

Документ подписан простой электронной подписью Информация о владельце: ФИО: Таскаев Сергей Валерьевич Должность: Ректор	МИНИСТЕРСТВО НАУКИ РОССИИ Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Челябинский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ЧелГУ»)	
Дата подписания: 08.04.2026 16:25:40 Уникальный программный ключ: 04c19ed8bfb98f3b6cb77a486b9a8788b8322323	Рабочая программа дисциплины "Функциональный анализ" по направлению подготовки (специальности) 01.03.02 Прикладная математика и информатика направленности (профилю) Прикладная математика и искусственный интеллект ФГБОУ ВО «ЧелГУ»	стр. 1

Рабочая программа дисциплины (модуля)*

Функциональный анализ

Направление подготовки (специальность)

01.03.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль)

Прикладная математика и искусственный интеллект

Присваиваемая квалификация (степень)

бакалавр

Форма обучения

очная

Год(ы) набора 2026

*Рабочая программа дисциплины (модуля) адаптирована для инклюзивного обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья

Челябинск 2026 г.



Содержание

1. Цели освоения дисциплины
2. Место дисциплины в структуре ОПОП
3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины (модуля)
4. Объем дисциплины (модуля)
5. Структура и содержание дисциплины (модуля)
6. Фонд оценочных средств
 - 6.1. Перечень видов оценочных средств
 - 6.2. Типовые контрольные задания и иные материалы для текущей аттестации
 - 6.3. Типовые контрольные вопросы и задания для промежуточной аттестации
 - 6.4. Критерии оценивания
7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)
 - 7.1. Рекомендуемая литература
 - 7.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет"
 - 7.3. Перечень информационных технологий
8. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)
9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)
10. Специальные условия освоения дисциплины обучающимися с инвалидностью и ограниченными возможностями здоровья



1. ЦЕЛИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Дисциплина предназначена для освоения студентами основных приемов функционального анализа: вопросы сходимости в метрических пространствах, не-прерывные отображения и теория линейных операторов. Цель дисциплины — изложить основы функционального анализа на современном языке, в обозримой форме и в достаточно полном объеме. Курс должен способствовать формированию научного мировоззрения, развитию логического мышления, умению выполнять сложные комплексные задания.

Результаты обучения по дисциплине направлены на достижение индикаторов, соответствующих компетенций: ОПК-1

ОПК-1.1. Обладает фундаментальными знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук

ОПК-1.2. Демонстрирует умение решать задачи, формулируемые в рамках математических и (или) естественных наук

ОПК-1.3. Имеет навыки использования основных понятий, теорем, законов математики и (или) естественных наук для решения задач профессиональной деятельности

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОПОП

Цикл (раздел) ОПОП: Б1.О.16

2.1 Требования к предварительной подготовке обучающегося:

Математический анализ,

Алгебра,

Геометрия,

Дифференциальные уравнения

Математический анализ

Алгебра

Геометрия

Дифференциальные уравнения

2.2 Дисциплины и практики, для которых освоение данной дисциплины (модуля) необходимо как предшествующее:

Вариационное исчисление и оптимальное управление

Теория игр и исследование операций

Численные методы

Вариационное исчисление и оптимальное управление

Численные методы

Теория игр и исследование операций

3. КОМПЕТЕНЦИИ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

ОПК-1: Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности

Знать:

Основные понятия и методы функционального анализа и возможные приложения при решении прикладных задач.

Уметь:

Применять знание функционального анализа при решении задач, формулируемых в рамках математических или естественных наук, в профессиональной деятельности.

Владеть:

Методами применения функционального анализа при решении прикладных задач.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен

3.1 Знать:

3.1.1 постановки классических задач функционального анализа



3.2 Уметь:

3.2.1 самостоятельно математически корректно ставить естественнонаучные задачи;

3.3 Владеть:

3.3.1 владеть навыками корректной постановки классических задач математики

4. ОБЪЕМ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Общая трудоемкость	2 ЗЕТ
Часов по учебному плану : 72 в том числе : аудиторные занятия : 48 самостоятельная работа : 23,8 : контактная работа: 48,2 ИКР: 0,2	Виды контроля в семестрах: зачеты 6

5. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Код занятия	Наименование разделов и тем /вид занятия/	Семестр / Курс	Часов	Литература
	Раздел 1. Метрические и линейные нормированные пространства			
1.1	Введение. Метрические и нормированные пространства /Лек/	6	4	Л1.1 Л1.2 Л1.3 Л1.4Л2.1 Л2.2 Л2.3 Э1 Э2
1.2	Свойства метрики /Пр/	6	2	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Л2.3 Э1 Э2
1.3	Примеры метрических и нормированных пространств /Ср/	6	4	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Л2.3 Э1 Э2
1.4	Компактные множества в метрических пространствах /Лек/	6	2	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Л2.3 Э1 Э2
1.5	Теоремы в полных метрических пространствах /Лек/	6	2	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Л2.3 Э1 Э2
1.6	Принцип неподвижной точки /Пр/	6	2	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Л2.3 Э1 Э2
1.7	Теорема Банаха о пополнении метрических пространств /Ср/	6	6	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Л2.3 Э1 Э2
	Раздел 2. Линейные непрерывные операторы			
2.1	Линейные непрерывные операторы /Лек/	6	2	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Л2.3
	Раздел 3. Основные теоремы линейного функционального анализа			



3.1	Принцип равномерной ограниченности /Лек/	6	2	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Л2.3
3.2	Исследование предкомпактности множеств /Пр/	6	4	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Л2.3
3.3	Теоремы о продолжении линейного функционала для нормированных пространств /Лек/	6	2	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Л2.3
3.4	Теорема об обратном операторе /Лек/	6	2	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Л2.3
3.5	Свойства линейных операторов /Пр/	6	4	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Л2.3
3.6	Теоремы Хана-Банаха о продолжении линейного функционала в вещественном и комплексном линейном пространстве /Ср/	6	5,8	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Л2.3 Э1 Э2
Раздел 4. Гильбертовы пространства				
4.1	Гильбертовы пространства /Лек/	6	6	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Л2.3
4.2	Гильбертовы пространства /Пр/	6	2	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Л2.3
4.3	Спектры линейных операторов /Пр/	6	2	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Л2.3
4.4	Рефлексивность Гильбертова пространства /Ср/	6	4	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Л2.3
Раздел 5. Решение линейных операторных уравнений				
5.1	Свойства решений линейных уравнений с компактными операторами /Лек/	6	4	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Л2.3
5.2	Свойства решений линейных уравнений /Лек/	6	2	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Л2.3
5.3	Спектры линейных операторов /Лек/	6	4	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Л2.3
5.4	Теоремы Фредгольма о решении линейных уравнений с компактными операторами /Ср/	6	4	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Л2.3 Э1 Э2
Раздел 6. Иная контактная работа				
6.1	Индивидуальные консультации, текущий контроль /ИКР/	6	0,2	Л1.1 Л1.2 Л1.3Л2.1 Л2.2 Л2.3

6. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

6.1. Перечень видов оценочных средств

домашние задания,
контрольная работа,



зачет

6.2. Типовые контрольные задания и иные материалы для текущей аттестации

Пример домашнего задания см. Приложение

6.3. Типовые контрольные вопросы и задания для промежуточной аттестации

Пример контрольной работы см. Приложение

Вопросы к зачёту

1. Проверка аксиом метрики для конкретных пространств
2. Исследование последовательностей на фундаментальность.
3. Принцип вложенных шаров. Исследование метрического пространства на полноту. Теорема Бэра о категориях.
4. Сжимающий оператор. Примеры. Принцип сжимающих отображений.
5. Предкомпактные множества и компакт. Примеры, применение. Свойства предкомпактных множеств. Сеть для множества в метрическом пространстве.
6. Теорема Хаусдорфа (критерий предкомпактности). Теорема Арчела.
7. Сепарабельные метрические пространства. Примеры несепарабельных метрических пространств.
8. Линейные нормированные пространства. Норма на линейном пространстве. Банаховы пространства, примеры
9. Некомпактность шара в бесконечномерном нормированном пространстве.
10. Линейный оператор, его свойства. Признаки его непрерывности. Норма линейного оператора и её свойства.
11. Линейное нормированное пространство $L(X, Y)$ всех ограниченных линейных операторов $A: X \rightarrow Y$. Теорема о полноте этого пространства, ко-гда Y – банахово.
12. ЛНП всех непрерывных линейных функционалов $f: X \rightarrow R$ (или C). Сопряженное пространство, и его полнота.
13. Процедура поиска норм линейного ограниченного оператора. Примеры.
14. Теоремы Хана-Банаха, для линейных пространств и линейных нормированных пространств и следствия в случае нормированного пространства.
15. Теорема Банаха-Штейнгауза.
16. Теорема Банаха об обратном операторе.
17. Определение гильбертова пространства. Примеры.
18. Определение ортонормальной системы (ОНС). Ряд Фурье элемента x по данной ОНС. Примеры.
19. Теорема об экстремальном свойстве коэффициентов Фурье. Неравенство Бесселя.
20. Определение полной ОНС. Пример.
21. Доказать теорему о проекции точки на выпуклое множество.
22. Теорема об ортогональном разложении H в сумму подпространств.
23. Теорема Рисса об общем виде линейного ограниченного функционала на Гильбертовом пространстве. Описание сопряжённого пространства к H .
24. Определение слабой сходимости. Примеры.
25. Теорема о вложении X в своё второе сопряжённое.
26. Критерий слабой сходимости в пространстве непрерывных на отрезке функций с чебышевской нормой.
27. Общий вид линейных непрерывных функционалов на l_p . Признак слабой сходимости.

6.4. Критерии оценивания

Балльно-рейтинговая система оценки знаний студента по дисциплине определяется на основе балловой оценки различных форм деятельности студентов.

Итоговая оценка выставляется, исходя из количества баллов, набранных в течение семестра.

Начисляемые рейтинговые баллы.

(По каждой позиции указывается максимальный балл)

Контрольная работа - 40

Домашние задания - 20

Решение задач из лекций – 10

Посещаемость -10

Итого 80 баллов

Критерии оценивания контрольной работы

Максимальный балл за одну контрольную работу – 20 баллов

В контрольной работе 4 задачи. Максимальная оценка за каждую из них - 5 баллов. Время, отводимое для выполнения контрольной работы -90 минут.

Критерии оценивания задачи



Максимальный балл — 5.

При подведении итогов зачет ставится, если студент за все контрольные мероприятия набрал не менее 40 баллов:
Уровни сформированности компетенций определяется следующим образом:

1. Высокий уровень сформированности компетенций – 70-80 баллов:

- предполагает формирование компетенций на высоком уровне, готовность к самостоятельной профессиональной деятельности.

- студент способен аргументировать собственную точку зрения по дискуссионным вопросам дисциплины, решать ситуационные задачи, критически оценивать информацию, формулировать собственные выводы.

2. Средний уровень – 60-69

- предполагает формирование компетенций на среднем уровне: формируется комплексное знание особенностей решения прикладных задач, умение сбора, анализа и обработки данных, необходимых для решения прикладных задач.

- студент способен давать развернутые ответы на теоретические вопросы дисциплины на уровне не ниже среднего.

3. Базовый уровень – 40-59 баллов

- предполагает формирование компетенций на начальном уровне, студент освоил основные понятия и положения изучаемой дисциплины.

4. Низкий уровень - 0-39 баллов.

7. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

7.1. Рекомендуемая литература

7.1.1. Основная литература

	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год	Ресурс
Л1.1	Колмогоров А. Н., Фомин С. В.	Элементы теории функций и функционального анализа: учебник (https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=82563)	Москва : Физматлит, 2012	ЭБС
Л1.2	Треногин В. А.	Функциональный анализ: учебник (https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=82613)	Москва : Физматлит, 2002	ЭБС
Л1.3	Глазырина П. Ю., Дейкалова М. В., Коркина Л. Ф.	Функциональный анализ: типовые задачи: учебное пособие (https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=689057)	Екатеринбург : Издательство Уральского университета, 2016	ЭБС
Л1.4	Треногин В. А., Писаревский Б. М., Соболева Т. С.	Функциональный анализ: в 2 томах : учебное пособие для вузов	Москва : Академия, 2012-	

7.1.2. Дополнительная литература

	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год	Ресурс
Л2.1	Ревина С. В., Сазонов Л. И.	Функциональный анализ в примерах и задачах: учебное пособие (https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=240944)	Ростов-на-Дону : Южный федеральный университет, 2009	ЭБС
Л2.2	Гейт В. Э.	Функциональный анализ: тексты лекций (https://library.csu.ru/rbooks2/view2?code=texts/004099/gateve)	Челябинск : [Челябинский государственный университет], 2006	ЭБС
Л2.3	Люстерник Л. А., Соболев В. И.	Краткий курс функционального анализа (https://e.lanbook.com/book/210290)	Санкт-Петербург : Лань, 2022	ЭБС



