

Документ подписан простой электронной подписью Информация о владельце: ФИО: Таскаев Сергей Валерьевич Должность: Ректор Дата подписания: 18.03.2025 14:53:17 Уникальный программный ключ: 04c19ed8bfb98f3b6cb77a486b9a8788b8322323	МИНИСТЕРСТВА НАУКИ РОССИИ Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Челябинский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ЧелГУ»)	Рабочая программа дисциплины "Методы оптимизации" по направлению подготовки (специальности) 01.03.02 Прикладная математика и информатика" направленности (профилю) Прикладная математика и искусственный интеллект ФГБОУ ВО «ЧелГУ»	стр. 1
--	--	---	--------

Рабочая программа дисциплины (модуля)*

Методы оптимизации

Направление подготовки (специальность)

01.03.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль)

Прикладная математика и искусственный интеллект

Присваиваемая квалификация (степень)

бакалавр

Форма обучения

очная

Год набора 2024

*Рабочая программа дисциплины (модуля) адаптирована для инклюзивного обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья

Челябинск 2023 г.



Содержание

1. Цели освоения дисциплины
2. Место дисциплины в структуре ОПОП
3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины (модуля)
4. Объем дисциплины (модуля)
5. Структура и содержание дисциплины (модуля)
6. Фонд оценочных средств
 - 6.1. Перечень видов оценочных средств
 - 6.2. Типовые контрольные задания и иные материалы для текущей аттестации
 - 6.3. Типовые контрольные вопросы и задания для промежуточной аттестации
 - 6.4. Критерии оценивания
7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)
 - 7.1. Рекомендуемая литература
 - 7.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет"
 - 7.3. Перечень информационных технологий
8. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)
9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)
10. Специальные условия освоения дисциплины обучающимися с инвалидностью и ограниченными возможностями здоровья



1. ЦЕЛИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Цель дисциплины «Методы оптимизации» состоит в выработке у студентов навыков формализации задач, возникающих в различных предметных областях, овладение студентами теоретическими знаниями и навыками применения конкретных методов оптимизации, освоение студентами алгоритмов, реализующих конкретные оптимизационные методы. К задачам дисциплины относятся: формирование навыков анализа оптимизационных задач (определения типа задачи и возможных методов и алгоритмов ее решения); получение навыков аналитического решения различных экстремальных задач; формирование навыков программной реализации численных методов для решения экстремальных задач.

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОПОП

Цикл (раздел) ОПОП: Б1.О.21

2.1 Требования к предварительной подготовке обучающегося:

Знает: классические численные методы решения задач вычислительной математики; Умеет: оценивать сложность и эффективность численных методов, применяемых в решении профессиональных задач; Имеет практический опыт: разработки и анализа математических моделей и алгоритмов решения задач вычислительной математики

Численные методы

2.2 Дисциплины и практики, для которых освоение данной дисциплины (модуля) необходимо как предшествующее:

Дискретная оптимизация

3. КОМПЕТЕНЦИИ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

УК-2: Способен определять круг задач в рамках поставленной цели и выбирать оптимальные способы их решения, исходя из действующих правовых норм, имеющихся ресурсов и ограничений

Знать:

методы оптимизации решений конкретных задач, с учётом имеющихся ограничений

Уметь:

проектировать решение задачи, выбирая оптимальный способ её решения

Владеть:

Имеет практический опыт: анализа альтернативных вариантов решений для достижения оптимальных результатов

ОПК-3: Способен применять и модифицировать математические модели для решения задач в области профессиональной деятельности

Знать:

принципы моделирования экономических, экологических, социальных, технических задач в форме задач оптимизации

Уметь:

применять методы оптимизации в математическом моделировании интеллектуальных систем

Владеть:

Имеет практический опыт: моделирования социальных задач и производственных процессов

В результате освоения дисциплины обучающийся должен

3.1 Знать:

3.1.1 методы оптимизации решений конкретных задач, с учётом имеющихся ограничений; принципы моделирования экономических, экологических, социальных, технических задач в форме задач оптимизации

3.2 Уметь:

3.2.1 проектировать решение задачи, выбирая оптимальный способ её решения; применять методы оптимизации в математическом моделировании интеллектуальных систем

3.3 Владеть:



Рабочая программа дисциплины "Методы оптимизации" по направлению подготовки (специальности) 01.03.02 "Прикладная математика и информатика" направленности (профилю) Прикладная математика и искусственный интеллект ФГБОУ ВО «ЧелГУ»

стр. 4

3.3.1 анализа альтернативных вариантов решений для достижения оптимальных результатов; моделирования социальных задач и производственных процессов

4. ОБЪЕМ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Общая трудоемкость	4 ЗЕТ
Часов по учебному плану: 144 в том числе: аудиторные занятия: 64 самостоятельная работа: 69,5 : контактная работа: 74,5 ИКР: 10,5	Виды контроля в семестрах: экзамены 5

5. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Код занятия	Наименование разделов и тем /вид занятия/	Семестр / Курс	Часов	Литература
-------------	---	----------------	-------	------------

6. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

6.1. Перечень видов оценочных средств

Лабораторные работы 1–7
Контрольные работы 1–2
Вопросы к экзамену

6.2. Типовые контрольные задания и иные материалы для текущей аттестации

Типовые задания для лабораторных и контрольных работ: см. приложение.

