

Документ подписан простой электронной подписью

Информация о владельце:

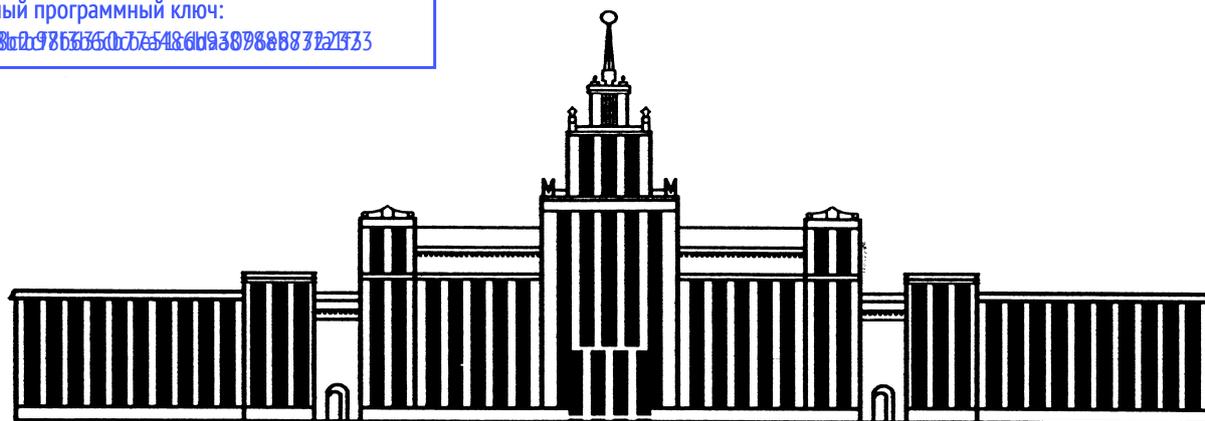
ФИО: Тасманов Сергей Валерьевич

Должность: Ректор

Дата подписания: 06.03.2024 00:27:08

Уникальный программный ключ:

09192408019853350754860930980887223733



ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

517.5(07)

П128

Н.Д. Пазий, М.А. Сагадеева

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Учебное пособие

Челябинск

2015

Министерство образования и науки Российской Федерации
Южно-Уральский государственный университет
Кафедра математического моделирования

517.5(07)
П128

Н.Д. Пазий, М.А. Сагадеева

**ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ
КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО**

Учебное пособие

Челябинск
Издательский центр ЮУрГУ
2015

УДК 517.53(076.2)

П128

*Одобрено учебно-методической комиссией факультета
Математики, механики и компьютерных наук*

*Рецензенты: доктор физ.-мат. наук, доцент С.М. Воронин,
канд.физ.-мат. наук, С.А. Никитина*

Пазий, Н.Д.

П128 Теория функций комплексного переменного: учебное пособие /
Н.Д. Пазий, М.А. Сагадеева. – Челябинск: Издательский центр
ЮУрГУ, 2015. – 103 с.

Учебное пособие предназначается для студентов направлений подготовки «Математика», «Прикладная математика и информатика», «Механика и математическое моделирование», «Прикладная математика», «Математика и компьютерные науки» и «Программная инженерия». В пособии содержатся разноуровневые задачи и теоретический материал, посвященный теории пределов, дифференцируемости, аналитичности и основам интегрального исчисления функций комплексной переменной. Пособие предназначено для студентов очной формы обучения, но может быть полезно студентам заочной и дистанционной форм обучения для самостоятельного изучения дисциплины.

УДК 517.53(076.2)

© Издательский центр ЮУрГУ, 2015

Оглавление

Введение	5
1. Комплексные числа	
1.1. Алгебраическая структура множества комплексных чисел	6
1.2. Геометрическая интерпретация множества комплексных чисел	8
1.3. Множества расширенной комплексной плоскости	12
Задачи	16
2. Свойства функций комплексного переменного	20
2.1. Предел функций комплексного переменного	20
2.2. Производная функций комплексного переменного	22
2.3. Голоморфность функции комплексного переменного	25
Задачи	28
3. Основные функции комплексного переменного	
3.1. Определение и свойства однолистных элементарных функций	30
3.1.1. Функция $w=az+b$	30
3.1.2. Функция $w=z^{-1}$	31
3.2. Определение и свойства целых степенной и показательной функций	33
3.2.1. Целая степенная функция	33
3.2.2. Целая показательная функция	36
3.3. Обращение целых степенной и показательной функций	39

3.4. Определение и свойства основных тригонометрических функций	42
3.5. Обращение основных тригонометрических функций	45
3.6. Общие степенная и показательная функции	48
Задачи	52
4. Ряды Тейлора и Лорана	
4.1. Степенные ряды. Ряд Тейлора	55
4.2. Ряды Лорана	60
Задачи	65
5. Изолированные особые точки и вычеты функций	
5.1. Классификация особых точек.	68
5.2. Вычеты функций	75
Задачи	79
6. Вычисление интегралов с помощью вычетов	
6.1. Вычисление интегралов по замкнутому контуру	82
6.2. Применение теории вычетов в вычислении интегралов по вещественной прямой	84
Задачи	87
Ответы	95
Библиографический список	103

Введение

Пособие посвящено теории функций комплексного переменного. Приведены основные теоретические сведения и формулы, необходимые для решения задач. Большое внимание уделено методам интегрирования функций комплексного переменного.

Пособие рекомендуется студентам, владеющим навыками, приобретенными при изучении математического анализа или соответствующего раздела математики, и предназначено как для студентов очной формы обучения, так и для студентов заочной и дистанционной форм обучения.

Материал в пособии разбит на шесть глав. В первой — вводится понятие комплексных чисел, даются разные интерпретации и формы записи комплексных чисел. В конце первой главы приводятся задачи на закрепление правил выполнения действий над комплексными числами.

Во второй и третьей главах рассматриваются комплексные функции и их свойства. Здесь определяются основные функции комплексного переменного и обратные к ним. После этих глав приведены задачи на вычисление значений функций комплексного переменного.

В четвертой главе рассматриваются ряды Тейлора и Лорана. Приводятся примеры разложений функций в ряд. В пятой главе обсуждается классификация особых точек, понятие вычета и способы нахождения вычетов. В последней, шестой главе обсуждаются методы вычислений интегралов с помощью теории вычетов.

Каждая глава оканчивается набором задач, решение которых способствует пониманию излагаемого материала и усвоению методов. Задачи разбиты по уровням сложности. Уровень А – базовый, Б – средний и В – высокий уровни сложности. В конце пособия приведены ответы к предлагаемым задачам.

1. Комплексные числа

1.1. Алгебраическая структура множества

КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Определение 1.1. Выражения вида $z = x + iy$, где $x, y \in \mathbb{R}$, называются *комплексными числами*, если для них следующим образом определены понятия равенства и операции сложения и умножения.

(i) Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называются *равными*, если $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$. В этом случае пишут $z_1 = z_2$.

(ii) *Суммой* комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число $z = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$.

(iii) *Произведением* комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число $z = z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$.

Иначе говоря, комплексные числа складываются и умножаются как многочлены относительно i , но символ i^2 заменяется числом -1 . По этой причине i иногда называют *мнимой единицей*.

Пример 1.1. Найдем значение выражения $(3 + 2i)(1 - 3i)$.

$$(3 + 2i)(1 - 3i) = 3 - 9i + 2i - 2i(3i) = 3 - 7i - 6i^2 = 9 - 7i.$$

Определение 1.2. Число $x \in \mathbb{R}$ называется *действительной частью* комплексного числа $z = x + iy$ и обозначается $x = \operatorname{Re} z$. Число $y \in \mathbb{R}$ называется *мнимой частью* комплексного числа $z = x + iy$ и обозначается $y = \operatorname{Im} z$. Таким образом, комплексное число z может быть представлено в виде $z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z$. Комплексное число $\bar{z} = x - iy$ называется *сопряженным* к комплексному числу $z = x + iy$, а вещественное число $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ называется *модулем* комплексного числа $z = x + iy$.

Упражнение 1.1. Доказать, что $\bar{\bar{z}} = z, \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2, z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z, z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im} z$.

Упражнение 1.2. Доказать, что $|z|^2 = z \cdot \bar{z}, -|z| \leq \operatorname{Re} z \leq |z|, -|z| \leq \operatorname{Im} z \leq |z|, |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, ||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$.

По аналогии с множеством действительных чисел, обозначаемых символом \mathbb{R} , множество всех комплексных чисел обозначается символом \mathbb{C} . Для выяснения алгебраической структуры множества \mathbb{C} напомним одно понятие, введенное нами при изучении множества \mathbb{R} .

Пусть $z \in \mathbb{C} \setminus \{0 + i0\}$, т.е. либо $\operatorname{Re} z \neq 0$, либо $\operatorname{Im} z \neq 0$. Найдем обратный элемент по умножению к числу z , который обозначим символом z^{-1} . Поскольку $z \cdot z^{-1} = 1 + i0$, то имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Re} z^{-1} - \operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} z^{-1} = 1, \\ \operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z^{-1} - \operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Re} z^{-1} = 0. \end{cases}$$

Решая ее относительно $\operatorname{Re} z^{-1}$ и $\operatorname{Im} z^{-1}$, получаем

$$\operatorname{Re} z^{-1} = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|^2}, \quad \operatorname{Im} z^{-1} = -\frac{\operatorname{Im} z}{|z|^2}.$$

Другими словами, $z^{-1} = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|^2} - i \frac{\operatorname{Im} z}{|z|^2}$. \triangleright

Замечание 1.1. В дальнейшем для краткости записи нейтральные элементы $0 + i0$ и $1 + i0$ будем обозначать символами 0 и 1 соответственно. Более того, любое комплексное число вида $x + i0$ будем отождествлять с действительным числом x и тем самым включим множество \mathbb{R} во множество \mathbb{C} .

Для иллюстрации действий с комплексными числами рассмотрим

Пример 1.2. 1) Найти корни z_1, z_2 ($\operatorname{Im} z_1 > 0$) квадратного уравнения $4z^2 - 20z + 41 = 0$.

2) Найти значения выражений $w_1 = z_1 - z_3$, $w_2 = (z_4 + z_2)(z_1 - z_3)$, $w_3 = \frac{z_2 - z_4}{z_1 + z_3}$, если $z_3 = 1/2 - i$, $z_4 = -3/2 + 3i$.

Решение:

1) Корни квадратного уравнения $4z^2 - 20z + 41 = 0$ находим с помощью дискриминанта. В данном случае получим $D/4 = -64$, поэтому

$$z_{1,2} = \frac{10 \pm 8i}{4} = 5/2 \pm 2i.$$

2) Найдем $w_1 = z_1 - z_3$.

$$w_1 = z_1 - z_3 = 5/2 + 2i - (1/2 - i) = (5/2 - 1/2) + (2i - (-i)) = 2 + 3i.$$

Вычислим $w_2 = (z_4 + z_2)(z_1 - z_3)$. Найдем

$$z_4 + z_2 = -3/2 + 3i + (5/2 - 2i) = 1 + i,$$

откуда $w_2 = (z_4 + z_2)(z_1 - z_3) =$

$$= (1 + i)(2 + 3i) = (2 + i(3i)) + (1(3i) + (i)2) = -1 + 5i.$$

Наконец, найдем $w_3 = \frac{z_2 - z_4}{z_1 + z_3}$. Для этого вычислим

$$(z_1 + z_3) = 5/2 + 2i + (1/2 - i) = 2 + i, \quad (z_2 - z_4) = 5/2 - 2i - (-3/2 + 3i) = 4 - 5i,$$

и подставим их в w_3 . Получим

$$w_3 = \frac{z_2 - z_4}{z_1 + z_3} = \frac{4 - 5i}{2 + i} = \frac{(4 - 5i)(2 - i)}{(2 + i)(2 - i)} = \frac{3 - 14i}{5} = \frac{3}{5} - \frac{14}{5}i.$$

Продолжим изучение множества \mathbb{C} по сравнению с множеством \mathbb{R} . Для любых двух различных действительных чисел x и y всегда истинно одно из двух - либо $x > y$, либо $y > x$. Другими словами, множество \mathbb{R} можно линейно упорядочить.

Оказывается, что множество \mathbb{C} *нельзя линейно упорядочить*. Это единственное, но очень существенное различие множеств \mathbb{R} и \mathbb{C} . Докажем это от противного. Пусть множество \mathbb{C} линейно упорядочено. Поскольку $i \neq 0$, то должно быть либо $i > 0$, либо $i < 0$. Пусть $i > 0$. Умножая обе части неравенства на положительное число i , получим $-1 > 0$. Противоречие. Допустим, что $i < 0$. Умножая обе части неравенства на отрицательное число i , получим то же самое противоречие.

1.2. Геометрическая интерпретация

множества комплексных чисел

Между точками плоскости \mathbb{R}^2 , снабженной системой декартовых координат (x, y) , и множеством \mathbb{C} можно установить с помощью биекции, сопоставляющей $z \in \mathbb{C}$ точку плоскости $(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z) \in \mathbb{R}^2$ и наоборот точке $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ поставить в соответствие $x + iy \in \mathbb{C}$ (см. рис. 1).

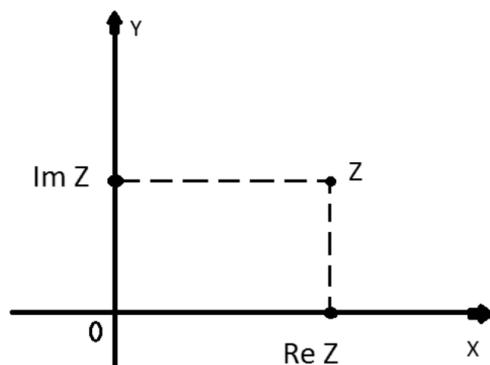


Рис. 1. Геометрическая интерпретация комплексных чисел

Поскольку точкам плоскости \mathbb{R}^2 можно биективно поставить в соответствие элементы линейного пространства \mathbb{E}^2 (в дальнейшем условимся не различать \mathbb{R}^2 и \mathbb{E}^2), то операции сложения и вычитания комплексных чисел соответствуют операциям сложения и вычитания векторов (см. рис. 2, 3).

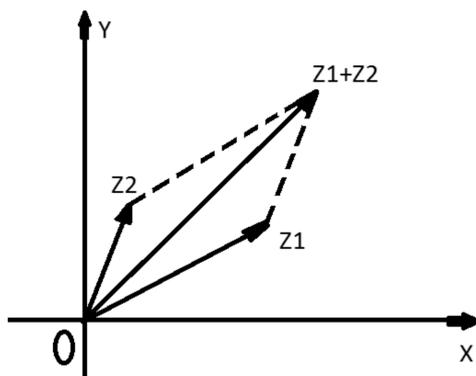


Рис. 2. Сложение комплексных чисел

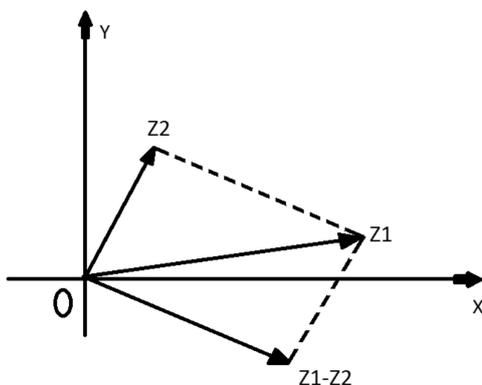


Рис. 3. Вычитание комплексных чисел

Сопряженному числу \bar{z} будет соответствовать точка $(\operatorname{Re} z, -\operatorname{Im} z)$, сим-

метричная точке $(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z)$ относительно оси Ox . Модулю числа z соответствует длина вектора $(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z)$ (см. рис. 4).

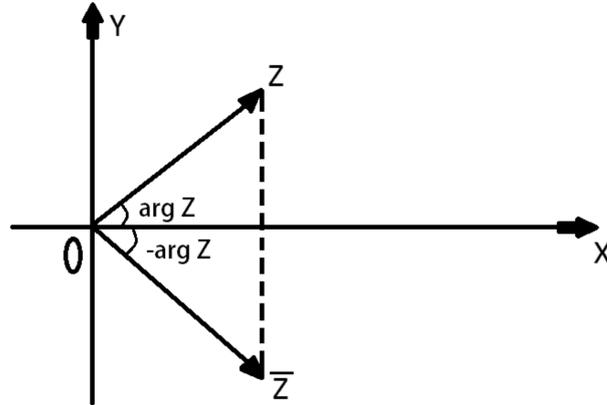


Рис. 4. Сопряженные комплексные числа

Пример 1.3. Определить вид кривой, заданной в \mathbb{C} уравнением $z = t^2 - 2t + 3 + i(t - 1)$.

Решение: В силу геометрической интерпретации $z = x(t) + iy(t)$, получаем параметрическое уравнение кривой

$$\begin{cases} x(t) = t^2 - 2t + 3, \\ y(t) = t - 1. \end{cases}$$

Выделив общую часть выражений, получим

$$\begin{cases} x = t^2 - 2t + 1 + 2, \\ y = t - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y^2 + 2, \\ y = t - 1. \end{cases}$$

Таким образом, получили уравнение параболы $y^2 = x - 2$.

Для того, чтобы определить умножение в плоскости \mathbb{R}^2 , удобно перейти к полярным координатам $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$. Другими словами, поставим в соответствие комплексному числу $z \neq 0$ его модуль $|z|$ и угол φ , отсчитываемый от положительного направления оси Ox в направлении против часовой стрелки и вычисляемый из формул

$$\cos \varphi = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}, \quad \sin \varphi = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}.$$

Угол φ называется *аргументом* комплексного числа z и определяется с точностью до слагаемого $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Значение $\arg z$, удовлетворяющее условию $-\pi < \arg z \leq \pi$, называется *главным*. Точка $z = 0$ является *единственной* точкой плоскости \mathbb{R}^2 , для которой аргумент *не определен*.

Из формул, связывающих декартовы и полярные координаты точки на плоскости, получается *тригонометрическая запись*

$$z = |z|(\cos \arg z + i \sin \arg z)$$

комплексного числа z . Пользуясь этой записью, найдем

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= |z_1|(\cos \arg z_1 + i \sin \arg z_1) \cdot \\ &|z_2|(\cos \arg z_2 + i \sin \arg z_2) = \\ &|z_1 \cdot z_2|(\cos(\arg z_1 + \arg z_2) + i \sin(\arg z_1 + \arg z_2)). \end{aligned}$$

Отсюда

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad \arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2.$$

На рисунке 5 изображено построение числа $z = z_1 \cdot z_2$.

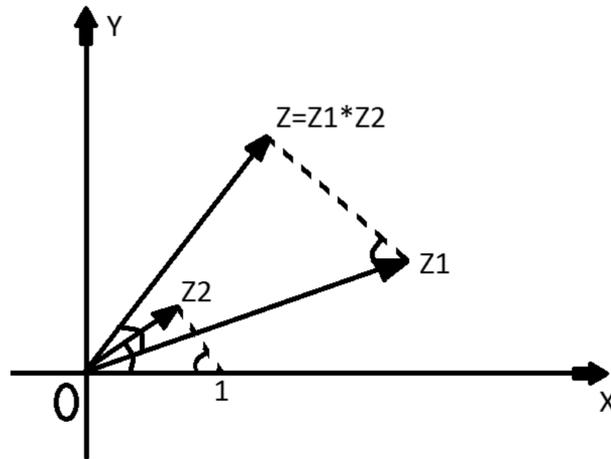


Рис. 5. Произведение комплексных чисел

Чтобы получить z , достаточно на отрезке Oz_1 как на основании построить треугольник Oz_1z , подобный треугольнику $O1z_2$.

Упражнение 1.3. Доказать, что для любых чисел $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2.$$

Упражнение 1.4. Доказать формулу Муавра

$$z^n = |z|^n (\cos n(\arg z + 2\pi k) + i \sin n(\arg z + 2\pi k)), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Определение 1.3. Представление множества комплексных чисел в виде точек плоскости \mathbb{R}^2 с сохранением алгебраической структуры называется *геометрической интерпретацией* множества комплексных чисел.

Пример 1.4. Определить вид кривой, заданной в \mathbb{C} уравнением $z = 3e^{it} + \frac{1}{e^{it}}$.

Решение: Преобразуем запись уравнения кривой

$$\begin{aligned} z &= 3e^{it} + \frac{1}{e^{it}} = 3(\cos t + i \sin t) + \frac{1}{\cos t + i \sin t} = \frac{3(\cos t + i \sin t)^2 + 1}{\cos t + i \sin t} = \\ &= \frac{(3(\cos t + i \sin t)^2 + 1)(\cos t - i \sin t)}{(\cos t + i \sin t)(\cos t - i \sin t)} = \frac{3(\cos t + i \sin t) + (\cos t - i \sin t)}{1}. \end{aligned}$$

В силу геометрической интерпретации $z = x(t) + iy(t)$, получаем параметрическое уравнение кривой

$$\begin{cases} x(t) = 4 \cos t, \\ y(t) = 2 \sin t, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} \frac{x}{4} = \cos t, \\ \frac{y}{2} = \sin t. \end{cases}$$

Таким образом, получили уравнение эллипса $\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1$.

В дальнейшем, развивая и продолжая традицию, возникшую в теории действительных чисел, будем называть множество комплексных чисел *комплексной плоскостью*.

1.3. Множества расширенной комплексной плоскости

Определение 1.4. Множество комплексных чисел иногда удобно рассматривать в объединении с так называемым *несобственным комплексным числом*. Это число обозначается символом ∞ и определяется соотношениями

$$\infty + z = z + \infty = \infty; \quad \infty \cdot z = z \cdot \infty = \infty, \quad z \neq 0;$$

$$\infty \cdot \infty = \infty;$$

$$\frac{z}{\infty} = 0, \quad \frac{z}{0} = \infty, \quad z \neq 0; \quad |\infty| = +\infty.$$

Такие операции, как $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$ объявляются лишенными смысла. Понятия действительной и мнимой частей, а также понятие аргумента несобственного комплексного числа также объявляются лишенными смысла. Множество $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ называется *расширенным множеством комплексных чисел*, или *расширенной комплексной плоскостью*.

Теперь представим себе комплексную плоскость \mathbb{C} в виде горизонтальной плоскости в трехмерном пространстве и построим сферу S , лежащую на этой плоскости и касающуюся ее в точке $z = 0$.

Точку касания обозначим через O , а диаметрально противоположную точку сферы S — через N .

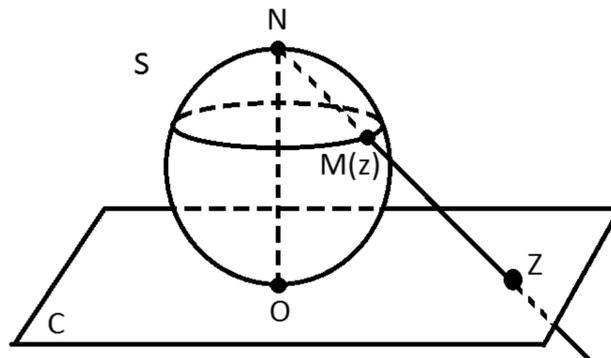


Рис. 6. Сфера Римана

Соединим теперь точку N сферы S прямой линией с точкой $z \in \mathbb{C}$ и обозначим через $M(z)$ точку пересечения этой прямой со сферой, отличную от точки N . Легко заметить, что соответствие $z \rightarrow M(z)$ является биективным отображением плоскости \mathbb{C} на сферу S , проколотую в точке N . Добавим к плоскости \mathbb{C} некоторую точку, которую мы назовем *бесконечно удаленной* точкой; поставим в соответствие этой точке несобственное комплексное число ∞ и положим $N = M(\infty)$. Комплексная плоскость \mathbb{C} , дополненная бесконечно удаленной точкой, называется *расширенной комплексной плоскостью*. Биективное отображение расширенной комплексной

плоскости на сферу S называется *стереографической проекцией*. Сфера S вместе со стереографической проекцией $M : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow S$ называется *сферой Римана* (см. рис. 6).

Здесь мы приведем некоторые основные понятия и результаты, почерпнутые из конечномерного математического анализа, применительно к новой ситуации.

Множество $O_{z_0}^\delta = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \delta\}$ называется *окрестностью* точки $z_0 \in \mathbb{C}$. *Окрестностью* бесконечно удаленной точки называется множество $O_\infty^\delta = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : |z| > \delta\}$. Из определения видно, что окрестностью точки $z_0 = x_0 + iy_0$ является круг (без окружности) с центром в точке (x_0, y_0) и радиусом δ . Окрестностью бесконечно удаленной точки является внешность круга (с окружностью) радиуса δ с центром в точке 0 .

Пусть множество $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$. Точку $z_0 \in \Omega$ назовем *внутренней* точкой множества Ω , если

$$\exists \delta \in \mathbb{R}_+ (O_{z_0}^\delta \subset \Omega);$$

изолированной точкой множества Ω , если

$$\exists \delta \in \mathbb{R}_+ (O_{z_0}^\delta \cap \Omega = \{z_0\}).$$

Точку $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ назовем *предельной* точкой множества Ω , если

$$\forall \delta \in \mathbb{R}_+ (O_{z_0}^\delta \cap \Omega \setminus \{z_0\} \neq \emptyset).$$

Множество всех предельных точек множества Ω называется *замыканием* множества Ω и обозначается $\overline{\Omega}$. Очевидно, $\overline{\Omega} \supset \Omega$. Множество всех внутренних точек множества Ω называется *внутренностью* этого множества и обозначается $\overset{\circ}{\Omega}$. Очевидно, $\Omega \supset \overset{\circ}{\Omega}$. Множество $\Omega \setminus \overset{\circ}{\Omega} = \partial\Omega$ называется *границей* множества Ω . множество Ω называется *замкнутым*, если $\Omega = \overline{\Omega}$, и *открытым*, если $\Omega = \overset{\circ}{\Omega}$. Множества \emptyset и $\overline{\mathbb{C}}$ полагаются по определению открытыми и замкнутыми одновременно.

Далее, назовем множество Ω *связным*, если нельзя найти двух открытых множеств O_1 и O_2 таких, что

$$\Omega \subset O_1 \cup O_2, \quad \Omega \cap O_1 \cap O_2 = \emptyset,$$

$$\Omega \cap O_1 \neq \emptyset, \quad \Omega \cap O_2 \neq \emptyset.$$

Очевидно, что пустое множество и множество, состоящее из одной точки, являются связными.

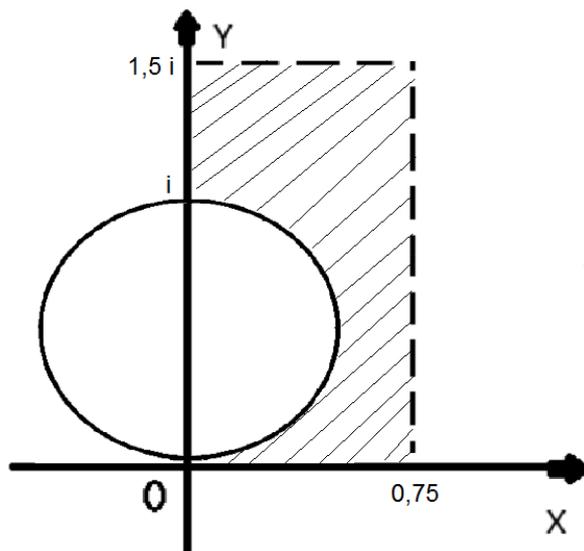
Мы говорим, что две точки z, z' множества Ω можно соединить ломаной, если существует линия, состоящая из конечного числа отрезков прямых, и целиком лежащая в Ω , причем концами этой линии служат точки z и z' . В случае, когда одна из точек является бесконечно удаленной, предполагается, что одно звено ломаной имеет бесконечную длину.

В дальнейшем открытое связное множество будем называть *областью*, а замыкание этого множества — *замкнутой областью*.

Пример 1.5. Изобразим множество комплексной плоскости, заданное соотношениями: $|z - i/2| \geq 1/2, \quad 0 \leq \operatorname{Im} z < 3/2, \quad 0 \leq \operatorname{Re} z < 3/4.$

Решение. Уравнение $|z - a| = r$ ($a \in \mathbb{C}, r > 0$) задает окружность радиуса r с центром в точке $a \in \mathbb{C}$. В силу этого неравенство $|z - i/2| \geq 1/2$ определяет внешность круга. Так как неравенство нестрогое, то граница принадлежит множеству и изображается сплошной линией. Неравенство $0 \leq \operatorname{Im} z < 3/2$ задает горизонтальную полосу, причем верхняя граница не входит в множество и изображается пунктирной линией. Аналогично, неравенство $0 \leq \operatorname{Re} z < 3/4$ задает вертикальную полосу.

Пересечение всех этих областей изображено на рисунке.



Задачи

• Уровень А

1) Найти корни квадратных уравнений z_1 и z_2 ($\text{Im } z_1 > 0$).

2) Вычислить значения выражений: $w_1 = z_1 + z_4$, $w_2 = (z_3 - z_2)(z_1 + z_4)$,
 $w_3 = \frac{3z_1 + z_3}{z_2 - z_4}$.

1.1. 1) $z^2 + 2z + 2 = 0$;

2) $z_3 = 3 - 4i$, $z_4 = 5 + 2i$.

1.2. 1) $5z^2 + 2z + 1 = 0$;

2) $z_3 = 5 - 2i$, $z_4 = 1 + i$.

1.3. 1) $-3z^2 + 2z - 2 = 0$;

2) $z_3 = 5 - i$, $z_4 = \frac{8-i\sqrt{5}}{3}$.

1.4. 1) $z^2 + 4z + 5 = 0$;

2) $z_3 = 3 - 2i$, $z_4 = 1 + i$.

1.5. 1) $z^2 - 2z + 5 = 0$;

2) $z_3 = 3 - i$, $z_4 = 5 + 4i$.

1.6. 1) $z^2 - 2z + 2 = 0$;

2) $z_3 = 5 - 4i$, $z_4 = 3 + i$.

