# Рабочая программа дисциплины (модуля)*

Методы оптимизации

Направление подготовки (специальность)

01.03.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль)

Прикладная математика и искусственный интеллект

Присваиваемая квалификация (степень)

бакалавр

Форма обучения

очная

Год набора 2025

*Рабочая программа дисциплины (модуля) адаптирована для инклюзивного обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья

Челябинск 2025 г.

# Содержание

## 1. ЦЕЛИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Цель дисциплины «Методы оптимизации» состоит в выработке у студентов навыков формализации задач, возникающих в различных предметных областях, овладение студентами теоретическими знаниями и навыками применения конкретных методов оптимизации, освоение студентами алгоритмов, реализующих конкретные оптимизационные методы. К задачам дисциплины относятся: формирование навыков анализа оптимизационных задач (определения типа задачи и возможных методов и алгоритмов ее решения); получение навыков аналитического решения различных экстремальных задач; формирование навыков программной реализации численных методов для решения экстремальных задач. Изучение дисциплины направлено на развитие следующих индикаторов

ОПК-2.1. Имеет представление о существующих базовых математических методах и системах программирования, применяемых для разработки и реализации алгоритмов решения прикладных задач

ОПК-2.2. Демонстрирует умение применять математические методы и системы программирования для решения прикладных задач

ОПК-2.3. Имеет навыки разработки и применения алгоритмических и программных решений

ОПК-3.1. Имеет представление об известных математических моделях, применяемых для решения задач в области профессиональной деятельности

ОПК-3.2. Демонстрирует умения применять и модифицировать математические модели для решения прикладных задач

ОПК-3.3. Имеет практический опыт применения и выполнения модификаций математических моделей для решения прикладных задач

## 2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОПОП

| | |
|---|---|
| Цикл (раздел) ОПОП: | Б1.О.11 |

**2.1 Требования к предварительной подготовке обучающегося:**

Знает: классические численные методы решения задач вычислительной математики; Умеет: оценивать сложность и эффективность численных методов, применяемых в решении профессиональных задач; Имеет практический опыт: разработки и анализа математических моделей и алгоритмов решения задач вычислительной математики

Численные методы

**2.2 Дисциплины и практики, для которых освоение данной дисциплины (модуля) необходимо как предшествующее:**

## 3. КОМПЕТЕНЦИИ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

**ОПК-2: Способен использовать и адаптировать существующие математические методы и системы программирования для разработки и реализации алгоритмов решения прикладных задач**

**Знать:**

Для достижения ОПК-2.1.: иметь первоначальные знания об основах математического моделирования и систем программирования, полезных для решения задач своей научно-исследовательской работы.

**Уметь:**

Для достижения ОПК-2.2.: уметь сформулировать задачи, необходимые для выполнения этапов научно- исследовательской работы, и выбрать основные системы программирования для решения этих задач.

**Владеть:**

Для достижения ОПК-2.3.: Владеть базовыми навыками разработки алгоритма и его компьютерной реализации.

**ОПК-3: Способен применять и модифицировать математические модели для решения задач в области профессиональной деятельности**

**Знать:**

Для достижения ОПК-3.1.: иметь первоначальные знания о стандартных математических моделях из области своей научно-исследовательской работы.

**Уметь:**

Для достижения ОПК-3.2.: уметь грамотно использовать стандартные математические модели и предлагать варианты их улучшения.

**Владеть:**

Для достижения ОПК-3.3.: владеть первоначальными навыками построения и анализа математической модели при решении задач своей научно-исследовательской работы.

**В результате освоения дисциплины обучающийся должен**

| | |
|---|---|
| **3.1** | **Знать:** |
| 3.1.1 | методы оптимизации решений конкретных задач, с учётом имеющихся ограничений; принципы моделирования экономических, экологических, социальных, технических задач в форме задач оптимизации |
| **3.2** | **Уметь:** |
| 3.2.1 | проектировать решение задачи, выбирая оптимальный способ её решения; применять методы оптимизации в математическом моделировании интеллектуальных систем |
| **3.3** | **Владеть:** |
| 3.3.1 | анализа альтернативных вариантов решений для достижения оптимальных результатов; моделирования социальных задач и производственных процессов |

## 4. ОБЪЕМ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

| | |
|---|---|
| Общая трудоемкость | **4 ЗЕТ** |
| Часов по учебному плану : 144<br>в том числе :<br>аудиторные занятия : 66<br>самостоятельная работа : 40,2<br>часов на контроль : 27<br>контактная работа: 76,8<br>ИКР: 10,8 | Виды контроля в семестрах:<br><br>экзамены 5 |

## 5. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

| Код занятия | Наименование разделов и тем /вид занятия/ | Семестр / Курс | Часов | Литература |
|---|---|---|---|---|
| | **Раздел 1. Выпуклые множества** | | | |
| 1.1 | Определение выпуклого множества. Свойства выпуклых множеств. Выпуклая комбинация точек. Теорема о выпуклой комбинации точек /Лек/ | 5 | 4 | Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2Л3.1 |
| 1.2 | Доказательство выпуклости множеств. Изучение свойств выпуклых множеств /Пр/ | 5 | 2 | Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 |
| | **Раздел 2. Выпуклые функции** | | | |
| 2.1 | Определение выпуклой функции. Свойства выпуклых функций. Критерии выпуклости функции в пространстве R. Критерии выпуклости функции в пространстве Rn. /Лек/ | 5 | 4 | Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 |
| 2.2 | Доказательство выпуклости функций. Изучение свойств выпуклых функций /Пр/ | 5 | 2 | Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 |
| 2.3 | Контрольная работа 1 /Пр/ | 5 | 1 | Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 |
| 2.4 | Подготовка к контрольным работам /Ср/ | 5 | 10 | Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 |
| | **Раздел 3. Задачи безусловной оптимизации** | | | |
| 3.1 | Гладкие конечномерные задачи безусловной оптимизации /Лек/ | 5 | 4 | Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 |
| 3.2 | Гладкие конечномерные задачи безусловной оптимизации /Пр/ | 5 | 2 | Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 |
| | **Раздел 4. Задачи условной оптимизации** | | | |
| 4.1 | Гладкие конечномерные задачи оптимизации с ограничениями типа равенств /Лек/ | 5 | 4 | Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 4.2 | Гладкие конечномерные задачи оптимизации со смешанными ограничениями /Лек/ | 5 | 4 | Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 |
| 4.3 | Задачи выпуклого программирования и теорема Куна - Таккера /Лек/ | 5 | 4 | Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 |
| 4.4 | Гладкие конечномерные задачи с ограничениями типа равенств /Пр/ | 5 | 2 | Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 |
| 4.5 | Гладкие конечномерные задачи со смешанными ограничениями /Пр/ | 5 | 4 | Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 |
| 4.6 | Решение задач выпуклого программирования /Пр/ | 5 | 2 | Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 |
| 4.7 | Контрольная работа 2 /Пр/ | 5 | 1 | Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 |
| 4.8 | Подготовка к контрольным работам /Ср/ | 5 | 5,5 | Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 |
| | **Раздел 5. Численные методы безусловной оптимизации** | | | |
| 5.1 | Градиентные методы поиска минимума функции многих переменных: градиентный метод с постоянным шагом, градиентный метод с дроблением шага, метод наискорейшего спуска /Лек/ | 5 | 2 | Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 |
| 5.2 | Метод сопряженных градиентов /Лек/ | 5 | 2 | Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 |
| 5.3 | Метод Ньютона /Лек/ | 5 | 2 | Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 |
| 5.4 | Методы одномерной оптимизации: метод дихотомии, метод деления отрезка пополам /Лаб/ | 5 | 2 | Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 |
| 5.5 | Методы одномерной оптимизации: метод золотого сечения, метод Фибоначчи /Лаб/ | 5 | 2 | Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 |
| 5.6 | Градиентный метод с дроблением шага /Лаб/ | 5 | 2 | Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 |
| 5.7 | Метод наискорейшего спуска /Лаб/ | 5 | 2 | Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 |
| 5.8 | Метод сопряженных градиентов /Лаб/ | 5 | 2 | Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 |
| 5.9 | Метод Ньютона /Лаб/ | 5 | 2 | Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 |
| 5.10 | Квазиньютоновские методы /Лаб/ | 5 | 4 | Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 |
| 5.11 | Подготовка к лабораторным работам /Ср/ | 5 | 4,7 | Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 |
| | **Раздел 6. Метаэвристические методы оптимизации** | | | |
| 6.1 | Понятие метаэвристических алгоритмов. Эволюционные методы оптимизации. /Лек/ | 5 | 2 | Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 |
| 6.2 | Методы «роевого интеллекта». Методы, копирующие физические процессы /Лек/ | 5 | 2 | Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 |
| | **Раздел 7. Иная контактная работа** | | | |
| 7.1 | Консультации и промежуточная аттестация /ИКР/ | 5 | 10,8 | Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 |
| | **Раздел 8. Экзамен** | | | |
| 8.1 | Подготовка к экзамену /Ср/ | 5 | 20 | Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 |