6.3. Типовые контрольные вопросы и задания для промежуточной аттестации

Вопросы к экзамену: см. приложение

6.4. Критерии оценивания

Порядок начисления баллов за лабораторные работы: Получена программа реализации решения задачи, программа работает корректно - 3 балла. Получена программа реализации решения задачи, программа работает корректно, студент может пояснить порядок получения результатов, расчетов и графиков - 5 баллов. Получена программа реализации решения задачи, программа работает корректно; студент может пояснить порядок получения результатов, расчетов и графиков; результаты работы и выводы оформлены в соответствии с указаниями - 7 баллов. В остальных случаях баллы не начисляются

Контрольная работа 1 состоит из 4 заданий, за каждое из которых студент может получить от 0 до 2 баллов: 2 балла - задача решена верно, получен правильный ответ; 1 балл - задача, в целом, решена верно, но имеются незначительные ошибки; 0 баллов - в остальных случаях.

Контрольная работа 2 состоит из 2 заданий, за каждое из которых студент может получить от 0 до 3 баллов: 3 балла - задача решена верно, получен правильный ответ; 1 балл - задача, в целом, решена верно, но имеются незначительные ошибки; 0 баллов - в остальных случаях.

На каждой лекции студент может получить 1 балл: студент правильно отвечает на вопросы по изучаемому материалу - 1 балл. В противном случае баллы не начисляются.

На практических занятиях №1–7 студент может получить по 3 балла: студент задает вопросы по изучаемому материалу или решает задачу у доски - 2 балла; студент правильно отвечает на вопросы по изучаемому материалу - 1 балл. В противном случае баллы не начисляются

На экзамене студент отвечает на билет, который содержит 2 теоретических вопроса. При необходимости студенту могут быть заданы дополнительные вопросы по заданиям. Продолжительность экзамена – 60 минут. Максимальный балл за ответ на теоретический вопрос 3 балла. 3 балла - ответ структурирован, приведен анализ положений существующих теорий по вопросу билета, студент логично и доказательно раскрывает проблему, предложенную в билете, ответ не содержит фактических ошибок и характеризуется глубиной, полнотой; 2 балла - ответ имеет достаточный содержательный уровень, однако отличается слабой структурированностью, раскрыто содержание билета, имеются неточности при ответе; 1 балл - ответ имеет фрагментарный характер, отличается поверхностностью и малой содержательностью, имеются неточности при ответе на основные вопросы билета, материал в основном излагается, но допущены фактические ошибки; 0 баллов - допускаются существенные фактические ошибки при ответе, на большую часть дополнительных вопросов по содержанию экзамена; студент



Рабочая программа дисциплины "Методы оптимизации" по направлению подготовки (специальности) 01.03.02 "Прикладная математика и информатика" направленности (профилю) Прикладная математика и искусственный интеллект ФГБОУ ВО «ЧелГУ»

стр. 5

затрудняется дать ответ или не дает верных ответов.

Оценка за дисциплину формируется на основе полученных оценок за контрольно-рейтинговые мероприятия текущего контроля. 91–100 баллов соответствует оценке "отлично", 71–90 баллов соответствует оценке "хорошо", 51 - 70 баллов соответствует оценке "удовлетворительно", 0 - 50 баллов соответствует оценке "неудовлетворительно". Студент может повысить свой рейтинг, пройдя контрольное мероприятие промежуточной аттестации. Студент выбирает случайный билет, содержащий два теоретических вопроса. Студенту предоставляется не более 60 минут на подготовку ответа. По истечении этого времени студент отвечает экзаменатору вопросы билета. Фиксация результатов учебной деятельности по дисциплине проводится в день экзамена при личном присутствии студента.

7. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

7.1. Рекомендуемая литература

7.1.1. Основная литература

	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год	Ресурс
Л1.1	Лесин В. В., Лисовец Ю. П.	Основы методов оптимизации (https://e.lanbook.com/book/221324)	Санкт- Петербург : Лань, 2022	ЭБС
Л1.2	Пантелеев А. В., Легова Т. А.	Методы оптимизации в примерах и задачах (https://e.lanbook.com/book/212129)	Санкт- Петербург : Лань, 2022	ЭБС
Л1.3	Ржевский С. В.	Математическое программирование: учебное пособие (https://e.lanbook.com/book/206993)	Санкт- Петербург : Лань, 2022	ЭБС

7.1.2. Дополнительная литература

	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год	Ресурс
Л2.1	Мицель А. А., Шелестов А. А., Романенко В. В.	Методы оптимизации: учебное пособие (https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=481034)	Томск : ТУСУР, 2017	ЭБС
Л2.2	Мицель А. А.	Методы оптимизации: учебное пособие (https://e.lanbook.com/book/110214)	Москва : ТУСУР, 2017	ЭБС

7.1.3. Методические разработки

	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год	Ресурс
Л3.1	Ухоботов В. И., Измestьев И. В.	Избранные главы теории экстремальных задач: учебное пособие	Челябинск : Издательство Челябинского государственного университета, 2020	ЭБС

7.3 Перечень информационных технологий

7.3.1 Программное обеспечение

Libre Office

Visual Studio Code

7.3.2 Профессиональные базы данных и информационно-справочные системы

1. Электронный каталог научной библиотеки ЧелГУ [Электронный ресурс] : база данных / Челяб. гос. ун-т. – Челябинск, 1992
2. eLIBRARY.RU : научная электронная библиотека : сайт. – Москва, 2000 – . – URL: <https://elibrary.ru> – Режим доступа: для зарегистрир. пользователей. – Текст : электронный.
3. Mathematical Reviews (MR) : реферативная база данных / American Mathematical Society. – URL: <http://www.ams.org/mathscinet/> – Яз. рус., англ. – Режим доступа: для зарегистрир. пользователей ЧелГУ. – Текст : электронный.

8. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Для реализации дисциплины используются учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, а также помещения для самостоятельной работы.

Учебные аудитории укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения. Для проведения занятий лекционного типа предлагаются наборы демонстрационного оборудования и учебно-наглядных пособий таких как презентации лекций, размещенные в системе Moodle.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с подключением к сети "Интернет" и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду университета.

9. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

В случае применения при обучении дисциплины электронного обучения, дистанционных образовательных технологий общение обучающихся и преподавателя осуществляется в режиме реального времени (онлайн-лекции (вебинары), чаты, видеоконференции и др.) или отложенного времени (система дистанционного обучения Moodle, форумы, электронная почта и др.).

При обучении лиц с ограниченными возможностями здоровья электронное обучение, дистанционные образовательные технологии предусматривают возможность приема-передачи информации в доступных для них формах.

Реализация дисциплины с применением электронного обучения, дистанционных образовательных технологий (далее – ЭО, ДОТ) осуществляется на основании «Положения о реализации основных и дополнительных образовательных программ с применением электронного обучения и дистанционных образовательных технологий в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Челябинский государственный университет», «Положения о порядке зачета обучающимися по основным профессиональным образовательным программам высшего образования в ФГБОУ ВО «ЧелГУ» результатов освоения в организациях, осуществляющих образовательную деятельность, учебных предметов, курсов, дисциплин (модулей), практик, дополнительных образовательных программ» посредством электронной информационно-образовательной среды ФГБОУ ВО «ЧелГУ». В исключительных случаях (форс-мажор и т.п.) при реализации образовательной деятельности с применением ЭО, ДОТ могут применять компоненты, не входящие в перечень электронной информационно-образовательной среды.

10. СПЕЦИАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ ОБУЧАЮЩИМИСЯ С ИНВАЛИДНОСТЬЮ И ОГРАНИЧЕННЫМИ ВОЗМОЖНОСТЯМИ ЗДОРОВЬЯ

Освоение дисциплины инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья осуществляется с использованием специальных технических средств и голо информационных технологий, предоставляемых Ресурсным учебно-методическим центром по обучению инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья ЧелГУ по запросу обучающегося.

1. Мобильные специальные технические средства для лиц с нарушениями зрения: портативный компьютер с вводом/выводом шрифтом Брайля с синтезатором речи «EiBraile-W14J G2»; ноутбуки с программной экранного доступа NVDA; электронные увеличители для удаленного просмотра; видеувеличители портативные; тифлоплеер; цифровые диктофоны.



2. Мобильные специальные технические средства для лиц с нарушениями слуха: система свободного звукового поля со встроенной совместимостью с FM-устройствами; радиоклассы «Сонет-PCM» с передатчиком, заушным индуктором и индукционной петлей; система информационная для слабослышащих переносная «Исток» А2 со встроенным плеером – звуковым информатором; документ-камера; программируемые слуховые аппараты индивидуального пользования.

3. Ассистивные информационные технологии: программное обеспечение экранного доступа с синтезом речи NVDA; программы экранного увеличения; программы речевого синтеза для компьютеров и ноутбуков; программы речевого синтеза для мобильных устройств; экранная клавиатура; экранная лупа.

При необходимости для обучающихся с нарушениями зрения на рабочих местах для проведения практических или лабораторных занятий устанавливается специальное программное обеспечение (программа речевой навигации NVDA, речевые синтезаторы, экранные лупы).

В учебные аудитории обеспечивается беспрепятственный доступ для обучающихся инвалидов и обучающихся с ограниченными возможностями здоровья. В каждой аудитории, где обучаются инвалиды и лица с ограниченными возможностями здоровья, предусматривается соответствующее количество мест для обучающихся с учетом нарушений их здоровья.

Для освоения дисциплины инвалидам и лицам с ограниченными возможностями здоровья предоставляется доступ к печатным источникам, имеющимся в научной библиотеке ЧелГУ, с помощью специальных технических средств; доступ к электронным источникам, представленным в форме электронного документа в фонде научной библиотеки ЧелГУ или электронно-библиотечных системах, с помощью специальных технических и программных средств (рабочее место для незрячего пользователя с программным обеспечением экранного доступа с синтезом речи NVDA, рабочее место с компьютерным роллером и клавиатурой Clever с большими кнопками и с разделяющей клавиши накладкой).

Учебно-методические материалы для обучающихся из числа инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья предоставляются в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации:

Для лиц с нарушениями зрения:

- в печатной форме увеличенным шрифтом,
- в форме электронного документа,
- в форме аудиофайла,
- в печатной форме шрифтом Брайля.

Для лиц с нарушениями слуха:

- в печатной форме,
- в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата:

- в печатной форме,
- в форме электронного документа,
- в форме аудиофайла.

Данный перечень может быть конкретизирован в зависимости от контингента обучающихся.

Для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья освоение дисциплины может быть частично или полностью осуществлено с использованием дистанционных образовательных технологий (Moodle, Adobe Connect Pro и пр.).