1.7. 1) $5z^2 - 2z + 10 = 0$;

2) $z_3 = 3 + 2i$, $z_4 = 5 - 3i$.

1.8. 1) $-2z^2 + 2z - 5 = 0$;

2) $z_3 = 2 - i$, $z_4 = -3 + 2i$.

1.9. 1) $z^2 + 4z + 13 = 0$;

2) $z_3 = 3 - 2i$, $z_4 = 5 + 7i$.

1.10. 1) $z^2 - 6z + 10 = 0$;

2) $z_3 = 4 - 3i$, $z_4 = 2 + i$.

1.11. 1) $z^2 - 8z + 25 = 0$;

2) $z_3 = 5 - 7i$, $z_4 = -3 + i$.

1.12. 1) $2z^2 + 14z + 26 = 0$;

2) $z_3 = 5 - i2\sqrt{3}$, $z_4 = 1 + i\sqrt{3}$.

1.13. 1) $z^2 - 2z + 17 = 0$;

2) $z_3 = 3 + 2i$, $z_4 = -1 + 3i$.

1.14. 1) $2z^2 + 2z + 5 = 0$;

2) $z_3 = 2 - i$, $z_4 = 2 + 3i$.

1.15. 1) $z^2 - 4z + 13 = 0$;

2) $z_3 = -3 + 7i$, $z_4 = 2 - 5i$.

1.16. 1) $z^2 + 6z + 10 = 0$;

2) $z_3 = -2 - 3i$, $z_4 = 4 + i$.

1.17. 1) $z^2 + 8z + 25 = 0$;

2) $z_3 = -5 + i$, $z_4 = 3 - 5i$.

1.18. 1) $2z^2 - 14z + 26 = 0$;

2) $z_3 = -1 - i\sqrt{3}$, $z_4 = 3 + i2\sqrt{3}$.

1.19. 1) $z^2 + 2z + 17 = 0$;

2) $z_3 = 5 + 2i$, $z_4 = 2 - 3i$.

1.20. 1) $2z^2 - 2z + 5 = 0$;

2) $z_3 = 4 - i$, $z_4 = 3 + i$.

1.21. 1) $z^2 + 6z + 25 = 0$;

2) $z_3 = 3 - 2i$, $z_4 = -1 - i$.

1.22. 1) $8z^2 - 12z + 5 = 0$;

2) $z_3 = 1 - 2i$, $z_4 = -2 - i$.

1.23. 1) $5z^2 - 6z + 5 = 0$;

2) $z_3 = -3 + 2i, z_4 = 1 - 3i$.

1.24. 1) $6z^2 + 3z + 15/4 = 0$;

2) $z_3 = 1 + 2i, z_4 = 1 - i$.

1.25. 1) $5z^2 - 12z + 20 = 0$;

2) $z_3 = -3 + i, z_4 = 2 + i$.

1.26. 1) $2z^2 + 2z + 5 = 0$;

2) $z_3 = 1 - 2i, z_4 = -1 + i$.

1.27. 1) $z^2 - 6z + 25 = 0$;

2) $z_3 = -5 + 2i, z_4 = -1 + i$.

1.28. 1) $8z^2 + 12z + 5 = 0$;

2) $z_3 = 3 + i, z_4 = 5 - 2i$.

1.29. 1) $5z^2 + 6z + 5 = 0$;

2) $z_3 = -5 - 2i, z_4 = 4 + i$.

1.30. 1) $6z^2 - 3z + 15/4 = 0$;

2) $z_3 = 4 - i, z_4 = 3 + 2i$.

1.31. 1) $5z^2 + 12z + 20 = 0$;

2) $z_3 = 5 + i, z_4 = 3 - 4i$.

• **Уровень Б**

Изобразить область, заданную неравенствами.

1.32. $|z - 1| \leq 1, |z + 1| > 2$;

1.33. $|z + i| \geq 1, |z| < 2$;

1.34. $|z - i| \leq 2, \operatorname{Re} z > 1$;

1.35. $|z + 1| \geq 1, |z + i| < 1$;

1.36. $|z + 1| < 1, |z - i| \leq 1$;

1.37. $|z + i| \leq 2, |z - i| > 2$;

1.38. $|z - 1 - i| \leq 1, \operatorname{Im} z > 1, \operatorname{Re} z \geq 1$;

1.39. $|z - 1 + i| \geq 1, \operatorname{Re} z < 1, \operatorname{Im} z \leq -1$;

1.40. $|z - 2 - i| \leq 2, \operatorname{Re} z \geq 3, \operatorname{Im} z < 1$;

1.41. $|z - 1 - i| \geq 1, 0 \leq \operatorname{Re} z < 2, 0 < \operatorname{Im} z \leq 2$;

1.42. $|z + i| < 2, 0 < \operatorname{Re} z \leq 1$;

1.43. $|z - i| \leq 1, 0 < \arg z < \frac{\pi}{4}$;

- 1.44. $|z - i| \leq 2, \quad 0 < \operatorname{Im} z < 2;$
- 1.45. $|z + i| > 1, \quad -\frac{\pi}{4} \leq \arg z < 0;$
- 1.46. $|z - 1 - i| < 1, \quad |\arg z| \leq \frac{\pi}{4};$
- 1.47. $|z| < 2, \quad -\frac{\pi}{4} \leq \arg(z - 1) < \frac{\pi}{4};$
- 1.48. $|z| \leq 1, \quad \arg(z + i) > \frac{\pi}{4};$
- 1.49. $1 < |z - 1| \leq 2, \quad \operatorname{Im} z \geq 0, \quad \operatorname{Re} z < 1;$
- 1.50. $1 \leq |z - i| < 2, \quad \operatorname{Re} z \leq 0, \quad \operatorname{Im} z > 1;$
- 1.51. $|z| < 2, \quad \operatorname{Re} z \geq 1, \quad \arg z < -\frac{\pi}{4};$
- 1.52. $|z| > 1, \quad -1 < \operatorname{Im} z \leq 1, \quad 0 < \operatorname{Re} z \leq 2;$
- 1.53. $|z - 1| > 1, \quad -1 \leq \operatorname{Im} z < 0, \quad 0 \leq \operatorname{Re} z < 3;$
- 1.54. $|z + i| < 1, \quad -\frac{3\pi}{4} \leq \arg z \leq -\frac{\pi}{4};$
- 1.55. $|z - i| \leq 1, \quad -\frac{\pi}{2} < \arg(z - i) < \frac{\pi}{4};$
- 1.56. $z\bar{z} < 2, \quad \operatorname{Re} z \leq 1, \quad \operatorname{Im} z > -1;$
- 1.57. $z\bar{z} \leq 2, \quad \operatorname{Re} z < 1, \quad \operatorname{Im} z > -1;$
- 1.58. $1 < z\bar{z} < 2, \quad \operatorname{Re} z > 0, \quad 0 \leq \operatorname{Im} z \leq 1;$
- 1.59. $|z - 1| < 1, \quad \arg z \leq \frac{\pi}{4}, \quad \arg(z - 1) > \frac{\pi}{4};$
- 1.60. $|z - i| < 1, \quad \arg z \geq \frac{\pi}{4}, \quad \arg(z + 1 - i) \leq \frac{\pi}{4};$
- 1.61. $|z - 2 - i| \geq 1, \quad 1 \leq \operatorname{Re} z \leq 3, \quad 0 < \operatorname{Im} z \leq 3;$
- 1.62. $|\operatorname{Re} z| \leq 1, \quad |\operatorname{Im} z| < 2.$

• Уровень В

Определить вид кривой

1.63. $z = 3 \sec t + i2 \operatorname{tg} t.$

1.64. $z = 2 \sec t - i3 \operatorname{tg} t.$

1.65. $z = 3 \sec t + i2 \operatorname{tg} t.$

1.66. $z = 4 \operatorname{tg} t - i3 \sec t.$

1.67. $z = 3 \operatorname{tg} t + i4 \sec t$

1.68. $z = -4 \operatorname{tg} t - i2 \sec t$

1.69. $z = 3 \operatorname{cosec} t + i3 \operatorname{ctg} t$

1.70. $z = 4 \operatorname{cosec} t - i2 \operatorname{ctg} t$

1.71. $z = \operatorname{ctg} t - i2 \operatorname{cosec} t$

1.72. $z = -\operatorname{ctg} t + i3 \operatorname{cosec} t$

1.73. $z = 3 \operatorname{ch} 2t + i2 \operatorname{sh} 2t$

1.74. $z = 2 \operatorname{ch} 3t - i3 \operatorname{sh} 3t$

1.75. $z = 5 \operatorname{sh} 4t + i4 \operatorname{ch} 4t$

1.76. $z = -4 \operatorname{sh} 5t - i5 \operatorname{ch} 5t$

1.77. $z = \frac{2}{\operatorname{ch} 2t} + i4 \operatorname{th} 2t$

1.78. $z = \frac{4}{\operatorname{ch} 4t} + i2 \operatorname{th} 4t$

1.79. $z = \operatorname{th} 5t + \frac{5i}{\operatorname{ch} 5t}$

1.80. $z = \frac{1}{\operatorname{sh} t} - i \operatorname{cth} t$

1.81. $z = 2e^{it} + \frac{1}{2e^{it}}$

1.82. $z = 3e^{it} - \frac{1}{2e^{it}}$

1.83. $z = -2e^{it} + \frac{1}{e^{it}}$

1.84. $z = 2e^{2it} + \frac{1}{2e^{it}}$

1.85. $z = \frac{1+t}{1-t} + i\frac{2+t}{2-t}$

1.86. $z = \frac{t-1+it}{t(t-1)}$

1.87. $z = \frac{1+t}{1-t} + \frac{t}{1-t}(2-4i)$

1.88. $z = \frac{2+t}{2-t} + i\frac{1+t}{1-t}$

1.89. $z = t^2 + 4t + 20 - i(t^2 + 4t + 4)$

1.90. $z = t^2 + 2t + 5 + i(t^2 + 2t + 1)$

1.91. $z = 2t^2 + 2t + 1 - i(t^2 + t + 4)$

1.92. $z = t - 2 + i(t^2 - 4t + 5)$

1.93. $z = t^2 - 2t + 3 + i(t^2 - 2t + 1)$

2. Свойства функций комплексного переменного

Общее определение функции комплексного переменного ничем не отличается от обычного определения функции действительного переменного. Пусть заданы две расширенные комплексные плоскости $\overline{\mathbb{C}}_z$ и $\overline{\mathbb{C}}_w$, причем точкам первой поставлены в соответствие комплексные числа, обозначаемые символом $z = x + iy$, а точкам второй — числа $w = u + iv$. Пусть $\Omega_z \subset \overline{\mathbb{C}}_z$ — некоторое множество. Отображение $f : \Omega_z \rightarrow \overline{\mathbb{C}}_w$, задаваемое формулой, называется *однозначной функцией комплексного переменного*.

Другими словами, задание функции комплексного переменного $w = f(z)$ равносильно заданию двух функций:

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy), \quad v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy)$$

— двух действительных переменных x и y . Последнее, кстати сказать, означает, что на множестве $\Omega_z = \Omega_{(x,y)}$ задана вектор-функция со значениями во множестве $\overline{\mathbb{C}}_w = \overline{\mathbb{R}}_{(u,v)}^2$.

2.1. Предел функций комплексного переменного

Определение 2.1. Пусть на множестве $\Omega_z \subset \overline{\mathbb{C}}_z$ определена функция $w = f(z)$, а точка z_0 — предельная точка множества Ω_z . Число $w_0 \in \overline{\mathbb{C}}_w$ называется *пределом функции f в точке z_0*

по Коши, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall z \in \Omega_z \cap (O_{z_0}^\delta \setminus \{z_0\}) \Rightarrow (f(z) \in O_{w_0}^\varepsilon);$$

по Гейне, если

$$\forall \{z_n\} \subset \Omega_z \cap \setminus \{z_0\} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0 \right) \Rightarrow \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = w_0 \right).$$

Замечание 2.1. Определения по Коши и по Гейне предела функции комплексного переменного эквивалентны.

Упражнение 2.1. Доказать, что функция $w = f(z)$ имеет предел в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ точно тогда, когда функции $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy)$ и $v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy)$ имеют конечный или бесконечный предел в точке (x_0, y_0) .

Как и в случае действительного переменного предел функции комплексного переменного будем обозначать символом

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0.$$

Теорема 2.1. (критерий Коши существования предела). Функция $w = f(z)$, определенная на множестве $\Omega_z \subset \overline{\mathbb{C}}_z$, имеет предел $w_0 \in \overline{\mathbb{C}}_w$ в предельной точке z_0 множества Ω_z точно тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall z', z'' \in \Omega_z \cap (O_{z_0}^\delta \setminus \{z_0\}) \Rightarrow (|f(z') - f(z'')| < \varepsilon).$$

Упражнение 2.2. Доказать следующие свойства предела функции:

(i) если функция $f : \Omega_z \rightarrow \overline{\mathbb{C}}_w$ имеет предел в точке $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}_z$, то этот предел единственен;

(ii) если функция $f : \Omega_z \rightarrow \overline{\mathbb{C}}_w$ имеет конечный предел в точке $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}_z$, то существует такая окрестность $O_{z_0}^\varepsilon$, что функция f ограничена на множестве $\Omega_z \cap O_{z_0}^\varepsilon$.

(Напомним, что *ограниченной* называется функция, которая переводит ограниченные множества в ограниченные.)

Упражнение 2.3. Пусть функции $f, g : \Omega_z \rightarrow \overline{\mathbb{C}}_w$ имеют конечные пределы в точке $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}_z$. Доказать, что:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) + g(z)) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) + \lim_{z \rightarrow z_0} g(z),$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) \cdot g(z)) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \cdot \lim_{z \rightarrow z_0} g(z),$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)}{\lim_{z \rightarrow z_0} g(z)}, \quad \text{если } \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) \neq 0.$$

Определение 2.2. Функция $f : \Omega_z \rightarrow \overline{\mathbb{C}_w}$ называется *непрерывной в точке* $z_0 \in \Omega_z$, если z_0 — предельная точка множества Ω_z , $f(z_0) \neq \infty$ и $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$. Если множество Ω_z содержит только предельные точки, и функция $w = f(z)$ непрерывна в каждой точке множества Ω_z , то такая функция называется *непрерывной на множестве* Ω_z .

Поскольку имеется два равносильных определения предела функции, по Коши и по Гейне, то имеется два равносильных определения непрерывности функции, по Гейне и по Коши.

Упражнение 2.4. Доказать, что функция $w = f(z)$ непрерывна в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ (на множестве $\Omega_z \subset \overline{\mathbb{C}_z}$) точно тогда, когда функции $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy)$ и $v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy)$ непрерывны в точке (x_0, y_0) (на множестве $\Omega_{(x_0, y_0)} \subset \overline{\mathbb{R}^2_{(x_0, y_0)}}$).

Упражнение 2.5. Доказать следующие *локальные свойства* непрерывных функций:

(i) непрерывная в точке z_0 функция $f : \Omega_z \rightarrow \overline{\mathbb{C}_w}$ ограничена на некотором множестве $\Omega_z \cap O_{z_0}^\varepsilon$;

(ii) сумма, произведение и частное двух непрерывных в точке z_0 функций f и g являются непрерывными в точке z_0 функциями (частное рассматривается при условии, что делитель $g(z_0) \neq 0$);

(iii) пусть функция f непрерывна в точке z_0 , а функция g непрерывна в точке $w_0 = f(z_0)$. Тогда их композиция $g \circ f$ непрерывна в точке z_0 .

2.2. Производная функций комплексного переменного

Пусть функция $w = f(z)$ определена в окрестности точки $z_0 \in \mathbb{C}_z$.

Определение 2.3. Если существует конечный предел

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}, \quad (2.1)$$

то он называется *производной* от функции f в точке z_0 и обозначается $f'(z_0)$. (Иногда функция f , имеющая производную в точке z_0 , называется *моногенной*.)

Пример 2.1. Функция $w = |z|z$ дифференцируема в точке нуля. Действительно,

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{|z|z - 0}{z - 0} = \lim_{z \rightarrow 0} |z| = 0.$$

Обратим внимание, что существование и величина предела в (2.1) должны *не зависеть* от способа стремления $z \rightarrow z_0$. Для подтверждения этого приведем следующий

Пример 2.2. Функция $w = \operatorname{Re} z$ нигде не дифференцируема. Действительно, пусть $z_0 = x_0 + iy_0$, а $z = x + iy$, тогда

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1.$$

С другой стороны, пусть $z = x_0 + iy$, тогда

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{x_0 - x_0}{iy} = 0.$$

Полагая $\Delta f = f(z) - f(z_0)$ и $\Delta z = z - z_0$, запишем (2.1) так:

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = f'(z_0) + \alpha(z_0, \Delta z),$$

где $\alpha(z_0, \Delta z) \rightarrow 0$, при $\Delta z \rightarrow 0$. Отсюда вытекает, что приращение Δf монотонной функции f может быть представлено в виде

$$\Delta f = A\Delta z + \alpha(z_0, \Delta z)\Delta z, \quad (2.2)$$

где A не зависит от Δz и $\alpha(z_0, \Delta z) \rightarrow 0$ при $\Delta z \rightarrow 0$. Верно также и обратное - всякая функция f , приращение Δf которой может быть представлено в виде (2.2), является монотонной и ее производная равна A . Таким образом, представление (2.2) является *необходимым* и *достаточным* условием монотонности функции f в точке z_0 .

Упражнение 2.6. Доказать, что всякая дифференцируемая в точке z_0 функция f непрерывна в этой точке.

Упражнение 2.7. Пусть функции f и g дифференцируемы в точке z . Доказать, что их сумма, произведение и частное являются дифференцируемыми функциями в этой точке, причем

$$(i) (f + g)'(z) = f'(z) + g'(z),$$

$$(ii) (fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z),$$

$$(iii) \left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}, \quad g(z) \neq 0.$$

Упражнение 2.8. Пусть функция f дифференцируема в точке z , а функция φ дифференцируема в точке $w = f(z)$. Доказать, что композиция $\varphi \circ f$ дифференцируема в точке z , причем

$$(\varphi \circ f)'(z) = \varphi'(w) \cdot f'(z).$$

Упражнение 2.9. Пусть функция $f : \Omega_z \rightarrow \Omega_w$ биективна, а обратная функция $\varphi = f^{-1} : \Omega_w \rightarrow \Omega_z$ непрерывна на Ω_w . Доказать, что если функция f дифференцируема в точке $z \in \Omega_z$ и $f'(z) \neq 0$, то функция φ дифференцируема в точке $w = f(z)$, причем

$$\varphi^{-1}(w) = \frac{1}{f'(z)}.$$

Теорема 2.2. Функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, определенная в окрестности точки $z_0 = x_0 + iy_0$, дифференцируема в этой точке точно тогда, когда функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ дифференцируемы в точке (x_0, y_0) , и их частные производные удовлетворяют условиям

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (CR)$$

Условия (CR) называются *условиями Коши — Римана* и играют важнейшую роль в анализе функций комплексного переменного.

Замечание 2.2. Пусть функция f дифференцируема в точке $z_0 = x_0 + iy_0$. Тогда

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) - \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0). \quad (2.3)$$

А если учесть еще условия (CR), то из (2.3) получим

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0),$$

и

$$f'(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Замечание 2.3. Из конечномерного анализа известно, что для дифференцируемости функций u и v достаточно существования и непрерывности их частных производных. Поэтому для моногенности функции $f = u + iv$ достаточно, чтобы частные производные функций u и v существовали, были непрерывны и удовлетворяли условиям (CR).

Пример 2.3. Функция $w = \bar{z}$ нигде не дифференцируема, поскольку

$$\frac{\partial \operatorname{Re} \bar{z}}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial \operatorname{Im} \bar{z}}{\partial y} = -1,$$

т.е. условия (CR) нарушены.

2.3. Голоморфность функции комплексного переменного

Пусть функция $f : \Omega_z \rightarrow \overline{\mathbb{C}}_w$ определена в некоторой области $\Omega_z \subset \mathbb{C}_z$.

Определение 2.4. Функция $f : \Omega_z \rightarrow \overline{\mathbb{C}}_w$ называется *голоморфной* в точке $z_0 \in \Omega_z$, если она дифференцируема в некоторой окрестности точки z_0 . Функция f называется *голоморфной в области* $\Omega'_z \subset \Omega_z$, если она голоморфна в каждой точке этой области. Голоморфная в каждой точке плоскости \mathbb{C}_z функция называется *целой*.

Пример 2.4. Функция $w = z^2$ является целой. Действительно, пусть точка $z_0 \in \mathbb{C}$, тогда

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z^2 - z_0^2}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z + z_0) = 2z_0.$$

Пример 2.5. Функция $w = |z|z$ нигде не голоморфна. Действительно,

$$w = \sqrt{x^2 + y^2}(x + iy),$$

поэтому

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sqrt{x^2 + y^2} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \sqrt{x^2 + y^2} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Стало быть, условия (CR) не выполняются ни в одной точке $z \neq 0$. С другой стороны, в примере 2.1 показана моногенность этой функции в точке $z = 0$.

Также условия Коши–Римана применяются при восстановлении аналитических функций по одной из ее частей (действительной или мнимой).

Пример 2.6. Восстановим аналитическую в окрестности точки 0 функцию $f(z)$ по известной мнимой части $v(x, y) = 2xy + x$ и значению $f(0) = 0$.

В силу условий задачи $\frac{\partial v}{\partial y} = 2x$.

По условиям Коши–Римана

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \Rightarrow u(x, y) = \int 2x dx = x^2 + \varphi(y),$$

так как константа интегрирования может зависеть от другой переменной.

Найдем функцию $\varphi(y)$. Для этого используем второе равенство из условий Коши–Римана $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$.

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y + 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \varphi'(y).$$

Следовательно

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \Rightarrow 2y + 1 = -\varphi'(y) \Rightarrow \varphi'(y) = -2y - 1 \Rightarrow \varphi(y) = -y^2 - y + C.$$

Таким образом $u(x, y) = x^2 + \varphi(y) = x^2 - y^2 - y + C$. Откуда

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = x^2 - y^2 - y + C + i(2xy + x) =$$

$$= x^2 - y^2 + 2ixy + C + ix - y = (x + iy)^2 + C + i(x + iy) = z^2 + iz + C.$$

Константу C находим из условия $f(0) = 0$ и получаем, что $C = 0$.

Следовательно, функция $f(z) = z^2 + iz$.

Как следует из определения, голоморфная функция обладает всеми свойствами моногенной функции. Кроме того, голоморфная функция обладает целым рядом замечательных свойств, решительно отличающих ее от дифференцируемых функций. Одним из основных отличий является тот факт, что производная любой голоморфной функции будет тоже голоморфной функцией, причем с той же областью голоморфности, что и исходная функция. Другими словами, голоморфная функция оказывается “бесконечно \mathbb{C} -дифференцируемой”. Однако доказательство этого факта требует развитой теории, и поэтому мы проведем его позднее. А сейчас рассмотрим только одно, но тоже весьма необычное свойство голоморфной функции.

Определение 2.5. Функция $f : \Omega_z \rightarrow \overline{\mathbb{C}}_w$ называется *однолистной* в области $\Omega'_z \subset \Omega_z$, если она инъективна в этой области. Область Ω'_z , в которой функция f однолистка, называется *областью однолистности* функции f .

Теорема 2.3. Пусть функция $f : \Omega_z \rightarrow \mathbb{C}_w$ голоморфна в некоторой области $\Omega_z \subset \mathbb{C}_w$. Пусть существует точка $z_0 \in \Omega_z$, в которой $f'(z_0) \neq 0$. Тогда:

- (i) существует окрестность точки z_0 , в которой функция f однолистка;
- (ii) существует окрестность точки $w_0 = f(z_0)$, на которой определена однолистная обратная функция $z = f^{-1}(w)$;
- (iii) функция f^{-1} голоморфна в точке w_0 .

Доказанная теорема вовсе не означает, что если $f'(z) \neq 0$ при любом $z \in \Omega_z$, то существует обратная голоморфная функция $f^{-1} : f[\Omega_z] \rightarrow \Omega_z$.

Пример 2.7. Функция $w = z^2$ голоморфна в области

$$\Omega_z = \left\{ z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2, 0 < \arg z < \frac{3\pi}{2} \right\},$$

и в ней $w' = 2z \neq 0$. Однако эта функция область Ω_z отображает на кольцо

$$\Omega_z = \{w \in \mathbb{C} : 1 < |w| < 4\},$$

каждая точка верхней половины которого имеет два прообраза.

Задачи

- Восстановить аналитическую в окрестности точки z_0 функцию $f(z)$ по известной действительной части $u(x, y)$ или мнимой $v(x, y)$ и значению $f(z_0)$

Уровень А

2.1. $u = x^2 - y^2 + x, \quad f(0) = 0$

2.2. $u = x^3 - 3xy^2 + 1, \quad f(0) = 1$

2.3. $u = x^2 - y^2 - 2y, \quad f(0) = 0$

2.4. $u = y - 2xy, \quad f(0) = 0$

2.5. $v = x^2 - y^2 + 2x + 1, \quad f(0) = i$

2.6. $u = x^2 - y^2 - 2x + 1, \quad f(0) = 1$

2.7. $v = 3x^2y - y^3 - y, \quad f(0) = 0$

2.8. $v = 2xy + y, \quad f(0) = 0$

2.9. $v = 3x^2y - y^3, \quad f(0) = 1$

2.10. $v = 2xy + 2x, \quad f(0) = 0$

2.11. $v = x^2 - y^2 - x, \quad f(0) = 0$

2.12. $u = -2xy - 2y, \quad f(0) = i$

2.13. $v = 2xy - 2y, \quad f(0) = 1$

2.14. $u = x^3 - 3xy^2 - x, \quad f(0) = 0$

2.15. $v = 2xy + x, \quad f(0) = 0$

Уровень Б

2.16. $v = e^x(y \cos y + x \sin y), \quad f(0) = 0$

2.17. $v = e^{-y} \sin x + y, \quad f(0) = 1$

2.18. $v = e^x \cos y, \quad f(0) = 1 + i$

2.19. $u = e^{-y} \cos x, \quad f(0) = 1$

2.20. $u = e^x(x \cos y - y \sin y), \quad f(0) = 0$

2.21. $u = 1 - \sin y \cdot e^x, \quad f(0) = 1 + i$

2.22. $u = e^{-y} \cos x + x, \quad f(0) = 1$

2.23. $v = e^{-y} \sin x, \quad f(0) = 1$

Уровень В

2.24. $v = -\frac{y}{(x+1)^2+y^2}, \quad f(0) = 1$

2.25. $v = y - \frac{y}{x^2+y^2}, \quad f(1) = 2$

2.26. $v = \frac{e^{2x}-1}{e^x} \sin y, \quad f(0) = 2$

2.27. $v = 1 - \frac{y}{x^2+y^2}, \quad f(1) = 1 + i$

2.28. $u = \frac{x+1}{(x+1)^2+y^2}, \quad f(0) = 1$

2.29. $u = \frac{x}{x^2+y^2} + x, \quad f(1) = 2$

2.30. $u = \frac{e^{2x}+1}{e^x} \cos y, \quad f(0) = 2$

2.31. $u = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad f(1) = 1 + i$

3. Основные функции комплексного переменного

3.1. Определение и свойства однолистных элементарных функций

Здесь мы ограничимся рассмотрением линейной функции $w = az + b$, где $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{C}$, и функции $w = z^{-1}$.

3.1.1. Функция $w = az + b$

Областью определения функции $f(z) = az + b$ является расширенная комплексная плоскость ($f(\infty) = \infty$). Каждой точке $z \in \overline{\mathbb{C}}_z$ соответствует только одна точка $w = f(z) \in \overline{\mathbb{C}}_w$, поэтому линейная функция однозначна на области определения.

Поскольку $a \neq 0$, то можно определить обратную функцию

$$f^{-1} : w \rightarrow z = \frac{1}{a}w - \frac{b}{a} = a_1w + b_1,$$

которая тоже является линейной, а значит, и однозначной. Поэтому линейная функция однолистка на $\overline{\mathbb{C}}_z$.

Далее, положив $z = x + iy$, $a = \alpha_1 + i\alpha_2$, $b = \beta_1 + i\beta_2$, получим

$$\begin{aligned} f(z) &= (\alpha_1 + i\alpha_2)(x + iy) + (\beta_1 + i\beta_2) = \\ &= (\alpha_1x - \alpha_2y + \beta_1) + i(\alpha_2x + \alpha_1y + \beta_2). \end{aligned}$$

Функции $\operatorname{Re} f(z) = \alpha_1x - \alpha_2y + \beta_1$ и $\operatorname{Im} f(z) = \alpha_2x + \alpha_1y + \beta_2$ непрерывны, как функции переменных (x, y) , поэтому линейная функция непрерывна на \mathbb{C}_z .

И, наконец, пусть точка $z_0 \in \mathbb{C}_z$. Тогда

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{a(z - z_0)}{z - z_0} = a.$$

Значит линейная функция голоморфна на \mathbb{C} , т.е. является целой функцией.

Рассмотрим некоторые частные случаи.

(i) $a = 1$. В этом случае линейная функция $f(z) = z + b$ осуществляет *параллельный перенос* плоскости \mathbb{C}_z на вектор (β_1, β_2) , где $\beta_1 + i\beta_2 = b$.

(ii) $b = 0$, $a \in \mathbb{R}_+$. В этом случае линейная функция $f(z) = az = ax + iay$ осуществляет гомотетию плоскости \mathbb{C}_z с центром в нуле и коэффициентом a .

(iii) $b = 0$, $a \in \mathbb{C}$, $|a| = 1$. В этом случае $a = \cos \arg a + i \sin \arg a$, поэтому

$$f(z) = |z| (\cos(\arg a + \arg z) + i \sin(\arg a + \arg z)).$$

Значит, в этом случае линейная функция осуществляет поворот плоскости \mathbb{C}_z вокруг точки нуль на угол $\arg a$.