7.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет"

Э1	Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU (https://elibrary.ru/defaultx.asp?) eLIBRARY.RU : научная электронная библиотека : сайт. – Москва, 2000 – . – URL: https://elibrary.ru . – Режим доступа: для зарегистрированных пользователей. – Текст : электронный.
Э2	Справочник «Информо» (http://www.informio.ru/) ИНФОРМИО : электронный справочник [обеспечение всех типов образовательных учреждений нормативными, методическими, научнопрактическими материалами]. – URL: http://www.informio.ru/ . – Режим доступа: для зарегистрированных пользователей ЧелГУ. – Текст : электронный.

7.3 Перечень информационных технологий

7.3.1 Программное обеспечение

LMS Moodle

LibreOffice

7.3.2 Профессиональные базы данных и информационно-справочные системы

Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU (<https://elibrary.ru/defaultx.asp?>) eLIBRARY.RU : научная электронная библиотека : сайт. – Москва, 2000 – – URL: <https://elibrary.ru>. – Режим доступа: для зарегистрированных пользователей. – Текст : электронный.

Справочник «Информо» (<http://www.informio.ru/>) ИНФОРМИО : электронный справочник [обеспечение всех типов образовательных учреждений нормативными, методическими, научнопрактическими материалами]. – URL: <http://www.informio.ru/>. – Режим доступа: для зарегистрированных пользователей ЧелГУ. – Текст : электронный.

8. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Для реализации дисциплины используются учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, а также помещения для самостоятельной работы.

Для проведения занятий лекционного типа предлагаются наборы демонстрационного оборудования и учебно-наглядных пособий (экран, ноутбук, колонки, мультимедийный проектор и компьютер для презентации лекций, слайдов лекций, подготовленных в Microsoft Power Point).

9. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Учебный курс строится таким образом, чтобы способствовать созданию у студента понятийно-теоретического ядра и развитию практического навыка решения математических задач.

Для успешного усвоения материала студенту необходимо использовать следующие формы обучения:

1. Лекционная форма (32 ч.), которая предполагает посещение и конспектирование лекций. Лекционные занятия могут проводиться как в классической форме, предполагающее устное изложение материала преподавателем и конспектированием материала студентами, так и форме семинара, студентам предлагается совместное решение теоретических задач при возможной помощи преподавателя. Кроме того, часть лекций сопровождается интерактивными материалами для лучшего понимания геометрической интерпретации материала.
2. Практическая форма (16 ч.) занятий предполагает посещение их студентом, с предоставлением выполненного домашнего задания, и выполнение итогово-зачётной контрольной работы.
3. Самостоятельная форма работы, предполагает кроме выполнения всех домашних работ, необходимость использования и изучения литературы по заданной теме. В случае затруднений при решении задач домашнего задания необходимо обратиться за помощью к лектору согласно расписания его консультаций, которое висит вблизи кафедры вычислительной математики.

В случае применения при обучении дисциплины электронного обучения, дистанционных образовательных технологий общение обучающихся и преподавателя осуществляется в режиме реального времени (чат), или отложенного времени (система дистанционного обучения Moodle, чаты, электронная почта).

Большую часть времени обучающиеся самостоятельно работают с учебно-методическими материалами. Студенты имеют возможность консультироваться с преподавателем по всем вопросам, возникающим в ходе самостоятельной работы посредством электронной почты, социальных сетей.

Доступ обучающегося к учебным ресурсам в режиме отложенного времени, самостоятельной работы осуществляется через сеть Интернет в удобном для него месте, времени и темпе.

При обучении лиц с ограниченными возможностями здоровья электронное обучение, дистанционные образовательные технологии предусматривают возможность приема-передачи информации в доступных для них формах.