## 6. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

### 6.1. Перечень видов оценочных средств

Лабораторные работы 1 - 7
Контрольные работы 1 - 2

Активная познавательная деятельность
Экзамен

**6.2. Типовые контрольные задания и иные материалы для текущей аттестации**

Типовые задания для лабораторных и контрольных работ: см. приложение.

**6.3. Типовые контрольные вопросы и задания для промежуточной аттестации**

Вопросы к экзамену: см. приложение

**6.4. Критерии оценивания**

Порядок начисления баллов за лабораторные работы: Получена программа реализации решения задачи, программа работает корректно - 3 балла. Получена программа реализации решения задачи, программа работает корректно, студент может пояснить порядок получения результатов, расчетов и графиков - 5 баллов. Получена программа реализации решения задачи, программа работает корректно; студент может пояснить порядок получения результатов, расчетов и графиков; результаты работы и выводы оформлены в соответствии с указаниями - 7 баллов. В остальных случаях баллы не начисляются
Контрольная работа 1 состоит из 4 заданий, за каждое из которых студент может получить от 0 до 2 баллов: 2 балла - задача решена верно, получен правильный ответ; 1 балл - задача, в целом, решена верно, но имеются незначительные ошибки; 0 баллов - в остальных случаях.
Контрольная работа 2 состоит из 2 заданий, за каждое из которых студент может получить от 0 до 3 баллов: 3 балла - задача решена верно, получен правильный ответ; 1 балл - задача, в целом, решена верно, но имеются незначительные ошибки; 0 баллов - в остальных случаях.
На каждой лекции студент может получить 1 балл: студент правильно отвечает на вопросы по изучаемому материалу - 1 балл. В противном случае баллы не начисляются.
На практических занятиях №1-7 студент может получить по 3 балла: студент задает вопросы по изучаемому материалу или решает задачу у доски- 2 балл; студент правильно отвечает на вопросы по изучаемому материалу - 1 балл. В противном случае баллы не начисляются
На экзамене студент отвечает на билет, который содержит 2 теоретических вопроса. При необходимости студенту могут быть заданы дополнительные вопросы по заданиям. Продолжительность экзамена – 60 минут. Максимальный балл за ответ на теоретический вопрос 3 балла. 3 балла - ответ структурирован, приведен анализ положений существующих теорий по вопросу билета, студент логично и доказательно раскрывает проблему, предложенную в билете, ответ не содержит фактических ошибок и характеризуется глубиной, полнотой; 2 балла - ответ имеет достаточный содержательный уровень, однако отличается слабой структурированностью, раскрыто содержание билета, имеются неточности при ответе; 1 балл - ответ имеет фрагментарный характер, отличается поверхностностью и малой содержательностью, имеются неточности при ответе на основные вопросы билета, материал в основном излагается, но допущены фактические ошибки; 0 баллов - допускаются существенные фактические ошибки при ответе, на большую часть дополнительных вопросов по содержанию экзамена; студент затрудняется дать ответ или не дает верных ответов.
Оценка за дисциплину формируется на основе полученных оценок за контрольно-рейтинговые мероприятия текущего контроля. 91 - 100 баллов соответствует оценке "отлично", 71 - 90 баллов соответствует оценке "хорошо", 51 - 70 баллов соответствует оценке "удовлетворительно", 0 - 50 баллов соответствует оценке "неудовлетворительно". Студент может повысить свой рейтинг, пройдя контрольное мероприятие промежуточной аттестации. Студент выбирает случайный билет, содержащий два теоретических вопроса. Студенту предоставляется не более 60 минут на подготовку ответа. По истечении этого времени студент отвечает экзаменатору вопросы билета. Фиксация результатов учебной деятельности по дисциплине проводится в день экзамена при личном присутствии студента.

## 7. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

### 7.1. Рекомендуемая литература

#### 7.1.1. Основная литература

| | Авторы, составители | Заглавие | Издательство, год | Ресурс |
|---|---|---|---|---|
| Л1.1 | Пантелеев А. В., Летова Т. А. | Методы оптимизации в примерах и задачах (https://e.lanbook.com/book/212129) | Санкт- Петербург : Лань, 2022 | ЭБС |
| Л1.2 | Лесин В. В., Лисовец Ю. П. | Основы методов оптимизации (https://e.lanbook.com/book/221324) | Санкт- Петербург : Лань, 2022 | ЭБС |

| | Авторы, составители | Заглавие | Издательство, год | Ресурс |
|---|---|---|---|---|
| Л1.3 | Ржевский С. В. | Математическое программирование: учебное пособие (https://e.lanbook.com/book/206993) | Санкт- Петербург : Лань, 2022 | ЭБС |

**7.1.2. Дополнительная литература**

| | Авторы, составители | Заглавие | Издательство, год | Ресурс |
|---|---|---|---|---|
| Л2.1 | Мицель А. А. | Методы оптимизации: учебное пособие (https://e.lanbook.com/book/110214) | Москва : ТУСУР, 2017 | ЭБС |
| Л2.2 | Мицель А. А., Шелестов А. А., Романенко В. В. | Методы оптимизации: учебное пособие (https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=481034) | Томск : ТУСУР, 2017 | ЭБС |

**7.1.3. Методические разработки**

| | Авторы, составители | Заглавие | Издательство, год | Ресурс |
|---|---|---|---|---|
| Л3.1 | Ухоботов В. И., Изместьев И. В. | Избранные главы теории экстремальных задач: учебное пособие | Челябинск : Издательство Челябинского государственног о университета, 2020 | |

**7.3 Перечень информационных технологий**

**7.3.1 Программное обеспечение**

Visual Studio

LMS Moodle

**7.3.2 Профессиональные базы данных и информационно-справочные системы**

## 8. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Основное оборудование, стенды, макеты, компьютерная техника, предустановленное программное обеспечение, используемое для лабораторных работ: Персональные компьютеры с установленным ПО

## 9. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

см. приложение

## 10. СПЕЦИАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ ОБУЧАЮЩИМИСЯ С ИНВАЛИДНОСТЬЮ И ОГРАНИЧЕННЫМИ ВОЗМОЖНОСТЯМИ ЗДОРОВЬЯ

Освоение дисциплины инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья осуществляется с использованием специальных технических средств и информационных технологий, предоставляемых Ресурсным учебно-методическим центром по обучению инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья ЧелГУ по запросу обучающегося (мобильные специальные технические средства для лиц с нарушениями зрения и с нарушением слуха, ассистивные информационные технологии).

При необходимости для обучающихся с нарушениями зрения на рабочих местах для проведения практических или лабораторных занятий устанавливается специальное программное обеспечение (программа речевой навигации, речевые синтезаторы, экранные лупы).

В учебные аудитории обеспечивается беспрепятственный доступ для обучающихся с инвалидностью и с ограниченными возможностями здоровья. В каждой аудитории, где обучаются инвалиды и лица с ограниченными возможностями здоровья, предусматривается соответствующее количество мест для обучающихся с учетом нарушений их здоровья.