Таким образом, в общем случае линейная функция $f(z) = az + b$ осуществляет поворот на угол $\arg a$, гомотетию с коэффициентом $|a|$ и параллельный перенос на вектор b .

Упражнение 3.1. Доказать, что линейная функция переводит прямые в прямые, а окружности в окружности, причем центр окружности переводит в центр окружности.

3.1.2. Функция $w=z^{-1}$

Как и в предыдущем случае отмечаем, что функция $f(z) = z^{-1}$ однозначна и однолистка на $\overline{\mathbb{C}}_z$. Здесь мы полагаем $f(0) = \infty$ и $f(\infty) = 0$ и замечаем, что $f^{-1} : w \rightarrow z = w^{-1}$. Поскольку

$$f(z) = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2},$$

то функция f будет непрерывной в области $\mathbb{C}_z \setminus \{0\}$ (называемой также *проколотой плоскостью*).

Далее, пусть точка $z_0 \in \mathbb{C}_z \setminus \{0\}$. Тогда

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z^{-1} - z_0^{-1}}{z - z_0} = - \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{zz_0} = - \frac{1}{z_0^2}.$$

Поэтому функция $f(z) = z^{-1}$ голоморфна в области $\mathbb{C}_z \setminus \{0\}$. Сравнив эту функцию с предыдущей, отмечаем, что перед нами пример однозначной, однолистной, голоморфной, но не целой функции.

Считая главным значением $\arg 1$ нуль, имеем

$$|w| = |z|^{-1}, \quad \arg w = -\arg z.$$

Полученные соотношения позволяют рассматривать функцию $w = z^{-1}$ как композицию двух отображений — зеркального отображения относительно действительной оси, при котором точка z переходит в точку \bar{z} , и инверсии относительно единичной окружности, переводящей точку \bar{z} в точку z^{-1} .

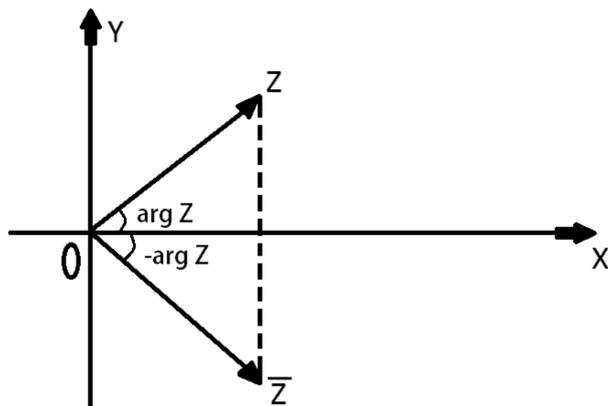


Рис. 7. Сопряженное

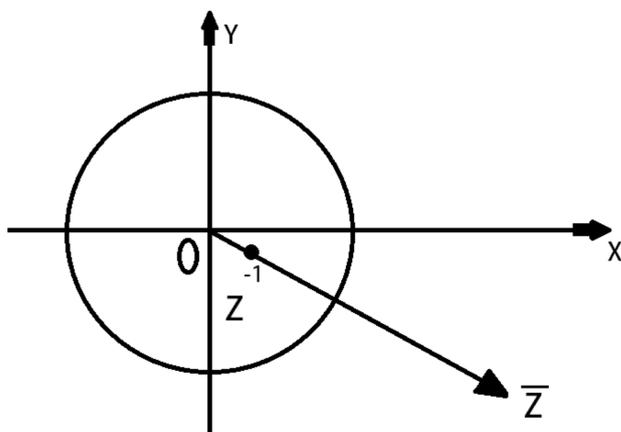


Рис. 8. Инверсия

Напомним, что *инверсией относительно окружности радиуса R* называется такое преобразование, при котором каждой точке внутри (вне) круга радиуса R ставится точка вне (внутри) круга, лежащая на луче, проведенном из центра круга в данную точку так, что произведение расстояний от этих точек до центра круга равно R^2 .

Упражнение 3.2. Доказать, что функция $w = z^{-1}$ переводит прямые и окружности в прямые или окружности.

(Указание. Доказать, что уравнение любой прямой или окружности на плоскости в декартовых координатах имеет вид

$$a(x^2 + y^2) + 2Bx + 2Cy + D = 0,$$

где $A, B, C, D \in \mathbb{R}$, причем $B^2 + C^2 > AD$).

3.2. Определение и свойства целых степенной и показательной функций

До сих пор мы рассматривали однозначные, однолистные, голоморфные, но, возможно, не целые функции. Теперь перейдем к рассмотрению однозначных, целых функций, которые не являются однолистным.

3.2.1. Целая степенная функция

Определение 3.1. Функция $f : \overline{\mathbb{C}}_z \rightarrow \overline{\mathbb{C}}_w$ вида $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $f(\infty) = \infty$ называется *целой степенной* функцией.

Из определения сразу следует, что функция $f(z) = z^n$ однозначна на $\overline{\mathbb{C}}_z$. Полагая $z = x + iy$ и пользуясь биномом Ньютона, получим

$$z^n = (x + iy)^n = \begin{cases} \sum_{k=0}^m (-1)^k C_n^{2k} x^{n-2k} y^{2k} - i \sum_{k=1}^m (-1)^k C_n^{2k-1} x^{n-2k+1} y^{2k-1}, & n = 2m; \\ \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k C_n^{2k} x^{n-2k} y^{2k} - i \sum_{k=1}^m (-1)^k C_n^{2k-1} x^{n-2k+1} y^{2k-1}, & n = 2m-1. \end{cases}$$

Отсюда сразу следует непрерывность функции $f(z) = z^n$ на \mathbb{C}_z .

Пусть точка $z_0 \in \mathbb{C}_z$. Поскольку

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k} z_0^k,$$

то в силу непрерывности функции $f(z) = z^k$ имеем

$$f'(z_0) = nz_0^{n-1}.$$

Итак, функция $f(z) = z^n$ однозначна на $\overline{\mathbb{C}_z}$ и голоморфна на \mathbb{C}_z , т.е. является однозначной целой функцией. Однако эта функция однолистной не является. Чтобы разобраться в этом, рассмотрим область

$$\Omega_z = \{z \in \mathbb{C} : a < |z| < b, \varphi < \arg z < \psi, a, b \in \mathbb{R}_+, \\ 0 < \psi - \varphi < 2\pi\}.$$

Поскольку $z^n = |z|^n(\cos n \arg z + i \sin n \arg z)$, то при отображении $f : z \rightarrow z^n$ область Ω_z перейдет, очевидно, в область

$$\Omega_w = \{w \in \mathbb{C} : a^n < |w| < b^n, n\varphi < \arg w < n\psi\}.$$

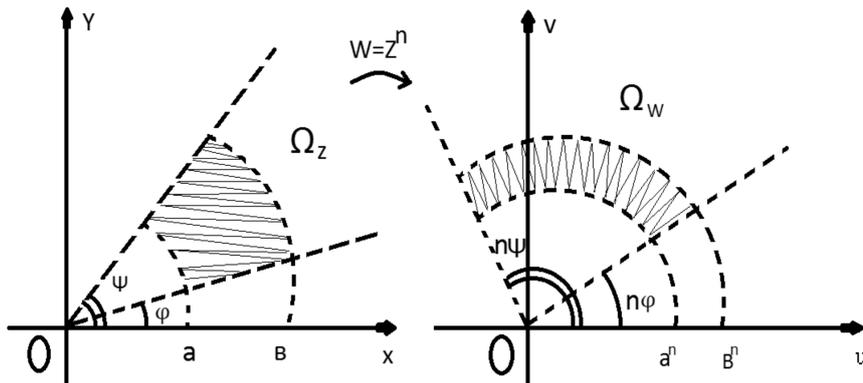


Рис. 9. Отображение $f(z) = z^n$

Поэтому функция $f(z) = z^n$ отображает любой сектор

$$\Omega_k = \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{(2k-1)\pi}{n} < \arg z < \frac{(2k+1)\pi}{n} \right\}$$

$k = 0, 1, \dots, n-1$ плоскости \mathbb{C}_z на плоскость \mathbb{C}_w , разрезанную по отрицательной части действительной прямой.

Записав обе части равенства $w = z^n$ в тригонометрической форме с учетом того, что $\arg z, \arg w \in (-\pi, \pi)$ получим

$$|w| (\cos(\arg w + 2\pi k) + i \sin(\arg w + 2\pi k)) =$$

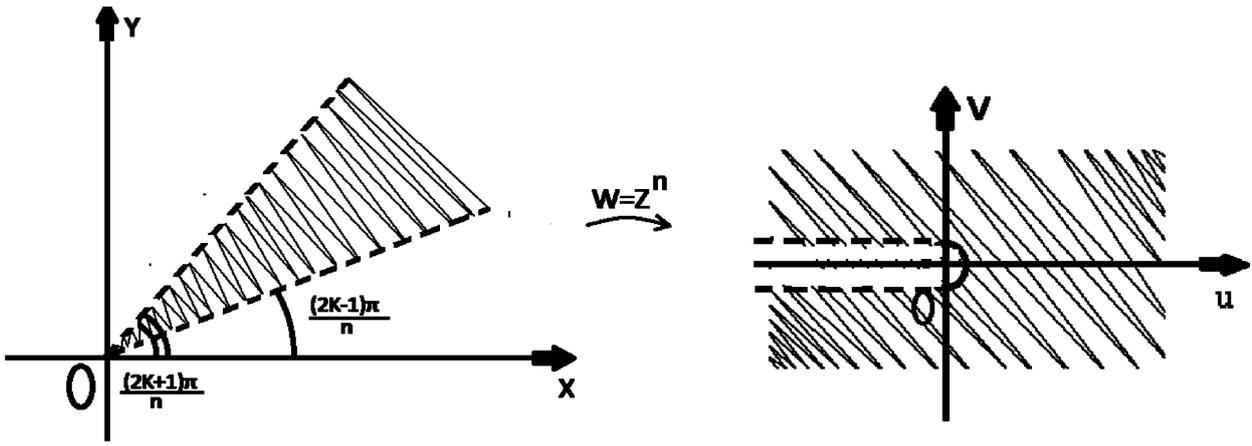


Рис. 10. Отображение $f(z) = z^n$

$$|z|^n (\cos n(\arg z + 2\pi l) + i \sin n(\arg z + 2\pi l)).$$

Отсюда найдем

$$|z| = |w|^{\frac{1}{n}}, \quad \arg z = \frac{\arg w + 2\pi k}{n} + 2\pi m,$$

где $k, l, m \in \mathbb{Z}$. Таким образом, мы построили обратную функцию $z = w^{\frac{1}{n}}$ согласно формуле

$$z = |w|^{\frac{1}{n}} \left(\cos\left(\frac{\arg w + 2\pi k}{n} + 2\pi m\right) + i \sin\left(\frac{\arg w + 2\pi k}{n} + 2\pi m\right) \right), \quad (3.1)$$

причем эта функция, очевидно, многозначна. Однако из (3.1) видно, что среди значений функции $z = w^{\frac{1}{n}}$ различными являются только n , все они располагаются в вершинах правильного n -угольника, вписанного в окружность радиуса $|w|^{\frac{1}{n}}$ с центром в точке нуль. Поэтому вместо (3.1) удобно пользоваться формулой

$$z = |w|^{\frac{1}{n}} \left(\cos \frac{\arg w + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\arg w + 2\pi k}{n} \right), \quad (3.2)$$

где $k = 0, 1, \dots, n - 1$.

Итак, обратная функция к целой степенной функции является n -значной или, как еще говорят, n -листной. Однако из (3.2) следует, что если ограничиться только тем значением функции $z = w^{\frac{1}{n}}$, которое попадает в некоторый (фиксированный заранее!) сектор Ω_k , то в результате мы получим однозначную функцию. Таким образом, секторы Ω_k являются областями однолиственности функции $w = z^n$.

Пример 3.1. Вычислим корень комплексного числа $\sqrt[6]{-64}$.

Решение. Для нахождения значений корня используем формулу (3.2).

$$|-64| = 64, \quad \arg(-64) = \pi.$$

Соответственно, получим

$$(\sqrt[6]{-64})_k = 64^{1/6} \exp\left(i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{6}\right)\right) = 2 \exp\left(i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}\right)\right), \quad k = \overline{0, 5}.$$

Выпишем значения всех корней

$$\begin{aligned} (\sqrt[6]{-64})_0 &= 2e^{i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3} + i, & (\sqrt[6]{-64})_1 &= 2e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3})} = 2i, \\ (\sqrt[6]{-64})_2 &= 2e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3})} = -\sqrt{3} + i, & (\sqrt[6]{-64})_3 &= 2e^{i(\frac{\pi}{6} + \pi)} = -\sqrt{3} - i, \\ (\sqrt[6]{-64})_4 &= 2e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3})} = -2i, & (\sqrt[6]{-64})_5 &= 2e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{3})} = \sqrt{3} - i, \end{aligned}$$

3.2.2. Целая показательная функция

Определение 3.2. Функция $f(z) = e^z$, определяемая формулой $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$, называется *экспоненциальной функцией*, или *экспонентой*.

Область определения функции $w = e^z$ - вся комплексная плоскость \mathbb{C}_z . Представив экспоненту в виде $w = e^x \cos y + ie^x \sin y$, убедимся в ее однозначности, непрерывности и голоморфности в любой точке $z = x + iy$.

Итак, экспонента - целая функция. Отметим некоторые ее свойства. Во-первых,

$$|e^z| = e^x |\cos y + i \sin y| = e^x.$$

Значит, $e^z \neq 0 \forall z \in \mathbb{C}$. Покажем, что любое значение $w \neq 0$ принимается функцией e^z в некоторой точке z , т.е. образ плоскости \mathbb{C}_z при отображении $w = e^z$ есть $\mathbb{C}_w \setminus \{0\}$. В самом деле, для любого $w \neq 0$ из уравнения $w = e^z$ находим

$$|w| = e^x, \quad \arg w = y + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Отсюда

$$z = \ln |w| + i(\arg w + 2\pi l), \quad l \in \mathbb{Z}. \quad (3.3)$$

Во-вторых, при $y = 0$ $e^z = e^x$. В дальнейшем мы покажем, что экспонента $w = e^z$ единственная функция комплексного переменного, которая совпадает с функцией e^x на действительной прямой. А сейчас мы отметим те свойства функции $w = e^z$, которые однозначно определяют функцию e^z .

- (i) $e^0 = e^0(\cos 0 + i \sin 0) = 1$;
- (ii) $(e^z)' = e^x(\cos y + i \sin y) = e^z$;
- (iii) $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{x_1+x_2}(\cos y_1 + i \sin y_1) \cdot (\cos y_2 + i \sin y_2) = e^{x_1+x_2}(\cos(y_1 + y_2) + i \sin(y_1 + y_2)) = e^{z_1+z_2}$.

В-третьих, как следует из определения, экспонента является периодической функцией с периодом $2\pi i$. Такого сорта периодические функции нам не раз встретятся в дальнейшем.

И, наконец, из (3.3) вытекает, что прообразом точки $w \neq 0$ является бесконечное множество точек, различающихся на число, кратное периоду экспоненты. Значит, экспонента не является однолистной функцией. Будем искать области однолистности экспоненты.

Простейшей такой областью является внутренность полосы

$$\Omega_n = \{z \in \mathbb{C}_z : \varphi < y < \varphi + h, h \in (0, 2\pi)\}.$$

В самом деле, для любых $z_1, z_2 \in \Omega_h$, $z_1 \neq z_2$ имеем

$$|\operatorname{Im}(z_1 - z_2)| < h < 2\pi,$$

т.е. $z_1 - z_2 \neq i2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Значит, $e^{z_1} \neq e^{z_2}$. Образом полосы Ω_h при отображении $w = e^z$ в плоскости \mathbb{C}_w является угол раствора h с вершиной в начале координат, стороны которого образуют с действительной осью углы φ и $\varphi + h$.

Значит, если разбить плоскость \mathbb{C}_z полосами

$$\Omega_k = \{z \in \mathbb{C}_z : (2k - 1)\pi < \operatorname{Im} z < (2k + 1)\pi\}, k \in \mathbb{Z},$$

то каждая из таких полос отобразится функцией $w = e^z$ в плоскость \mathbb{C}_w , разрезанную вдоль отрицательной части действительной прямой. Итак, экспонента является *бесконечнолистной* целой функцией.

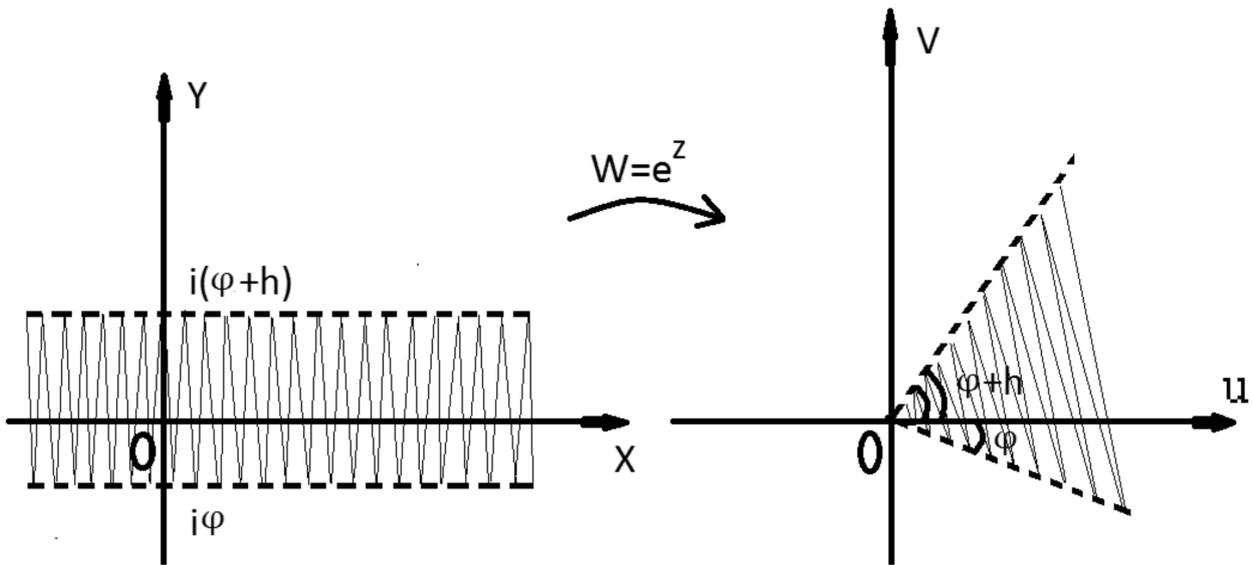


Рис. 11. Отображение $w(z) = e^z$

В заключение отметим, что из определения экспоненты следует *формула Эйлера*:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi, \quad \varphi \in \mathbb{R}.$$

Отсюда, в частности, вытекает еще одно представление комплексного числа

$$z = |z|e^{i \arg z} = \rho e^{i\varphi},$$

где (ρ, φ) - полярные координаты в плоскости \mathbb{C}_z .

Упражнение 3.3. Доказать, что условия (CR) для функции $f(z) = u(\rho, \varphi) + iv(\rho, \varphi)$ комплексного переменного $z = \rho e^{i\varphi}$ имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \varphi}, \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\frac{\partial v}{\partial \rho}.$$

Упражнение 3.4. Доказать, что условия (CR) для функции $f(z) = R(x, y)e^{i\Phi(x, y)}$ комплексного переменного $z = x + iy$ имеют вид

$$\frac{\partial R}{\partial x} = R \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = -R \frac{\partial \Phi}{\partial x}.$$

3.3. Обращение целых степенной и показательной функций

Степенная функция $w = z^n$ в качестве областей однолиственности имеет секторы

$$\Omega_k = \left\{ z \in \mathbb{C}_z : \frac{(2k-1)\pi}{n} < \arg z < \frac{(2k+1)\pi}{n} \right\}$$

$k = 0, 1, \dots, n-1$. Обратную функцию $z = w^{\frac{1}{n}}$, определенную в \mathbb{C}_w и принимающую значения, лежащие в некотором фиксированном секторе Ω_k , обозначим через $z_k = (w^{\frac{1}{n}})_k$. Из (3.1) и формулы Эйлера получим

$$z_k = |w|^{\frac{1}{n}} e^{i \frac{\arg w}{n} + i \frac{(2k-1)\pi}{n}}, \quad -\pi < \arg w < \pi.$$

Каждая такая функция в области \mathbb{C}_w является однозначной голоморфной функцией, поэтому

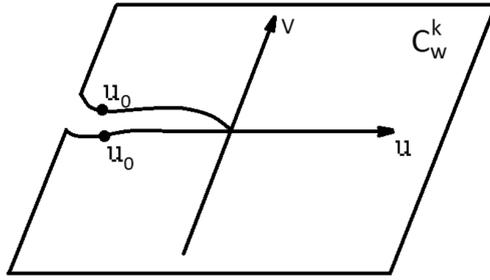
$$\frac{dz_k}{dw} = \frac{1}{nz_k^{n-1}} = \frac{1}{n} \left(w^{\frac{1}{n}-1} \right)_k.$$

Однако рассматривать каждую из величин z_k как отдельную функцию нецелесообразно по той простой причине, что, например, в области

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : 0 < \arg z < \frac{2\pi}{n} \right\}$$

обратная функция $z = w^{\frac{1}{n}}$ при $0 < \arg z < \frac{\pi}{n}$ совпадает с z_0 , а при $\frac{\pi}{n} < \arg z < \frac{2\pi}{n}$ с z_1 . Поэтому z_k , $k = 0, 1, \dots, n-1$ естественно назвать *ветвями* многозначной функции $z = w^{\frac{1}{n}}$.

Г. Риман первым стал рассматривать многозначные голоморфные функции на некоторых многоместных поверхностях, получивших название *римановых поверхностей*. Чтобы построить такую поверхность для функции $z = w^{\frac{1}{n}}$, возьмем n одинаковых листов плоскости \mathbb{C}_w . Перенумеруем листы от 0 до $n-1$ и расположим горизонтально друг над другом (над k -тым листом поместим $k+1$ -ый, $k = 0, 1, \dots, n-2$) так, чтобы прообразы одно и той же точки лежали на одной горизонтали. Разрежем каждый лист вдоль отрицательной части действительной прямой.



При этом каждое число $u_0 \in \mathbb{R}_-$ будет изображаться двумя точками — одной, лежащей на “верхнем берегу” разреза, и другой — на “нижнем берегу”. Обозначим через C_w^k внутренность k -го листа. Границей C_w^k служат оба “берега” разреза. Совершим отождествление или, как еще говорят, “склеивание” верхнего “берега” разреза C_w^0 с нижним “берегом” разреза C_w^1 , верхнего “берега” разреза C_w^1 с нижним “берегом” разреза C_w^2, \dots , верхнего “берега” разреза C_w^{n-1} с нижним “берегом” разреза C_w^0 . Полученная n -листная поверхность называется *римановой поверхностью* функции $z = w^{\frac{1}{n}}$.

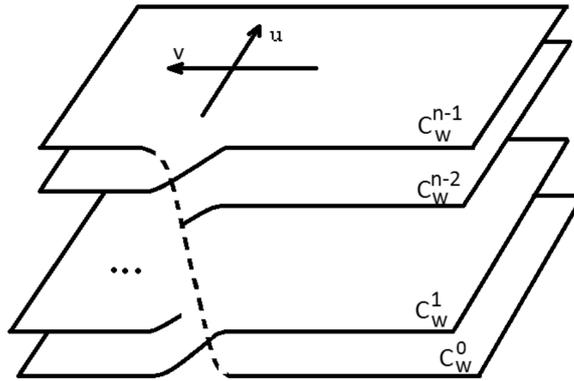


Рис. 12. Риманова поверхность

Соотношения $w = z^n$ и $z = w^{\frac{1}{n}}$ есть биекции между расширенной плоскостью \overline{C}_w и римановой поверхностью функции $z = w^{\frac{1}{n}}$. При обходе вокруг точек $w = 0$ и $w = \infty$ против часовой стрелки (если смотреть “сверху”) $m \leq n$ раз, исходя из фиксированной точки w , при возвращении к этой же точке происходит переход от ветви z_k к ветви z_{k+m} , если $k + m < n$, или к ветви z_{k+m-n} , если $k + m \geq n$. Заметим, что при $m = n$ точки $w = 0$ и $w = \infty$ принято называть *алгебраическими точками ветвления порядка $n - 1$* .

Перейдем теперь к обращению показательной функции. Экспонента в качестве областей однолиственности имеет полосы

$$\Omega_k = \{z \in \mathbb{C}_z : (2k - 1)\pi < \operatorname{Im} z < (2k + 1)\pi\}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

При отображении $w = e^z$ происходит отображение полосы Ω_k на плоскость \mathbb{C}_w , разрезанную вдоль отрицательной части действительной прямой. Обратная функция

$$z_k = \ln |w| + i \arg w + i2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad -\pi < \arg w \leq \pi,$$

отображает проколотую плоскость $\mathbb{C}_w \setminus \{0\}$ на полосу Ω_k . Поскольку z_k – однозначная функция обратная к голоморфной функции $w = e^z$, то мы можем найти ее производную:

$$\frac{dz_k}{dw} = \frac{1}{(e^z)'} = \frac{1}{e^z} = \frac{1}{w}.$$

Отметим, что последнее соотношение не зависит от k , и значит, производные каждой ветви *логарифмической функции*

$$\ln w = \ln |w| + i(\arg w + 2\pi k), \quad k \in \mathbb{Z},$$

совпадают между собой.

Рассматривая бесконечное множество листов $\dots, \mathbb{C}_w^{-1}, \mathbb{C}_w^0, \mathbb{C}_w^1, \dots$, наложенных друг на друга, и склеивая “берега” разрезов \mathbb{C}_w^k и \mathbb{C}_w^{k+1} , $k \in \mathbb{Z}$ таким же образом, как при построении римановой поверхности функции $z = w^{\frac{1}{n}}$, получим риманову поверхность функции $z = \ln w$, которая, очевидно, бесконечнолистна. Плоскость \mathbb{C}_z функцией $w = e^z$ биективно отображается на полученную риманову поверхность с выколотой точкой $w = 0$. Так как при обходе вокруг точки $w = 0$ любое число раз все время происходит переход на новые ветви функции $z = \ln w$, то эта точка называется *трансцендентной точкой ветвления*.

Пример 3.2. Вычислим $\ln(-\sqrt{2} + i\sqrt{2})$.

$$\ln(-\sqrt{2} + i\sqrt{2}) = \ln 2 + i \left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi k \right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

3.4. Определение и свойства основных тригонометрических функций

Формулами

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

определим две основные тригонометрические функции комплексного переменного. Из формулы Эйлера получим, что в случае $\operatorname{Im} z = 0$, функции $w = \cos z$ и $w = \sin z$ совпадают соответственно с хорошо известными функциями косинуса и синуса действительной переменной. В дальнейшем мы покажем, что такое совпадение не случайно.

А сейчас приступим к изучению свойств функций $w = \cos z$ и $w = \sin z$. Во-первых, отметим, что обе функции являются целыми, а во-вторых, что первая из них является четной, а вторая — нечетной. Кроме того, периодом обеих функций является число 2π . Действительно, пусть T — период функции $w = \cos z$. Тогда

$$\cos(z + T) = \cos z$$

и при $z = \frac{\pi}{2}$ получаем

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + T\right) = 0.$$

Отсюда следует, что

$$e^{i\frac{\pi}{2} + iT} + e^{-i\frac{\pi}{2} - iT} = 0,$$

значит,

$$e^{2i(\frac{\pi}{2} + T)} = -1,$$

или

$$i(T + \pi) = \ln |-1| + i \arg(-1) = i(\pi + 2\pi k), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Поэтому

$$T = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Упражнение 3.5. Показать, что период функции $w = \sin z$ равен 2π .

Упражнение 3.6. Доказать формулы

$$\begin{aligned}\cos(z_1 + z_2) &= \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2, \\ \sin(z_1 + z_2) &= \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Замечание 3.1. Формулы (3.1) являются основными соотношениями, однозначно определяющими косинус и синус как функции действительного переменного.

Упражнение 3.7. Пользуясь формулами (3.1) получить *формулы приведения*:

$$\begin{aligned}\cos\left(z + \frac{\pi}{2}\right) &= -\sin z, & \sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos z, \\ \cos(z + \pi) &= -\cos z, & \sin(z + \pi) &= -\sin z.\end{aligned}$$

Полагая в первой формуле (3.1) $z_1 = z$ и $z_2 = -z$, получим

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1.\tag{3.2}$$

Таким образом, все известные соотношения между косинусом и синусом действительной переменной сохраняются и в комплексной плоскости. Однако из формулы (3.2) нельзя сделать вывод, что $|\cos z| \leq 1$ и $|\sin z| \leq 1$, так как $\cos^2 z$ и $\sin^2 z$ не являются, вообще говоря, действительными неотрицательными числами.

Чтобы разобраться в этом вопросе, введем в рассмотрение *гиперболические функции*:

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

Из определения видно, что при $z = \operatorname{Im} z = x \in \mathbb{R}$ эти функции совпадают с хорошо известными функциями $\operatorname{ch} x$ и $\operatorname{sh} x$.