В освоении дисциплины инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья используется индивидуальная работа. Под индивидуальной работой подразумевается две формы взаимодействия с преподавателем: индивидуальная учебная работа (консультации), т. е. дополнительное разъяснение учебного материала и углубленное изучение материала с теми обучающимися, которые в этом заинтересованы, и индивидуальная воспитательная работа. Индивидуальные консультации направлены на индивидуализацию обучения и установлению воспитательного контакта между преподавателем и обучающимся инвалидом или обучающимся с ограниченными возможностями здоровья.

При проведении процедуры оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья по дисциплине обеспечивается выполнение следующих дополнительных требований в зависимости от индивидуальных особенностей, обучающихся:

- а) инструкция по порядку проведения процедуры оценивания предоставляется в доступной форме (устно, в письменной форме, в письменной форме шрифтом Брайля, устно с использованием услуг сурдопереводчика);
- б) доступная форма предоставления заданий оценочных средств (в печатной форме, в печатной форме увеличенным шрифтом, в печатной форме шрифтом Брайля, в форме электронного документа, задания зачитываются ассистентом, задания предоставляются с использованием сурдоперевода);
- в) доступная форма предоставления ответов на задания (письменно на бумаге, набор ответов на компьютере, письменно шрифтом Брайля, с использованием услуг ассистента, устно).

При проведении процедуры оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья предусматривается использование технических средств, необходимых им в связи с их индивидуальными особенностями. Эти средства могут быть предоставлены ЧелГУ или могут использоваться собственные технические



МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Челябинский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ЧелГУ»)

Рабочая программа дисциплины "Методы оптимизации" по направлению подготовки (специальности) 01.03.02 "Прикладная математика и информатика" направленности (профилю) Прикладная математика и искусственный интеллект ФГБОУ ВО «ЧелГУ»

стр. 7

средства. При необходимости инвалидам и лицам с ограниченными возможностями здоровья предоставляется дополнительное время для подготовки ответа на задания, процедура оценивания результатов обучения по дисциплине может проводиться в несколько этапов.

Проведение процедуры оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья допускается с использованием дистанционных образовательных технологий.

Лабораторная работа 4. Метод наискорейшего спуска.

В данной работе продолжают рассматриваться градиентные методы решения задачи

$$\min f(\bar{x}), \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n,$$

где $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывно дифференцируемая функция.

Алгоритм, описывающий итерационный процесс, повторяет алгоритм из лабораторной работы 3 во всем, кроме способа определения величины шага α_k на каждой итерации.

АЛГОРИТМ

Шаг 0. Выбрать начальное приближение $\bar{x}_1 \in \mathbb{R}^n$. Задать точность $\varepsilon > 0$, номер итерации $k=1$.

Шаг 1. Определить шаг α_k (см. пункт 4.1.).

Шаг 2. Положить $\bar{x}_{k+1} = \bar{x}_k - \alpha_k \nabla f(\bar{x}_k)$.

Шаг 3. Проверить условие остановки: если $\|\nabla f(\bar{x}_{k+1})\| > \varepsilon$, то $k:=k+1$ и перейти к шагу 1, иначе остановиться и принять \bar{x}_{k+1} приближенным решением.

4.1. Выбор шага в методе наискорейшего спуска

В рассматриваемом методе значение шага на k -той итерации (т.е. α_k) определяется как решение следующей задачи одномерной оптимизации:

$$\min_{\alpha \geq 0} f(\bar{x}_k - \alpha \nabla f(\bar{x}_k)).$$

Заметим, что, если функция $f(\bar{x})$ выпукла, то функция $F(\alpha) = f(\bar{x}_k - \alpha \nabla f(\bar{x}_k))$ также выпукла, а, следовательно, унимодальна. Поэтому, положив некоторое максимальное значение шага α_{\max} , получим задачу минимизации унимодальной функции $F(\alpha)$ на отрезке $[0, \alpha_{\max}]$. Для решения этой задачи можно воспользоваться любым методом из лабораторных работ 1 и 2.

4.2. Задание

Выбрав некоторое начальное приближение, найти точку минимума функции $f(\bar{x})$ (в соответствии со своим вариантом из лабораторной работы 3) с точностью $\varepsilon = 0.01$ с помощью метода наискорейшего спуска (реализовать метод в виде программы для ЭВМ).

Создать и использовать при реализации метода из данной лабораторной работы класс Point с перегруженными операторами сложения и умножения на число. Определить $F(\alpha)$ как лямбда-функцию и передать ее в качестве параметра в один из методов одномерной оптимизации (см. лабораторные работы 1 и 2) для нахождения α_k .

Лабораторная работа 1. Методы одномерной оптимизации: метод дихотомии, метод деления отрезка пополам.

Рассматривается задача минимизации унимодальной функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ на отрезке $[a, b]$:

$$f(x) \rightarrow \min, \quad x \in [a, b]. \quad (1.1)$$

Определение. Функция $f(x)$ называется *унимодальной*, если существует такое x_* , что из неравенств $x_* < x_1 < x_2$ следует

$$f(x_*) < f(x_1) < f(x_2),$$

а из неравенств $x_1 < x_2 < x_*$ следует

$$f(x_*) < f(x_2) < f(x_1).$$

Другими словами, слева от x_* функция $f(x)$ монотонно убывает, а справа монотонно возрастает. Таким образом, x_* является единственной точкой минимума функции $f(x)$.