Для освоения дисциплины инвалидам и лицам с ограниченными возможностями здоровья предоставляется доступ к печатным источникам, имеющимся в научной библиотеке ЧелГУ, с помощью специальных технических средств; доступ с помощью специальных технических и программных средств к электронным источникам, представленным в форме электронного документа в фонде научной библиотеки ЧелГУ или электронно-библиотечных системах.

Учебно-методические материалы для обучающихся из числа инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья предоставляются в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и особенностям восприятия информации.

Для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья освоение дисциплины может быть частично или полностью осуществлено с использованием дистанционных образовательных технологий.

При проведении промежуточной аттестации по дисциплине обучающимся с инвалидностью и с ограниченными возможностями здоровья обеспечивается по их заявлению предоставление в доступной форме в зависимости от их индивидуальных особенностей инструкции о порядке проведения промежуточной аттестации, оценочных средств и возможности ответов на задания (письменно на бумаге, набор ответов на компьютере, письменно шрифтом Брайля, с использованием услуг ассистента, устно).

При проведении процедуры оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья предусматривается использование предоставленных ЧелГУ или собственных технических средств, необходимых им в связи с их индивидуальными особенностями. При необходимости инвалидам и лицам с ограниченными возможностями здоровья предоставляется дополнительное время для подготовки ответа на задания, процедура оценивания результатов обучения по дисциплине может проводиться в несколько этапов.

**Лабораторная работа 1. Методы одномерной оптимизации: метод дихотомии, метод деления отрезка пополам.**

Рассматривается задача минимизации унимодальной функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ на отрезке $[a,b]$:

$$f(x)\to\min,\quad x\in[a,b]. \tag{1.1}$$

**Определение.** Функция $f(x)$ называется ***унимодальной***, если существует такое $x_*$, что из неравенств $x_*<x_1<x_2$ следует

$$f(x_*)<f(x_1)<f(x_2),$$

а из неравенств $x_1<x_2<x_*$ следует

$$f(x_*)<f(x_2)<f(x_1).$$

Другими словами, слева от $x_*$ функция $f(x)$ монотонно убывает, а справа монотонно возрастает. Таким образом, $x_*$ является единственной точкой минимума функции $f(x)$.

Унимодальные функции обладают следующим свойством: если взять $x,y\in(a,b)$ такие, что $x<y$, то

$$x_*\in\begin{cases}[a,y], & \text{если}\quad f(x)<f(y),\\ [x,b], & \text{если}\quad f(x)\ge f(y).\end{cases} \tag{1.2}$$

Отрезок, содержащий точку минимума, называется ее *отрезком локализации*. Из (1.2) следует, что для уменьшения отрезка локализации точки минимума унимодальной функции достаточно сравнить ее значения в двух внутренних точках этого отрезка.

**Алгоритм последовательного сжатия отрезка локализации.**

Положим $[a_1,b_1]=[a,b]$ и для $k=1,2,\ldots$ построим отрезки $[a_{k+1},b_{k+1}]$ следующим образом

$$[a_{k+1},b_{k+1}]=\begin{cases}[a_k,y_k], & \text{если}\quad f(x_k)<f(y_k),\\ [x_k,b_k], & \text{если}\quad f(x_k)\ge f(y_k).\end{cases}$$

Здесь $x_k<y_k$ – внутренние точки отрезка $[a_k,b_k]$, которые выбираются на каждой итерации согласно некоторому правилу. Процедура сжатия отрезка локализации заканчивается при выполнении условия $b_k-a_k\le\varepsilon$, где $\varepsilon>0$ – заданная точность решения задачи (1.1), а в качестве приближенного решения задачи (1.1) берется середина последнего отрезка локализации.

Все последующие методы в лабораторных работах 1 и 2 будут включать в себя алгоритм последовательного сжатия отрезка локализации, отличаясь лишь правилом выбора точек $x$ и $y$.

### 1.1. Метод дихотомии

Идея метода состоит в вычислении на каждой итерации значений функции $f$ в двух точках, отстоящих на величину $\alpha$ по обе стороны от середины отрезка локализации:

$$x_k=\frac{a_k+b_k}{2}-\alpha, \tag{1.3}$$

$$y_k=\frac{a_k+b_k}{2}+\alpha, \tag{1.4}$$

где $\alpha > 0$ – достаточно малое число, которое называется *константой различимости*, удовлетворяющее следующим свойствам:

- $\alpha$ ограничено снизу погрешностью представления чисел в ЭВМ;
- $2\alpha < \varepsilon$.

АЛГОРИТМ

Шаг 0. Задать точность $\varepsilon > 0$, константу различимости $\alpha > 0$, концы отрезка локализации $a_1 = a$ и $b_1 = b$, номер итерации k=1.

Шаг 1. Если $b_k - a_k \le \varepsilon$, то вычислить $x_* = \dfrac{a_k + b_k}{2}$ и закончить поиск ($x_*$ – решение задачи минимизации). Иначе: вычислить $x_k$, $y_k$ по формулам (1.3) и (1.4); затем вычислить $f(x_k)$ и $f(y_k)$.

Шаг 2. Если $f(x_k) > f(y_k)$, то $a_{k+1} = x_k$, $b_{k+1} = b_k$; если $f(x_k) \le f(y_k)$, то $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = y_k$.

Шаг 3. k:=k+1 и перейти к шагу 1.

### 1.2. Метод деления отрезка пополам

На каждой итерации отрезок локализации делится на две половины. Значения функции $f(x)$ вычисляются в двух точках, которые являются серединами левого и правого отрезков:

$$x_k = a_k + \frac{b_k - a_k}{4}, \tag{1.5}$$

$$y_k = b_k - \frac{b_k - a_k}{4}. \tag{1.6}$$

АЛГОРИТМ

Шаг 0. Задать точность $\varepsilon > 0$, концы отрезка локализации $a_1 = a$ и $b_1 = b$, номер итерации k=1.

Вычислить середину отрезка $c_1 = \dfrac{a + b}{2}$ и $f(c_1)$.

Шаг 1. Если $b_k - a_k \le \varepsilon$, то закончить поиск ($c_k$ – решение задачи минимизации). Иначе: вычислить $x_k$, $y_k$ по формулам (1.5) и (1.6); затем вычислить $f(x_k)$ и $f(y_k)$.

Шаг 2. Если $f(x_k) < f(c_k)$, то $b_{k+1} = c_k$, $a_{k+1} = a_k$, $c_{k+1} = x_k$, $f(c_{k+1}) = f(x_k)$ и перейти к шагу 5; иначе перейти к шагу 3.

Шаг 3. Если $f(y_k) < f(c_k)$, то $a_{k+1} = c_k$, $b_{k+1} = b_k$, $c_{k+1} = y_k$, $f(c_{k+1}) = f(y_k)$ и перейти к шагу 5; иначе перейти к шагу 4.

Шаг 4. Положить $a_{k+1} = x_k$, $b_{k+1} = y_k$, $c_{k+1} = c_k$, $f(c_{k+1}) = f(c_k)$ и перейти к шагу 5.

Шаг 5. k:=k+1 и перейти к шагу 1.

### 1.3. Задание

Найти точку минимума функции $f(x)$ (в соответствии со своим вариантом) на отрезке $[a,b]$ с точностью $\varepsilon = 0.01$ с помощью метода дихотомии и метода деления отрезка пополам (реализовать методы в виде программ для ЭВМ).