Упражнение 3.8. Доказать формулы:

$$\operatorname{ch} z = \cos(iz), \quad \operatorname{sh} z = -i \sin(iz),$$

$$\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1.$$

Упражнение 3.9. Доказать формулы:

$$\operatorname{Re} \cos z = \cos \operatorname{Re} z \operatorname{ch} \operatorname{Im} z, \quad \operatorname{Im} \cos z = -\sin \operatorname{Re} z \operatorname{sh} \operatorname{Im} z,$$

$$\operatorname{Re} \sin z = \sin \operatorname{Re} z \operatorname{ch} \operatorname{Im} z, \quad \operatorname{Im} \sin z = \cos \operatorname{Re} z \operatorname{sh} \operatorname{Im} z.$$

Упражнение 3.10. Пользуясь формулами упражнения 3.9, доказать, что

$$\begin{aligned} |\cos z| &= \sqrt{\operatorname{ch}^2 \operatorname{Im} z - \sin^2 \operatorname{Re} z}, \\ |\sin z| &= \sqrt{\operatorname{sh}^2 \operatorname{Im} z + \sin^2 \operatorname{Re} z}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Полагая в формулах (3.3) $z = x + iy$, получим

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} y &\geq |\cos z| \geq \sqrt{\operatorname{ch}^2 y - 1} = |\operatorname{sh} y|, \\ \sqrt{\operatorname{sh}^2 y + 1} &= \operatorname{ch} y \geq |\sin z| \geq |\operatorname{sh} y|. \end{aligned}$$

Отсюда заключаем, что при $|y| \rightarrow \infty$

$$|\cos z| \sim \frac{1}{2}e^{|y|}, \quad |\sin z| \sim \frac{1}{2}e^{|y|}.$$

Следовательно, $|\cos z|$ и $|\sin z|$ принимают сколь угодно большие значения при достаточно больших $|y|$.

Упражнение 3.11. Доказать, что

$$\begin{aligned} (\cos z)' &= -\sin z, & (\sin z)' &= \cos z, \\ (\operatorname{ch} z)' &= \operatorname{sh} z, & (\operatorname{sh} z)' &= \operatorname{ch} z. \end{aligned}$$

Упражнение 3.12. Найти периоды и производные следующих функций:

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}, \quad \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \quad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

Пример 3.3. Вычислим $\sin\left(\frac{\pi}{6} + i\right)$.

Решение. По формуле (3.1) получим

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} + i\right) = \sin \frac{\pi}{6} \cos i + \cos \frac{\pi}{6} \sin i.$$

Откуда в силу формул из упражнения 3.8 выпишем ответ

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} + i\right) = \frac{\operatorname{ch} 1}{2} + \frac{i\sqrt{3} \operatorname{sh} 1}{2}$$

3.5. Обращение основных тригонометрических функций

Определим функцию $z = \arccos w$ как множество решений уравнения

$$w = \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Разрешая это уравнение относительно e^{iz} ,

$$e^{2iz} - 2we^{iz} + 1 = 0.$$

Разрешая полученное уравнение, найдем

$$e^{iz} = w + \sqrt{w^2 - 1}.$$

Отсюда

$$z = -i \ln(w + \sqrt{w^2 - 1}).$$

Каждому значению $w \neq \pm 1$ отвечает два различных значения $\sqrt{w^2 - 1}$ и, следовательно, два различных корня, скажем, ξ_1 и ξ_2 , причем $\xi_1 \cdot \xi_2 = 1$. Поэтому множество значений

$$\arccos w = -i \ln(w + \sqrt{w^2 - 1})$$

является объединением множеств значений $-i \ln \xi_1$ и $-i \ln \xi_2 = -i \ln \xi_1^{-1} = i \ln \xi_1$, т.е.

$$\arccos w = \pm i \ln \xi_1 = \pm i \ln |\xi_1| \pm \arg \xi_1 + 2\pi k.$$

Отсюда вытекает, что $\operatorname{Im} \arccos w = \pm \ln |\xi_1|$, т.е. при $|\xi_1| \neq 1$ все значения $\arccos w$ лежат на паре прямых, параллельных действительной оси, $y = \ln |\xi_1|$ и $y = -\ln |\xi_1|$, а при $|\xi_1| = 1$ эти прямые сливаются в одну действительную ось.

Рассмотрим подробнее случай $w \in [-1, 1]$. Положим $w = \cos \Theta$, $\Theta \in [0, \pi]$, т.е. $\Theta = \arccos w$. Тогда

$$\arccos w = -i \ln(w + \sqrt{w^2 - 1}) = -i \ln(\cos \Theta \pm i \sin \Theta) =$$

$$-i \ln e^{\pm i\Theta} = \pm\Theta + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Окончательно получим

$$\operatorname{arccos} w = \pm \arccos w + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad w \in [-1, 1].$$

Другими словами, многозначная функция $z = \operatorname{arccos} w$ с точностью до знака и слагаемого, кратного 2π , совпадает в случае $w \in [-1, 1]$ с хорошо известной функцией арккосинуса действительной переменной.

Упражнение 3.13. Получить формулу

$$\arcsin w = i \ln(iw + \sqrt{1 - w^2})$$

и показать, что для любого $w \in \mathbb{C}_w$ существуют значения $\operatorname{arccos} w$ и $\arcsin w$, сумма которых равна $\frac{\pi}{2}$.

Упражнение 3.14. Найти формулы

$$\operatorname{arsh} w = \ln(w + \sqrt{w^2 + 1}), \quad \operatorname{arch} w = \ln(w + \sqrt{w^2 - 1}).$$

Упражнение 3.15. Найти производные любой ветви функций:

$$\operatorname{arccos} w, \quad \arcsin w, \quad \operatorname{arch} w, \quad \operatorname{arsh} w.$$

Теперь определим функцию $z = \operatorname{arctg} w$ как множество решений уравнения

$$w = \operatorname{tg} z = \frac{1 e^{iz} - e^{-iz}}{i e^{iz} + e^{-iz}}.$$

Или, другими словами,

$$e^{2iz} = \frac{1 + iw}{1 - iw}.$$

Отсюда находим

$$z = \frac{1}{2i} \ln \frac{1 + iw}{1 - iw} = \operatorname{arctg} w.$$

Итак, функция $z = \operatorname{arctg} w$ оказалась бесконечнозначной, определенной при всех $z = \pm i$ и выражаемой через логарифм от функции

$$\eta = \frac{iw + 1}{-iw + 1}.$$

Эта функция биективно отображает $\overline{\mathbb{C}_w}$ на $\overline{\mathbb{C}_\eta}$ так, что точки $w = i$ и $w = -i$ переходят в точки $\eta = 0$ и $\eta = \infty$ соответственно, разрез вдоль мнимой оси в $\overline{\mathbb{C}_w}$ по отрезку $[-i, i]$ переходит в разрез вдоль положительной части действительной оси в $\overline{\mathbb{C}_\eta}$. В плоскости \mathbb{C}_η с разрезом можно выделить однозначные ветви логарифма, скажем,

$$\ln_k \eta = \ln |\eta| + i \arg \eta + i2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

которым соответствуют однозначные голоморфные ветви функции

$$\operatorname{arctg}_k w = \frac{1}{2i} \ln \left| \frac{1+iw}{1-iw} \right| + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+iw}{1-iw} \right) + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Отсюда видно, что любые две ветви функции $z = \operatorname{arctg} w$ отличаются на действительное число, кратное π .

В частности, при $w = \operatorname{Re} w = u \in \mathbb{R}$ получим

$$\left| \frac{1+iu}{1-iu} \right| = 1, \quad \arg \left(\frac{1+iu}{1-iu} \right) = 2 \arg(1+iu) = 2 \operatorname{arctg} u.$$

Поэтому

$$\operatorname{arctg}_k w = \operatorname{arctg} u + \pi k.$$

Упражнение 3.16. Получить и исследовать формулы:

$$\operatorname{arccctg} w = \frac{1}{2i} \ln \frac{w+i}{w-i}, \quad \operatorname{arth} w = \frac{1}{2} \ln \frac{1+w}{1-w},$$

$$\operatorname{arcth} w = \frac{1}{2} \ln \frac{w+1}{w-1}.$$

Пример 3.4. Вычислим $\operatorname{arccctg}(3+5i)$.

Решение. В силу формулы из упражнения 3.16 получим

$$\operatorname{arccctg}(3+5i) = \frac{1}{2i} \ln \frac{(3+5i)+i}{(3+5i)-i} = \frac{1}{2i} \ln \frac{3+6i}{3+4i}.$$

Вычислим аргумент логарифма

$$\frac{3+6i}{3+4i} = \frac{(3+6i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{33+6i}{25}.$$

Найдем модуль и аргумент этого числа

$$\left| \frac{33 + 6i}{25} \right| = \frac{3}{25} \sqrt{121 + 4} = \frac{3\sqrt{125}}{25} = \frac{3\sqrt{5}}{5} = \sqrt{\frac{9}{5}},$$

$$\arg \left(\frac{33 + 6i}{25} \right) = \operatorname{arctg} \frac{6}{33} = \operatorname{arctg} \frac{2}{11}.$$

Подставим в формулу

$$\frac{1}{2i} \ln \frac{3 + 6i}{3 + 4i} = \frac{1}{2i} \left(\ln \sqrt{\frac{9}{5}} + i \left(\operatorname{arctg} \frac{2}{11} + 2\pi k \right) \right), \quad k \in \mathbb{Z},$$

откуда получим ответ

$$\operatorname{arctg}(3 + 5i) = \frac{1}{2i} \ln \frac{3 + 6i}{3 + 4i} = \pi k + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2}{11} - \frac{i(\ln 9 - \ln 5)}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Упражнение 3.17. Найти производные любой ветви функций

$$\operatorname{arctg} w, \operatorname{arctg} w, \operatorname{arth} w, \operatorname{arth} w.$$

3.6. Общие степенная и показательная функции

Общая степенная функция $w = z^a$, где $a = \alpha + i\beta$ — произвольное комплексное число, определяется соотношением

$$z^a = e^{a \ln z} = e^{a \ln |z|} \cdot e^{ia(\arg z + 2\pi k)}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Полагая здесь $z = \rho e^{i\varphi}$, $\rho = |z|$, $\varphi = \arg z$, получим

$$\ln z = \ln \rho + i\varphi + i2\pi k,$$

и, следовательно,

$$z^a = e^{\alpha \ln \rho - \beta(\varphi + 2\pi k)} \cdot e^{i(\alpha(\varphi + 2\pi k) + \beta \ln \rho)}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Отсюда видно, что при $\beta \neq 0$ функция $w = z^a$ всегда имеет бесконечно много значений, лежащих на окружностях $|w| = r_k$ с радиусами

$$r_k = e^{\alpha \ln \rho - \beta\varphi} \cdot e^{-2\beta\pi k},$$

образующими бесконечную в обе стороны геометрическую прогрессию со знаменателем $e^{-2\beta\pi}$. Аргументы этих значений

$$\Theta_k = \alpha\varphi + \beta \ln \rho + 2\alpha\pi k$$

образуют бесконечную в обе стороны арифметическую прогрессию с разностью $2\alpha\pi$.

При $\beta = 0$, т.е. при действительных значениях a , значения z^a располагаются на одной окружности

$$|w| = e^{\alpha \ln \rho} = |z|^a,$$

а их аргументы находятся по формулам

$$\Theta_k = \varphi + 2\pi a k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Если $a = \frac{p}{q}$ — рациональное число (считаем дробь $\frac{p}{q}$ несократимой), то все значения Θ_k отличаются на число кратное $2\pi a$. Следовательно, в этом случае функция $w = z^a$ конечнозначная и совпадает с функцией $w = z^{\frac{p}{q}}$. Если же a — иррациональное число, то все значения Θ_k отличаются друг от друга и, следовательно, функция $w = z^a$ бесконечнозначна. Многозначность общей степенной функции обусловлена многозначностью логарифма. Точками ветвления для нее будут точки 0 и ∞ . Но теперь это трансцендентные точки ветвления.

Общая показательная функция $w = a^z$, $a \in \mathbb{C}_z \setminus \{0\}$ определяется формулой

$$a^z = e^{z \ln a} = e^{z \ln |a|} \cdot e^{iz(\arg a + 2\pi k)}, \quad k \in \mathbb{Z}, z \in \mathbb{C}_z.$$

Чтобы получить определенную однозначную ветвь этой многозначной функции, достаточно фиксировать одно из значений $\ln a = b$. В этом случае мы получаем однозначную голоморфную функцию e^z . Беря все возможные значения $\ln a$, получаем все возможные однозначные ветви функции $w = a^z$. Так как два значения $\ln a$ различаются слагаемыми вида $i2\pi k$, то две ветви функции $w = a^z$ будут различаться сомножителем вида $e^{iz2\pi k}$, представляющим голоморфную функцию.

Поэтому в рассматриваемом случае ветви многозначной функции $w = a^z$ будут существенно отличаться по своему характеру от ветвей всех ранее рассмотренных многозначных функций. А именно, во всех рассмотренных ранее случаях существовали точки ветвления. Здесь же эта возможность исключена потому, что каждая ветвь представляет функцию однолиственную и однозначную во всей комплексной плоскости. По какой бы замкнутой кривой мы не двигались бы, по возвращении в исходную точку получим то же самое исходное число.

Таким образом, многозначная функция $w = a^z$ не имеет ни одной точки ветвления, и ее однозначные непрерывные ветви не могут непрерывно переходить одна в другую. Все это позволяет смотреть на них как на самостоятельные, не связанные друг с другом однозначные голоморфные функции

$$e^{z \ln a}, e^{z(\ln a + 2\pi i)}, \dots, e^{z(\ln a + 2k\pi i)}.$$

То обстоятельство, что функция $w = a^z$ представляет собой совокупность отдельных, не связанных между собой однозначных функций, имеет для нас не большее значение, чем тот факт, например, что функции $w = \sin z$ и $w = -\sin z$ можно рассматривать как ветви двужначной функции $w = \sqrt{1 - \cos^2 z}$. Более существенным для нас является тот факт, что для общей показательной функции уже не справедливо правило сложения показателей при умножении, т.е.

$$a^{z_1} \cdot a^{z_2} \neq a^{z_1 + z_2}.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} a^{z_1} \cdot a^{z_2} &= e^{z_1 \ln a} \cdot e^{z_2 \ln a} = \\ &= e^{z_1(\ln |a| + i \arg a + 2k\pi i)} \cdot e^{z_2(\ln |a| + i \arg a + 2l\pi i)} = \\ &= e^{(z_1 + z_2)(\ln |a| + i \arg a)} \cdot e^{2\pi i(kz_1 + lz_2)}. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$a^{z_1 + z_2} e^{(z_1 + z_2) \ln a} = e^{(z_1 + z_2)(\ln |a| + i \arg a)} \cdot e^{(z_1 + z_2)2\pi i k}.$$

К примеру, множество значений $\varphi^{\frac{1}{2}} \cdot \varphi^{\frac{1}{2}}$ состоит из двух чисел φ и $-\varphi$, что не совпадает с множеством значений $\varphi^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}$, состоящим из одного числа φ .

Фиксировав одну из ветвей $w = e^{bz}$, $b = \ln a$ функции $w = a^z$, мы можем рассмотреть функцию, обратную по отношению к этой ветви. Получим, очевидно,

$$z = b^{-1} \ln w.$$

Эта функция отличается от функции $z = \ln w$ только постоянным множителем b^{-1} . Поскольку $b = \ln a$, то можно определить *логарифм по основанию a* :

$$\log_a w = \frac{\ln w}{\ln a}, \quad a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Пример 3.5. Вычислим $(11 + 2i)^{-i}$.

Решение. По формуле общей показательной функции получим

$$(11 + 2i)^{-i} = \exp((-i) \ln(11 + 2i)).$$

Вычислим логарифм

$$\ln(11 + 2i) = \frac{3 \ln 5}{2} + i \left(\operatorname{arctg} \frac{2}{11} + 2\pi k \right), \quad k \in \mathbb{Z}$$

и подставим

$$\begin{aligned} (11 + 2i)^{-i} &= \exp \left((-i) \left(\frac{3 \ln 5}{2} + i \left(\operatorname{arctg} \frac{2}{11} + 2\pi k \right) \right) \right) = \\ &= \exp \left(\left(\operatorname{arctg} \frac{2}{11} + 2\pi k \right) - i \frac{3 \ln 5}{2} \right) = \\ &= e^{\operatorname{arctg} \frac{2}{11} + 2\pi k} \left(\cos \frac{3 \ln 5}{2} - i \sin \frac{3 \ln 5}{2} \right), \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Задачи

- Уровень А

Найти все значения корня.

3.1. $\sqrt[4]{-1}$

3.2. $\sqrt[4]{\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}}$

3.3. $\sqrt[3]{1}$

3.4. $\sqrt[3]{i}$

3.5. $\sqrt[4]{1}$

3.6. $\sqrt[4]{\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}}$

3.7. $\sqrt[3]{-1}$

3.8. $\sqrt[3]{-i}$

3.9. $\sqrt[4]{-16}$

3.10. $\sqrt[4]{\frac{1 + i\sqrt{3}}{32}}$

3.11. $\sqrt[3]{8}$

3.12. $\sqrt[3]{8i}$

3.13. $\sqrt[4]{16}$

3.14. $\sqrt[4]{\frac{-1 - i\sqrt{3}}{32}}$

3.15. $\sqrt[3]{-8}$

3.16. $\sqrt[3]{-8i}$

3.17. $\sqrt[4]{-\frac{1}{16}}$

3.18. $\sqrt[4]{-8 + i8\sqrt{3}}$

3.19. $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$

3.20. $\sqrt[3]{\frac{i}{8}}$

3.21. $\sqrt[4]{\frac{1}{16}}$

3.22. $\sqrt[4]{-8 - i8\sqrt{3}}$

3.23. $\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}$

3.24. $\sqrt[3]{-\frac{i}{8}}$

3.25. $\sqrt[4]{-128 + i128\sqrt{3}}$

3.26. $\sqrt[3]{27}$

3.27. $\sqrt[4]{\frac{1}{256}}$

3.28. $\sqrt[4]{-128 - i128\sqrt{3}}$

3.29. $\sqrt[3]{\frac{i}{27}}$

3.30. $\sqrt[4]{256}$

3.31. $\sqrt[3]{-27i}$

• **Уровень Б**

Представить в алгебраической форме.

3.32. $\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2i\right)$

3.48. $\operatorname{ch}\left(1 + \frac{\pi i}{3}\right)$

3.33. $\cos\left(\frac{\pi}{6} + 2i\right)$

3.49. $\ln(-1 - i)$

3.34. $\ln 6$

3.50. $\sin\left(\frac{\pi}{6} - 3i\right)$

3.35. $\operatorname{sh}\left(2 + \frac{\pi i}{4}\right)$

3.51. $\cos\left(\frac{\pi}{3} + 3i\right)$

3.36. $\operatorname{ch}\left(2 + \frac{\pi i}{2}\right)$

3.52. $\ln(1 - i)$

3.37. $\ln(1 + i)$

3.53. $\operatorname{sh}\left(1 - \frac{\pi i}{3}\right)$

3.38. $\sin\left(\frac{\pi}{3} + i\right)$

3.54. $\operatorname{ch}\left(2 - \frac{\pi i}{6}\right)$

3.39. $\cos\left(\frac{\pi}{4} + i\right)$

3.55. 1^{2i}

3.40. $\ln(\sqrt{3} + i)$

3.56. $\sin\left(\frac{\pi}{3} - 2i\right)$

3.41. $\operatorname{sh}\left(1 + \frac{\pi i}{2}\right)$

3.57. $\cos\left(\frac{\pi}{6} - i\right)$

3.42. $\operatorname{ch}(1 - \pi i)$

3.58. i^{3i}

3.43. $\ln(1 + i\sqrt{3})$

3.59. $\operatorname{sh}(2 - \pi i)$

3.44. $\ln(-1 + i)$

3.60. $(-i)^{5i}$

3.45. $\cos\left(\frac{\pi}{4} - 2i\right)$

3.61. $(-1)^{4i}$

3.46. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - 5i\right)$

3.62. $\operatorname{ch}\left(3 + \frac{\pi i}{4}\right)$

3.47. $\operatorname{sh}\left(3 + \frac{\pi i}{6}\right)$

• **Уровень В**

Представить в алгебраической форме.

3.63. $(-1 + i\sqrt{3})^{-3i}$

3.65. $\operatorname{arch}(-2)$

3.64. $\arcsin 4$

3.66. $\operatorname{arctg}\left(\frac{-2\sqrt{3}+3i}{3}\right)$

- 3.67. $\operatorname{arcth}\left(\frac{3-4i}{5}\right)$
- 3.68. $\operatorname{arctg}\left(\frac{4+3i}{5}\right)$
- 3.69. $\operatorname{arth}\left(\frac{3+i2\sqrt{3}}{3}\right)$
- 3.70. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - i\right)$
- 3.71. $\operatorname{sh}\left(1 - \frac{\pi}{2}i\right)$
- 3.72. $(-1 - i)^{4i}$
- 3.73. $\sin\left(\frac{\pi}{4} + i\right)$
- 3.74. $\operatorname{arch}(3i)$
- 3.75. $\operatorname{arctg}\left(\frac{3+4i}{5}\right)$
- 3.76. $\operatorname{arcth}\left(\frac{8+i3\sqrt{3}}{7}\right)$
- 3.77. $\operatorname{arctg}\left(\frac{3\sqrt{3}-8i}{7}\right)$
- 3.78. $\operatorname{arth}\left(\frac{4-3i}{5}\right)$
- 3.79. $\operatorname{arctg}\left(\frac{-2\sqrt{3}+3i}{7}\right)$
- 3.80. $\operatorname{arcth}\left(\frac{3-i2\sqrt{3}}{7}\right)$
- 3.81. $\operatorname{arccos}(-5)$
- 3.82. $\operatorname{arsh}(-4i)$
- 3.83. $(-\sqrt{3} + i)^{6i}$
- 3.84. $\omega = \sin \frac{i}{z}$ при $z = \frac{8+2\pi i}{\pi^2+16}$
- 3.85. $\omega = e^{\frac{i}{z}}$ при $z = \frac{4+2\pi i}{\pi^2+4}$
- 3.86. $\operatorname{arctg}\left(\frac{2\sqrt{3}+3i}{7}\right)$
- 3.87. $\operatorname{arth}\left(\frac{3+i2\sqrt{3}}{7}\right)$
- 3.88. $\operatorname{arcth}\left(\frac{4+3i}{5}\right)$
- 3.89. $\omega = \operatorname{ch}(iz)$ при $z = \frac{\pi}{4} + 2i$
- 3.90. $\operatorname{arctg}\left(\frac{3\sqrt{3}+8i}{7}\right)$
- 3.91. $\operatorname{arccos}(-3i)$
- 3.92. $(4 - 3i)^i$
- 3.93. $(-12 + 5i)^i$

4. Ряды Тейлора и Лорана

4.1. Степенные ряды. Ряд Тейлора

Определение 4.1. *Степенным* называется функциональный ряд вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \dots, \quad (4.1)$$

где $z_0 \in \mathbb{C}$ некоторая фиксированная точка, а числа $a_k \in \mathbb{C}$, $k = 0, 1, \dots$ называются *коэффициентами* ряда.

Все результаты о сходимости как числовых, так и абсолютно сходящихся функциональных рядов, в том числе и степенных, практически без изменений переносятся с вещественного на комплексный случай.

Пример 4.1. Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^k z^k$$

сходится только в точке $z = 0$. В самом деле, пусть $z \neq 0$, тогда $\lim_{k \rightarrow \infty} k^k z^k$ равен бесконечности, и тем самым, вне точки $z = 0$ нарушено необходимое условие сходимости числового ряда.

Пример 4.2. Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^k}$$

сходится во всей комплексной плоскости. Действительно, в любой точке $z \in \mathbb{C}$ при достаточно больших $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$\left| \frac{z}{k} \right| < \frac{1}{2},$$

т.е.

$$\left| \frac{z^k}{k^k} \right| < \frac{1}{2^k}.$$

Поэтому сходимость ряда вытекает из признака Вейерштрасса для равномерной сходимости функциональных рядов и из сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}.$$

Пример 4.3. Как нетрудно убедиться, ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

сходится при $|z| < 1$ и расходится при $|z| > 1$.

Теорема 4.1. Для каждого степенного ряда (4.1) существует окружность $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = R\}$ ($0 \leq R \leq \infty$), внутри которой этот ряд сходится, а вне – расходится.

Определение 4.2. Величина R , определяемая теоремой 4.1, называется радиусом сходимости, а круг $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$ – кругом сходимости ряда.

Теорема 4.2 (Формула Коши - Адамара). .

Пусть

$$L = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}.$$

Тогда радиус сходимости R ряда (4.1) определяется соотношением

$$R = L^{-1},$$

причем $R = +\infty$ при $L = 0$ и $R = 0$ при $L = +\infty$.

Теорема 4.3. Всякий степенной ряд, имеющий ненулевой радиус сходимости, в любом замкнутом круге, содержащемся в круге сходимости, сходится равномерно.

Эти результаты и теорема Морера 6.2 дают

Следствие 4.1. Сумма степенного ряда, сходящегося более чем в одной точке, голоморфна на всем круге сходимости этого ряда.

Лемма 4.1. Сумма всякого степенного ряда (4.1), сходящегося более чем в одной точке, дифференцируема бесконечное число раз во всем круге сходимости, причем ряд можно дифференцировать почленно:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \right)^{(n)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left((z - z_0)^k \right)^{(n)}.$$

Иначе говоря, в невырожденном случае сумма степенного ряда голоморфна.

Верно и обратное:

Теорема 4.4. *Всякая голоморфная в точке функция в некоторой окрестности этой точки представима в виде суммы степенного ряда, причем единственным образом.*

Частным случаем степенного ряда называется так называемый ряд Тейлора.

Определение 4.3. Рядом Тейлора бесконечно дифференцируемой в точке z_0 функции f называется степенной ряд вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k.$$

Лемма 4.2. *Степенной ряд (4.1), сходящийся более чем в одной точке, является рядом Тейлора своей суммы $S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ в круге сходимости ряда, т.е.*

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{S^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k.$$

Таким образом, имеем

Следствие 4.2. *Разложение голоморфной в точке функции, определенное однозначно в силу теоремы 4.4, является рядом Тейлора этой функции в данной точке.*

Важно знать следующие стандартные разложения основных элементарных функций вместе с их областями сходимости:

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots, \quad |z| < \infty$$

$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, \quad |z| < \infty$$

$$\begin{aligned} \cos z &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots, & |z| < \infty \\ \operatorname{sh} z &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = z + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, & |z| < \infty \\ \operatorname{ch} z &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = 1 + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots, & |z| < \infty \\ \ln(1+z) &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{z^k}{k} = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n} + \dots, & |z| < 1 \\ (1+z)^\alpha &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-k+1)}{k!} z^k \\ &= 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} z^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} z^3 + \dots, \end{aligned}$$

последнее разложение верно

- при всех z из комплексной плоскости, если α - целое неотрицательное,
- при $|z| < 1$, во всех остальных случаях.

Замечание 4.1. Напомним, что логарифм является многозначной функцией, степенная функция тоже будет многозначна при всех нецелых значениях показателя α , так что перед разложением, вообще говоря, необходимо произвести выбор ветви. Выше для многозначных функций разложение приведено для их главных значений.

Наряду с приведенными разложениями, очень полезно помнить частный случай последнего при $\alpha = -1$:

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^k, \quad |z| < 1$$

и получающееся из него заменой z на $-z$

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} z^k, \quad |z| < 1.$$

Рассмотрим примеры работы со стандартными разложениями.

Пример 4.4. 1) Разложить в ряд Тейлора по степеням z функцию ze^{2z^2} .

$$e^w = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{k!} \text{ при всех } |w| < \infty, \quad (4.2)$$

положим $w = 2z^2$, тогда при $|z| < \infty$ имеем

$$e^{2z^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2z^2)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} z^{2k}.$$

Окончательно

$$ze^{2z^2} = z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2z^2)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} z^{2k+1}.$$

2) Разложить в ряд Тейлора по степеням $z - 1$ функцию ze^{3z} . В разложении (4.2), верном при всех значениях аргумента, положим $w = z - 1$. Тогда при всех z имеем

$$e^{z-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-1)^k}{k!}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} ze^{3z} &= (w+1)e^{3(w+1)} = we^{3(w+1)} + e^{3(w+1)} = e^3 e^{3w} + e^3 we^{3w} = \\ &= e^3 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{k!} + e^3 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^{k+1}}{k!} = e^3 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{k!} + e^3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{w^k}{(k-1)!} = \\ &= e^3 \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k!} + \frac{1}{(k-1)!} \right) w^k \right] = e^3 \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k!} + \frac{1}{(k-1)!} \right) (z-1)^k \right]. \end{aligned}$$

Пример 4.5. Разложить в ряд Тейлора по степеням z функцию $\frac{z}{z^4 + 5z^2 + 4}$.

Решение:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^4 + 5z^2 + 4} &= \frac{1}{(z^2 + 1)(z^2 + 4)} = \frac{1}{3} \frac{(z^2 + 4) - (z^2 + 1)}{(z^2 + 1)(z^2 + 4)} = \\ &= \frac{1}{3} \left[\frac{1}{z^2 + 1} - \frac{1}{z^2 + 4} \right] = \frac{1}{3} \left[\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{2k} - \frac{1}{4} \frac{1}{1 + z^2/4} \right] = \\ &= \frac{1}{3} \left[\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{2k} - \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{z^2}{4} \right)^k \right] = \frac{1}{3} \left[\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{2k} - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{4^{k+1}} z^{2k} \right] = \\ &= \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(1 - \frac{1}{4^{k+1}} \right) z^{2k}. \end{aligned}$$

Отметим, что разложение первого слагаемого $\frac{1}{z^2 + 1}$ в указанный ряд имеет место, если $|z^2| < 1$, то есть при $|z| < 1$, а второго, $\frac{1}{1 + z^2/4}$ - если $|z^2/4| < 1$, то есть при $|z| < 2$. Таким образом, разложение всей дроби в указанный ряд верно при $|z| < 1$.

