-линейное преобразование g сохраняет метрику в H^2 .
19. Доказать, что существует движение g , которое точку z переведет в точку i , а прямую, на которой лежит точка z , в полюсь.
20. Как найти расстояние между двумя точками используя движение.
21. Вывести площадь треугольника.
22. Доказательство теоремы «Пифагора» в H^2 .
23. Теорема об прямоугольном треугольнике в H^2 . Следствие.
24. Доказательство теоремы «синусов» в H^2 .
25. Доказательство теоремы «косинусов» в H^2 .
26. Доказательство теоремы «двойственная теорема косинусов» в H^2 .
27. Показать, что модель Пуанкаре верхней полуплоскости изоморфна модели Пуанкаре в единичном диске. Написать преобразование f , которое метрику в верхней полуплоскости переведет в метрику в диске.
28. Доказать, что инверсия - это частный случай дробно-линейного преобразования.
29. Площадь поверхности в H^2 .
30. Модель Пуанкаре в верхнем полупространстве. Что является прямыми и плоскостями. Написать метрику в этой модели. Абсолют.
31. Модель Пуанкаре в шаре. Написать метрику в этой модели. Что является прямыми и плоскостями. Абсолют.
32. Модель Бельтрами – Клейна в диске. Что является прямыми и плоскостями. Написать метрику в этой модели. Абсолют.
33. Движение γ в модели Пуанкаре в верхнем полупространстве H^3 . Определение. Лемма о том, что движение является отображением из H^3 в H^3 .
34. Движение γ сохраняет метрику в H^3 . Формула нахождения длины отрезка в H^3 .
35. Функция Лобачевского. Определение и свойства.
36. Определение бесконечного конуса над графиком функции. Объем бесконечного конуса над функцией.
37. Объем бесконечного конуса над прямоугольным треугольником.
38. Теорема об объеме идеального тетраэдра. Следствие.
39. Идеальная пирамида. Теорема об объеме идеальной пирамиды. Следствие.
40. Приближенное вычисление объемов. Значение функции Лобачевского.
41. Объем регулярной идеальной n -призмы. Следствие.
42. Объем регулярной идеальной n -угольной антипризмы. Следствие.
43. Объем тетраэдра с тремя идеальными вершинами. Следствие.
44. Бипрямоугольный тетраэдр. Определение и его объем.

6.4. Критерии оценивания

Итоговая оценка за экзамен ставится с использованием балльно-рейтинговой системы. За семестр студент может набрать 100 баллов. Эти баллы складываются исходя из следующего:



1. Контрольная работа - оценивается максимум в 40 баллов;
2. Ответ на экзамене - оценивается максимум в 60 баллов.

Суммируются баллы, набранные студентом при решении контрольной работы и при ответе на экзаменационные вопросы. Итоговая оценка выставляется по следующим критериям:

- 0 - 49 баллов - не удовлетворительно;
- 50 - 69 баллов - удовлетворительно;
- 70 - 89 баллов - хорошо;
- 90 - 100 баллов - отлично.

7. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

7.1. Рекомендуемая литература

7.1.1. Основная литература

	Авторы,	Заглавие	Издательство,	Ресурс
Л1.1	Погорелов А. В., Лапко А. Ф.	Дифференциальная геометрия: учебник для математических специальностей университетов и педагогических институтов	Москва : Наука, 1974	
Л1.2	Киреев И. В., Кнауб Л. В., Левчук Д. В., Нужин Я. Н.	Тензорный анализ и дифференциальная геометрия: учебное пособие (https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=497726)	Красноярск : Сибирский федеральный университет (СФУ), 2017	ЭБС
Л1.3	Рустанов А.Р., Харитоновна С.В., Полькина Е.А.	Элементы дифференциальной геометрии: учебное пособие (https://znanium.com/catalog/document?id=375283)	Москва : Московский педагогический государственный университет, 2020	ЭБС
Л1.4	Павлов Е. А., Рудницкий О. И.	Дифференциальная геометрия в упражнениях и задачах (https://e.lanbook.com/book/195518)	Санкт- Петербург : Лань, 2022	ЭБС
Л1.5	Паньженский В. И.	Введение в дифференциальную геометрию (https://e.lanbook.com/book/212126)	Санкт- Петербург : Лань, 2022	ЭБС

7.1.2. Дополнительная литература

	Авторы,	Заглавие	Издательство,	Ресурс
Л2.1	Клейн Ф., Брушлинский Н. К.	Неевклидова геометрия: учебное пособие (https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=100991)	Москва, Ленинград : Объединенное научно- техническое издательство (Ленинград), 1936	ЭБС
Л2.2	Фоменко А. Т.	Дифференциальная геометрия и топология: дополнительные главы	Москва : Издательство Московского государственного университета, 1983	
Л2.3	Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.	Современная геометрия: методы и приложения : учебное пособие для студентов физико-математических специальностей университетов	Москва : Наука, 1979	

7.3 Перечень информационных технологий

7.3.1 Программное обеспечение



LMS Moodle

7.3.2 Профессиональные базы данных и информационно-справочные системы

1. Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU (<https://elibrary.ru/defaultx.asp?>) eLIBRARY.RU : научная электронная библиотека : сайт. – Москва, 2000 – . – URL: <https://elibrary.ru>. – Режим доступа: для зарегистрир. пользователей. – Текст : электронный.