**Вариант 1.** $f(x) = \max\{x; |x-1|\} + x^2$, $[a,b] = [-2,2]$.

**Вариант 2.** $f(x) = \max\{x^2+1; 2|x+1|\}$, $[a,b] = [-4,3]$.

**Вариант 3.** $f(x) = \sin x + x^2$, $[a,b] = [-3,0]$.

**Вариант 4.** $f(x) = e^{x^2} + |x+1|$, $[a,b] = [-2,2]$.

**Вариант 5.** $f(x) = \sin(x+1) + |x|$, $[a,b] = [-2,2]$.

**Вариант 6.** $f(x) = \cos(x-1) + |x|$, $[a,b] = [-2,2]$.

**Вариант 7.** $f(x) = \max\{x; \sin x\}$, $[a,b] = [-3,1]$.

**Вариант 8.** $f(x) = \max\{x^2; |x-1|\}$, $[a,b] = [-3,3]$.

**Вариант 9.** $f(x) = |\sin(0.25x^2) + 1|$, $[a,b] = [3,5]$.

**Вариант 10.** $f(x) = |x-3| + |x+2| + |x+1|$, $[a,b] = [-3,4]$.

**Вариант 11.** $f(x) = 2x + |x+1| + 2|x-2|$ $[a,b] = [-3,3]$.

**Вариант 12.** $f(x) = |x+4| + x^2 + 10x + 15$, $[a,b] = [-7,-3]$.

**Вариант 13.** $f(x) = \max\{|x|+1; x^2+4x+4\}$, $[a,b] = [-5,3]$.

**Вариант 14.** $f(x) = |\mathrm{tg}(x+1)| + x^2$, $[a,b] = [-2,0]$.

**Вариант 15.** $f(x) = \max\{\mathrm{tg}\, x; |x-1|\}$, $[a,b] = [-1,1]$.

**Вариант 16.** $f(x) = e^{x^2+x} + e^{x^2+1}$, $[a,b] = [-1,1]$.

**Вариант 17.** $f(x) = (x-1)^4 + x^2$, $[a,b] = [-1,2]$.

**Вариант 18.** $f(x) = e^{x^2-2x+1} + x^4$, $[a,b] = [0,2]$.

**Вариант 19.** $f(x) = \max\{\mathrm{tg}\, x; (x-1)^2\}$, $[a,b] = [-1,1]$.

**Вариант 20.** $f(x) = |\mathrm{tg}(0.1x^2+1)| + x$, $[a,b] = [-2,0]$.

**Лабораторная работа 2. Методы одномерной оптимизации: метод золотого сечения, метод Фибоначчи.**

**2.1. Метод золотого сечения**

**Определение 1.** Делением отрезка в отношении *золотого сечения* называется деление его на две неравные части так, чтобы отношение длины всего отрезка к длине его бо́льшей части было равно отношению длины бо́льшей части отрезка к длине его меньшей части.

При делении отрезка единичной длины в отношении золотого сечения длина большей части равна

$$\tau = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0,61803... .$$

В *методе золотого сечения* в качестве пробных точек $x_k$ и $y_k$ на каждом шаге выбираются точки, делящие отрезок в отношении золотого сечения $[a_k, b_k]$:

$$x_k = a_k + (1-\tau)(b_k - a_k), \tag{2.1}$$

$$y_k = a_k + \tau(b_k - a_k). \tag{2.2}$$

В методе используется следующее замечательное свойство золотого сечения: точка $x_k$ является одной из точек, задающих золотое сечение отрезка $[a_k, y_k]$, а точка $y_k$ является одной из точек, задающих золотое сечение отрезка $[x_k, b_k]$. Можно показать, что $x_{k+1} = y_k$ или $y_{k+1} = x_k$. Это означает, что в одной из двух пробных точек ($x_{k+1}$ или $y_{k+1}$) значение функции $f(x)$ уже вычислено на предыдущей итерации. Следовательно, при всех итерациях (кроме начальной) для сжатия отрезка локализации достаточно вычислить значение функции $f(x)$ **в одной точке**.

АЛГОРИТМ

Шаг 0. Задать точность $\varepsilon > 0$, концы отрезка локализации $a_1 = a$ и $b_1 = b$, номер итерации k=1. Вычислить $x_1$, $y_1$ по формулам (2.1) и (2.2). Затем вычислить $f(x_1)$, $f(y_1)$.

Шаг 1. Если $b_k - a_k \le \varepsilon$, то вычислить $x^* = \dfrac{a_k + b_k}{2}$ и закончить поиск ($x^*$– решение задачи минимизации). Иначе: если $f(x_k) > f(y_k)$, то перейти к шагу 2; если $f(x_k) \le f(y_k)$, то перейти к шагу 3.

Шаг 2. Положить $a_{k+1} = x_k$, $b_{k+1} = b_k$, $x_{k+1} = y_k$ и $f(x_{k+1}) = f(y_k)$. Затем вычислить $y_{k+1} = a_{k+1} + \tau(b_{k+1} - a_{k+1})$, $f(y_{k+1})$ и перейти к шагу 4.

Шаг 3. Положить $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = y_k$, $y_{k+1} = x_k$ и $f(y_{k+1}) = f(x_k)$. Затем вычислить $x_{k+1} = a_{k+1} + (1-\tau)(b_{k+1} - a_{k+1})$, $f(x_{k+1})$ и перейти к шагу 4.

Шаг 4. k:=k+1 и перейти к шагу 1.

**2.2. Метод Фибоначчи**

Метод аналогичен методу золотого сечения. Отличие состоит в том, что параметр $\tau$ определяется на каждой итерации как дробь, где числитель и знаменатель берутся из последовательности Фибоначчи.

**Определение 2.** *Последовательностью Фибоначчи* называется последовательность чисел, удовлетворяющая рекуррентному соотношению

$$F_0 = F_1 = 1, \quad F_{k+1} = F_k + F_{k-1}, \quad k = 1, 2, ...$$

Значения функции $f(x)$ вычисляются в точках, которые задаются формулами

$$x_k = a_k + \frac{F_{n-k-1}}{F_{n-k+1}}(b_k - a_k), \tag{2.3}$$

$$y_k = a_k + \frac{F_{n-k}}{F_{n-k+1}}(b_k - a_k), \tag{2.4}$$

где $k=1,...,n-1$. Здесь число n – необходимое количество итераций, которое выбирается до начала вычислений и обусловлено требуемой точностью $\varepsilon$:

$$n=\min\left\{k\in\mathbb{N}:\varepsilon\ge\frac{b_1-a_1}{F_k}\right\}.$$

Заметим также, что $F_{n-k+1}=F_{n-k}+F_{n-k-1}$, а, следовательно,

$$\frac{F_{n-k-1}}{F_{n-k+1}}+\frac{F_{n-k}}{F_{n-k+1}}=1.$$

АЛГОРИТМ

Шаг 0. Задать точность $\varepsilon>0$, константу различимости $\alpha>0$, концы отрезка локализации $a_1=a$ и $b_1=b$, номер итерации k=1. Вычислить $x_1$, $y_1$ по формулам (2.3) и (2.4). Затем вычислить $f(x_1)$, $f(y_1)$. Найти количество итераций n.

Шаг 1. Если $k<n-1$, то перейти к шагу 2; иначе перейти к шагу 6.

Шаг 2. Если $f(x_k)>f(y_k)$, то перейти к шагу 3; иначе перейти к шагу 4.

Шаг 3. Положить $a_{k+1}=x_k$, $b_{k+1}=b_k$, $x_{k+1}=y_k$, $f(x_{k+1})=f(y_k)$. Затем вычислить

$$y_{k+1}=a_{k+1}+\frac{F_{n-k-1}}{F_{n-k}}(b_{k+1}-a_{k+1}),$$

$f(y_{k+1})$ и перейти к шагу 5.

Шаг 4. Положить $a_{k+1}=a_k$, $b_{k+1}=y_k$, $y_{k+1}=x_k$, $f(y_{k+1})=f(x_k)$. Затем вычислить

$$x_{k+1}=a_{k+1}+\frac{F_{n-k-2}}{F_{n-k}}(b_{k+1}-a_{k+1}),$$

$f(x_{k+1})$ и перейти к шагу 5.

Шаг 5. k:=k+1 и перейти к шагу 1.

Шаг 6. Положить $x_n=x_{n-1}$, $y_n=y_{n-1}+\alpha$, вычислить $f(x_n)$ и $f(y_n)$. Если $f(x_n)>f(y_n)$, то $a_n=x_n$ и $b_n=b_{n-1}$; иначе $a_n=a_{n-1}$ и $b_n=y_n$. Решение задачи минимизации – $x^*=\dfrac{a_n+b_n}{2}$.