Окончательно имеем

$$\frac{z}{z^4 + 5z^2 + 4} = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(1 - \frac{1}{4^{k+1}}\right) z^{2k+1}, \text{ при } |z| < 1.$$

4.2. Ряды Лорана

Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=-1}^{-\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad (4.3)$$

где $a_k \in \mathbf{C}, k = -1, -2, \dots, z_0 \neq \infty$. Каждый член этого ряда имеет смысл, если $z \in \mathbf{C} \setminus \{z_0\}$. В результате замены $\xi^{-1} = z - z_0$ ряд (4.3) превратится в степенной ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} \xi^k. \quad (4.4)$$

Положив $\xi = 0$ при $z = \infty$, убедимся в том, что если $\{\xi \in \mathbf{C} : |\xi| < r_1\}$ - круг сходимости ряда (4.4), то ряд (4.3) абсолютно сходится в каждой точке вне замкнутого круга $\{z \in \mathbf{C} : |z - z_0| \leq r = r_1^{-1}\}$. Из теоремы 4.3 следует равномерная сходимость ряда (4.3) на любом замкнутом подмножестве внешности этого круга $\{|z - z_0| > r\}$, поэтому он определяет на всей внешности круга голоморфную функцию

$$S_1(z) = \sum_{k=-1}^{-\infty} a_k (z - z_0)^k.$$

Если степенной ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

сходится в круге $\{z \in \mathbf{C} : |z - z_0| < R\}$ (обозначим его сумму через $S_2(z)$), а степенной ряд (4.3) сходится при $|z - z_0| > r$, то в кольце $\{z \in \mathbf{C} : r <$

$|z - z_0| < R$ функция $S(z) = S_1(z) + S_2(z)$ голоморфна и представляет сумму ряда

$$S(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k.$$

Сформулируем обратное утверждение.

Теорема 4.5 (Теорема Лорана). *Голоморфная в кольце $\{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$ функция f в каждой точке этого кольца представляется в виде ряда*

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad (4.5)$$

где

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{k+1}} d\xi, \quad (4.6)$$

а γ – окружность $\{\xi \in \mathbb{C} : |\xi - z_0| < \rho\}$, $r < \rho < R$.

Определение 4.4. В обозначениях теоремы, ряд (4.5), коэффициенты a_k , $k \in \mathbb{Z}$ которого находятся по формулам (4.6), называется *рядом Лорана* функции f в кольце $\{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$, а ряды

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \text{ и } \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} (z - z_0)^{-k}$$

– соответственно *правильной (регулярной)* и *главной (иррегулярной)* частями ряда Лорана.

Теорема 4.6. *Голоморфная в кольце $\{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$ функция f единственным образом может быть представлена в виде ряда (4.5).*

Замечание 4.2. При определении ряда Лорана (4.5) не исключается случай, когда $r = 0$ или $R = +\infty$.

Таким образом, частным случаем разложения в ряд Лорана в кольце является разложение в ряд Лорана в проколотой окрестности $\{0 < |z - z_0| < r\}$ точки z_0 .

Определение 4.5. Пусть функция f голоморфна в области $|z| > R$. Тогда разложение по степеням z функции f в этой области называется разложением этой функции в *ряд Лорана в окрестности бесконечности*:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k z^k, \text{ при } |z| > R.$$

Главной и правильной частями ряда Лорана в окрестности бесконечности называются суммы

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k z^k \text{ и } \sum_{k=-\infty}^0 a_k z^k$$

соответственно.

При разложении функций в ряд Лорана активно используются стандартные разложения в ряд Тейлора основных элементарных функций.

Пример 4.6. 1) Разложить в ряд Лорана по степеням z функцию $z^3 e^{2/z}$.

При $|2/z| < \infty$, то есть когда $|z| > 0$ выполнено

$$z^3 e^{2/z} = z^3 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{2}{z}\right)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{k!} z^{3-k}.$$

2) Разложить в ряд Лорана по степеням $z - 1$ функцию $\frac{1}{z^2 - 1}$ всеми возможными способами, указать области, где верно каждое из разложений.

$$\frac{1}{z^2 - 1} = \frac{1}{z - 1} \frac{1}{z + 1} = \frac{1}{z - 1} \frac{1}{(z - 1) + 2} = \frac{1}{2(z - 1)} \frac{1}{1 + (z - 1)/2}.$$

При $|(z - 1)/2| < 1$, то есть в круге $\{|z - 1| < 2\}$, из стандартного разложения следует

$$\frac{1}{2(z - 1)} \frac{1}{1 + (z - 1)/2} = \frac{1}{2(z - 1)} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{z - 1}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(z - 1)^{k-1}}{2^{k+1}}.$$

Рассмотрим область $\{|z - 1| > 2\}$. Тогда, так как $|2/(z - 1)| < 1$

$$\frac{1}{z^2 - 1} = \frac{1}{z - 1} \frac{1}{(z - 1) + 2} = \frac{1}{(z - 1)^2} \frac{1}{1 + 2/(z - 1)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2^k}{(z - 1)^{k+2}}.$$

Ответ:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(z-1)^{k-1}}{2^{k+1}} \quad \text{при } 0 < |z-1| < 2,$$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2^k}{(z-1)^{k+2}} \quad \text{при } |z-1| > 2.$$

3) Разложить в ряд Лорана по степеням z функцию $f(z) = \frac{z}{z^4+5z^2+4}$ всеми возможными способами, указать области, где верно каждое из разложений.

Воспользуемся выкладками, проделанными в примере 4.5. В частности, имеем

$$\frac{1}{z^4+5z^2+4} = \frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)} = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{z^2+1} - \frac{1}{z^2+4} \right].$$

Напомним, что разложение первого слагаемого выглядит следующим образом

$$\frac{1}{z^2+1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{2k}$$

при $|z| < 1$, а разложение второго слагаемого —

$$\frac{1}{z^2+4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4^{k+1}} z^{2k}$$

при $|z| < 2$. Рассмотрим первое слагаемое при $|z| > 1$, тогда $|1/z^2| < 1$, и

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{z^2} \frac{1}{1+1/z^2} = \frac{1}{z^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{z^2}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{z^{2k+2}}.$$

Разложение второго слагаемого при $|z| > 2$ будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{1}{z^2+4} = \frac{1}{z^2} \frac{1}{1+4/z^2} = \frac{1}{z^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{4}{z^2}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-4)^k}{z^{2k+2}},$$

так как при таких z выполняется условие $|4/z^2| < 1$.

Таким образом, в круге $|z| < 1$ верно разложение

$$f(z) = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(1 - \frac{1}{4^{k+1}}\right) z^{2k},$$

в кольце $1 < |z| < 2$ —

$$f(z) = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{z^{2k+2}} - \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4^{k+1}} z^{2k},$$

во внешности круга $|z| > 2$ —

$$f(z) = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{z^{2k+2}} - \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-4)^k}{z^{2k+2}} = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (1 - 4^k) \frac{1}{z^{2k+2}}.$$

Замечание 4.3. Из определения 4.4 непосредственно следует, что ряды Тейлора являются частным случаем рядов Лорана. Другим частным случаем являются ряды Фурье. Действительно, пусть функция f голоморфна в кольце $\{z \in \mathbb{C} : 1 - \varepsilon < |z| < 1 + \varepsilon\}$. Тогда в этом кольце она может быть представлена своим рядом Лорана

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_k z^k,$$

где

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=1} f(\xi) \xi^{-k-1} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(e^{i\tau}) e^{-ik\tau} d\tau.$$

В частности, для точек $z = e^{it}$ единичной окружности получим

$$\varphi(t) = f(e^{it}) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}.$$

Этот ряд представляет собой ряд Фурье функции φ , записанный в комплексной форме. В самом деле,

$$\varphi(t) = c_0 + \sum_1^{\infty} (c_k e^{ikt} + c_{-k} e^{-ikt}) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt),$$

где $c_0 = a_0/2$, $a_k = c_k - c_{-k}$, $b_k = i(c_k + c_{-k})$.

Задачи

• Уровень А

Найти все лорановские разложения данной функции по степеням z .
Указать области, где верно каждое из них.

$$4.1. \frac{z-2}{2z^3+z^2-z}$$

$$4.2. \frac{z-4}{z^4+z^3-2z^2}$$

$$4.3. \frac{3z-18}{2z^3+3z^2-9z}$$

$$4.4. \frac{2z-16}{z^4+2z^3-8z^2}$$

$$4.5. \frac{5z-50}{2z^3+5z^2-25z}$$

$$4.6. \frac{3z-36}{z^4+3z^3-18z^2}$$

$$4.7. \frac{7z-98}{2z^3+7z^2-49z}$$

$$4.8. \frac{4z-64}{z^4+4z^3-32z^2}$$

$$4.9. \frac{9z-162}{2z^3+9z^2-81z}$$

$$4.10. \frac{5z-100}{z^4+5z^3-50z^2}$$

$$4.11. \frac{11z-242}{2z^3+11z^2-121z}$$

$$4.12. \frac{6z-144}{z^4+6z^3-72z^2}$$

$$4.13. \frac{13z-338}{2z^3+12z^2-169z}$$

$$4.14. \frac{7z-196}{z^4+7z^3-98z^2}$$

$$4.15. \frac{15z-450}{2z^3+15z^2-225z}$$

$$4.16. \frac{8z-256}{z^4+8z^3-128z^2}$$

$$4.17. \frac{z+2}{z+z^2-2z^3}$$

$$4.18. \frac{z+4}{2z^2+z^3-z^4}$$

$$4.19. \frac{3z+18}{9z+3z^2-2z^3}$$

$$4.20. \frac{2z+16}{8z^2+2z^3-z^4}$$

$$4.21. \frac{5z+50}{25z+5z^2-2z^3}$$

$$4.22. \frac{3z+36}{18z^2+3z^3-z^4}$$

$$4.23. \frac{7z+98}{49z+7z^2-2z^3}$$

$$4.24. \frac{4z+64}{32z^2+4z^3-z^4}$$

$$4.25. \frac{9z+162}{81z+9z^2-2z^3}$$

$$4.26. \frac{5z+100}{50z^2+5z^3-z^4}$$

$$4.27. \frac{11z+242}{121z+11z^2-2z^3}$$

$$4.28. \frac{6z+144}{72z^2+6z^3-z^4}$$

$$4.29. \frac{13z+338}{169z+13z^2-2z^3}$$

$$4.30. \frac{7z+196}{98z^2+7z^3-z^4}$$

$$4.31. \frac{15z+450}{225z+15z^2-2z^3}$$

• Уровень Б

Найти все лорановские разложения данной функции по степеням $(z - z_0)$. Указать области, где верно каждое из них.

$$4.32. \frac{z+1}{z(z-1)}, z_0 = 1+2i$$

$$4.33. \frac{z+1}{z(z-1)}, z_0 = 2-3i$$

$$4.34. \frac{z+1}{z(z-1)}, z_0 = -3-2i$$

$$4.35. \frac{z+1}{z(z-1)}, z_0 = -2+i$$

$$4.36. \frac{z-1}{z(z+1)}, z_0 = 1+3i$$

$$4.37. \frac{z-1}{z(z+1)}, z_0 = 2-i$$

$$4.38. \frac{z-1}{z(z+1)}, z_0 = -1+2i$$

$$4.39. \frac{z-1}{z(z+1)}, z_0 = -2-3i$$

$$4.40. \frac{z+3}{z^2-1}, z_0 = 2+i$$

$$4.41. \frac{z+3}{z^2-1}, z_0 = 3-i$$

$$4.42. \frac{z+3}{z^2-1}, z_0 = -2+3i$$

$$4.43. \frac{z+3}{z^2-1}, z_0 = -2-2i$$

$$4.44. \frac{z}{z^2+1}, z_0 = 2+i$$

$$4.45. \frac{z}{z^2+1}, z_0 = 1-2i$$

$$4.46. \frac{z}{z^2+1}, z_0 = -3+i$$

$$4.47. \frac{z}{z^2+1}, z_0 = -3-2i$$

$$4.48. \frac{4(z+2)}{(z-1)(z+3)}, z_0 = -2+2i$$

$$4.49. \frac{4(z+2)}{(z-1)(z+3)}, z_0 = 1-3i$$

$$4.50. \frac{4(z+2)}{(z-1)(z+3)}, z_0 = -3-i$$

$$4.51. \frac{4(z+2)}{(z-1)(z+3)}, z_0 = -2+i$$

$$4.52. \frac{4(z-2)}{(z+1)(z-3)}, z_0 = -1-2i$$

$$4.53. \frac{4(z-2)}{(z+1)(z-3)}, z_0 = 3+i$$

$$4.54. \frac{4(z-2)}{(z+1)(z-3)}, z_0 = 2-2i$$

$$4.55. \frac{4(z-2)}{(z+1)(z-3)}, z_0 = -2-i$$

$$4.56. \frac{2z}{z^2+4}, z_0 = -1-3i$$

$$4.57. \frac{2z}{z^2+4}, z_0 = -3+2i$$

$$4.58. \frac{2z}{z^2+4}, z_0 = 2+3i$$

$$4.59. \frac{2z}{z^2+4}, z_0 = 3+2i$$

$$4.60. \frac{2z}{z^2-4}, z_0 = -1+3i$$

$$4.61. \frac{2z}{z^2-4}, z_0 = -i$$

$$4.62. \frac{2z}{z^2-4}, z_0 = 2+2i$$

• **Уровень В**

Разложить функцию в ряд Лорана в окрестности точки z_0 .

$$4.63. z \cos \frac{1}{z-2}, z_0 = 2$$

$$4.64. \sin \frac{z}{z-1}, z_0 = 1$$

$$4.65. ze^{\frac{z}{z-5}}, z_0 = 5$$

$$4.66. \sin \frac{2z-1}{z+2}, z_0 = 2$$

$$4.67. \cos \frac{3z}{z-i}, z_0 = i$$

$$4.68. \sin \frac{5z}{z-2i}, z_0 = 2i$$

$$4.69. \sin \frac{3z-i}{3z+i}, z_0 = -\frac{i}{3}$$

$$4.70. z \cos \frac{3z}{z-1}, z_0 = 1$$

$$4.71. z \sin \frac{z}{z-1}, z_0 = 1$$

$$4.72. (z-3) \cos \pi \frac{z-3}{z}, z_0 = 0$$

$$4.73. z^2 \sin \pi \frac{z+1}{z}, z_0 = 0$$

$$4.74. z \cos \frac{z}{z+2i}, z_0 = -2i$$

$$4.75. \cos \frac{z^2-4z}{(z-2)^2}, z_0 = 2$$

$$4.76. \sin \frac{z+i}{z-i}, z_0 = i$$

$$4.77. \sin \frac{z}{z-3}, z_0 = 3$$

$$4.78. ze^{\frac{z}{z-2}}, z_0 = 2$$

$$4.79. e^{\frac{z}{z-3}}, z_0 = 3$$

$$4.80. \sin \frac{2z}{z-4}, z_0 = 4$$

$$4.81. \sin \frac{z^2-4z}{(z-2)^2}, z_0 = 2$$

$$4.82. e^{\frac{4z-2z^2}{(z-1)^2}}, z_0 = 1$$

$$4.83. ze^{\frac{z}{z-a}}, z_0 = a$$

$$4.84. ze^{\frac{z+\pi}{z-\pi}}, z_0 = \pi$$

$$4.85. z \sin \pi \frac{z+2}{z}, z_0 = 0$$

$$4.86. z \cos \pi \frac{z+3}{z-1}, z_0 = 1$$

$$4.87. z^2 \sin \frac{z+3}{z}, z_0 = 0$$

5. Изолированные особые точки и вычеты функций

5.1. Классификация особых точек

Здесь мы приводим классификацию изолированных особых точек однозначного характера как комплексной плоскости, так и бесконечно удаленной точки ∞ , которую **будем всегда причислять к особым**. В обоих случаях особенности бывают трех видов: устранимая особая точка, полюс, существенно особая точка. Формально их определения для бесконечно удаленной точки и точки комплексной плоскости отличаются, поэтому приведем их отдельно.

Изолированные особые точки комплексной плоскости.

Определение 5.1. Точки, в которых функция $f(z)$ перестает быть аналитической, называются *особыми*. Если в достаточно малой окрестности особой точки нет других особых точек, то данная особая точка называется *изолированной*.

Как уже сказано, изолированные особые точки бывают трех типов: устранимая особая точка, полюс, существенно особая точка.

Определение 5.2. Изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ называется *устраняемой*, если существует конечный предел $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \neq f(z_0)$.

Для того, чтобы изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ была устранимой, необходимо и достаточно, чтобы лорановское разложение $f(z)$ в проколотой окрестности z_0 не содержало главной части, т.е. представляло бы ряд Тейлора:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = a_0 + a_1 (z - z_0) + \dots + a_n (z - z_0)^n + \dots$$

Данная функция совпадает с суммой ряда, если $z \neq z_0$. Если «исправить» функцию, положив $f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a_0$, то она станет аналитиче-

ской в окрестности точки z_0 . Тем самым, особенность можно устранить, с чем и связано ее название.

Пример 5.1. $f(z) = \frac{\sin z}{z}$, $z_0 = 0$. Функция не определена в 0, следовательно, не может быть аналитической в этой точке. Других особых точек в окрестности нуля нет (да и вообще нет, кроме бесконечно удаленной), значит, это изолированная особая точка. Так как $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1$, $z_0 = 0$ является устранимой особой точкой.

(Доопределив значение f в нуле этим пределом, то есть, положив $f(0) = 1$, получим аналитическую в нуле функцию.)

В этом примере функция в окрестности z_0 легко может быть представлена в виде ряда Лорана

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{z - z^3/3! + \dots}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \dots,$$

так что способ определения типа особой точки не имеет значения. Вообще же выбирается тот, который проще реализовать технически. При верной реализации ответ от способа решения, естественно, не зависит.

Пример 5.2. $f(z) = \frac{z}{\sin z}$, $z_0 = 0$. Аналитичность функции, кроме 0, нарушается еще и в точках вида πk , k - целое, в которых знаменатель обращается в ноль. Ближайшие такие точки расположены на расстоянии π от нашей, значит, найдется окрестность 0, которая других особых точек не содержит. Тогда 0 - изолированная особая точка. Так как $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = 1$, то 0 - устранимая особая точка.

Разложение функции в ряд Лорана здесь затруднительно, но в этом нет необходимости.

Определение 5.3. Изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ называется *полюсом*, если $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$.

Для того, чтобы изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ была полюсом, необходимо и достаточно, чтобы главная часть лорановского разложения $f(z)$ в проколотой окрестности z_0 содержала бы лишь конечное

число членов:

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \dots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + \dots + a_n(z-z_0)^n + \dots$$

Отсюда видно, что в этом (и только в этом) случае существует **конечный и ненулевой** предел

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)(z-z_0)^m \neq 0,$$

или, что то же самое,

$$f(z) \sim \frac{A}{(z-z_0)^m} \text{ при } z \rightarrow z_0, \text{ где } A \neq 0. \quad (5.1)$$

Определение 5.4. Натуральное число m в (5.1) называется *порядком полюса*. Полюс первого порядка также принято называть *простым*.

Пример 5.3. $f(z) = \frac{e^z}{z^2}$, $z_0 = 0$. Очевидно, 0 - изолированная особая точка. Вычисляя $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)$, получим бесконечность (числитель стремится к 1, знаменатель к нулю). Таким образом, $z_0 = 0$ является полюсом. Определим его порядок. При $z \rightarrow 0$

$$\frac{e^z}{z^2} \sim \frac{1}{z^2},$$

так что $m = 2$, и наш полюс - второго порядка.

Того же результата так же легко можно было достичь, раскладывая функцию f в ряд Лорана в окрестности $z_0 = 0$:

$$\frac{e^z}{z} = \frac{1 + z + z^2/2! + z^3/3! \dots}{z^2} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2} + \frac{z}{3!} \dots$$

Главная часть ряда Лорана содержит конечное число слагаемых (два) и начинается с (-2) степени, так что $m = 2$. Итак, 0 - полюс второго порядка.

Как и в случае устранимых особых точек, работать с рядами Лорана не всегда удобно, в отличие от эквивалентностей.

Пример 5.4. $f(z) = \frac{z}{\sin^2 z}$, $z_0 = \pi$. Здесь и далее проверку изолированности особой точки оставляем за читателем.

$$\lim_{z \rightarrow \pi} \frac{z}{\sin^2 z} = \infty,$$

значит, точка является полюсом. Определим его порядок. При $z \rightarrow \pi$

$$\frac{z}{\sin^2 z} \sim \frac{\pi}{\sin^2 z} = \frac{\pi}{\sin^2(z - \pi + \pi)} = \frac{\pi}{\sin^2(z - \pi)} \sim \frac{\pi}{(z - \pi)^2}, \text{ так как } z - \pi \rightarrow 0.$$

Итак, $m = 2$, и точка является полюсом второго порядка.

Пример 5.5. $f(z) = \frac{\sin^2 z}{z + 2z^3 - \sin z}$, $z_0 = 0$. При $z \rightarrow 0$

$$\frac{\sin^2 z}{z + 2z^3 - \sin z} \sim \frac{z^2}{z + 2z^3 - z + z^3/3! + o(z^3)} = \frac{z^2}{\frac{13}{6}z^3(1 + o(1))} \sim \frac{6}{13z}$$

Таким образом, 0 является полюсом первого порядка (= простым полюсом).

Определение 5.5. Изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ называется *существенно особой*, если $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ не существует.

Нам будет полезен следующий результат:

Лемма 5.1. Если предел функции в точке существует, то пределы этой функции вдоль любой непрерывной кривой, входящей в эту точку, существуют и все равны между собой.

Пример 5.6. $f(z) = e^{1/z}$, $z_0 = 0$. Рассмотрим два предела:

$$\lim_{\substack{z=x+i0 \\ x \rightarrow 0-0}} f(z) = \lim_{x \rightarrow 0-0} e^{\frac{1}{x}} = 0,$$

когда точка z стремится к 0 слева строго вдоль вещественной прямой и

$$\lim_{\substack{z=x+i0 \\ x \rightarrow 0+0}} f(z) = \lim_{x \rightarrow 0+0} e^{\frac{1}{x}} = \infty,$$

когда точка z стремится к 0 справа строго вдоль вещественной прямой.

Пределы не совпадают. Значит, $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)$ не существует, и 0 является существенно особой точкой.

Замечание 5.1. Отметим, что из совпадения пределов по двум наугад выбранным направлениям никакого вывода сделать нельзя.

Для того чтобы изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ была существенно особой, необходимо и достаточно, чтобы главная часть лорановского разложения функции $f(z)$ в проколотой окрестности z_0 содержала бы бесконечное число членов:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Так, в предыдущем примере, в проколотой окрестности нуля

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n! z^n}.$$

Бесконечно удаленная особая точка.

Определение 5.6. Точка $z_0 = \infty$ называется *изолированной* бесконечно удаленной особой точкой, если все другие особые точки можно заключить в один круг.

Пример 5.7. 1) $f(z) = \frac{z}{\sin z}$. Особые точки: πk , k — целое, и ∞ . Все особые точки, кроме бесконечно удаленной, являются изолированными.

2) $f(z) = \frac{z}{\sin 1/z}$. Особые точки: 0 , $1/(\pi k)$, k — целое, и ∞ . Все особые точки, кроме 0 , в том числе и бесконечно удаленная, являются изолированными.

Определение 5.7. Изолированную особую точку $z_0 = \infty$ будем называть *устранимой особой точкой*, если существует (конечный!) $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$.

Необходимым и достаточным условием этого является совпадение f с правильной частью своего ряда Лорана в некоторой окрестности бесконечности:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^0 a_k z^k = a_0 + \frac{a_{-1}}{z} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \dots + \frac{a_{-n}}{z^n} + \dots$$

Пример 5.8. $f(z) = \frac{1}{z}$. Предел $\lim_{z \rightarrow \infty} 1/z = 0$, следовательно, бесконечность является устранимой особой точкой.

Определение 5.8. Изолированная особая точка $z = \infty$ называется *полюсом*, если $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$.

Это возможно только в случае, когда в окрестности бесконечности главная часть ряда Лорана функции f содержит конечное число слагаемых:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^m a_k z^k = a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_m z^m + \sum_{k=-\infty}^0 a_k z^k.$$

Если при этом $a_m \neq 0$, точка ∞ называется *полюсом m -го порядка*. Эквивалентное определение выглядит следующим образом:

Определение 5.9. Бесконечно удаленная точка называется *полюсом m -го порядка*, если при $z \rightarrow \infty$

$$f(z) \sim Az^m, \text{ где } A \text{ — ненулевая постоянная.}$$

Пример 5.9. $f(z) = z^2 e^{-1/z}$.

Первый способ: поскольку при $z \rightarrow \infty$ $z^2 e^{-1/z} \sim z^2$, бесконечность является полюсом второго порядка. Тот же результат получается и так:

Второй способ: Разложим функцию в ряд Лорана в окрестности бесконечности:

$$z^2 e^{-1/z} = z^2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{z^k} = z^2 \left(1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} - \frac{1}{3!z^3} + \dots\right) = z^2 - z + \frac{1}{2} - \frac{1}{6z} + \dots$$

Определение 5.10. Изолированная бесконечно удаленная особая точка называется *существенно особой*, если $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$ не существует.

Это происходит только в том случае, когда главная часть ряда Лорана функции f в окрестности бесконечности содержит бесконечное число ненулевых слагаемых.

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k z^k.$$

Пример 5.10. Пусть $f(z) = e^z$.

Покажем, что бесконечность является существенно особой точкой.

Первый способ:

Заметим, что

$$\lim_{\substack{z=x+i0 \\ x \rightarrow +\infty}} e^z = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty,$$

когда точка z стремится к бесконечности строго вдоль вещественной прямой на ее положительном направлении и

$$\lim_{\substack{z=x+i0 \\ x \rightarrow -\infty}} f(z) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{1}{x}} = 0,$$

когда точка z стремится к бесконечности строго вдоль вещественной прямой на ее отрицательном направлении. Пределы различны, следовательно, $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$ не существует (см. лемму 5.1).

Второй способ: Разложение нашей функции в ряд Лорана в окрестности бесконечности следующее:

$$e^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

Как видно, главная часть содержит бесконечно много слагаемых.

Существенно особой точкой бесконечность является также для функций $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$. Если предел функции в точке существует, то пределы этой функции вдоль любой непрерывной кривой, входящей в эту точку, существуют и все равны между собой.

Пример 5.11. Найти все особые точки и определить их тип:

1) $f(z) = \frac{z^2}{z(z-1)(z-i)^3}$. Особые точки: $0, 1, i, \infty$. $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = 0$, так что 0 - устранимая особая точка. $\lim_{z \rightarrow 1} f(z) = \infty$, значит точка 1 - полюс. Аналогично, полюсом является и точка i .

$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$, и значит, бесконечность является устранимой особой точкой.

Определим порядок полюсов. При $z \rightarrow 1$

$$\frac{z^2}{z(z-1)(z-i)^3} \sim \frac{1}{(1-i)^3(z-1)},$$

значит, точка 1 — полюс первого порядка.

При $z \rightarrow i$

$$\frac{z^2}{z(z-1)(z-i)^3} \sim \frac{i}{(z-i)^3},$$

следовательно, этот полюс — третьего порядка.

2) $f(z) = \frac{z}{e^z - 1}$. Особые точки определяются из уравнения $e^z = 1$. Это набор точек $z = 2\pi ki$, k — целое. Бесконечность, следовательно, является неизолированной особой точкой.

Отдельно рассмотрим точку $z_0 = 0$, соответствующую $k = 0$.

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{e^z - 1} = 1,$$

следовательно, 0 - устранимая особая точка. При $k \neq 0$

$$\lim_{z \rightarrow 2\pi ki} \frac{z}{e^z - 1} = \infty,$$

каждая из этих точек является полюсом. Определим его порядок. При $z \rightarrow 2\pi ki$, где k ненулевое

$$\frac{z}{e^z - 1} \sim \frac{2\pi ki}{e^{z-2\pi ki+2\pi ki} - 1} = \frac{2\pi ki}{e^{z-2\pi ki} - 1} \sim \frac{2\pi ki}{z - 2\pi ki}.$$

Таким образом, все особые точки, кроме 0 и бесконечности, являются простыми полюсами.

5.2. Вычеты функций

Определение 5.11. Вычетом функции f в точке $z_0 \in \mathbb{C}$ называется коэффициент a_{-1} при минус первой степени $(z-z_0)^{-1}$ в ее разложении в ряд Лорана в проколотой окрестности точки z_0 . Обозначается вычет $\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = a_{-1}$.

Точно так же вычетом функции f в точке $z_0 = \infty$ называется взятый со знаком "минус" коэффициент a_{-1} при минус первой степени z^{-1} в разложении в ряд Лорана в окрестности бесконечности и обозначается $\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -a_{-1}$.

Если точка $z_0 \in \mathbb{C}$ является точкой аналитичности функции f , то разложение в ряд Лорана в окрестности этой точки совпадает с разложением

в ряд Тейлора, следовательно, главная часть ряда Лорана тождественно нулевая. Отрицательные же степени могут содержаться в нашем случае только в ней. Отсюда следует **важный вывод: в неособых точках вычет всегда нулевой**. Есть смысл считать вычеты только в особых (изолированных) точках, в том числе и в бесконечно удаленной.

Далее, в устранимых особых точках на комплексной плоскости главная часть ряда Лорана также тождественно нулевая, и ряд содержит только положительные степени. Таким образом, **в устранимых особых точках комплексной плоскости вычет также всегда нулевой**. *Внимание!* Этот вывод не касается бесконечно удаленной особой точки, так как там отрицательные степени содержатся в правильной части ряда Лорана, так что устранимость особой точки не гарантирует их отсутствия. Для нее важно отсутствие положительных степеней, которые содержит главная часть.

В случаях, когда разложение в ряд Лорана или по крайней мере одно слагаемое оттуда — минус первую степень с коэффициентом, получить нетрудно, вычет можно вычислять по определению.

Пример 5.12. 1) Найти $\operatorname{res}_{z=0} e^{1/z}$. В проколотой окрестности нуля

$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \dots,$$

получаем $\operatorname{res}_{z=0} e^{1/z} = 1$.

2) Найти $\operatorname{res}_{z=0} \frac{z}{\sin z}$. Вычислив предел функции в нуле, легко убедиться, что 0 - устранимая особая точка, следовательно, вычет нулевой.

3) Найти $\operatorname{res}_{z=\infty} \sin(1/z)$. Хотя бесконечность - устранимая особая точка (проверьте!), разложив в ее окрестности функцию в ряд Лорана, получим

$$\sin \frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \dots,$$

откуда имеем $\operatorname{res}_{z=\infty} \sin(1/z) = -1$.