Унимодальные функции обладают следующим свойством: если взять $x, y \in (a, b)$ такие, что $x < y$, то

$$x_* \in \begin{cases} [a, y], & \text{если } f(x) < f(y), \\ [x, b], & \text{если } f(x) \geq f(y). \end{cases} \quad (1.2)$$

Отрезок, содержащий точку минимума, называется ее *отрезком локализации*. Из (1.2) следует, что для уменьшения отрезка локализации точки минимума унимодальной функции достаточно сравнить ее значения в двух внутренних точках этого отрезка.

Алгоритм последовательного сжатия отрезка локализации.

Положим $[a_1, b_1] = [a, b]$ и для $k = 1, 2, \dots$ построим отрезки $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ следующим образом

$$[a_{k+1}, b_{k+1}] = \begin{cases} [a_k, y_k], & \text{если } f(x_k) < f(y_k), \\ [x_k, b_k], & \text{если } f(x_k) \geq f(y_k). \end{cases}$$

Здесь $x_k < y_k$ – внутренние точки отрезка $[a_k, b_k]$, которые выбираются на каждой итерации согласно некоторому правилу. Процедура сжатия отрезка локализации заканчивается при выполнении условия $b_k - a_k \leq \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ – заданная точность решения задачи (1.1), а в качестве приближенного решения задачи (1.1) берется середина последнего отрезка локализации.

Все последующие методы в лабораторных работах 1 и 2 будут включать в себя алгоритм последовательного сжатия отрезка локализации, отличаясь лишь правилом выбора точек x и y .

1.1. Метод дихотомии

Идея метода состоит в вычислении на каждой итерации значений функции f в двух точках, отстоящих на величину α по обе стороны от середины отрезка локализации:

$$x_k = \frac{a_k + b_k}{2} - \alpha, \quad (1.3)$$

$$y_k = \frac{a_k + b_k}{2} + \alpha, \quad (1.4)$$

где $\alpha > 0$ – достаточно малое число, которое называется *константой различимости*, удовлетворяющее следующим свойствам:

- α ограничено снизу погрешностью представления чисел в ЭВМ;
- $2\alpha < \varepsilon$.

АЛГОРИТМ

Шаг 0. Задать точность $\varepsilon > 0$, константу различимости $\alpha > 0$, концы отрезка локализации $a_1 = a$ и $b_1 = b$, номер итерации $k=1$.

Шаг 1. Если $b_k - a_k \leq \varepsilon$, то вычислить $x_* = \frac{a_k + b_k}{2}$ и закончить поиск (x_* – решение задачи минимизации). Иначе: вычислить x_k, y_k по формулам (1.3) и (1.4); затем вычислить $f(x_k)$ и $f(y_k)$.

Шаг 2. Если $f(x_k) > f(y_k)$, то $a_{k+1} = x_k, b_{k+1} = b_k$; если $f(x_k) \leq f(y_k)$, то $a_{k+1} = a_k, b_{k+1} = y_k$.

Шаг 3. $k:=k+1$ и перейти к шагу 1.

1.2. Метод деления отрезка пополам

На каждой итерации отрезок локализации делится на две половины. Значения функции $f(x)$ вычисляются в двух точках, которые являются серединами левого и правого отрезков:

$$x_k = a_k + \frac{b_k - a_k}{4}, \quad (1.5)$$

$$y_k = b_k - \frac{b_k - a_k}{4}. \quad (1.6)$$

АЛГОРИТМ

Шаг 0. Задать точность $\varepsilon > 0$, концы отрезка локализации $a_1 = a$ и $b_1 = b$, номер итерации $k=1$.

Вычислить середину отрезка $c_1 = \frac{a+b}{2}$ и $f(c_1)$.

Шаг 1. Если $b_k - a_k \leq \varepsilon$, то закончить поиск (c_k – решение задачи минимизации). Иначе: вычислить x_k, y_k по формулам (1.5) и (1.6); затем вычислить $f(x_k)$ и $f(y_k)$.

Шаг 2. Если $f(x_k) < f(c_k)$, то $b_{k+1} = c_k, a_{k+1} = a_k, c_{k+1} = x_k, f(c_{k+1}) = f(x_k)$ и перейти к шагу 5; иначе перейти к шагу 3.

Шаг 3. Если $f(y_k) < f(c_k)$, то $a_{k+1} = c_k, b_{k+1} = b_k, c_{k+1} = y_k, f(c_{k+1}) = f(y_k)$ и перейти к шагу 5; иначе перейти к шагу 4.

Шаг 4. Положить $a_{k+1} = x_k, b_{k+1} = y_k, c_{k+1} = c_k, f(c_{k+1}) = f(c_k)$ и перейти к шагу 5.

Шаг 5. $k:=k+1$ и перейти к шагу 1.

1.3. Задание

Найти точку минимума функции $f(x)$ (в соответствии со своим вариантом) на отрезке $[a, b]$ с точностью $\varepsilon = 0.01$ с помощью метода дихотомии и метода деления отрезка пополам (реализовать методы в виде программ для ЭВМ).

Вариант 1. $f(x) = \max\{x; |x - 1|\} + x^2$, $[a, b] = [-2, 2]$.