**Замечание.** В шаге 5 необходима константа различимости $\alpha>0$, т.к. из формул (2.3) и (2.4) следует, что $x_{n-1}=y_{n-1}$.

### 2.3. Задание

Найти точку минимума целевой функции $f(x)$ (в соответствии со своим вариантом из лабораторной работы 1) на отрезке $[a,b]$ с точностью $\varepsilon=0.01$ с помощью метода золотого сечения и метода Фибоначчи (реализовать методы в виде программ для ЭВМ).

**Лабораторная работа 3. Градиентный метод с дроблением шага.**

В данной работе рассматривается метод градиентного спуска решения задачи

$$\min f(\bar{x}), \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n,$$

где $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – непрерывно дифференцируемая функция. Одним из условий остановки итерационного процесса в данном методе является нахождение точки $\bar{x}_* \in \mathbb{R}^n$, для которой $\nabla f(\bar{x}_*) = \bar{0}$ (на практике это условие можно заменить на $\|\nabla f(\bar{x}_*)\| \le \varepsilon$, где $\varepsilon$ – заданная точность). Такие точки $\bar{x}_*$ называются *стационарными*. Если функция $f$ выпукла, то найденная стационарная точка является точкой абсолютного минимума для функции $f$.

**Определение.** Вектор $\bar{p} \in \mathbb{R}^n$ называется направлением спуска дифференцируемой функции $f$ в точке $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, если при всех достаточно малых $\alpha > 0$ верно неравенство $f(\bar{x} + \alpha\bar{p}) < f(\bar{x})$.

**Замечание.** Последнее неравенство означает убывание функции $f$ при смещении аргумента вдоль направления $\bar{p}$.

**Следствие.** Пусть вектор $\bar{p}$ направление спуска функции $f$ в точке $\bar{x}$. Разложим функцию $f$ в окрестности точки $\bar{x}$ по формуле Тейлора:

$$f(\bar{x} + \alpha\bar{p}) = f(\bar{x}) + \alpha\langle \nabla f(\bar{x}), \bar{p} \rangle + o(\alpha) \text{ при } \alpha \to 0.$$

Тогда $\langle \nabla f(\bar{x}), \bar{p} \rangle < 0$.

Направление *антиградиента* $\bar{p} = -\nabla f(\bar{x})$ является направлением *наискорейшего* спуска в любой точке $\bar{x}$, для которой $\nabla f(\bar{x}) \ne \bar{0}$.

АЛГОРИТМ

Шаг 0. Выбрать начальное приближение $\bar{x}_1 \in \mathbb{R}^n$ и величину шага $\alpha > 0$. Задать точность $\varepsilon > 0$, номер итерации k=1.

Шаг 1. Определить шаг $\alpha_k$ (см. пункт 3.1.).

Шаг 2. Положить $\bar{x}_{k+1} = \bar{x}_k - \alpha_k \nabla f(\bar{x}_k)$.

Шаг 3. Проверить условие остановки: если $\|\nabla f(\bar{x}_{k+1})\| > \varepsilon$, то k:=k+1 и перейти к шагу 1, иначе остановиться и принять $\bar{x}_{k+1}$ приближенным решением.

### 3.1. Выбор шага по правилу Армихо

Предположим, что заданы параметры $\gamma \in (0,1)$ и $\theta \in (0,1)$. Следующий алгоритм находит значение шага на k-той итерации (т.е. $\alpha_k$) в предыдущем алгоритме.

АЛГОРИТМ

Шаг 0. Положить значение величины шага $\alpha_k = \alpha$.

Шаг 1. Проверить неравенство

$$f(\bar{x}_k - \alpha_k \nabla f(\bar{x}_k)) - f(\bar{x}_k) \le -\gamma\alpha_k \|\nabla f(\bar{x}_k)\|^2. \tag{3.1}$$

Если неравенство (3.1) выполнено, то завершить работу алгоритма (по определению шага), иначе перейти к шагу 2.

Шаг 2. Произвести дробление шага $\alpha_k := \theta\alpha_k$ и перейти к шагу 1.

### 3.2. Задание

Выбрав некоторое начальное приближение, найти точку минимума функции $f(x)$ (в соответствии со своим вариантом) с точностью $\varepsilon = 0.01$ с помощью градиентного метода с выбором шага по правилу Армихо (реализовать метод в виде программы для ЭВМ).

Проанализировать для своей задачи как выбор параметров $\alpha$, $\gamma$ и $\theta$ влияет на количество итераций в процессе работы программы.

Создать и использовать при реализации метода из данной лабораторной работы класс Point с перегруженными операторами сложения и умножения на число.

**Вариант 1.** $f(x_1,x_2)=2x_1^2+3x_2^4+4x_2+1$.

**Вариант 2.** $f(x_1,x_2)=e^{x_1}+(x_1+x_2)^4+e^{2x_2}$.

**Вариант 3.** $f(x_1,x_2)=e^{2+x_1^2+x_2^2}+x_1+x_2$.

**Вариант 4.** $f(x_1,x_2)=e^{-x_1}+(2x_1-x_2)^2+e^{x_2}$.

**Вариант 5.** $f(x_1,x_2)=e^{x_1}+(x_1-x_2)^2+e^{-2x_2}$.

**Вариант 6.** $f(x_1,x_2)=x_1^2+x_2+1+(x_2-x_1+1)^4+e^{x_2}$.

**Вариант 7.** $f(x_1,x_2)=e^{x_1}+(2x_1-x_2)^2+e^{-2x_2}$.

**Вариант 8.** $f(x_1,x_2)=e^{x_1^2+2x_1}+(x_1+x_2)^2+e^{x_2^2-5x_2}$.

**Вариант 9.** $f(x_1,x_2)=e^{x_1^2-x_1}+2x_1^2+x_2^2+e^{x_2^2+3x_2}$.

**Вариант 10.** $f(x_1,x_2)=e^{x_1^2-2x_1}+x_1^2+x_2^2+e^{x_2^2+3x_2}$.

**Вариант 11.** $f(x_1,x_2)=x_1^2-2x_1+x_2+(x_1-x_2)^4+e^{x_2}$.

**Вариант 12.** $f(x_1,x_2)=e^{x_1}+(x_1^2+x_2^2)^2+e^{-x_2}$.

**Вариант 13.** $f(x_1,x_2)=e^{x_1^2-2x_1}+x_1^4+(x_2-1)^2+e^{x_2^2+3x_2}$.

**Вариант 14.** $f(x_1,x_2)=e^{x_1^2-2x_1+1}+(2x_1-x_2)^2+e^{x_2^2-2x_2}$.

**Вариант 15.** $f(x_1,x_2)=e^{x_1^2+1}+(2x_1-x_2)^2+e^{x_2-1}$.

**Вариант 16.** $f(x_1,x_2)=e^{3x_1}+(x_1+x_2)^2+e^{2x_2}$.

**Вариант 17.** $f(x_1,x_2)=2x_1^4+x_2^2+3x_1+2x_2+5$.

**Вариант 18.** $f(x_1,x_2)=e^{x_1}+(x_1+3x_2)^2+e^{2x_2+1}$.

**Вариант 19.** $f(x_1,x_2)=4x_1^2-8x_1x_2+5x_2^2+x_1$.

**Вариант 20.** $f(x_1,x_2)=x_1^2-2x_1x_2+3x_2^2+x_2$.

## Лабораторная работа 4. Метод наискорейшего спуска.

В данной работе продолжают рассматриваться градиентные методы решения задачи

$$\min f(\overline{x}), \quad \overline{x} \in \mathbb{R}^n,$$

где $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – непрерывно дифференцируемая функция.

Алгоритм, описывающий итерационный процесс, повторяет алгоритм из лабораторной работы 3 во всем, кроме способа определения величины шага $\alpha_k$ на каждой итерации.

АЛГОРИТМ

Шаг 0. Выбрать начальное приближение $\overline{x}_1 \in \mathbb{R}^n$. Задать точность $\varepsilon > 0$, номер итерации k=1.

Шаг 1. Определить шаг $\alpha_k$ (см. пункт 4.1.).