Вычисление вычетов в точках $z_0 \in \mathbb{C}$.

а) Случай простого полюса. Если точка z_0 является простым полюсом для f , то вычет в этой точке может быть вычислен по формуле

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} [f(z)(z - z_0)]. \quad (5.2)$$

В некоторых частных случаях формула для вычета приобретает еще более простой вид, отчего приведенная выше не теряет своей актуальности.

Так, например, если функция $f(z) = \frac{\varphi(z)}{z - z_0}$, причем функция φ аналитическая в z_0 и $\varphi(z_0) \neq 0$, то $\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \varphi(z_0)$.

б) Полюсы более высоких порядков. Общая формула для вычисления вычета в полюсе $z_0 \in \mathbb{C}$ порядка m выглядит следующим образом:

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [f(z)(z - z_0)^m].$$

Пример 5.13. 1) Найти $\operatorname{res}_{z=0} \frac{z}{\sin^2 z}$.

Определим тип особой точки 0. Это полюс первого порядка, т.е. простой. Воспользуемся формулой (5.2):

$$\operatorname{res}_{z=0} \frac{z}{\sin^2 z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2}{\sin^2 z} = 1.$$

2) Найти $\operatorname{res}_{z=0} \frac{z^2}{\sin^2 z - \sin z^2}$.

Определим тип особой точки. При $z \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \sin^2 z - \sin z^2 &= \left(z - \frac{z^3}{6} + o(z^3)\right)^2 - \left(z^2 - \frac{z^6}{6} + o(z^6)\right) \\ &= z^2 - \frac{z^4}{3} + \frac{z^6}{36} + \frac{z^6}{6} - z^2 + o(z^6) = -\frac{z^4}{3} + \frac{7z^6}{36} + o(z^6) \sim -\frac{z^4}{3} \end{aligned}$$

Тогда при $z \rightarrow 0$ $\frac{z^2}{\sin^2 z - \sin z^2} \sim -\frac{3}{z^2}$, и точка 0 является полюсом второго порядка.

Вычет в ней равен

$$\operatorname{res}_{z=0} \frac{z^2}{\sin^2 z - \sin z^2} = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left[\frac{z^4}{\sin^2 z - \sin z^2} \right].$$

Сперва найдя производную, а потом перейдя к пределу, получим требуемый результат.

Раскладывая функцию в ряд Лорана, то есть действуя по определению, мы получим его быстрее:

$$\begin{aligned} \frac{z^2}{\sin^2 z - \sin z^2} &= \frac{z^2}{-z^4/3 + 7z^6/36 + \dots} = \frac{3}{-z^2 + 7z^4/(12) + \dots} \\ &= -\frac{1}{z^2} \frac{3}{1 - 7z^4/(12) + \dots} = -\frac{3}{z^2} \left(1 + \frac{7z^4}{12} + \dots \right) = -\frac{3}{z^2} + \dots, \end{aligned}$$

откуда видно, что $\operatorname{res}_{z=0} \frac{z^2}{\sin^2 z - \sin z^2} = 0$.

Вычисление вычетов в точке $z_0 = \infty$.

Бесконечно удаленная точка называется нулем функции f , если $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$. Этот ноль имеет порядок m (m целое положительное), если

$$f(z) \sim \frac{A}{z^m}, \text{ где } A \text{ — ненулевая постоянная.}$$

Вычет в бесконечности гарантированно равен нулю, если бесконечность — ноль второго или выше порядка. В остальных случаях для подсчета вычета проще всего пользоваться определением.

Пример 5.14. 1) $\operatorname{res}_{z=\infty} \frac{1}{1+z^2} = 0$, так как бесконечность — ноль второго порядка: при $z \rightarrow \infty \frac{1}{1+z^2} \sim \frac{1}{z^2}$.

2) Найти $\operatorname{res}_{z=\infty} ze^{1/(z-1)}$.

Разложим экспоненту в ряд Лорана в окрестности бесконечности:

$$\begin{aligned} e^{1/(z-1)} &= 1 + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2!(z-1)^2} + \dots = 1 + \frac{1}{z(1-1/z)} + \frac{1}{2z^2(1-1/z)^2} + \dots = \\ &= 1 + \frac{1}{z} \left(1 + \frac{1}{z} + \dots \right) + \frac{1}{2z^2} \left(1 + \frac{2}{z} + \dots \right) + \dots = 1 + \frac{1}{z} + \frac{3}{2z^2} + \dots \end{aligned}$$

Тогда ряд для исходной функции следующий:

$$ze^{1/(z-1)} = z + 1 + \frac{3}{2z} + \dots$$

Таким образом, искомый вычет равен $-3/2$.

Задачи

• Уровень А

Определить тип особой точки $z = 0$ для данной функции.

$$5.1. \frac{e^{9z} - 1}{\sin z - z + z^3/6}$$

$$5.2. z^3 e^{7/z^2}$$

$$5.3. \frac{\sin 8z - 6z}{\cos z - 1 + z^2/2}$$

$$5.4. \frac{\cos 7z - 1}{\operatorname{sh} z - z + z^3/6}$$

$$5.5. \frac{\operatorname{sh} 6z - 6z}{\operatorname{ch} z - 1 - z^2/2}$$

$$5.6. \frac{\operatorname{ch} 5z - 1}{e^z - 1 - z}$$

$$5.7. z \sin \frac{6}{z^2}$$

$$5.8. \frac{e^z - 1}{\sin z - z + z^3/6}$$

$$5.9. \frac{\sin z^2 - z^2}{\cos z - 1 + z^2/2}$$

$$5.10. \frac{\cos z^2 - 1}{\operatorname{sh} z - z + z^3/6}$$

$$5.11. \frac{e^{5z} - 1}{\operatorname{ch} z - 1 - z^2/2}$$

$$5.12. \frac{\sin 4z - 4z}{e^z - 1 - z}$$

$$5.13. z^4 \sin \frac{5}{z^2}$$

$$5.14. \frac{\cos 3z - 1}{\sin z - z + z^3/6}$$

$$5.15. \frac{\operatorname{sh} 2z - 2z}{\cos z - 1 + z^2/2}$$

$$5.16. \frac{\operatorname{ch} 2z - 1}{\operatorname{sh} z - z + z^3/6}$$

$$5.17. \frac{e^{z^3}}{\operatorname{ch} z - 1 - z^2/2}$$

$$5.18. z e^{4/z^3}$$

$$5.19. \frac{\sin z^3 - z^3}{e^z - 1 - z}$$

$$5.20. \frac{\cos z^3 - 1}{\sin z - z + z^3/6}$$

$$5.21. \frac{e^{7z} - 1}{\cos z - 1 + z^2/2}$$

$$5.22. \frac{\sin 6z - 6z}{\operatorname{sh} z - z + z^3/6}$$

$$5.23. z \sin \frac{3}{z^3}$$

$$5.24. \frac{\cos 5z - 1}{\operatorname{ch} z - 1 - z^2/2}$$

$$5.25. \frac{\operatorname{sh} 4z - 4z}{e^z - 1 - z}$$

$$5.26. \frac{\operatorname{ch} 3z - 1}{\sin z - z + z^3/6}$$

$$5.27. \frac{e^{z^4} - 1}{\cos z - 1 + z^2/2}$$

$$5.28. \frac{\sin z^4 - z^4}{\operatorname{sh} z - z + z^3/6}$$

$$5.29. z \cos \frac{2}{z^3}$$

$$5.30. \frac{\cos \frac{z^4}{2}}{\operatorname{ch} z - 1 - z^2/2}$$

$$5.31. \frac{e^{z^5-1}}{e^z - 1 - z}$$

• Уровень Б

Для данной функции найти изолированные особые точки и определить их тип.

$$5.32. \frac{e^{\frac{1}{z}}}{\sin \frac{1}{z}}$$

$$5.33. \frac{1}{\cos z}$$

$$5.34. \operatorname{tg}^2 z$$

$$5.35. z \operatorname{tg} z \cdot e^{\frac{1}{z}}$$

$$5.36. \frac{e^z - 1}{z^3 (z + 1)^3}$$

$$5.37. \frac{z^2 + 1}{(z - i)^2 (z^2 + 4)}$$

$$5.38. \frac{(z + \pi) \sin \frac{\pi}{2} z}{z \sin^2 z}$$

$$5.39. \operatorname{tg} \frac{1}{z}$$

$$5.40. \operatorname{ctg} \frac{1}{z}$$

$$5.41. \frac{1}{e^z + 1}$$

$$5.42. \operatorname{ctg} \pi z$$

$$5.43. \frac{\sin \pi z}{(z - 1)^3}$$

$$5.44. \frac{1}{\sin z^2}$$

$$5.45. \frac{\sin 3z - 3 \sin z}{z(\sin z - z)}$$

$$5.46. \frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{z}$$

$$5.47. \frac{e^z - 1}{\sin \pi z}$$

$$5.48. \operatorname{th} z$$

$$5.49. \frac{\sin z}{z^3(1 - \cos z)}$$

$$5.50. \frac{e^{\frac{1}{z}}}{(e^z - 1)(1 - z)^3}$$

$$5.51. \frac{1}{z^2} + \sin \frac{1}{z^2}$$

$$5.52. \frac{z^2}{(z^2 - 4)^2 \cos \frac{1}{z-2}}$$

$$5.53. z^2 \sin \frac{1}{z}$$

$$5.54. \frac{\cos \frac{\pi}{2} z}{z^4 - 1}$$

$$5.55. \frac{\sin \pi z}{(z^3 - 1)^2}$$

$$5.56. \frac{\sin^3 z}{z(1 - \cos z)}$$

$$5.57. \operatorname{ctg} \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2}$$

$$5.58. \frac{\sin 3z^2}{z(z^3 + 1)} e^{\frac{1}{z}}$$

$$5.59. \frac{\cos \pi z}{(4z^2 - 1)(z^2 + 1)}$$

$$5.60. \frac{\sin 3z}{z(1 - \cos z)}$$

$$5.61. \frac{2z - \sin 2z}{z^2(z^2 + 1)}$$

$$5.62. \frac{\sin \pi z}{z^4 - 1} e^{\frac{1}{z}}$$

• **Уровень В**

Найти вычеты функции f во всех ее изолированных особых точках.

$$5.63. f(z) = \frac{1}{z^2(z-3)}$$

$$5.64. f(z) = \frac{\sin z}{(z+1)^2}$$

$$5.65. f(z) = \sin z \cdot \operatorname{sh} \frac{1}{z}$$

$$5.66. f(z) = \frac{z^4}{(1+z)^2}$$

$$5.67. f(z) = \frac{1}{\sin z}$$

$$5.68. f(z) = z^3 e^{\frac{1}{z^2}}$$

$$5.69. f(z) = \frac{z^2}{(z-2)(z^2-1)}$$

$$5.70. f(z) = \frac{\cos z}{(z^2+1)^2}$$

$$5.71. f(z) = \frac{e^z - 1}{z^3(z+1)^2}$$

$$5.72. f(z) = e^{\frac{z}{z+1}}$$

$$5.73. f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)}$$

$$5.74. f(z) = \operatorname{tg} \frac{1}{z}$$

$$5.75. f(z) = z e^{\frac{4}{z^2}}$$

$$5.76. f(z) = \frac{2 + \sin z}{z(z+2i)}$$

$$5.77. f(z) = \frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{z}$$

$$5.78. f(z) = \frac{\sin \pi z}{iz(z-i)}$$

$$5.79. f(z) = \frac{\cos z^2 - 1}{z^3}$$

$$5.80. f(z) = \frac{1}{1 - e^z}$$

$$5.81. f(z) = \frac{e^{2z} - z}{z^2}$$

$$5.82. f(z) = \frac{z^2 e^{\frac{1}{z^2}} - 1}{z}$$

$$5.83. f(z) = \frac{z^3 e^{\frac{1}{z^3}} - 1}{z}$$

$$5.84. f(z) = \frac{1}{\sin \frac{1}{z}}$$

$$5.85. f(z) = \frac{2z}{z^2 + 4}$$

$$5.86. f(z) = \frac{1}{e^z + 1}$$

$$5.87. f(z) = \frac{1}{\sin z^2}$$

$$5.88. f(z) = e^{\frac{1}{1-z}}$$

$$5.89. f(z) = \frac{z^2 + 1}{(z-1)^2(z^2 + 4)}$$

$$5.90. f(z) = \frac{1}{\cos z}$$

$$5.91. f(z) = \frac{1}{\cos z - 3}$$

$$5.92. f(z) = \frac{1}{z^5 - z^7}$$

6. Вычисление интегралов

с помощью вычетов

6.1. Вычисление интегралов по замкнутому контуру

Важнейшим результатом теории функций комплексного переменного является следующая

Теорема 6.1 (Интегральная теорема Коши). *Пусть функция $f(z)$ голоморфна в некоторой области D . Тогда интеграл от f по любому замкнутому контуру, лежащему в этой области, равен нулю.*

Верно и обратное:

Теорема 6.2 (Теорема Морера). *Пусть D — область в комплексной плоскости, $f: D \rightarrow \mathbb{C}$, и интеграл от f по любому замкнутому контуру, лежащему в D , равен нулю. Тогда f голоморфна в области D .*

Интегральная теорема Коши, как и теорема Морера, лежит в основе доказательства многих результатов, в том числе и перечисленных ниже.

Одним из важнейших применений теории функций комплексного переменного является вычисление интегралов от однозначных функций по замкнутым кривым в предположении, что в некоторой области, содержащей контур интегрирования, не заключается других особых точек, кроме изолированных особых точек однозначного характера. При этом весьма полезной является

Теорема 6.3 (Основная теорема о вычетах). *Если функция f голоморфна в некоторой замкнутой области D за исключением конечного числа изолированных особых точек z_1, \dots, z_n , не лежащих на границе области $\Gamma = \partial D$, то интеграл от функции $f(z)$ по контуру Γ при обходе контура в положительном направлении (область остается слева) равен произведению $2\pi i$ на сумму вычетов функции $f(z)$ в этих особых точках:*

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=z_k} f(z).$$

Пример 6.1. 1) Вычислить $\oint_{|z|=1} \sin \frac{1}{z} dz$. Функция имеет 2 особые точки: 0 и ∞ , внутрь положительно определенного контура попадает только 0. При разложении в ряд Лорана в окрестности нуля получаем

$$\sin \frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{6z^3} + \dots$$

следовательно, $\operatorname{res}_{z=0} \sin \frac{1}{z} = 1$. Тогда, по интегральной теореме Коши, имеем

$$\oint_{|z|=1} \sin \frac{1}{z} dz = 2\pi i.$$

2) Вычислить $\oint_{|z-i|=1} \frac{1}{z^2 + 1} dz$.

Внутри контура при положительной его ориентации попадает только особая точка i , вычет функции в ней $\operatorname{res}_{z=i} \frac{1}{z^2 + 1} = \operatorname{res}_{z=i} \frac{1}{(z-i)(z+i)} = \frac{1}{2i}$.

Тогда искомым интеграл равен π .

Следующая теорема также полезна при вычислении вычетов и интегралов:

Теорема 6.4. Если $f(z)$ голоморфна на комплексной плоскости за исключением конечного числа особых точек z_1, \dots, z_n , то сумма всех ее вычетов, включая вычет в бесконечно удаленной точке, равна нулю:

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=z_k} f(z) + \operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = 0.$$

Эта теорема может быть использована, в частности, при вычислении интегралов с помощью вычетов следующим образом.

Пример 6.2. Вычислить $\oint_{|z|=2} \frac{1}{z^2 + 1} dz$.

Всего особых точек у функции три: i , $-i$ и ∞ . Внутри контура попадают первые две, так что искомым интеграл равен произведению $2\pi i$ на сумму вычетов в них. Но, по теореме 6.4, эта сумма равна $-\operatorname{res}_{z=\infty} \frac{1}{z^2 + 1} = 0$ (см. пример 5.14).

Значит, интеграл тоже равен нулю.

6.2. Применение теории вычетов в вычислении интегралов по вещественной прямой

Теорема 6.5. Пусть $R(z)$ - рациональная функция с особыми точками a_k , расположенными вне вещественной оси, такая что степень многочлена в знаменателе не менее чем на 2 выше, чем степень многочлена в числителе. Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) dx = 2\pi i \sum_{k: \operatorname{Im} a_k > 0} \operatorname{res}_{z=a_k} R(z).$$

Пример 6.3. Вычислить $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)}$.

Решение: Подынтегральная функция $R(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)(z^2 + 4)}$ рациональна и имеет особые точки $\pm i$, $\pm 2i$, все они расположены вне вещественной оси, причем только две из них — i , $2i$ в верхней полуплоскости.

Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} = 2\pi i \left(\operatorname{res}_{z=i} \frac{1}{(z^2 + 1)(z^2 + 4)} + \operatorname{res}_{z=2i} \frac{1}{(z^2 + 1)(z^2 + 4)} \right) = 2\pi i \left(\frac{1}{6i} - \frac{1}{12i} \right) = \frac{\pi}{6}.$$

Пример 6.4. Вычислить $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}$.

Решение: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} = 2\pi i \operatorname{res}_{z=i} \frac{1}{(z^2 + 1)^2} = 2\pi i \left(\frac{1}{(z + i)^2} \right)' \Big|_{z=i} = 2\pi i \frac{-2}{(z + i)^3} \Big|_{z=i} = 2\pi i \cdot \frac{1}{4i} = \frac{\pi}{2}.$

Теорема 6.6. Пусть $R(z)$ - рациональная функция с особыми точками a_k , расположенными вне вещественной оси, такая что степень многочлена в знаменателе не менее чем на 1 выше, чем степень многочлена в числителе, t — вещественный параметр.

Тогда если $t \geq 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} R(x) dx = 2\pi i \sum_{k: \operatorname{Im} a_k > 0} \operatorname{res}_{z=a_k} e^{itz} R(z),$$

при $t < 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} R(x) dx = 2\pi i \sum_{k: \operatorname{Im} a_k < 0} \operatorname{res}_{z=a_k} e^{itz} R(z).$$

Пример 6.5. Вычислить $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2ix}}{x^2 + 1} dx$.

Решение: $R(z) = \frac{1}{z^2 + 1}$, ее особые точки $\pm i$, нас интересует вычет в точке i , лежащей в верхней полуплоскости, так как параметр $t = 2$ в показателе экспоненты положителен.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2ix}}{x^2 + 1} dx = 2\pi i \operatorname{res}_{z=i} \left(\frac{e^{2iz}}{z^2 + 1} \right) = 2\pi i \cdot \frac{e^{-2}}{2i} = \pi e^{-2}.$$

Пример 6.6. Вычислить $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx}}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx$.

Решение: $R(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)(z^2 + 4)}$, ее особые точки $\pm i, \pm 2i$.

Тогда при $t \geq 0$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx}}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx &= \\ &= 2\pi i \left(\operatorname{res}_{z=i} \frac{e^{itz}}{(z^2 + 1)(z^2 + 4)} + \operatorname{res}_{z=2i} \frac{e^{itz}}{(z^2 + 1)(z^2 + 4)} \right) = \\ &= 2\pi i \left(\frac{e^{-t}}{6i} - \frac{e^{-2t}}{12i} \right) = \frac{\pi}{3} e^{-t} - \frac{\pi}{6} e^{-2t} \end{aligned}$$

При $t < 0$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx}}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx &= \\ &= -2\pi i \left(\operatorname{res}_{z=-i} \frac{e^{itz}}{(z^2 + 1)(z^2 + 4)} + \operatorname{res}_{z=-2i} \frac{e^{itz}}{(z^2 + 1)(z^2 + 4)} \right) = \\ &= -2\pi i \left(-\frac{e^t}{6i} + \frac{e^{2t}}{12i} \right) = \frac{\pi}{3} e^t - \frac{\pi}{6} e^{2t}. \end{aligned}$$

Окончательно получаем, что искомый интеграл для каждого вещественного t равен $\frac{\pi}{3} e^{-|t|} - \frac{\pi}{6} e^{-2|t|}$.

Пользуясь простейшими свойствами интеграла и формулой Эйлера, легко получить тривиальное

Следствие 6.1. Если $R(z)$ - рациональная функция с вещественными коэффициентами с особыми точками a_k , расположенными вне вещественной оси, такая что степень многочлена в знаменателе не менее чем на 1 выше, чем степень многочлена в числителе, $t > 0$ — вещественный параметр, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \cos tx \, dx = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} R(x) \, dx = \operatorname{Re} \left(2\pi i \sum_{k: \operatorname{Im} a_k > 0} \operatorname{res}_{z=a_k} e^{itz} R(z) \right),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \sin tx \, dx = \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} R(x) \, dx = \operatorname{Im} \left(2\pi i \sum_{k: \operatorname{Im} a_k > 0} \operatorname{res}_{z=a_k} e^{itz} R(z) \right).$$

Пример 6.7. Вычислить а) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^2 + 2x + 2} \, dx$ б) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x^2 + 2x + 2} \, dx$

Решение: а) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^2 + 2x + 2} \, dx = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2ix}}{x^2 + 2x + 2} \, dx$. Особые точки рациональной функции есть корни уравнения $z^2 + 2z + 2 = 0$. $z^2 + 2z + 2 = (z + 1)^2 + 1 = 0$, особые точки $-1 \pm i$. Последний интеграл равен

$$\begin{aligned} 2\pi i \operatorname{res}_{z=-1+i} \frac{e^{2iz}}{z^2 + 2z + 2} &= 2\pi i \operatorname{res}_{z=-1+i} \frac{e^{2iz}}{(z + 1 - i)(z + 1 + i)} = \\ &= 2\pi i \frac{e^{2i(-1+i)}}{-1 + i + 1 + i} = \pi e^{-2-2i} = \pi e^{-2}(\cos 2 - i \sin 2). \end{aligned}$$

Отсюда сразу получаем ответ: а)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2 + 2x + 2)} \, dx = \operatorname{Re} \pi e^{-2}(\cos 2 - i \sin 2) = \pi e^{-2} \cos 2.$$

б)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2x}{(x^2 + 2x + 2)} \, dx = \operatorname{Im} \pi e^{-2}(\cos 2 - i \sin 2) = -\pi e^{-2} \sin 2.$$

Задачи

• Уровень А

Вычислить интеграл.

$$6.1. \oint_{|z|=1} \frac{\cos z^2 - 1}{z^3} dz.$$

$$6.2. \oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{2 - z^2 + 3z^3}{4z^3} dz.$$

$$6.3. \oint_{|z|=3} \frac{e^{\frac{1}{z}} + 1}{z} dz.$$

$$6.4. \oint_{|z|=2} \frac{\sin z^3}{1 - \cos z} dz.$$

$$6.5. \oint_{|z|=\frac{1}{3}} \frac{1 - 2z + 3z^2 + 4z^3}{2z^2} dz.$$

$$6.6. \oint_{|z|=2} \frac{1 - \cos z^2}{z^2} dz.$$

$$6.7. \oint_{|z|=1} \frac{3z^4 - 2z^3 + 5}{z^4} dz.$$

$$6.8. \oint_{|z|=3} \frac{1 - \sin \frac{1}{z}}{z} dz.$$

$$6.9. \oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{e^{2z^2} - 1}{z^3} dz.$$

$$6.10. \oint_{|z|=\frac{1}{3}} \frac{3 - 2z + 4z^4}{z^3} dz.$$

$$6.11. \oint_{|z|=2} \frac{z - \sin z}{2z^4} dz.$$

$$6.12. \oint_{|z|=1} \frac{z^3 - 3z^2 + 1}{2z^4} dz.$$

$$6.13. \oint_{|z|=\frac{1}{3}} \frac{4z^5 - 3z^3 + 1}{z^6} dz.$$

$$6.14. \oint_{|z|=1} \frac{e^{2z} - z}{z^2} dz.$$

$$6.15. \oint_{|z|=1} \frac{\operatorname{ch} iz - 1}{z^3} dz.$$

$$6.16. \oint_{|z|=1} \frac{\cos iz - 1}{z^3} dz.$$

$$6.17. \oint_{|z|=\frac{1}{3}} \frac{1 - 2z^4 + 3z^5}{z^4} dz.$$

$$6.18. \oint_{|z|=3} \frac{z^2 + \cos z}{z^3} dz.$$

$$6.19. \oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{z^5 - 3z^3 + 5z}{z^4} dz.$$

$$6.20. \oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{z - \sin z}{z^4 + z^5} dz.$$

$$6.21. \oint_{|z|=3} \frac{\cos z^2 - 1}{z^5} dz.$$

$$6.22. \oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{2 + 3z^3 - 5z^4}{z^5} dz.$$

$$6.27. \oint_{|z|=\frac{1}{3}} \frac{1 - z^4 + 3z^6}{2z^3} dz.$$

$$6.23. \oint_{|z|=1} \frac{z^2 e^{\frac{1}{z}} - z - 1}{z^3} dz.$$

$$6.28. \oint_{|z|=2} z^3 \cos \frac{2i}{z} dz.$$

$$6.24. \oint_{|z|=2} z^2 \sin \frac{i}{z^2} dz.$$

$$6.29. \oint_{|z|=\frac{1}{3}} \frac{e^z - \sin z}{z^2} dz.$$

$$6.25. \oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{z^4 + 2z^2 + 3}{2z^6} dz.$$

$$6.30. \oint_{|z|=3} \frac{2z^3 + 3z^2 - 2}{2z^5} dz.$$

$$6.26. \oint_{|z|=1} \frac{e^{iz} - 1}{z^3} dz.$$

$$6.31. \oint_{|z|=1} \frac{z^2 e^{\frac{1}{z^2}} - 1}{z} dz.$$

• **Уровень Б**

Вычислить интеграл

$$6.32. \oint_{|z|=1/2} \frac{dz}{z(z^2 + 1)}$$

$$6.38. \oint_{|z-1|=3} \frac{ze^z}{\sin z} dz$$

$$6.33. \oint_{|z-1-i|=5/4} \frac{2dz}{z^2(z-1)}$$

$$6.39. \oint_{|z-3/2|=2} \frac{2z(z-1)}{\sin z} dz$$

$$6.34. \oint_{|z-i|=3/2} \frac{dz}{z(z^2 + 4)}$$

$$6.40. \oint_{|z-1/4|=1/3} \frac{z(z+1)^2}{\sin 2\pi z} dz$$

$$6.35. \oint_{|z|=1} \frac{2 + \sin z}{z(z+2i)} dz$$

$$6.41. \oint_{|z-1/2|=1} \frac{iz(z-i)^2}{\sin \pi z} dz$$

$$6.36. \oint_{|z-3|=1/2} \frac{e^z dz}{\sin z}$$

$$6.42. \oint_{|z-3|=1} \frac{\sin 3z + 2}{z^2(z-\pi)} dz$$

$$6.37. \oint_{|z-3/2|=2} \frac{z(\sin z + 2)}{\sin z} dz$$

$$6.43. \oint_{|z-1/2|=1} \frac{e^z + 1}{z(z-1)} dz$$

$$6.44. \oint_{|z|=1} \frac{e^{zi} + 2}{\sin 3zi} dz$$

$$6.45. \oint_{|z-2|=3} \frac{\cos^2 z + 1}{z^2 - \pi^2} dz$$

$$6.46. \oint_{|z-1|=3/2} \frac{\ln(z+2)}{\sin z} dz$$

$$6.47. \oint_{|z-6|=1} \frac{\sin^3 z + 2}{z^2 - 4\pi^2} dz$$

$$6.48. \oint_{|z+1|=1/2} \frac{\operatorname{tg} z + 2}{4z^2 + \pi z} dz$$

$$6.49. \oint_{|z+3/2|=1} \frac{\cos^3 z + 3}{2z^2 + \pi z} dz$$

$$6.50. \oint_{|z+1|=2} \frac{\sin^2 z - 3}{z^2 - 2\pi z} dz$$

$$6.51. \oint_{|z|=1/4} \frac{\ln(e+z)}{z \sin z + \frac{\pi}{4}} dz$$

$$6.52. \oint_{|z|=\pi/2} \frac{z^2 + z + 3}{\sin z(\pi + z)} dz$$

$$6.53. \oint_{|z|=1} \frac{z^3 - i}{\sin 2z(z - \pi)} dz$$

$$6.54. \oint_{|z-1|=2} \frac{z(z + \pi)}{\sin 2z} dz$$

$$6.55. \oint_{|z|=2} \frac{z^2 + \sin z + 2}{z^2 + \pi z} dz$$

$$6.56. \oint_{|z-3/2|=1} \frac{z(z + \pi)}{\sin 3z(z - \pi)} dz$$

$$6.57. \oint_{|z-3/2|=2} \frac{\sin z}{z(z - \pi)(z + \frac{\pi}{3})} dz$$

$$6.58. \oint_{|z-\pi|=1} \frac{(z^2 + \pi)^2}{i \sin z} dz$$

$$6.59. \oint_{|z|=2} \frac{\sin^2 z}{z \cos z} dz$$

$$6.60. \oint_{|z-\pi|=2} \frac{\cos^2 z}{z \sin z} dz$$

$$6.61. \oint_{|z-3/2|=2} \frac{z^3 + \sin 2z}{\sin \frac{z}{2}(z - \pi)} dz$$

$$6.62. \oint_{|z-1|=2} \frac{z^2 + 1}{(z^2 + 4) \sin \frac{z}{3}} dz$$

• Уровень В

Вычислить интеграл.