Вариант 2. $f(x) = \max\{x^2 + 1; 2|x + 1|\}$, $[a, b] = [-4, 3]$.

Вариант 3. $f(x) = \sin x + x^2$, $[a, b] = [-3, 0]$.

Вариант 4. $f(x) = e^{x^2} + |x + 1|$, $[a, b] = [-2, 2]$.

Вариант 5. $f(x) = \sin(x + 1) + |x|$, $[a, b] = [-2, 2]$.

Вариант 6. $f(x) = \cos(x - 1) + |x|$, $[a, b] = [-2, 2]$.

Вариант 7. $f(x) = \max\{x; \sin x\}$, $[a, b] = [-3, 1]$.

Вариант 8. $f(x) = \max\{x^2; |x - 1|\}$, $[a, b] = [-3, 3]$.

Вариант 9. $f(x) = |\sin(0.25x^2) + 1|$, $[a, b] = [3, 5]$.

Вариант 10. $f(x) = |x - 3| + |x + 2| + |x + 1|$, $[a, b] = [-3, 4]$.

Вариант 11. $f(x) = 2x + |x + 1| + 2|x - 2|$, $[a, b] = [-3, 3]$.

Вариант 12. $f(x) = |x + 4| + x^2 + 10x + 15$, $[a, b] = [-7, -3]$.

Вариант 13. $f(x) = \max\{|x| + 1; x^2 + 4x + 4\}$, $[a, b] = [-5, 3]$.

Вариант 14. $f(x) = |\operatorname{tg}(x + 1)| + x^2$, $[a, b] = [-2, 0]$.

Вариант 15. $f(x) = \max\{\operatorname{tg} x; |x - 1|\}$, $[a, b] = [-1, 1]$.

Вариант 16. $f(x) = e^{x^2+x} + e^{x^2+1}$, $[a, b] = [-1, 1]$.

Вариант 17. $f(x) = (x - 1)^4 + x^2$, $[a, b] = [-1, 2]$.

Вариант 18. $f(x) = e^{x^2-2x+1} + x^4$, $[a, b] = [0, 2]$.

Вариант 19. $f(x) = \max\{\operatorname{tg} x; (x - 1)^2\}$, $[a, b] = [-1, 1]$.

Вариант 20. $f(x) = |\operatorname{tg}(0.1x^2 + 1)| + x$, $[a, b] = [-2, 0]$.

Лабораторная работа 3. Градиентный метод с дроблением шага.

В данной работе рассматривается метод градиентного спуска решения задачи

$$\min f(\bar{x}), \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n,$$

где $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывно дифференцируемая функция. Одним из условий остановки итерационного процесса в данном методе является нахождение точки $\bar{x}_* \in \mathbb{R}^n$, для которой $\nabla f(\bar{x}_*) = \bar{0}$ (на практике это условие можно заменить на $\|\nabla f(\bar{x}_*)\| \leq \varepsilon$, где ε – заданная точность). Такие точки \bar{x}_* называются *стационарными*. Если функция f выпукла, то найденная стационарная точка является точкой абсолютного минимума для функции f .

Определение. Вектор $\bar{p} \in \mathbb{R}^n$ называется направлением спуска дифференцируемой функции f в точке $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, если при всех достаточно малых $\alpha > 0$ верно неравенство $f(\bar{x} + \alpha\bar{p}) < f(\bar{x})$.

Замечание. Последнее неравенство означает убывание функции f при смещении аргумента вдоль направления \bar{p} .

Следствие. Пусть вектор \bar{p} направление спуска функции f в точке \bar{x} . Разложим функцию f в окрестности точки \bar{x} по формуле Тейлора:

$$f(\bar{x} + \alpha\bar{p}) = f(\bar{x}) + \alpha \langle \nabla f(\bar{x}), \bar{p} \rangle + o(\alpha) \text{ при } \alpha \rightarrow 0.$$

Тогда $\langle \nabla f(\bar{x}), \bar{p} \rangle < 0$.

Направление *антиградиента* $\bar{p} = -\nabla f(\bar{x})$ является направлением *наискорейшего* спуска в любой точке \bar{x} , для которой $\nabla f(\bar{x}) \neq \bar{0}$.

АЛГОРИТМ

Шаг 0. Выбрать начальное приближение $\bar{x}_1 \in \mathbb{R}^n$ и величину шага $\alpha > 0$. Задать точность $\varepsilon > 0$, номер итерации $k=1$.

Шаг 1. Определить шаг α_k (см. пункт 3.1.).

Шаг 2. Положить $\bar{x}_{k+1} = \bar{x}_k - \alpha_k \nabla f(\bar{x}_k)$.

Шаг 3. Проверить условие остановки: если $\|\nabla f(\bar{x}_{k+1})\| > \varepsilon$, то $k:=k+1$ и перейти к шагу 1, иначе остановиться и принять \bar{x}_{k+1} приближенным решением.

3.1. Выбор шага по правилу Армихо

Предположим, что заданы параметры $\gamma \in (0,1)$ и $\theta \in (0,1)$. Следующий алгоритм находит значение шага на k -той итерации (т.е. α_k) в предыдущем алгоритме.

АЛГОРИТМ

Шаг 0. Положить значение величины шага $\alpha_k = \alpha$.