Шаг 2. Положить $\overline{x}_{k+1} = \overline{x}_k - \alpha_k \nabla f(\overline{x}_k)$.

Шаг 3. Проверить условие остановки: если $\| \nabla f(\overline{x}_{k+1}) \| > \varepsilon$, то k:=k+1 и перейти к шагу 1, иначе остановиться и принять $\overline{x}_{k+1}$ приближенным решением.

### 4.1. Выбор шага в методе наискорейшего спуска

В рассматриваемом методе значение шага на k-той итерации (т.е. $\alpha_k$) определяется как решение следующей задачи одномерной оптимизации:

$$\min_{\alpha \geq 0} f(\overline{x}_k - \alpha \nabla f(\overline{x}_k)).$$

Заметим, что, если функция $f(\overline{x})$ выпукла, то функция $F(\alpha) = f(\overline{x}_k - \alpha \nabla f(\overline{x}_k))$ также выпукла, а, следовательно, унимодальна. Поэтому, положив некоторое максимальное значение шага $\alpha_{max}$, получим задачу минимизации унимодальной функции $F(\alpha)$ на отрезке $[0, \alpha_{max}]$. Для решения этой задачи можно воспользоваться любым методом из лабораторных работ 1 и 2.

### 4.2. Задание

Выбрав некоторое начальное приближение, найти точку минимума функции $f(\overline{x})$ (в соответствии со своим вариантом из лабораторной работы 3) с точностью $\varepsilon = 0.01$ с помощью метода наискорейшего спуска (реализовать метод в виде программы для ЭВМ).

Создать и использовать при реализации метода из данной лабораторной работы класс Point с перегруженными операторами сложения и умножения на число. Определить $F(\alpha)$ как лямбда-функцию и передать ее в качестве параметра в один из методов одномерной оптимизации (см. лабораторные работы 1 и 2) для нахождения $\alpha_k$.

# Лабораторная работа 5. Метод сопряженных градиентов.

В данной работе рассматривается метод Флетчера-Ривса для решения задачи

$$\min f(\bar{x}), \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n,$$

где функция $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ является квадратичной. В итерационном процессе этого метода кроме направления антиградиента используются также сопряженные к нему направления.

## 5.1. Основные определения

**Определение 1.** Два вектора $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$ называются ***сопряженными*** по отношению к матрице $H$ (или $H$-сопряженными), если скалярное произведение $\langle \bar{x}, H\bar{y} \rangle = 0$. Здесь $H-$ симметричная положительно определенная матрица размерности $n \times n$.

**Замечание.** Если функция $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ строго выпукла, то ее матрица Гессе (матрица вторых частных производных) во всех точках является симметричной положительно определенной матрицей.

**Определение 2.** Векторы $S_1, \ldots, S_n \in \mathbb{R}^n$ называются сопряженными по отношению к матрице $H$, если

$$\langle S_i, HS_j \rangle = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n;$$

$$\langle S_i, HS_i \rangle > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

## 5.2. Построение системы сопряжённых направлений

Для последовательности итераций метода $\{\bar{x}_i\}$ построим систему сопряженных направлений по отношению к матрице Гессе функции $f(\bar{x})$ согласно следующему правилу:

$$d_1 = \nabla f(\bar{x}_1), \tag{5.1}$$

$$d_k = \nabla f(\bar{x}_k) + \omega_{k-1} d_{k-1} \text{ для } k > 1, \tag{5.2}$$

где $\omega_{k-1}$ вычисляется по формуле

$$\omega_{k-1} = \frac{\|\nabla f(\bar{x}_k)\|^2}{\|\nabla f(\bar{x}_{k-1})\|^2}.$$

## 5.3. Алгоритм

Шаг 0. Выбрать начальное приближение $\bar{x}_1 \in \mathbb{R}^n$. Задать точность $\varepsilon > 0$, номер итерации k=1.
Шаг 1. Проверить условие остановки: если $\|\nabla f(\bar{x}_k)\| > \varepsilon$, то перейти к шагу 2; иначе остановиться и принять $\bar{x}_k$ приближенным решением.
Шаг 2. Рассчитать направление $d_k$ по правилу (5.1), (5.2).
Шаг 3. Вычислить шаг $\alpha$ как решение задачи $\min\limits_{\alpha \geq 0} f(\bar{x}_k - \alpha d_k)$.
Шаг 4. Положить $\bar{x}_{k+1} = \bar{x}_k - \alpha d_k$.
Шаг 5. k:=k+1 и перейти к шагу 1.

## 5.4. Сходимость метода

**Теорема.** Если квадратичная функция $f(\bar{x}) = \frac{1}{2}\langle \bar{x}, A\bar{x} \rangle + \langle \bar{b}, \bar{x} \rangle + c$ с положительно определенной матрицей $A$ достигает своего минимального значения на $\mathbb{R}^n$, то метод Флетчера-Ривса обеспечивает отыскание точки минимума функции не более чем за $n$ шагов.

### 5.5. Задание

Выбрав некоторое начальное приближение, найти точку минимума функции

$$f(\bar{x}) = \tfrac{1}{2}\langle \bar{x}, A\bar{x}\rangle + \langle \bar{b}, \bar{x}\rangle + c,\ \ \bar{x} \in \mathbb{R}^3$$

(матрицу $A$, вектор $\bar{b}$ и число $c$ следует взять в соответствии со своим вариантом) с точностью $\varepsilon = 0.01$ с помощью метода Флетчера-Ривса (реализовать метод в виде программы для ЭВМ).

Использовать при реализации метода из данной лабораторной работы класс Point с перегруженными операторами сложения и умножения на число. Кроме того, необходимо написать функции для операций скалярного произведения и умножения матрицы на вектор, чтобы затем использовать их в реализации функции $f(\bar{x})$.

**Вариант 1.** $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $c = 1.$

**Вариант 2.** $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\bar{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$, $c = 2.$

**Вариант 3.** $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0.5 \\ 1 & 0.5 & 1 \end{pmatrix}$, $\bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $c = 1.$

**Вариант 4.** $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c = 2.$

**Вариант 5.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 1 \\ 0.5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\bar{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$, $c = 1.$

**Вариант 6.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0.5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0.5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $c = 0.$

**Вариант 7.** $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$, $c = -9.$

**Вариант 8.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\bar{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $c = 1.$

**Вариант 9.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\bar{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$, $c = 10.$

**Вариант 10.** $A = \begin{pmatrix} 2 & 1.5 & 1 \\ 1.5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $c = 1.$

**Вариант 11.** $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $c = 4.$

**Вариант 12.** $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\bar{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c = 0.$

**Вариант 13.** $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\bar{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$, $c = 6.$

**Вариант 14.** $A = \begin{pmatrix} 2.5 & 1 & 1 \\ 1 & 1.5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\bar{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$, $c = 4.$

**Вариант 15.** $A = \begin{pmatrix} 1.5 & -1 & 1 \\ -1 & 1.5 & -1 \\ 1 & -1 & 1.5 \end{pmatrix}$, $\bar{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c = 7.$

**Вариант 16.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1.5 & 1 \\ 1 & 1 & 2.5 \end{pmatrix}$, $\bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $c = 7.$

**Вариант 17.** $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\bar{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$, $c = 0.$

**Вариант 18.** $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c = -1.$

**Вариант 19.** $A=\begin{pmatrix}3.5 & -1 & -1\\ -1 & 1.5 & -1\\ -1 & -1 & 3\end{pmatrix}$, $\bar{b}=\begin{pmatrix}-1\\ -2\\ -1\end{pmatrix}$, $c=0$. **Вариант 20.** $A=\begin{pmatrix}4 & -2 & -1\\ -2 & 3 & 1\\ -1 & 1 & 4\end{pmatrix}$, $\bar{b}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$, $c=0$.