Реализация дисциплины с применением электронного обучения, дистанционных образовательных технологий (далее – ЭО, ДОТ) осуществляется на основании «Положения о реализации основных и дополнительных образовательных



программ с применением электронного обучения и дистанционных образовательных технологий в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Челябинский государственный университет», «Положения о порядке зачета обучающимися по основным профессиональным образовательным программам высшего образования в ФГБОУ ВО «ЧелГУ» результатов освоения в организациях, осуществляющих образовательную деятельность, учебных предметов, курсов, дисциплин (модулей), практик, дополнительных образовательных программ» посредством электронной информационно-образовательной среды ФГБОУ ВО «ЧелГУ». В исключительных случаях (форс-мажор и т.п.) при реализации образовательной деятельности с применением ЭО, ДОТ могут применять компоненты, не входящие в перечень электронной информационно-образовательной среды.

10. СПЕЦИАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ ОБУЧАЮЩИМИСЯ С ИНВАЛИДНОСТЬЮ И ОГРАНИЧЕННЫМИ ВОЗМОЖНОСТЯМИ ЗДОРОВЬЯ

Освоение дисциплины инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья осуществляется с использованием специальных технических средств и информационных технологий, предоставляемых Ресурсным учебно-методическим центром по обучению инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья ЧелГУ по запросу обучающегося (мобильные специальные технические средства для лиц с нарушениями зрения и с нарушением слуха, ассистивные информационные технологии).

При необходимости для обучающихся с нарушениями зрения на рабочих местах для проведения практических или лабораторных занятий устанавливается специальное программное обеспечение (программа речевой навигации, речевые синтезаторы, экранные лупы).

В учебные аудитории обеспечивается беспрепятственный доступ для обучающихся с инвалидностью и с ограниченными возможностями здоровья. В каждой аудитории, где обучаются инвалиды и лица с ограниченными возможностями здоровья, предусматривается соответствующее количество мест для обучающихся с учетом нарушений их здоровья.

Для освоения дисциплины инвалидам и лицам с ограниченными возможностями здоровья предоставляется доступ к печатным источникам, имеющимся в научной библиотеке ЧелГУ, с помощью специальных технических средств; доступ с помощью специальных технических и программных средств к электронным источникам, представленным в форме электронного документа в фонде научной библиотеки ЧелГУ или электронно-библиотечных системах.

Учебно-методические материалы для обучающихся из числа инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья предоставляются в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и особенностям восприятия информации.

Для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья освоение дисциплины может быть частично или полностью осуществлено с использованием дистанционных образовательных технологий.

При проведении промежуточной аттестации по дисциплине обучающимся с инвалидностью и с ограниченными возможностями здоровья обеспечивается по их заявлению предоставление в доступной форме в зависимости от их индивидуальных особенностей инструкции о порядке проведения промежуточной аттестации, оценочных средств и возможности ответов на задания (письменно на бумаге, набор ответов на компьютере, письменно шрифтом Брайля, с использованием услуг ассистента, устно).

При проведении процедуры оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья предусматривается использование предоставленных ЧелГУ или собственных технических средств, необходимых им в связи с их индивидуальными особенностями. При необходимости инвалидам и лицам с ограниченными возможностями здоровья предоставляется дополнительное время для подготовки ответа на задания, процедура оценивания результатов обучения по дисциплине может проводиться в несколько этапов.

Перечень домашних заданий и самостоятельных работ
по курсу "Функциональный анализ"
для групп МП-301, 302

1-ое домашнее задание. Метрики и нормы

1. Доказать, что функция $\rho(x, y) = \frac{|x - y|}{|x - y| + 1}$ является метрикой на \mathbb{R} .
2. Доказать, что функция $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2}$ является нормой на \mathbb{R}^2 .
3. Доказать, что функция $\|x\| = \max |x_i|$ является нормой на c_0 .
4. Доказать, что функция $\|x\| = \sup |x_i|$ является нормой на c .
5. Доказать, что функция $\rho(x, y) = \frac{|x - y|}{\sqrt{x^2 + 1}\sqrt{y^2 + 1}}$ является метрикой на \mathbb{R} .
6. Найти необходимое и достаточное условие того, чтобы заданное на плоскости было единичным шаром для некоторой метрики.

2-ое домашнее задание. Метрики и нормы

1. Доказать, что функция $\rho_s(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|x_k - y_k|}{|x_k - y_k| + 1}$ является метрикой на пространстве всех последовательностей s .
2. Можете ли Вы придумать норму в s ?
3. Доказать, что следующие функции - нормы:
 - (a) $\|f\| = |f(a)| + \max_{t \in [a, b]} |f(t)|$ в $C[a, b]$.
 - (b) $\|f\| = \max_{t \in [a, b]} (|f(t)| + |f'(t)|)$ в $C^1[a, b]$.
 - (c) $\|f\| = \int_a^b e^\tau |f(\tau)| d\tau$ в $L_1[a, b]$.