Шаг 1. Проверить неравенство

$$f(\bar{x}_k - \alpha_k \nabla f(\bar{x}_k)) - f(\bar{x}_k) \leq -\gamma \alpha_k \|\nabla f(\bar{x}_k)\|^2. \quad (3.1)$$

Если неравенство (3.1) выполнено, то завершить работу алгоритма (по определению шага), иначе перейти к шагу 2.

Шаг 2. Произвести дробление шага $\alpha_k := \theta \alpha_k$ и перейти к шагу 1.

3.2. Задание

Выбрав некоторое начальное приближение, найти точку минимума функции $f(x)$ (в соответствии со своим вариантом) с точностью $\varepsilon = 0.01$ с помощью градиентного метода с выбором шага по правилу Армихо (реализовать метод в виде программы для ЭВМ).

Проанализировать для своей задачи как выбор параметров α , γ и θ влияет на количество итераций в процессе работы программы.

Создать и использовать при реализации метода из данной лабораторной работы класс Point с перегруженными операторами сложения и умножения на число.

Вариант 1. $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 3x_2^4 + 4x_2 + 1.$

Вариант 2. $f(x_1, x_2) = e^{x_1} + (x_1 + x_2)^4 + e^{2x_2}.$

Вариант 3. $f(x_1, x_2) = e^{2+x_1^2+x_2^2} + x_1 + x_2.$

Вариант 4. $f(x_1, x_2) = e^{-x_1} + (2x_1 - x_2)^2 + e^{x_2}.$

Вариант 5. $f(x_1, x_2) = e^{x_1} + (x_1 - x_2)^2 + e^{-2x_2}.$

Вариант 6. $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2 + 1 + (x_2 - x_1 + 1)^4 + e^{x_2}.$

Вариант 7. $f(x_1, x_2) = e^{x_1} + (2x_1 - x_2)^2 + e^{-2x_2}.$

Вариант 8. $f(x_1, x_2) = e^{x_1^2+2x_1} + (x_1 + x_2)^2 + e^{x_2^2-5x_2}.$

Вариант 9. $f(x_1, x_2) = e^{x_1^2-x_1} + 2x_1^2 + x_2^2 + e^{x_2^2+3x_2}.$

Вариант 10. $f(x_1, x_2) = e^{x_1^2-2x_1} + x_1^2 + x_2^2 + e^{x_2^2+3x_2}.$

Вариант 11. $f(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_1 + x_2 + (x_1 - x_2)^4 + e^{x_2}.$

Вариант 12. $f(x_1, x_2) = e^{x_1} + (x_1^2 + x_2^2)^2 + e^{-x_2}.$

Вариант 13. $f(x_1, x_2) = e^{x_1^2-2x_1} + x_1^4 + (x_2 - 1)^2 + e^{x_2^2+3x_2}.$

Вариант 14. $f(x_1, x_2) = e^{x_1^2-2x_1+1} + (2x_1 - x_2)^2 + e^{x_2^2-2x_2}.$

Вариант 15. $f(x_1, x_2) = e^{x_1^2+1} + (2x_1 - x_2)^2 + e^{x_2-1}.$

Вариант 16. $f(x_1, x_2) = e^{3x_1} + (x_1 + x_2)^2 + e^{2x_2}.$

Вариант 17. $f(x_1, x_2) = 2x_1^4 + x_2^2 + 3x_1 + 2x_2 + 5.$

Вариант 18. $f(x_1, x_2) = e^{x_1} + (x_1 + 3x_2)^2 + e^{2x_2+1}.$

Вариант 19. $f(x_1, x_2) = 4x_1^2 - 8x_1x_2 + 5x_2^2 + x_1.$

Вариант 20. $f(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 + x_2.$

Лабораторная работа 2. Методы одномерной оптимизации: метод золотого сечения, метод Фибоначчи.

2.1. Метод золотого сечения

Определение 1. Делением отрезка в отношении *золотого сечения* называется деление его на две неравные части так, чтобы отношение длины всего отрезка к длине его большей части было равно отношению длины большей части отрезка к длине его меньшей части.

При делении отрезка единичной длины в отношении золотого сечения длина большей части равна

$$\tau = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0,61803\dots$$

В *методе золотого сечения* в качестве пробных точек x_k и y_k на каждом шаге выбираются точки, делящие отрезок в отношении золотого сечения $[a_k, b_k]$:

$$x_k = a_k + (1-\tau)(b_k - a_k), \quad (2.1)$$

$$y_k = a_k + \tau(b_k - a_k). \quad (2.2)$$

В методе используется следующее замечательное свойство золотого сечения: точка x_k является одной из точек, задающих золотое сечение отрезка $[a_k, y_k]$, а точка y_k является одной из точек, задающих золотое сечение отрезка $[x_k, b_k]$. Можно показать, что $x_{k+1} = y_k$ или $y_{k+1} = x_k$. Это означает, что в одной из двух пробных точек (x_{k+1} или y_{k+1}) значение функции $f(x)$ уже вычислено на предыдущей итерации. Следовательно, при всех итерациях (кроме начальной) для сжатия отрезка локализации достаточно вычислить значение функции $f(x)$ **в одной точке**.

АЛГОРИТМ

Шаг 0. Задать точность $\varepsilon > 0$, концы отрезка локализации $a_1 = a$ и $b_1 = b$, номер итерации $k=1$. Вычислить x_1 , y_1 по формулам (2.1) и (2.2). Затем вычислить $f(x_1)$, $f(y_1)$.