## Лабораторная работа 6. Метод Ньютона.

Как и методы градиентного спуска метод Ньютона решения задачи

$$\min f(\bar{x}), \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n,$$

где $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция, находит точки $\bar{x}_* \in \mathbb{R}^n$, для которых $\nabla f(\bar{x}_*) = \bar{0}$. Однако заметим, что в окрестности стационарной точки частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ малы (по абсолютному значению), что существенно замедляет процесс вычисления в градиентных методах. Поэтому в тех случаях, когда это возможно, имеет смысл применять методы, использующие информацию о вторых частных производных функции $f$, например, метод Ньютона.

В данной работе будем предполагать, что исследуемая на минимум функция $f(\bar{x})$ **строго выпукла**, а, следовательно, матрица Гессе (матрица вторых частных производных) этой функции – $H(f(\bar{x}))$ положительно определена.

Разложим функцию $f(\bar{x})$ в окрестности точки $\bar{x}$ такой, что $\nabla f(\bar{x}) \neq \bar{0}$, по формуле Тейлора:

$$f(\bar{x} + \alpha\bar{p}) = f(\bar{x}) + \alpha\langle \nabla f(\bar{x}), \bar{p} \rangle + \frac{\alpha^2}{2}\langle H(f(\bar{x}))\bar{p}, \bar{p} \rangle + o(\alpha^2),$$

где $\alpha > 0$ и $o(\alpha^2)/\alpha^2 \to 0$ при $\alpha \to 0$. Чтобы найти направление наискорейшего убывания функции $f(\cdot)$ в окрестности точки $\bar{x}$, решим задачу многомерной минимизации по $\bar{p} \in \mathbb{R}^n$:

$$\langle \nabla f(\bar{x}), \bar{p} \rangle + \frac{\alpha}{2}\langle H(f(\bar{x}))\bar{p}, \bar{p} \rangle \to \min.$$

Исследуемая на минимум функция строго выпукла по $\bar{p}$, поэтому стационарная точка этой функции является точкой абсолютного минимума:

$$\nabla f(\bar{x}) + \alpha H(f(\bar{x}))\bar{p} = \bar{0} \quad \Rightarrow \quad \bar{p} = -\frac{1}{\alpha}(H(f(\bar{x})))^{-1}\nabla f(\bar{x}).$$

Исходя из этого, получим формулу, описывающую итерационный процесс в методе Ньютона:

$$\bar{x}_{k+1} = \bar{x}_k - H_k^{-1}\nabla f(\bar{x}_k).$$

Здесь и далее за $H_k$ будем обозначать матрицу Гессе функции $f(\bar{x})$, вычисленную на k-той итерации (т.е. в точке $\bar{x}_k$).

### 6.1. Метод Ньютона-Рафсона

Метод Ньютона-Рафсона является модификацией метода Ньютона, в которой величина шага на каждой итерации определяется как решение задачи одномерной оптимизации.

АЛГОРИТМ

Шаг 0. Выбрать начальное приближение $\bar{x}_1 \in \mathbb{R}^n$. Задать точность $\varepsilon > 0$, номер итерации k=1.

Шаг 1. Вычислить $H_k^{-1}$.

Шаг 2. Определить шаг $\alpha_k$ как решение одномерной задачи $\min\limits_{\alpha \geq 0} f(\bar{x}_k - \alpha H_k^{-1}\nabla f(\bar{x}_k))$.

Шаг 3. Положить $\bar{x}_{k+1} = \bar{x}_k - \alpha_k H_k^{-1}\nabla f(\bar{x}_k)$.

Шаг 4. Проверить условие остановки: если $\|\nabla f(\bar{x}_{k+1})\| > \varepsilon$, то k:=k+1 и перейти к шагу 1, иначе остановиться и принять $\bar{x}_{k+1}$ приближенным решением.

### 6.2. Задание

Выбрав некоторое начальное приближение, найти точку минимума функции $f(x)$ (в соответствии со своим вариантом) с точностью $\varepsilon = 0.01$ с помощью метода Ньютона-Рафсона (реализовать метод в виде программы для ЭВМ).

Использовать при реализации метода из данной лабораторной работы класс Point с перегруженными операторами сложения и умножения на число. Кроме того, необходимо написать функции для операции умножения матрицы на вектор и вычисления обратной матрицы.

**Вариант 1.** $f(x_1, x_2) = e^{x_1} + (x_1 - x_2)^4 + e^{-2x_2}$.

**Вариант 2.** $f(x_1, x_2) = e^{x_1} + (x_1 + x_2)^4 + e^{2x_2}$.

**Вариант 3.** $f(x_1, x_2) = e^{-x_1} + (x_1 - x_2)^4 + e^{2x_2}$.

**Вариант 4.** $f(x_1, x_2) = e^{-x_1} + (2x_1 - x_2)^2 + e^{x_2}$.

**Вариант 5.** $f(x_1, x_2) = e^{x_1} + (x_1 - x_2)^2 + e^{-2x_2}$.

**Вариант 6.** $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2 + 1 + (x_2 - x_1 + 1)^4 + e^{x_2}$.

**Вариант 7.** $f(x_1, x_2) = e^{x_1} + (2x_1 - x_2)^2 + e^{-2x_2}$.

**Вариант 8.** $f(x_1, x_2) = e^{x_1^2 + 2x_1} + (x_1 + x_2)^2 + e^{x_2^2 - 5x_2}$.

**Вариант 9.** $f(x_1, x_2) = e^{x_1^2 - x_1} + 2x_1^2 + x_2^2 + e^{x_2^2 + 3x_2}$.

**Вариант 10.** $f(x_1, x_2) = e^{x_1^2 - 2x_1} + x_1^2 + x_2^2 + e^{x_2^2 + 3x_2}$.

**Вариант 11.** $f(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_1 + x_2 + (x_1 - x_2)^4 + e^{x_2}$.

**Вариант 12.** $f(x_1, x_2) = e^{x_1} + (x_1^2 + x_2^2)^2 + e^{-x_2}$.

**Вариант 13.** $f(x_1, x_2) = e^{x_1^2 - 2x_1} + x_1^4 + (x_2 - 1)^2 + e^{x_2^2 + 3x_2}$.

**Вариант 14.** $f(x_1, x_2) = e^{x_1^2 - 2x_1 + 1} + (2x_1 - x_2)^2 + e^{x_2^2 - 2x_2}$.

**Вариант 15.** $f(x_1, x_2) = e^{x_1^2 + 1} + (2x_1 - x_2)^2 + e^{x_2 - 1}$.

**Вариант 16.** $f(x_1, x_2) = e^{3x_1} + (x_1 + x_2)^2 + e^{2x_2}$.

**Вариант 17.** $f(x_1, x_2) = e^{3x_1} + (x_1 - x_2)^2 + e^{-2x_2}$.

**Вариант 18.** $f(x_1, x_2) = e^{x_1} + (x_1 + 3x_2)^2 + e^{2x_2 + 1}$.

**Вариант 19.** $f(x_1, x_2) = e^{x_1} + (x_1 - 3x_2)^2 + e^{-2x_2 + 1}$.

**Вариант 20.** $f(x_1, x_2) = e^{-x_1} + (2x_1 + x_2)^2 + e^{-x_2}$.

## Лабораторная работа 7. Квазиньютоновские методы.

Для многих задач многомерной оптимизации

$$\min f(\bar{x}), \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n,$$

где функция $f(\bar{x})$ имеет достаточно сложное строение, вычисление матрицы Гессе (матрицы вторых частных производных) и обратной к ней матрицы может оказаться чрезмерно сложной проблемой. Это препятствует применению метода Ньютона. Для таких случаев подходящей альтернативой могут оказаться квазиньютоновские методы, итерационный процесс в которых задается следующей формулой:

$$\bar{x}_{k+1} = \bar{x}_k - \alpha_k D_k \nabla f(\bar{x}_k),$$

где матрица $D_k$ является некоторым приближением, используемым вместо матрицы обратной к матрице Гессе – $(H(f(\bar{x}_k)))^{-1}$.