Типовые контрольные задания для текущей аттестации

Контрольная работа №1

(непрерывные линейные функционалы, структура сопряженного пространства)

Вариант 1

1. Доказать, что функционал в пространстве $C[-1,1]$ является линейным непрерывным и найти его норму $\langle x, f \rangle = \frac{1}{3(x(-1) + x(1))}$
2. Является ли ограниченным в пространстве $C[0,1]$ линейный функционал? $\langle x, f \rangle = \int_0^1 x(\sqrt{t}) dt$
3. Найти норму и доказать непрерывность функционала $\langle x, f \rangle = \int_{-1}^1 tx(t) dt$ в $L_1[-1,1]$
4. Пусть X – банахово пространство, $f_n \in X^*$ и для любого $x \in X$ существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x, f_n \rangle = \langle x, f \rangle$. Доказать, что $f \in X^*$

Вариант 2

1. Доказать, что функционал в пространстве $C[-1,1]$ является линейным непрерывным и найти его норму $\langle x, f \rangle = 2(x(1) - x(0))$
2. Является ли ограниченным в пространстве $C[0,1]$ линейный функционал? $\langle x, f \rangle = \int_0^1 x(t^2) dt$
3. Найти норму и доказать непрерывность функционала $\langle x, f \rangle = \int_{-1}^1 tx(t) dt$ в $L_2[-1,1]$
4. Пусть X – линейное нормированное пространство, $f_n \in X^*$. Доказать, что f_n сходится тогда и только тогда, когда $\langle x, f_n \rangle$ сходится равномерно в шаре $\{x \in X: \|x\| < 1\}$

Вопросы к зачёту

1. Проверка аксиом метрики для конкретных пространств
2. Исследование последовательностей на фундаментальность.
3. Принцип вложенных шаров. Исследование метрического пространства на полноту. Теорема Бэра о категориях.
4. Сжимающий оператор. Примеры. Принцип сжимающих отображений.
5. Предкомпактные множества и компакт. Примеры, применение. Свойства предкомпактных множеств. Сеть для множества в метрическом пространстве.
6. Теорема Хаусдорфа (критерий предкомпактности). Теорема Арчела.
7. Сепарабельные метрические пространства. Примеры несепарабельных метрических пространств.
8. Линейные нормированные пространства. Норма на линейном пространстве. Банаховы пространства, примеры
9. Некомпактность шара в бесконечномерном нормированном пространстве.
10. Линейный оператор, его свойства. Признаки его непрерывности. Норма линейного оператора и её свойства.
11. Линейное нормированное пространство $L(X, Y)$ всех ограниченных линейных операторов $A: X \rightarrow Y$. Теорема о полноте этого пространства, когда Y – банахово.
12. ЛНП всех непрерывных линейных функционалов $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ (или \mathbb{C}). Сопряженное пространство, и его полнота.
13. Процедура поиска норм линейного ограниченного оператора. Примеры.
14. Теоремы Хана-Банаха, для линейных пространств и линейных нормированных пространств и следствия в случае нормированного пространства.
15. Теорема Банаха-Штейнгауза.
16. Теорема Банаха об обратном операторе.
17. Определение гильбертова пространства. Примеры.
18. Определение ортонормальной системы (ОНС). Ряд Фурье элемента x по данной ОНС. Примеры.
19. Теорема об экстремальном свойстве коэффициентов Фурье. Неравенство Бесселя.
20. Определение полной ОНС. Пример.
21. Доказать теорему о проекции точки на выпуклое множество.
22. Теорема об ортогональном разложении N в сумму подпространств.

23. Теорема Рисса об общем виде линейного ограниченного функционала на Гильбертовом пространстве. Описание сопряжённого пространства к H .
24. Определение слабой сходимости. Примеры.
25. Теорема о вложении X в своё второе сопряжённое.
26. Критерий слабой сходимости в пространстве непрерывных на отрезке функций с чебышевской нормой.
27. Общий вид линейных непрерывных функционалов на l_p . Признак слабой сходимости.