2. Реферативная база по математике MathSciNet (<https://mathscinet.ams.org/mathscinet/>) Mathematical Reviews (MR) : реферативная база данных / American Mathematical Society. – URL: <http://www.ams.org/mathscinet/>. – Яз. рус., англ. – Режим доступа: для зарегистрир. пользователей ЧелГУ. – Текст : электронный.

3. Web of Science (<https://apps.webofknowledge.com>) Web of Science : мультидисциплинарная реферативная база данных / компания Thomson Reuters. – Режим доступа: для зарегистрир. пользователей ЧелГУ. – Текст : электронный.

4. Scopus (<https://www.scopus.com>) Scopus : реферативная база данных / Elsevier BV. – URL: <http://www.scopus.com/>. – Яз. англ. – Режим доступа: для зарегистрир. пользователей ЧелГУ. – Текст : электронный.

8. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Для реализации дисциплины используются учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, а также помещения для самостоятельной работы.

Учебные аудитории укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения (мультимедийное устройство, проектор, ноутбук или стационарный компьютер).

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с подключением к сети "Интернет" и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду университета.

9. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

При изучении данной дисциплины используются лекции, практические (семинарские) занятия и самостоятельная работа студента. На лекциях и семинарских занятиях излагается основное содержание тем программы, рассматриваются основные методы и приёмы решения задач.

Для наиболее эффективного изучения дисциплины обучающемуся рекомендуется:

- посещать лекционные занятия, кратко и вдумчиво конспектировать материал лекции, с указанием даты проведения лекции и темы;
- посещать практические (семинарские) занятия, на которых рассматриваются основные методы и приёмы решения задач. Рекомендуется перед каждым практическим занятием выполнить домашнее задание, что позволит лучше усвоить предыдущий материал, и изучить лекционный материал по предстоящей теме;
- самостоятельно прорабатывать материал как после каждого занятия, так и по завершению темы, что позволяет связать воедино полученные сведения и составить цельную картину.

При обучении лиц с ограниченными возможностями здоровья электронное обучение, дистанционные образовательные технологии предусматривают возможность приема-передачи информации в доступных для них формах.

Реализация дисциплины с применением электронного обучения, дистанционных образовательных технологий (далее – ЭО, ДОТ) осуществляется на основании «Положения о реализации основных и дополнительных образовательных программ с применением электронного обучения и дистанционных образовательных технологий в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Челябинский государственный университет», «Положения о порядке зачета обучающимся по основным профессиональным образовательным программам высшего образования в ФГБОУ ВО «ЧелГУ» результатов освоения в организациях, осуществляющих образовательную деятельность, учебных предметов, курсов, дисциплин (модулей), практик, дополнительных образовательных программ» посредством электронной информационно-образовательной среды ФГБОУ ВО «ЧелГУ». В исключительных случаях (форс-мажор и т.п.) при реализации образовательной деятельности с применением ЭО, ДОТ могут применять компоненты, не входящие в перечень электронной информационно-образовательной среды.

10. СПЕЦИАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ ОБУЧАЮЩИМИСЯ С ИНВАЛИДНОСТЬЮ И ОГРАНИЧЕННЫМИ ВОЗМОЖНОСТЯМИ ЗДОРОВЬЯ

Освоение дисциплины инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья осуществляется с использованием специальных технических средств и информационных технологий, предоставляемых Ресурсным учебно-методическим центром по обучению инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья ЧелГУ по



запросу обучающегося (мобильные специальные технические средства для лиц с нарушениями зрения и с нарушением слуха, ассистивные информационные технологии).

При необходимости для обучающихся с нарушениями зрения на рабочих местах для проведения практических или лабораторных занятий устанавливается специальное программное обеспечение (программа речевой навигации, речевые синтезаторы, экранные лупы).

В учебные аудитории обеспечивается беспрепятственный доступ для обучающихся с инвалидностью и с ограниченными возможностями здоровья. В каждой аудитории, где обучаются инвалиды и лица с ограниченными возможностями здоровья, предусматривается соответствующее количество мест для обучающихся с учетом нарушений их здоровья.

Для освоения дисциплины инвалидам и лицам с ограниченными возможностями здоровья предоставляется доступ к печатным источникам, имеющимся в научной библиотеке ЧелГУ, с помощью специальных технических средств; доступ с помощью специальных технических и программных средств к электронным источникам, представленным в форме электронного документа в фонде научной библиотеки ЧелГУ или электронно-библиотечных системах.

Учебно-методические материалы для обучающихся из числа инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья предоставляются в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и особенностям восприятия информации.

Для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья освоение дисциплины может быть частично или полностью осуществлено с использованием дистанционных образовательных технологий.

При проведении промежуточной аттестации по дисциплине обучающимся с инвалидностью и с ограниченными возможностями здоровья обеспечивается по их заявлению предоставление в доступной форме в зависимости от их индивидуальных особенностей инструкции о порядке проведения промежуточной аттестации, оценочных средств и возможности ответов на задания (письменно на бумаге, набор ответов на компьютере, письменно шрифтом Брайля, с использованием услуг ассистента, устно).

При проведении процедуры оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья предусматривается использование предоставленных ЧелГУ или собственных технических средств, необходимых им в связи с их индивидуальными особенностями. При необходимости инвалидам и лицам с ограниченными возможностями здоровья предоставляется дополнительное время для подготовки ответа на задания, процедура оценивания результатов обучения по дисциплине может проводиться в несколько этапов.