Последовательность $D_k$ определяется исходя из следующих соображений. Разложим градиент $\nabla f(\bar{x}_k)$ исследуемой функции в ряд Тейлора в окрестности точки $\bar{x}_k$, взяв $\bar{x} = \bar{x}_k$:

$$\nabla f(\bar{x}_{k+1}) = \nabla f(\bar{x}_k) + H(f(\bar{x}_k))(\bar{x}_{k+1} - \bar{x}_k) + o(\|\bar{x}_{k+1} - \bar{x}_k\|)$$

и преобразуем, отбросив $o(\|\bar{x}_{k+1} - \bar{x}_k\|)$,

$$(H(f(\bar{x}_k)))^{-1}(\nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k)) = x_{k+1} - x_k.$$

По аналогии с предыдущим равенством для матрицы $D_{k+1}$ потребуем выполнение условия

$$D_{k+1}(\nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k)) = x_{k+1} - x_k. \qquad (7.1)$$

Это условие называется **квазиньютоновским.**

Последовательность $D_k$, удовлетворяющая соотношениям (7.1), строится в виде

$$D_{k+1} = D_k + \Delta_k, \qquad (7.2)$$

где $\Delta_k$ – матрица коррекции на k-той итерации, которая может быть построена различными способами (см., например, пункт 7.1.). В качестве первого элемента последовательности $D_k$ можно взять некую положительно определенную матрицу, например, единичную матрицу размерности $n \times n$, т.е. $D_1 = E$.

АЛГОРИТМ

Шаг 0. Выбрать начальное приближение $\bar{x}_1 \in \mathbb{R}^n$. Задать точность $\varepsilon > 0$, номер итерации k=1. Задать матрицу $D_1$.

Шаг 1. Определить шаг $\alpha_k$ как решение одномерной задачи $\min\limits_{\alpha \geq 0} f(\bar{x}_k - \alpha D_k \nabla f(\bar{x}_k))$.

Шаг 2. Положить $\bar{x}_{k+1} = \bar{x}_k - \alpha_k D_k \nabla f(x_k)$.

Шаг 3. Проверить условие остановки: если $\|\nabla f(\bar{x}_{k+1})\| > \varepsilon$, то $D_{k+1} = D_k + \Delta_k$ (см. пункт 7.1.), k:=k+1 и перейти к шагу 1, иначе остановиться и принять $\bar{x}_{k+1}$ приближенным решением.

### 7.1. Одноранговая коррекция

Учитывая (7.2), квазиньютоновское условие (7.1) можно переписать в виде

$$\Delta_k(\nabla f(x_{k+1})-\nabla f(x_k))=x_{k+1}-x_k-D_k(\nabla f(x_{k+1})-\nabla f(x_k)).$$

Отметим, что такому условия удовлетворяет большое количество матриц. Прямой подстановкой можно показать, что относительно $\Delta_k$ предыдущее уравнение имеет следующее решение:

$$\Delta_k=\frac{(x_{k+1}-x_k)y^T}{y^T(\nabla f(x_{k+1})-\nabla f(x_k))}-\frac{D_k(\nabla f(x_{k+1})-\nabla f(x_k))z^T}{z^T(\nabla f(x_{k+1})-\nabla f(x_k))},$$

где $y$ и $z$ – произвольные n-мерные векторы, индекс T – операция транспонирования.

**Замечание.** Все векторы в предыдущем равенстве предполагаются векторами-столбцами, следовательно, для векторов $a,b\in\mathbb{R}^n$ результат умножения $b^Ta$ является числом, а результат умножения $ab^T$ является матрицей размерности $n\times n$.

Например, если

$$y=z=x_{k+1}-x_k-D_k(\nabla f(x_{k+1})-\nabla f(x_k)),$$

то получим симметричную формулу ранга один для вычисления $\Delta_k$:

$$\Delta_k=\frac{(\Delta x_k-D_k*\Delta g_k)*(\Delta x_k-D_k*\Delta g_k)^T}{(\Delta x_k-D_k*\Delta g_k)^T*\Delta g_k}.$$

Здесь обозначено $\Delta x_k=x_{k+1}-x_k$, $\Delta g_k=\nabla f(x_{k+1})-\nabla f(x_k)$.

### 7.2. Задание

Выбрав некоторое начальное приближение, найти точку минимума функции $f(x)$ (в соответствии со своим вариантом из лабораторной работой 6) с точностью $\varepsilon=0.01$ с помощью квазиньютоновского метода с одноранговой коррекцией (реализовать метод в виде программы для ЭВМ).

Использовать при реализации метода из данной лабораторной работы класс Point с перегруженными операторами сложения и умножения на число. Кроме того, необходимо написать функции для операций сложения матриц, умножения матрицы на число и умножения матриц.

**Контрольная работа № 1**
**по дисциплине «Методы оптимизации»**

**Вариант 1**

1. Проверить выпуклость функции $\max\left\{e^{x},1-x,2\right\}+\left|x\right|$ .
2. Доказать, что функция $y=x^{2}-3x+2$ выпукла
3. Показать, что множество $X=\left\{x\in R^{2}:x_{1}^{\;2}+x_{2}^{2}=4,\;x_{2}\geq 0\right\}$ выпукло.

**Контрольная работа № 2**
**по дисциплине «Методы оптимизации»**

## Вариант 1

Найти решение следующих задач методом множителей Лагранжа:

1. $$\begin{cases} f(x_1, x_2) = 2x_1 - 3x_2 \to \min \\ x_1^2 + x_2^2 = 1 \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \to \min \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \le 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

Тип контроля: промежуточная аттестация

Контрольное мероприятие: экзамен

1. Выпуклые множества. Теорема о строгой отделимости точки от выпуклого множества. Теорема об отделимости точки от выпуклого множества.
2. Выпуклые множества. Теорема об отделимости выпуклых множеств. Теорема о строгой отделимости выпуклых множеств.
3. Выпуклые функции. Критерии выпуклости дифференцируемой функции, зависящей от одной и нескольких переменных.
4. Выпуклые функции. Критерии выпуклости дважды дифференцируемой функции, зависящей от одной и нескольких переменных
5. Задача безусловной оптимизации. Понятие локального и глобального экстремума. Необходимое условие локального экстремума дифференцируемой функции, зависящей от одной переменной.
6. Критерий локального экстремума дважды дифференцируемой функции, зависящей от одной переменной.
7. Необходимое условие локального экстремума дифференцируемой функции, зависящей от нескольких переменных.
8. Критерий локального экстремума дважды дифференцируемой функции, зависящей от нескольких переменных.
9. Экстремальная задача с ограничениями типа равенств. Понятие локального и глобального экстремума экстремальной задачи. Правило множителей Лагранжа решения гладкой конечномерной задачи с ограничениями типа равенств.
10. Правило множителей Лагранжа решения гладкой конечномерной задачи с ограничениями типа равенств и неравенств.
11. Задача выпуклого программирования. Теорема Куна-Таккера.
12. Градиентные методы поиска минимума функции многих переменных: градиентный метод с постоянным шагом, градиентный метод с дроблением шага, метод наискорейшего спуска.
13. Метод сопряженных градиентов.
14. Метод Ньютона.
15. Понятие метаэвристических алгоритмов. Эволюционные методы оптимизации.
16. Методы «роевого интеллекта». Методы, копирующие физические процессы.

***шифр: 01.03.02, профиль: Прикладная математика и искусственный интеллект, направление подготовки/специальность: Прикладная математика и информатика, полное название РПД по учебному плану: Методы оптимизации, год набора: 2025, форма обучения: очная***

| | | |
|---|---|---|
| Проректор по учебной работе | утверждено 24.02.25 | А.А. Саламатов |

Ученым советом математического факультета

Протокол заседания № 6 от 20.02.2025

| | | |
|---|---|---|
| Председатель Ученого совета<br>математического факультета | согласовано | Е.А. Сбродова |

***Заседанием кафедры теории управления и оптимизации***

Протокол заседания № от

| | | |
|---|---|---|
| Заведующий кафедрой | согласовано | И. В. Изместьев |
| Автор (составитель) | | Г. П. Кужим |

***Структура рабочей программы соответствует приказу ректора ФГБОУ ВО «ЧелГУ» от «13» апреля 2021 г. № 247-1***