$$6.63. \oint_{|z|=0,2} \frac{3\pi z - \sin 3\pi z}{z^2 \operatorname{sh}^2 \pi^2 z} dz.$$

$$6.64. \oint_{|z|=1} \frac{\cos 3z - 1 + \frac{9z^2}{2}}{z^4 \operatorname{sh} \frac{9}{4} z} dz.$$

$$6.65. \oint_{|z|=0,5} \frac{\operatorname{sh} 2\pi z - 2\pi z}{z^2 \sin^2 \frac{\pi^2 z}{3}} dz.$$

$$6.66. \oint_{|z|=2} \frac{\operatorname{sh} 3z - 1 + \frac{9z^2}{2}}{z^4 \sin \frac{9z}{8}} dz.$$

$$6.67. \oint_{|z|=0,5} \frac{e^{2z} - 1 - 2z}{z \operatorname{sh}^2 4iz} dz.$$

$$6.68. \oint_{|z|=0,4} \frac{e^{4z} - \cos 7z}{z \operatorname{sh} 2\pi z} dz.$$

$$6.69. \oint_{|z|=0,2} \frac{e^{8z} - \operatorname{ch} 4z}{z \sin 4\pi z} dz.$$

$$6.70. \oint_{|z|=0,1} \frac{\operatorname{ch} z - \cos 3z}{z^2 \sin 5\pi z} dz.$$

$$6.71. \oint_{|z|=1} \frac{\operatorname{sh} 3z - \sin 3z}{z^3 \operatorname{sh} 2z} dz.$$

$$6.72. \oint_{|z|=0,05} \frac{e^{4z} - 1 - \sin 4z}{z^3 \operatorname{sh} 16\pi z} dz.$$

$$6.73. \oint_{|z|=1} \frac{6z - \sin 6z}{z^2 \operatorname{sh}^2 2z} dz.$$

$$6.74. \oint_{|z|=2} \frac{\cos 4z - 1 + 8z^2}{z^4 \operatorname{sh} \frac{4z}{3}} dz.$$

$$6.75. \oint_{|z|=6} \frac{\operatorname{sh} \pi z - \pi z}{z^2 \sin^2 \frac{\pi z}{6}} dz.$$

$$6.76. \oint_{|z|=1} \frac{\operatorname{ch} 4z - 8z^2 - 1}{z^4 \sin \frac{8z}{3}} dz.$$

$$6.77. \oint_{|z|=0,9} \frac{e^{3z} - 1 - 3z}{\operatorname{sh}^3 \pi z} dz.$$

$$6.78. \oint_{|z|=0,5} \frac{e^{6z} - \cos 8z}{z \operatorname{sh} 4z} dz.$$

$$6.79. \oint_{|z|=1} \frac{e^{5z} - \operatorname{ch} 5z}{z \sin 2iz} dz.$$

$$6.80. \oint_{|z|=0,5} \frac{\operatorname{ch} 3z - \cos 4iz}{z^2 \sin 5z} dz.$$

$$6.81. \oint_{|z|=2} \frac{\operatorname{sh} 3z - \sin 3z}{z^3 \operatorname{sh}(-iz)} dz.$$

$$6.82. \oint_{|z|=0,5} \frac{e^{5z} - 1 - \sin 5z}{z^2 \operatorname{sh} 5z} dz.$$

$$6.83. \oint_{|z|=2} \frac{\sin 3z - 3z}{z^2 \operatorname{sh}^2 iz} dz.$$

$$6.84. \oint_{|z|=2} \frac{\cos 2z - 1 + 2z^2}{z^4 \operatorname{sh} \frac{\pi z}{3}} dz.$$

$$6.85. \oint_{|z|=5} \frac{\operatorname{sh} 2z - 2z}{z^2 \sin^2 \frac{z}{3}} dz.$$

$$6.86. \oint_{|z|=1} \frac{\operatorname{ch} 2z - 1 - 2z^2}{z^4 \sin \frac{2\pi z}{3}} dz.$$

$$6.90. \oint_{|z|=0,2} \frac{\operatorname{ch} 2z - \cos 2z}{z^2 \sin 8z} dz.$$

$$6.87. \oint_{|z|=0,4} \frac{e^{2z} - 1 - 2z}{z \operatorname{sh}^2 2\pi z} dz.$$

$$6.91. \oint_{|z|=2} \frac{\operatorname{sh} iz - \sin iz}{z^3 \operatorname{sh} \frac{\pi z}{3}} dz.$$

$$6.88. \oint_{|z|=0,2} \frac{e^{4z} - 1 - \sin 4z}{z^2 \operatorname{sh} 8iz} dz.$$

$$6.92. \oint_{|z|=0,3} \frac{e^{3z} - 1 - \sin 3z}{z^2 \operatorname{sh} 3\pi z} dz.$$

$$6.89. \oint_{|z|=0,5} \frac{e^{5z} - \operatorname{ch} 6z}{z \sin \pi z} dz.$$

$$6.93. \oint_{|z|=0,5} \frac{e^{2z} - \cos 9z}{z \operatorname{sh} \pi iz} dz.$$

• **Уровень А**

Вычислить интеграл:

$$6.94. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9} dx$$

$$6.100. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + 10x^2 + 9}$$

$$6.95. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x - 1}{(x^2 + 4)^2} dx$$

$$6.101. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 9)(x^2 + 4)^2}$$

$$6.96. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^4 + 1)^2}$$

$$6.102. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 3)^2}$$

$$6.97. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 4)^2 (x^2 + 16)}$$

$$6.103. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 2)(x^2 + 3)^2}$$

$$6.98. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 - x + 1)^2}$$

$$6.104. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 9)(x^2 + 1)^2}$$

$$6.99. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 4)(x^2 + 9)^2}$$

$$6.105. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 + 1}{(x^2 + x + 1)^2} dx$$

$$6.106. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 + 1}{(x^2 + 4x + 13)^2} dx$$

$$6.107. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 5)^2} dx$$

$$6.108. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2 (x^2 + 4)}$$

$$6.109. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 + 5}{x^4 + 5x^2 + 6} dx$$

$$6.110. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)^3}$$

$$6.111. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 + 3}{(x^2 + 10x + 29)^2} dx$$

$$6.112. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2 (x^2 + 5)^2}$$

$$6.113. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + 7x^2 + 12}$$

$$6.114. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 + 4}{(x^2 + 9)^2} dx$$

$$6.115. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^5}$$

$$6.116. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 2)^2 (x^2 + 10)^2}$$

$$6.117. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 8x + 17)^2} dx$$

$$6.118. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 + 10}{(x^2 + 4)^2} dx$$

$$6.119. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^4}$$

$$6.120. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 3)^2 (x^2 + 15)^2}$$

$$6.121. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 + 2}{x^4 + 7x^2 + 12} dx$$

$$6.122. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 - 10x + 29)^2}$$

$$6.123. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 11)^2} dx$$

$$6.124. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2 (x^2 + 16)}$$

• Уровень Б

Вычислить интеграл:

$$6.125. \int_0^{+\infty} \frac{x \sin 3x}{(x^2 + 4)^2} dx$$

$$6.126. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-1) \sin x}{(x^2 + 9)^2} dx$$

$$6.127. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2 + 1)^2} dx$$

$$6.128. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 \cos x}{(x^2 + 1)^2} dx$$

$$6.129. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1) \cos x}{x^4 + 5x^2 + 6} dx$$

$$6.130. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin \frac{x}{2}}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)} dx$$

$$6.131. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^2 + 3) \cos 2x}{x^4 + 3x^2 + 2} dx$$

$$6.132. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^3 - 2) \cos \frac{x}{2}}{(x^2 + 1)^2} dx$$

$$6.133. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^2 - x) \sin x}{x^4 + 9x^2 + 20} dx$$

$$6.134. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos x}{x^2 - 2x + 2} dx$$

$$6.135. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin 2x - \sin x}{(x^2 + 4)^2} dx$$

$$6.136. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 5x}{(x^2 + 1)^2(x^2 + 4)} dx$$

$$6.137. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3 \sin x}{x^4 + 5x^2 + 4} dx$$

$$6.138. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1) \sin 2x}{x^2 + 2x + 2} dx$$

$$6.139. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{(x^2 + 1)^2} dx$$

$$6.140. \int_0^{+\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2 + \frac{1}{4})^2} dx$$

$$6.141. \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + 1)^3} dx$$

$$6.142. \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + 16)(x^2 + 9)} dx$$

$$6.143. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2 - 2x + 10} dx$$

$$6.144. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos x}{x^2 - 2x + 10} dx$$

$$6.145. \int_0^{+\infty} \frac{x \sin \frac{x}{2}}{x^2 + 4} dx$$

$$6.146. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2x}{(x^2 - x + 1)^2} dx$$

$$6.147. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 3x}{(x^2 - x + 1)^2} dx$$

$$6.148. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^3 + 5x) \sin x}{x^4 + 5x^2 + 4} dx$$

$$6.149. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 \cos x}{x^4 + 10x^2 + 9} dx$$

$$6.150. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^3 + 1) \cos x}{x^4 + 5x^2 + 4} dx$$

$$6.151. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^3 + 1) \sin x}{x^4 + 13x^2 + 36} dx$$

$$6.152. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x - \cos x}{(x^2 + 1)^2} dx$$

$$6.153. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^2 + x) \sin x}{x^4 + 13x^2 + 36} dx$$

$$6.154. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^2 + x) \cos x}{x^4 + 13x^2 + 36} dx$$

$$6.155. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 3x - \cos 2x}{(x^2 + 1)^2} dx$$

ОТВЕТЫ

К главе 1

1.1 $z_1 = -1 + i$, $z_2 = -1 - i$; $w_1 = 4 + 3i$, $w_2 = 25$, $w_3 = \frac{1+2i}{15}$. **1.2**
 $z_1 = \frac{-1+2i}{5}$, $z_2 = \frac{-1-2i}{5}$; $w_1 = \frac{4+7i}{5}$, $w_2 = \frac{32}{5} + 6i$, $w_3 = \frac{-104+178i}{85}$. **1.3** $z_1 = \frac{1+i\sqrt{5}}{3}$,
 $z_2 = \frac{1-i\sqrt{5}}{3}$; $w_1 = 3$, $w_2 = 14 + i(\sqrt{5} - 3)$, $w_3 = -\frac{18}{7} + i\frac{3}{7}(1 - \sqrt{5})$. **1.4**
 $z_1 = -2 + i$, $z_2 = -2 - i$; $w_1 = -1 + 2i$, $w_2 = -3 + 11i$, $w_3 = \frac{7-9i}{13}$. **1.5**
 $z_1 = 1+2i$, $z_2 = 1-2i$; $w_1 = 6+6i$, $w_2 = 6+18i$, $w_3 = -\frac{27}{26} + \frac{4i}{13}$. **1.6** $z_1 = 1+i$,
 $z_2 = 1-i$; $w_1 = 4 + 2i$, $w_2 = 22 - 4i$, $w_3 = -\frac{7}{4} + i\frac{9}{4}$. **1.7** $z_1 = \frac{1+7i}{5}$, $z_2 = \frac{1-7i}{5}$;
 $w_1 = \frac{26-8i}{5}$, $w_2 = 20 + i\frac{66}{5}$, $w_3 = \frac{-23-111i}{80}$. **1.8** $z_1 = \frac{1+3i}{2}$, $z_2 = \frac{1-3i}{2}$; $w_1 = \frac{-5+7i}{2}$,
 $w_2 = -\frac{11}{2} + 4i$, $w_3 = i$. **1.9** $z_1 = -2 + 3i$, $z_2 = -2 - 3i$; $w_1 = 3 + 10i$,
 $w_2 = 5 + 53i$, $w_3 = \frac{-49-79i}{149}$. **1.10** $z_1 = 3 + i$, $z_2 = 3 - i$; $w_1 = 5 + 2i$,
 $w_2 = 9 - 8i$, $w_3 = \frac{13+26i}{5}$. **1.11** $z_1 = 4 + 3i$, $z_2 = 4 - 3i$; $w_1 = 1 + 4i$, $w_2 = 17$,
 $w_3 = \frac{111+82i}{65}$. **1.12** $z_1 = \frac{-7+i\sqrt{3}}{2}$, $z_2 = \frac{-7-i\sqrt{3}}{2}$; $w_1 = \frac{-5+i3\sqrt{3}}{2}$, $w_2 = \frac{-29+i33\sqrt{3}}{2}$,
 $w_3 = 1 - i\frac{2\sqrt{3}}{9}$. **1.13** $z_1 = 1 + 4i$, $z_2 = 1 - 4i$; $w_1 = 7i$, $w_2 = -42 + 14i$,
 $w_3 = \frac{-86+70i}{53}$. **1.14** $z_1 = \frac{1+3i}{2}$, $z_2 = \frac{1-3i}{2}$; $w_1 = \frac{3+9i}{2}$, $w_2 = \frac{3}{2} + 12i$, $w_3 = \frac{-34-13i}{53}$.
1.15 $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 2 - 3i$; $w_1 = 4 - 2i$, $w_2 = 50i$, $w_3 = 8 - \frac{3i}{2}$. **1.16**
 $z_1 = -3 + i$, $z_2 = -3 - i$; $w_1 = 1 + 2i$, $w_2 = 5$, $w_3 = \frac{77-22i}{53}$. **1.17** $z_1 = -4 + 3i$,
 $z_2 = -4 - 3i$; $w_1 = -1 - 2i$, $w_2 = 9 - 2i$, $w_3 = \frac{139-36i}{53}$. **1.18** $z_1 = \frac{7+i\sqrt{3}}{2}$,
 $z_2 = \frac{7-i\sqrt{3}}{2}$; $w_1 = \frac{13+i5\sqrt{3}}{2}$, $w_2 = -\frac{51+i29\sqrt{3}}{2}$, $w_3 = \frac{1+i24\sqrt{3}}{19}$. **1.19** $z_1 = -1 + 4i$,
 $z_2 = -1 - 4i$; $w_1 = 1 + i$, $w_2 = 12i$, $w_3 = -2 - 4i$. **1.20** $z_1 = \frac{1+3i}{2}$, $z_2 = \frac{1-3i}{2}$;
 $w_1 = \frac{7+5i}{2}$, $w_2 = 11 + i\frac{21}{2}$, $w_3 = \frac{-9+2i}{5}$. **1.21** $z_1 = -3 + 4i$, $z_2 = -3 - 4i$;
 $w_1 = -4 + 3i$, $w_2 = -30 - 10i$, $w_3 = \frac{-18-38i}{13}$. **1.22** $z_1 = \frac{3+i}{4}$, $z_2 = \frac{3-i}{4}$;
 $w_1 = \frac{-5-3i}{4}$, $w_2 = -\frac{13}{8} + 2i$, $w_3 = \frac{64-47i}{65}$. **1.23** $z_1 = \frac{3+4i}{5}$, $z_2 = \frac{3-4i}{5}$; $w_1 = \frac{8-11i}{5}$,
 $w_2 = \frac{2+62i}{5}$, $w_3 = \frac{254+22i}{125}$. **1.24** $z_1 = \frac{-1+3i}{4}$, $z_2 = \frac{-1-3i}{4}$; $w_1 = \frac{3-i}{4}$, $w_2 = \frac{13+14i}{8}$,
 $w_3 = \frac{6-43i}{26}$. **1.25** $z_1 = \frac{6+8i}{5}$, $z_2 = \frac{6-8i}{5}$; $w_1 = \frac{16+13i}{5}$, $w_2 = \frac{-101-13i}{5}$, $w_3 =$
 $\frac{-389-77i}{185}$. **1.26** $z_1 = \frac{-1+3i}{2}$, $z_2 = \frac{-1-3i}{2}$; $w_1 = \frac{-3+5i}{2}$, $w_2 = -1 + i\frac{9}{2}$, $w_3 = -1$.
1.27 $z_1 = 3 + 4i$, $z_2 = 3 - 4i$; $w_1 = 2 + 5i$, $w_2 = -46 - 28i$, $w_3 = \frac{-54+76i}{41}$.

1.28 $z_1 = \frac{-3+i}{4}$, $z_2 = \frac{-3-i}{4}$; $w_1 = \frac{17-7i}{4}$, $w_2 = \frac{145}{8} - \frac{5}{4}i$, $w_3 = \frac{-10-91i}{289}$. **1.29**
 $z_1 = \frac{-3+4i}{5}$, $z_2 = \frac{-3-4i}{5}$; $w_1 = \frac{17+9i}{5}$, $w_2 = -\frac{64}{5} - 12i$, $w_3 = \frac{382-176i}{305}$. **1.30**
 $z_1 = \frac{1+3i}{4}$, $z_2 = \frac{1-3i}{4}$; $w_1 = \frac{13+11i}{4}$, $w_2 = \frac{103+76i}{8}$, $w_3 = \frac{-12+7i}{11}$. **1.31** $z_1 = \frac{-6+8i}{5}$,
 $z_2 = \frac{-6-8i}{5}$; $w_1 = \frac{9-12i}{5}$, $w_2 = \frac{87-51i}{5}$, $w_3 = \frac{67-231i}{195}$.

К главе 2

2.1 $f(z) = f(x, y) = (x^2 - y^2 + x) + i(2xy + y) = z^2 + z$. **2.2** $f(z) = f(x, y) = (x^3 - 3xy^2 + 1) + i(3x^2y - y^3) = z^3 + 1$. **2.3** $f(z) = f(x, y) = (x^2 - y^2 - 2y) + i(2xy + 2x) = z^2 + 2iz$. **2.4** $f(z) = f(x, y) = (y - 2xy) + i(x^2 - y^2 - x) = iz^2 - iz$. **2.5** $f(z) = f(x, y) = (-2y - 2xy) + i(x^2 - y^2 + 2x + 1) = iz^2 + 2iz + i$. **2.6** $f(z) = f(x, y) = (x^2 - y^2 - 2x + 1) + i(2xy - 2y) = z^2 - 2z + 1$. **2.7** $f(z) = f(x, y) = (x^3 - 3xy^2 - x) + i(3x^2y - y^3 - y) = z^3 - z$. **2.8** $f(z) = f(x, y) = (x^2 - y^2 + x) + i(2xy + y) = z^2 + z$. **2.9** $f(z) = f(x, y) = (x^3 - 3xy^2 + 1) + i(3x^2y - y^3) = z^3 + 1$. **2.10** $f(z) = f(x, y) = (x^2 - y^2 - 2y) + i(2xy + 2x) = z^2 + 2iz$. **2.11** $f(z) = f(x, y) = (y - 2xy) + i(x^2 - y^2 - x) = iz^2 - iz$. **2.12** $f(z) = f(x, y) = (-2y - 2xy) + i(x^2 - y^2 + 2x + 1) = iz^2 + 2iz + i$. **2.13** $f(z) = f(x, y) = (x^2 - y^2 - 2x + 1) + i(2xy - 2y) = z^2 - 2z + 1$. **2.14** $f(z) = f(x, y) = (x^3 - 3xy^2 - x) + i(3x^2y - y^3 - y) = z^3 - z$. **2.15** $f(z) = f(x, y) = (x^2 - y^2 - y) + i(2xy + x) = z^2 + iz$. **2.16** $f(z) = f(x, y) = (e^x(x \cos y - y \sin y) + i(e^x(y \cos y + x \sin y)) = ze^z$. **2.17** $f(z) = f(x, y) = (e^{-y} \cos x + x) + i(e^{-y} \sin x + y) = e^{iz} + z$. **2.18** $f(z) = f(x, y) = (1 - e^x \sin y) + ie^x \cos y = ie^z + 1$. **2.19** $f(z) = f(x, y) = e^{-y} \cos x + ie^{-y} \sin x = e^{iz}$. **2.20** $f(z) = f(x, y) = (e^x(x \cos y - y \sin y) + i(e^x(y \cos y + x \sin y)) = ze^z$. **2.21** $f(z) = f(x, y) = (1 - e^x \sin y) + ie^x \cos y = ie^z + 1$. **2.22** $f(z) = f(x, y) = (e^{-y} \cos x + x) + i(e^{-y} \sin x + y) = e^{iz} + z$. **2.23** $f(z) = f(x, y) = e^{-y} \cos x + ie^{-y} \sin x = e^{iz}$. **2.24** $f(z) = f(x, y) = \frac{x+1}{(x+1)^2+y^2} + i\frac{-y}{(x+1)^2+y^2} = \frac{1}{z+1}$. **2.25** $f(z) = f(x, y) = \left(x + \frac{x}{x^2+y^2}\right) + i\left(y - \frac{y}{x^2+y^2}\right) = z + \frac{1}{z}$. **2.26** $f(z) = f(x, y) = (e^x + e^{-x}) \cos y + i(e^x - e^{-x}) \sin y = 2 \cos z$. **2.27** $f(z) = f(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2} + i\left(1 - \frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{1}{z} + i$. **2.28** $f(z) = f(x, y) = \frac{x+1}{(x+1)^2+y^2} + i\frac{-y}{(x+1)^2+y^2} = \frac{1}{z+1}$. **2.29** $f(z) = f(x, y) = \left(x + \frac{x}{x^2+y^2}\right) + i\left(y - \frac{y}{x^2+y^2}\right) = z + \frac{1}{z}$. **2.30** $f(z) = f(x, y) = (e^x + e^{-x}) \cos y + i(e^x - e^{-x}) \sin y = 2 \cos z$. **2.31**

$$f(z) = f(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2} + i \left(1 - \frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{1}{z} + i.$$

К главе 3

3.1 $\sqrt[4]{-1} = e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi k}{4})}$, $k = 0, 1, 2, 3$; $(\sqrt[4]{-1})_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $(\sqrt[4]{-1})_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $(\sqrt[4]{-1})_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $(\sqrt[4]{-1})_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$. **3.2** $\sqrt[4]{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}} = e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2})}$, $k = 0, 1, 2, 3$; $\left(\sqrt[4]{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}}\right)_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$, $\left(\sqrt[4]{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}}\right)_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\left(\sqrt[4]{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}}\right)_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$, $\left(\sqrt[4]{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}}\right)_3 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. **3.3** $\sqrt[3]{1} = e^{i(\frac{2\pi k}{3})}$, $k = 0, 1, 2$; $(\sqrt[3]{1})_0 = 1$, $(\sqrt[3]{1})_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $(\sqrt[3]{1})_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. **3.4** $\sqrt[3]{i} = e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3})}$, $k = 0, 1, 2$; $(\sqrt[3]{i})_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$, $(\sqrt[3]{i})_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$, $(\sqrt[3]{i})_2 = -i$. **3.5** $\sqrt[4]{1} = e^{i(\frac{\pi k}{2})}$, $k = 0, 1, 2, 3$; $(\sqrt[4]{1})_0 = 1$, $(\sqrt[4]{1})_1 = i$, $(\sqrt[4]{1})_2 = -1$, $(\sqrt[4]{1})_3 = -i$. **3.6** $\sqrt[4]{\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}} = e^{i(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2})}$, $k = 0, 1, 2, 3$; $\left(\sqrt[4]{\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}}\right)_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$, $\left(\sqrt[4]{\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}}\right)_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\left(\sqrt[4]{\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}}\right)_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$, $\left(\sqrt[4]{\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}}\right)_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. **3.7** $\sqrt[3]{-1} = e^{i(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3})}$, $k = 0, 1, 2$; $(\sqrt[3]{-1})_0 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $(\sqrt[3]{-1})_1 = -1$, $(\sqrt[3]{-1})_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. **3.8** $\sqrt[3]{-i} = e^{i(-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3})}$, $k = 0, 1, 2$; $(\sqrt[3]{-i})_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$, $(\sqrt[3]{-i})_1 = i$, $(\sqrt[3]{-i})_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$. **3.9** $\sqrt[4]{-16} = 2e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi k}{4})}$, $k = 0, 1, 2, 3$; $(\sqrt[4]{-16})_0 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$, $(\sqrt[4]{-16})_1 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$, $(\sqrt[4]{-16})_2 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$, $(\sqrt[4]{-16})_3 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$. **3.10** $\sqrt[4]{\frac{1+i\sqrt{3}}{32}} = \frac{1}{16}e^{i(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2})}$, $k = 0, 1, 2, 3$; $\left(\sqrt[4]{\frac{1+i\sqrt{3}}{32}}\right)_0 = \cos \frac{\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}} + i\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}}$, $\left(\sqrt[4]{\frac{1+i\sqrt{3}}{32}}\right)_1 = -\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}} + i\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}}$, $\left(\sqrt[4]{\frac{1+i\sqrt{3}}{32}}\right)_2 = -\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}} - i\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}}$, $\left(\sqrt[4]{\frac{1+i\sqrt{3}}{32}}\right)_3 = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}} - i\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}}$. **3.11** $\sqrt[3]{8} = 2e^{i(\frac{2\pi k}{3})}$, $k = 0, 1, 2$; $(\sqrt[3]{8})_0 = 2$, $(\sqrt[3]{8})_1 = -1 + i\sqrt{3}$, $(\sqrt[3]{8})_2 = -1 - i\sqrt{3}$. **3.12** $\sqrt[3]{8i} = 2e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3})}$, $k = 0, 1, 2$; $(\sqrt[3]{8i})_0 = \sqrt{3} + i$, $(\sqrt[3]{8i})_1 = -\sqrt{3} + i$, $(\sqrt[3]{8i})_2 = -2i$. **3.13** $\sqrt[4]{16} = 2e^{i(\frac{\pi k}{2})}$, $k = 0, 1, 2, 3$; $(\sqrt[4]{16})_0 = 2$, $(\sqrt[4]{16})_1 = 2i$, $(\sqrt[4]{16})_2 = -2$, $(\sqrt[4]{16})_3 = -2i$. **3.14** $\sqrt[4]{\frac{-1-i\sqrt{3}}{32}} = \frac{1}{2}e^{i(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2})}$, $k = 0, 1, 2, 3$; $\left(\sqrt[4]{\frac{-1-i\sqrt{3}}{32}}\right)_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} - i\frac{1}{4}$, $\left(\sqrt[4]{\frac{-1-i\sqrt{3}}{32}}\right)_1 = \frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}$, $\left(\sqrt[4]{\frac{-1-i\sqrt{3}}{32}}\right)_2 = -\frac{\sqrt{3}}{4} + i\frac{1}{4}$, $\left(\sqrt[4]{\frac{-1-i\sqrt{3}}{32}}\right)_3 = -\frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}$. **3.15** $\sqrt[3]{-8} = 2e^{i(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3})}$, $k = 0, 1, 2$; $(\sqrt[3]{-8})_0 = 1 + i\sqrt{3}$, $(\sqrt[3]{-8})_1 = -2$, $(\sqrt[3]{-8})_2 = -1 -$

$i\sqrt{3}$. **3.16** $\sqrt[3]{-8i} = 2e^{i(-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3})}$, $k = 0, 1, 2$; $(\sqrt[3]{-8i})_0 = \sqrt{3} - i$, $(\sqrt[3]{-8i})_1 = 2i$, $(\sqrt[3]{-8i})_2 = -\sqrt{3} - i$. **3.17** $\sqrt[4]{-\frac{1}{16}} = \frac{1}{2}e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi k}{4})}$, $k = 0, 1, 2, 3$; $(\sqrt[4]{-\frac{1}{16}})_0 = \frac{\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{2}}{4}$, $(\sqrt[4]{-\frac{1}{16}})_1 = -\frac{\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{2}}{4}$, $(\sqrt[4]{-\frac{1}{16}})_2 = -\frac{\sqrt{2}}{4} - i\frac{\sqrt{2}}{4}$, $(\sqrt[4]{-\frac{1}{16}})_3 = \frac{\sqrt{2}}{4} - i\frac{\sqrt{2}}{4}$. **3.18** $\sqrt[4]{\frac{-8+i8\sqrt{3}}{2}} = 2e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2})}$, $k = 0, 1, 2, 3$; $(\sqrt[4]{\frac{-8+i8\sqrt{3}}{2}})_0 = \sqrt{3} + i$, $(\sqrt[4]{\frac{-8+i8\sqrt{3}}{2}})_1 = -1 + i\sqrt{3}$, $(\sqrt[4]{\frac{-8+i8\sqrt{3}}{2}})_2 = -\sqrt{3} - i$, $(\sqrt[4]{\frac{-8+i8\sqrt{3}}{2}})_3 = 1 - i\sqrt{3}$. **3.19** $\sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}e^{i(\frac{2\pi k}{3})}$, $k = 0, 1, 2$; $(\sqrt[3]{\frac{1}{8}})_0 = \frac{1}{2}$, $(\sqrt[3]{\frac{1}{8}})_1 = -\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}$, $(\sqrt[3]{\frac{1}{8}})_2 = -\frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}$. **3.20** $\sqrt[3]{\frac{i}{8}} = \frac{1}{2}e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3})}$, $k = 0, 1, 2$; $(\sqrt[3]{\frac{i}{8}})_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} + i\frac{1}{4}$, $(\sqrt[3]{\frac{i}{8}})_1 = -\frac{\sqrt{3}}{4} + i\frac{1}{4}$, $(\sqrt[3]{\frac{i}{8}})_2 = -\frac{i}{2}$. **3.21** $\sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \frac{1}{2}e^{i(\frac{\pi k}{2})}$, $k = 0, 1, 2, 3$; $(\sqrt[4]{\frac{1}{16}})_0 = \frac{1}{2}$, $(\sqrt[4]{\frac{1}{16}})_1 = \frac{i}{2}$, $(\sqrt[4]{\frac{1}{16}})_2 = -\frac{1}{2}$, $(\sqrt[4]{\frac{1}{16}})_3 = -\frac{i}{2}$. **3.22** $\sqrt[4]{-8 - i8\sqrt{3}} = 2e^{i(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2})}$, $k = 0, 1, 2, 3$; $(\sqrt[4]{-8 - i8\sqrt{3}})_0 = \sqrt{3} - i$, $(\sqrt[4]{-8 - i8\sqrt{3}})_1 = 1 + i\sqrt{3}$, $(\sqrt[4]{-8 - i8\sqrt{3}})_2 = -\sqrt{3} + i$, $(\sqrt[4]{-8 - i8\sqrt{3}})_3 = -1 - i\sqrt{3}$. **3.23** $\sqrt[3]{-\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}e^{i(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3})}$, $k = 0, 1, 2$; $(\sqrt[3]{-\frac{1}{8}})_0 = \frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}$, $(\sqrt[3]{-\frac{1}{8}})_1 = -\frac{1}{2}$, $(\sqrt[3]{-\frac{1}{8}})_2 = -\frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}$. **3.24** $\sqrt[3]{-\frac{i}{8}} = \frac{1}{2}e^{i(-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3})}$, $k = 0, 1, 2$; $(\sqrt[3]{-\frac{i}{8}})_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} - i\frac{1}{4}$, $(\sqrt[3]{-\frac{i}{8}})_1 = \frac{i}{2}$, $(\sqrt[3]{-\frac{i}{8}})_2 = -\frac{\sqrt{3}}{4} - i\frac{1}{4}$. **3.25** $\sqrt[4]{-128 + i128\sqrt{3}} = 4e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2})}$, $k = 0, 1, 2, 3$; $2\sqrt{3} + 2i$, $-2 + i2\sqrt{3}$, $-2\sqrt{3} - 2i$, $2 - i2\sqrt{3}$. **3.26** $\sqrt[3]{27} = 3e^{i(\frac{2\pi k}{3})}$, $k = 0, 1, 2$; $(\sqrt[3]{27})_0 = 3$, $(\sqrt[3]{27})_1 = -\frac{3}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2}$, $(\sqrt[3]{27})_2 = -\frac{3}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2}$. **3.27** $\sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4}e^{i(\frac{\pi k}{2})}$, $k = 0, 1, 2, 3$; $(\sqrt[4]{\frac{1}{16}})_0 = \frac{1}{4}$, $(\sqrt[4]{\frac{1}{16}})_1 = \frac{i}{4}$, $(\sqrt[4]{\frac{1}{16}})_2 = -\frac{1}{4}$, $(\sqrt[4]{\frac{1}{16}})_3 = -\frac{i}{4}$. **3.28** $\sqrt[4]{-128 - i128\sqrt{3}} = 4e^{i(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2})}$, $k = 0, 1, 2, 3$; $2\sqrt{3} - 2i$, $2 + i2\sqrt{3}$, $-2\sqrt{3} + 2i$, $-2 - i2\sqrt{3}$. **3.29** $\sqrt[3]{\frac{i}{27}} = \frac{1}{3}e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3})}$, $k = 0, 1, 2$; $(\sqrt[3]{\frac{i}{27}})_0 = \frac{\sqrt{3}}{6} + i\frac{1}{6}$, $(\sqrt[3]{\frac{i}{27}})_1 = -\frac{\sqrt{3}}{6} + i\frac{1}{6}$, $(\sqrt[3]{\frac{i}{27}})_2 = -\frac{i}{6}$. **3.30** $\sqrt[4]{256} = 4e^{i(\frac{\pi k}{2})}$, $k = 0, 1, 2, 3$; $(\sqrt[4]{256})_0 = 4$, $(\sqrt[4]{256})_1 = 4i$, $(\sqrt[4]{256})_2 = -4$, $(\sqrt[4]{256})_3 = -4i$. **3.31** $\sqrt[3]{-27i} = 3e^{i(-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3})}$, $k = 0, 1, 2$; $(\sqrt[3]{-27i})_0 = \frac{3\sqrt{3}}{2} - i\frac{3}{2}$, $(\sqrt[3]{-27i})_1 = 3i$, $(\sqrt[3]{-27i})_2 = -\frac{3\sqrt{3}}{2} - i\frac{3}{2}$. **3.32** $\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2i\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{ch} 2 + i\frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sh} 2$. **3.33** $\cos\left(\frac{\pi}{6} + 2i\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{ch} 2 - i\frac{1}{2} \operatorname{sh} 2$. **3.34** $\ln 6 = \ln 6 + 2\pi k i$, $k \in \mathbb{Z}$. **3.35** $\operatorname{sh}\left(2 + \frac{\pi i}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sh} 2 + i\frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{ch} 2$. **3.36** $\operatorname{ch}\left(2 + \frac{\pi i}{2}\right) =$

$i \operatorname{sh} 2$. **3.37** $\ln(1+i) = \frac{1}{2} \ln 2 + i\frac{\pi}{4} + i2\pi k$ $k \in \mathbb{Z}$. **3.38** $\sin\left(\frac{\pi}{3} + i\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{ch} 1 + i\frac{1}{2} \operatorname{sh} 1$. **3.39** $\cos\left(\frac{\pi}{4} + i\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{ch} 1 - i\frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sh} 1$. **3.40** $\ln(\sqrt{3}+i) = \ln 2 + i\frac{\pi}{6} + i2\pi k$ $k \in \mathbb{Z}$. **3.41** $\operatorname{sh}\left(1 + \frac{\pi i}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sh} 1 + i\frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{ch} 1$. **3.42** $\operatorname{ch}(1-\pi i) = -\operatorname{ch} 1$. **3.43** $\ln(1+i\sqrt{3}) = \ln 2 + i\frac{\pi}{3} + i2\pi k$ $k \in \mathbb{Z}$. **3.44** $\ln(-1+i) = \frac{1}{2} \ln 2 + i\frac{3\pi}{4} + i2\pi k$ $k \in \mathbb{Z}$. **3.45** $\cos\left(\frac{\pi}{4} - 2i\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{ch} 2 + i\frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sh} 2$. **3.46** $\sin\left(\frac{\pi}{2} - 5i\right) = \operatorname{ch} 5$. **3.47** $\operatorname{sh}\left(3 + \frac{\pi i}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sh} 3 + i\frac{1}{2} \operatorname{ch} 3$. **3.48** $\operatorname{ch}\left(1 + \frac{\pi i}{6}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{ch} 1 + i\frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sh} 1$. **3.49** $\ln(-1-i) = \frac{1}{2} \ln 2 - i\frac{3\pi}{4} + i2\pi k$ $k \in \mathbb{Z}$. **3.50** $\sin\left(\frac{\pi}{6} - 3i\right) = \frac{1}{2} \operatorname{ch} 3 - i\frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sh} 3$. **3.51** $\cos\left(\frac{\pi}{3} + 3i\right) = \frac{1}{2} \operatorname{ch} 3 - i\frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sh} 3$. **3.52** $\ln(1-i) = \frac{1}{2} \ln 2 - i\frac{\pi}{4} + i2\pi k$ $k \in \mathbb{Z}$. **3.53** $\operatorname{sh}\left(1 - \frac{\pi i}{3}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{sh} 1 - i\frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{ch} 1$. **3.54** $\operatorname{ch}\left(2 - \frac{\pi i}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{ch} 2 - i\frac{1}{2} \operatorname{ch} 2$. **3.55** $1^{2i} = e^{2i \ln 1} = e^{-4\pi k}$, $k \in \mathbb{Z}$. **3.56** $\sin\left(\frac{\pi}{3} - 2i\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{ch} 2 - i\frac{1}{2} \operatorname{sh} 2$. **3.57** $\cos\left(\frac{\pi}{6} - i\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{ch} 1 + i\frac{1}{2} \operatorname{sh} 1$. **3.58** $i^{3i} = e^{3i \ln i} = e^{3i(i\frac{\pi}{2} + 2\pi ki)} = e^{-\frac{3\pi}{2} - 6\pi k}$, $k \in \mathbb{Z}$. **3.59** $\operatorname{sh}(2 - \pi i) = -\operatorname{sh} 2$. **3.60** $(-i)^{5i} = e^{5i \ln(-i)} = e^{5i(-i\frac{\pi}{2} + 2\pi ki)} = e^{\frac{5\pi}{2} - 10\pi k}$, $k \in \mathbb{Z}$. **3.61** $(-1)^{4i} = e^{4i \ln(-1)} = e^{-4\pi - 8\pi k}$, $k \in \mathbb{Z}$. **3.62** $\operatorname{ch}\left(3 + \frac{\pi i}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{ch} 3 + i\frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sh} 3$. **3.63** $(-1 + i\sqrt{3})^{-3i} = e^{-3i \ln(-1+i\sqrt{3})} = e^{2\pi + 6\pi k - i3 \ln 2} = e^{2\pi + 6\pi k} \cos(3 \ln 2) - ie^{2\pi + 6\pi k} \sin(3 \ln 2)$, $k \in \mathbb{Z}$. **3.64** $\arcsin 4 = i \ln(i4 + \sqrt{1-16}) = -\frac{\pi}{2} - 2\pi k + i \ln(4 \pm \sqrt{15})$, $k \in \mathbb{Z}$. **3.65** $\operatorname{arch}(-2) = \ln(-2 + \sqrt{4-1}) = \ln(2 \pm \sqrt{3}) + 2\pi ki$, $k \in \mathbb{Z}$. **3.66** $\operatorname{arctg}\left(\frac{-2\sqrt{3}+3i}{3}\right) = -\frac{\pi}{6} + \pi k + \frac{i}{2} \ln 2$, $k \in \mathbb{Z}$. **3.67** $\operatorname{arth}\left(\frac{3-4i}{5}\right) = \frac{1}{2} \ln 2 + i\frac{\pi}{4} + \pi ki$, $k \in \mathbb{Z}$. **3.68** $\operatorname{arctg}\left(\frac{4+3i}{5}\right) = +\frac{\pi}{4} + \pi k - \frac{i}{2} \ln 2$, $k \in \mathbb{Z}$. **3.69** $\operatorname{arth}\left(\frac{3+i2\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{1}{2} \ln 2 + i\frac{\pi}{3} + \pi ki$, $k \in \mathbb{Z}$. **3.70** $\cos\left(\frac{\pi}{2} - i\right) = i \operatorname{sh} 1$. **3.71** $\operatorname{sh}(1 - \frac{\pi i}{2}) = -i \operatorname{sh} 1$. **3.72** $(-1-i)^{4i} = e^{4i \ln(-1-i)} = e^{3\pi - 8\pi k - i2 \ln 2} = e^{3\pi - 8\pi k} \cos(2 \ln 2) - ie^{3\pi - 8\pi k} \sin(2 \ln 2)$, $k \in \mathbb{Z}$. **3.73** $\sin\left(\frac{\pi}{4} + i\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{ch} 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sh} 1$. **3.74** $\operatorname{arch}(3i) = \ln(3 \pm \sqrt{10}) \pm i\frac{\pi}{2} + 2\pi ki$, $k \in \mathbb{Z}$. **3.75** $\operatorname{arctg}\left(\frac{3+4i}{5}\right) = \frac{\pi}{4} + \pi k + \frac{i}{2} \ln 3$, $k \in \mathbb{Z}$. **3.76** $\operatorname{arth}\left(\frac{8+i3\sqrt{3}}{7}\right) = \frac{1}{2} \ln 3 - i\frac{\pi}{6} + \pi ki$, $k \in \mathbb{Z}$. **3.77** $\operatorname{arctg}\left(\frac{3+4i}{5}\right) = \frac{\pi}{3} + \pi k - \frac{i}{2} \ln 3$, $k \in \mathbb{Z}$. **3.78** $\operatorname{arth}\left(\frac{4-3i}{5}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{3\sqrt{34}}{5}\right) -$

$\frac{i}{2} \operatorname{arctg} \frac{5}{3} + \pi ki, k \in \mathbb{Z}$. **3.79** $\operatorname{arctg}(\frac{-2\sqrt{3}+3i}{7}) = -\frac{\pi}{6} + \pi k + \frac{i}{2} \ln 2, k \in \mathbb{Z}$.
3.80 $\operatorname{arcth}(\frac{3-i2\sqrt{3}}{7}) = \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{\pi i}{6} + \pi ki, k \in \mathbb{Z}$. **3.81** $\arccos(-5) = \pi + 2\pi k - i \ln(5 \pm \sqrt{24}), k \in \mathbb{Z}$. **3.82** $\operatorname{arsh}(-4i) = \ln(4 \pm \sqrt{15}) - i\frac{\pi}{2} + 2\pi ki, k \in \mathbb{Z}$.
3.83 $(-\sqrt{3} + i)^{6i} = e^{6i \ln(-\sqrt{3}+i)} = e^{-5\pi-12\pi k+i6 \ln 2} = e^{-5\pi-12\pi k} \cos(6 \ln 2) + ie^{-5\pi-12\pi k} \sin(6 \ln 2), k \in \mathbb{Z}$. **3.84** $\omega = \sin \frac{i}{z} \Big|_{\frac{8+2\pi i}{\pi^2+16}} = \operatorname{ch} 2$. **3.85** $\omega = e^{\frac{i}{z}} \Big|_{\frac{4+2\pi i}{\pi^2+4}} = e^{\frac{\pi}{2}} \cos 1 + ie^{\frac{\pi}{2}} \sin 1$. **3.86** $\operatorname{arctg}(\frac{2\sqrt{3}+3i}{7}) = \frac{\pi}{3} + \pi k - \frac{i}{2} \ln 2, k \in \mathbb{Z}$. **3.87** $\operatorname{arth}(\frac{3+i2\sqrt{3}}{7}) = \frac{1}{2} \ln 2 + i\frac{\pi}{6} + \pi ki, k \in \mathbb{Z}$. **3.88** $\operatorname{arcth}(\frac{4+3i}{5}) = \frac{1}{2} \ln 3 - i\frac{\pi}{4} + \pi ki, k \in \mathbb{Z}$. **3.89** $\omega = \operatorname{ch}(iz) \Big|_{\frac{\pi}{4}+2i} = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{ch} 2 - i\frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sh} 2$. **3.90** $\operatorname{arctg}(\frac{3\sqrt{3}+8i}{7}) = \frac{\pi}{6} + \pi k - \frac{i}{2} \ln 3, k \in \mathbb{Z}$. **3.91** $\arccos(-3i) = 2\pi k \mp \frac{\pi}{2} - i \ln(\sqrt{10} \pm 3), k \in \mathbb{Z}$. **3.92** $(4 - 3i)^i = e^{i \ln(4-3i)} = e^{\operatorname{arctg} \frac{3}{4} - 2\pi k + i \ln 5} = e^{\operatorname{arctg} \frac{3}{4} - 2\pi k} \cos(\ln 5) + ie^{\operatorname{arctg} \frac{3}{4} - 2\pi k} \sin(\ln 5), k \in \mathbb{Z}$. **3.93** $(-12 + 5i)^i = e^{i \ln(-12+5i)} = \exp(\operatorname{arctg} \frac{5}{12} - \pi - 2\pi k + i \ln 13) = e^{\operatorname{arctg} \frac{5}{12} - \pi - 2\pi k} \cos(\ln 13) + ie^{\operatorname{arctg} \frac{5}{12} - \pi - 2\pi k} \sin(\ln 13), k \in \mathbb{Z}$.

К главе 5

5.63 $\operatorname{res}_{z=0} f(z) = \frac{-1}{9}, \operatorname{res}_{z=3} f(z) = \frac{1}{9}, \operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = 0$ **5.64** $\operatorname{res}_{z=-1} f(z) = \cos 1, \operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -\cos 1$ **5.65** $\operatorname{res}_{z=0} f(z) = 0, \operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = 0$ **5.66** $\operatorname{res}_{z=-1} f(z) = -4, \operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = 4$ **5.67** $\operatorname{res}_{z=2\pi n} f(z) = 1, \operatorname{res}_{z=\pi+2\pi n} f(z) = -1$ **5.68** $\operatorname{res}_{z=0} f(z) = \frac{1}{2}, \operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -\frac{1}{2}$ **5.69** $\operatorname{res}_{z=-1} f(z) = \frac{1}{6}, \operatorname{res}_{z=1} f(z) = -\frac{1}{2}, \operatorname{res}_{z=2} f(z) = \frac{4}{3}, \operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -1$ **5.70** $\operatorname{res}_{z=-i} f(z) = \frac{i}{4e}, \operatorname{res}_{z=i} f(z) = -\frac{i}{4e}, \operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = 0$ **5.71** $\operatorname{res}_{z=-1} f(z) = 3 - \frac{4}{e}, \operatorname{res}_{z=0} f(z) = -\frac{3}{2}, \operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = \frac{4}{e} - \frac{3}{2}$ **5.72** $\operatorname{res}_{z=-1} f(z) = -e, \operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = e$ **5.73** $\operatorname{res}_{z=1} f(z) = -1, \operatorname{res}_{z=2} f(z) = 2, \operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -1$
5.74 $\operatorname{res}_{z=(\frac{\pi}{2}+\pi n)^{-1}} f(z) = \frac{4}{\pi^2(2n+1)^2}, n \in \mathbb{Z}, n \neq -1$ $\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -1$ **5.75** $\operatorname{res}_{z=0} f(z) = 4, \operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -4$ **5.76** $\operatorname{res}_{z=0} f(z) = -i, \operatorname{res}_{z=-2i} f(z) = i + \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2, \operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -\frac{1}{2} \operatorname{sh} 2$ **5.77** $\operatorname{res}_{z=2\pi in} f(z) = 1, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0, \operatorname{res}_{z=0} f(z) = 0$ **5.78** $\operatorname{res}_{z=0} f(z) = 0, \operatorname{res}_{z=i} f(z) = -i \operatorname{sh} \pi, \operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = i \operatorname{sh} \pi$ **5.79** $\operatorname{res}_{z=0} f(z) = 0, \operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = 0$ **5.80** $\operatorname{res}_{z=2\pi in} f(z) = -1, n \in \mathbb{Z}$ **5.81** $\operatorname{res}_{z=0} f(z) = 1, \operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -1$ **5.82** $\operatorname{res}_{z=0} f(z) = 0, \operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = 0$ **5.83** $\operatorname{res}_{z=0} f(z) = 0, \operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = 0$ **5.84** $\operatorname{res}_{z=(2\pi n)^{-1}} f(z) = \frac{1}{4\pi^2 n^2}, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0, \operatorname{res}_{z=(\pi+2\pi n)^{-1}} f(z) = \frac{1}{(\pi+2\pi n)^2}, n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{Z}, \operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -\frac{1}{6} \quad & \mathbf{5.85} \operatorname{res}_{z=\pm 2i} f(z) = 1, \operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -2 \quad \mathbf{5.86} \operatorname{res}_{z=\pi i+2\pi in} f(z) = \\
-1, n \in \mathbb{Z} \quad & \mathbf{5.87} \operatorname{res}_{z=-\sqrt{2\pi n}} f(z) = -\frac{1}{2\sqrt{2\pi n}}, n \in \mathbb{N}, \operatorname{res}_{z=\sqrt{2\pi n}} f(z) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi n}}, n \in \\
\mathbb{N}, \operatorname{res}_{z=-\sqrt{\pi+2\pi n}} f(z) = \frac{1}{2\sqrt{\pi+2\pi n}}, n = 0, 1, \dots, \operatorname{res}_{z=\sqrt{\pi+2\pi n}} f(z) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi+2\pi n}}, \\
n = 0, 1, \dots, \operatorname{res}_{z=0} f(z) = 0 \quad & \mathbf{5.88} \operatorname{res}_{z=1} f(z) = -1, \operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = 1 \quad \mathbf{5.89} \operatorname{res}_{z=-2i} f(z) = \\
-\frac{3}{25} + \frac{9i}{100}, \operatorname{res}_{z=2i} f(z) = -\frac{3}{25} - \frac{9i}{100}, \operatorname{res}_{z=1} f(z) = \frac{6}{25}, \operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = 0 \\
\mathbf{5.90} \operatorname{res}_{z=-\frac{\pi}{2}+2\pi n} f(z) = 1, n \in \mathbb{Z}, \operatorname{res}_{z=\frac{\pi}{2}+2\pi n} f(z) = -1, n \in \mathbb{Z} \\
\mathbf{5.91} \operatorname{res}_{z=-i \ln(3+2\sqrt{2})+2\pi n} f(z) = -\frac{i}{2\sqrt{2}}, n \in \mathbb{Z}, \operatorname{res}_{z=i \ln(3+2\sqrt{2})+2\pi n} f(z) = \frac{i}{2\sqrt{2}}, n \in \\
\mathbb{Z} \quad \mathbf{5.92} \operatorname{res}_{z=\pm 1} f(z) = -\frac{1}{2}, \operatorname{res}_{z=0} f(z) = 1, \operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = 0
\end{aligned}$$

К главе 6

$$\begin{aligned}
\mathbf{6.1} 0 \quad \mathbf{6.2} -\pi i/2 \quad \mathbf{6.3} 4\pi i \quad \mathbf{6.4} 0 \quad \mathbf{6.5} -2\pi i \quad \mathbf{6.6} 0 \quad \mathbf{6.7} -4\pi i \quad \mathbf{6.8} 2\pi i \quad \mathbf{6.9} \\
4\pi i \quad \mathbf{6.10} 0 \quad \mathbf{6.11} \pi i/6 \quad \mathbf{6.12} \pi i \quad \mathbf{6.13} 8\pi i \quad \mathbf{6.14} 2\pi i \quad \mathbf{6.15} -\pi i \quad \mathbf{6.16} \pi i \quad \mathbf{6.17} 0 \\
\mathbf{6.18} 2\pi i \quad \mathbf{6.19} -6\pi i \quad \mathbf{6.20} \pi i/3 \quad \mathbf{6.21} \pi i \quad \mathbf{6.22} -10\pi i \quad \mathbf{6.23} 2\pi i \quad \mathbf{6.24} 0 \quad \mathbf{6.25} 0 \\
\mathbf{6.26} -\pi i \quad \mathbf{6.27} 0 \quad \mathbf{6.28} 4\pi i/3 \quad \mathbf{6.29} 0 \quad \mathbf{6.30} 0 \quad \mathbf{6.31} 0 \quad \mathbf{6.32} 2\pi i \quad \mathbf{6.33} 4\pi i \quad \mathbf{6.34} \\
\pi i/4 \quad \mathbf{6.35} 2\pi \quad \mathbf{6.36} -2\pi i e^\pi \quad \mathbf{6.37} -4\pi^2 i \quad \mathbf{6.38} -2\pi^2 i e^{-\pi} \quad \mathbf{6.39} 4\pi^2 i(1-\pi) \\
\mathbf{6.40} -9i/8 \quad \mathbf{6.41} -4i \quad \mathbf{6.42} 4i/\pi \quad \mathbf{6.43} 2\pi i(e-1) \quad \mathbf{6.44} -i/3 \quad \mathbf{6.45} 2i \quad \mathbf{6.46} \\
\ln 2 \quad \mathbf{6.47} i \quad \mathbf{6.48} -2i \quad \mathbf{6.49} -6i \quad \mathbf{6.50} 3i \quad \mathbf{6.51} 2\sqrt{2}\pi i \quad \mathbf{6.52} -1 \quad \mathbf{6.53} -1 \quad \mathbf{6.54} \\
-3\pi i/4 \quad \mathbf{6.55} 4i \quad \mathbf{6.56} 4\pi^2 i/9 \quad \mathbf{6.57} 0 \quad \mathbf{6.58} -2\pi^3(\pi+1)^2 \quad \mathbf{6.59} -8i \quad \mathbf{6.60} -2i \\
\mathbf{6.61} 2\pi^4 i \quad \mathbf{6.62} \frac{3\pi i}{2 \operatorname{sh}(2/3)} \quad \mathbf{6.63} 9i \quad \mathbf{6.64} 3\pi i \quad \mathbf{6.65} 24i \quad \mathbf{6.66} 16713\pi i/10240 \\
\mathbf{6.67} -\pi i/4 \quad \mathbf{6.68} 4i \quad \mathbf{6.69} 4i \quad \mathbf{6.70} 2i \quad \mathbf{6.71} 9\pi i \quad \mathbf{6.72} 8i/3 \quad \mathbf{6.73} 18\pi i \quad \mathbf{6.74} \\
16\pi i \quad \mathbf{6.75} 12\pi^2 i \quad \mathbf{6.76} 8\pi i \quad \mathbf{6.77} 9i/\pi^2 \quad \mathbf{6.78} 3\pi i \quad \mathbf{6.79} 5\pi \quad \mathbf{6.80} -7\pi i/5 \quad \mathbf{6.81} \\
-18\pi \quad \mathbf{6.82} 5\pi i \quad \mathbf{6.83} 9\pi i \quad \mathbf{6.84} 4i \quad \mathbf{6.85} 24\pi i \quad \mathbf{6.86} 2i \quad \mathbf{6.87} i/\pi \quad \mathbf{6.88} 2\pi \\
\mathbf{6.89} 10i \quad \mathbf{6.90} \pi i \quad \mathbf{6.91} 2 \quad \mathbf{6.92} 3i \quad \mathbf{6.93} 4 \quad \mathbf{6.94} \frac{5\pi}{12} \quad \mathbf{6.95} -\frac{\pi}{16} \quad \mathbf{6.96} \frac{3\pi}{4\sqrt{2}} \\
\mathbf{6.97} \frac{\pi}{288} \quad \mathbf{6.98} \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} \quad \mathbf{6.99} \frac{2\pi}{675} \quad \mathbf{6.100} \frac{\pi}{12} \quad \mathbf{6.101} \frac{7\pi}{1200} \quad \mathbf{6.102} \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \quad \mathbf{6.103} \\
\frac{5\pi}{6\sqrt{309+126\sqrt{6}}} \quad \mathbf{6.104} \frac{5\pi}{96} \quad \mathbf{6.105} \frac{8\pi}{3\sqrt{3}} \quad \mathbf{6.106} \frac{7\pi}{27} \quad \mathbf{6.107} \frac{\pi}{2\sqrt{5}} \quad \mathbf{6.108} \frac{\pi}{9} \\
\mathbf{6.109} \pi \sqrt{\frac{35}{5}-12\sqrt{6}} \quad \mathbf{6.110} \frac{3\pi}{8} \quad \mathbf{6.111} 2\pi \quad \mathbf{6.112} \frac{3\pi}{80\sqrt{5}} \quad \mathbf{6.113} \frac{\pi}{6} \sqrt{2\sqrt{3}-3}
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{l}
\mathbf{6.114} \frac{13\pi}{54} \quad \mathbf{6.115} \frac{35\pi}{128} \quad \mathbf{6.116} \frac{3\pi}{640\sqrt{10}} \quad \mathbf{6.117} 8\pi \quad \mathbf{6.118} \frac{7\pi}{8} \quad \mathbf{6.119} \frac{5\pi}{16} \quad \mathbf{6.120} \\
\frac{\pi}{720\sqrt{15}} \quad \mathbf{6.121} \pi - \frac{\pi}{\sqrt{3}} \quad \mathbf{6.122} \frac{\pi}{16} \quad \mathbf{6.123} \frac{\pi}{2\sqrt{11}} \quad \mathbf{6.124} \frac{3\pi}{100} \quad \mathbf{6.125} \frac{3\pi}{8e^6} \quad \mathbf{6.126} \\
\frac{\pi}{6e^3} \quad \mathbf{6.127} \frac{3\pi}{2e^2} \quad \mathbf{6.128} 0 \quad \mathbf{6.129} \pi \left(\frac{e^{-\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} - \frac{e^{-\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} \right) \quad \mathbf{6.130} \frac{(e-1)\pi}{8e^{3/2}} \quad \mathbf{6.131} \\
\frac{2\pi}{e^2} - \frac{\pi e^{-2\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} \quad \mathbf{6.132} \frac{-3\pi}{2\sqrt{e}} \quad \mathbf{6.133} \left(e^{-\sqrt{5}} - \frac{1}{e^2} \right) \pi \quad \mathbf{6.134} \frac{\pi}{e} (\cos 1 - \sin 1) \quad \mathbf{6.135} \\
\frac{\pi}{2e^4} \quad \mathbf{6.136} \frac{\pi}{18e^{10}} (1 + 16e^5) \quad \mathbf{6.138} \pi \cos 2e^{-2} \quad \mathbf{6.139} \frac{\pi}{2e} \quad \mathbf{6.140} 4\pi e^{-1} \quad \mathbf{6.141} \\
\frac{7\pi}{16e} \quad \mathbf{6.142} \frac{(4e-3)\pi}{168e^4} \quad \mathbf{6.143} \frac{\pi(\sin 1 + 3\cos 1)}{3e^3} \quad \mathbf{6.144} \frac{\pi(\cos 1 - 3\sin 1)}{3e^3} \quad \mathbf{6.145} \\
\frac{\pi}{2e} \quad \mathbf{6.146} \frac{4}{9}(3 + \sqrt{3})e^{-\sqrt{3}}\pi \sin 1 \quad \mathbf{6.147} \frac{2}{9}e^{-\sqrt{3}}\pi((3 + \sqrt{3})\cos 1 - 3\sqrt{3}\sin 1) \\
\mathbf{6.148} \frac{(4e-1)\pi}{3e^2} \quad \mathbf{6.149} \frac{(3-e^2)\pi}{8e^3} \quad \mathbf{6.150} \frac{(2e-1)\pi}{6e^2} \quad \mathbf{6.151} \frac{(9-4e)\pi}{5e^3} \quad \mathbf{6.152} \\
\frac{(3-2e)\pi}{2e^2} \quad \mathbf{6.153} \frac{(e-1)\pi}{5e^3} \quad \mathbf{6.154} \frac{(3-2e)\pi}{5e^3} \quad \mathbf{6.155} \frac{(4-3e)\pi}{2e^3}
\end{array}$$

Библиографический список

1. *Евграфов, М.А.* Аналитические функции / М.А. Евграфов. — М.: Наука, 1991. — 447 с.
2. *Лаврентьев, М.А.* Методы теории функций комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. — М.: Наука, 1987. — 688 с.
3. *Маркушевич, А.И.* Теория аналитических функций. Т. 1 (2) / А.И. Маркушевич. — М.: Наука, 1967 (1968). — 486 с. (624 с.)
4. *Сидоров, Ю.В.* Лекции по теории функций комплексного переменного / Ю.В. Сидоров, М.В. Федорюк, М.И. Шабунин. — М.: Наука, 1989. — 478 с.
5. *Чудесенко, В.Ф.* Сборник задач по специальным курсам высшей математики / В.Ф. Чудесенко. — М.: Высшая школа, 1999. — 126 с.

Учебное издание

**Пазий Наталья Дмитриевна,
Сагадеева Минзиля Алмасовна**

**ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ
КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО**

Учебное пособие

Техн. редактор *А.В. Миних*

Издательский центр Южно-Уральского государственного университета

Подписано в печать 15.05.2015. Формат 60×84 1/16. Печать цифровая.
Усл. печ. л. 6,04. Тираж 30 экз. Заказ 196/346.

Отпечатано в типографии Издательского центра ЮУрГУ.
454080, г. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76.