Шаг 1. Если $b_k - a_k \leq \varepsilon$, то вычислить $x^* = \frac{a_k + b_k}{2}$ и закончить поиск (x^* – решение задачи минимизации). Иначе: если $f(x_k) > f(y_k)$, то перейти к шагу 2; если $f(x_k) \leq f(y_k)$, то перейти к шагу 3.

Шаг 2. Положить $a_{k+1} = x_k$, $b_{k+1} = b_k$, $x_{k+1} = y_k$ и $f(x_{k+1}) = f(y_k)$. Затем вычислить $y_{k+1} = a_{k+1} + \tau(b_{k+1} - a_{k+1})$, $f(y_{k+1})$ и перейти к шагу 4.

Шаг 3. Положить $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = y_k$, $y_{k+1} = x_k$ и $f(y_{k+1}) = f(x_k)$. Затем вычислить $x_{k+1} = a_{k+1} + (1-\tau)(b_{k+1} - a_{k+1})$, $f(x_{k+1})$ и перейти к шагу 4.

Шаг 4. $k := k+1$ и перейти к шагу 1.

2.2. Метод Фибоначчи

Метод аналогичен методу золотого сечения. Отличие состоит в том, что параметр τ определяется на каждой итерации как дробь, где числитель и знаменатель берутся из последовательности Фибоначчи.

Определение 2. *Последовательностью Фибоначчи* называется последовательность чисел, удовлетворяющая рекуррентному соотношению

$$F_0 = F_1 = 1, \quad F_{k+1} = F_k + F_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Значения функции $f(x)$ вычисляются в точках, которые задаются формулами

$$x_k = a_k + \frac{F_{n-k-1}}{F_{n-k+1}}(b_k - a_k), \quad (2.3)$$

$$y_k = a_k + \frac{F_{n-k}}{F_{n-k+1}}(b_k - a_k), \quad (2.4)$$

где $k=1, \dots, n-1$. Здесь число n – необходимое количество итераций, которое выбирается до начала вычислений и обусловлено требуемой точностью ε :

$$n = \min \left\{ k \in \mathbb{N} : \varepsilon \geq \frac{b_1 - a_1}{F_k} \right\}.$$

Заметим также, что $F_{n-k+1} = F_{n-k} + F_{n-k-1}$, а, следовательно,

$$\frac{F_{n-k-1}}{F_{n-k+1}} + \frac{F_{n-k}}{F_{n-k+1}} = 1.$$

АЛГОРИТМ

Шаг 0. Задать точность $\varepsilon > 0$, константу различимости $\alpha > 0$, концы отрезка локализации $a_1 = a$ и $b_1 = b$, номер итерации $k=1$. Вычислить x_1, y_1 по формулам (2.3) и (2.4). Затем вычислить $f(x_1), f(y_1)$. Найти количество итераций n .

Шаг 1. Если $k < n-1$, то перейти к шагу 2; иначе перейти к шагу 6.

Шаг 2. Если $f(x_k) > f(y_k)$, то перейти к шагу 3; иначе перейти к шагу 4.

Шаг 3. Положить $a_{k+1} = x_k, b_{k+1} = b_k, x_{k+1} = y_k, f(x_{k+1}) = f(y_k)$. Затем вычислить

$$y_{k+1} = a_{k+1} + \frac{F_{n-k-1}}{F_{n-k}}(b_{k+1} - a_{k+1}),$$

$f(y_{k+1})$ и перейти к шагу 5.

Шаг 4. Положить $a_{k+1} = a_k, b_{k+1} = y_k, y_{k+1} = x_k, f(y_{k+1}) = f(x_k)$. Затем вычислить

$$x_{k+1} = a_{k+1} + \frac{F_{n-k-2}}{F_{n-k}}(b_{k+1} - a_{k+1}),$$

$f(x_{k+1})$ и перейти к шагу 5.

Шаг 5. $k:=k+1$ и перейти к шагу 1.

Шаг 6. Положить $x_n = x_{n-1}, y_n = y_{n-1} + \alpha$, вычислить $f(x_n)$ и $f(y_n)$. Если $f(x_n) > f(y_n)$, то $a_n = x_n$ и $b_n = b_{n-1}$; иначе $a_n = a_{n-1}$ и $b_n = y_n$. Решение задачи минимизации – $x^* = \frac{a_n + b_n}{2}$.

Замечание. В шаге 5 необходима константа различимости $\alpha > 0$, т.к. из формул (2.3) и (2.4) следует, что $x_{n-1} = y_{n-1}$.

2.3. Задание

Найти точку минимума целевой функции $f(x)$ (в соответствии со своим вариантом из лабораторной работы 1) на отрезке $[a, b]$ с точностью $\varepsilon = 0.01$ с помощью метода золотого сечения и метода Фибоначчи (реализовать методы в виде программ для ЭВМ).

Контрольная работа № 1
по дисциплине «Методы оптимизации»

Вариант 1

1. Проверить выпуклость функции $\max\{e^x, 1-x, 2\} + |x|$.
2. Доказать, что функция $y = x^2 - 3x + 2$ выпукла
3. Показать, что множество $X = \{x \in R^2 : x_1^2 + x_2^2 = 4, x_2 \geq 0\}$ выпукло.

Лабораторная работа 5. Метод сопряженных градиентов.

В данной работе рассматривается метод Флетчера-Ривса для решения задачи

$$\min f(\bar{x}), \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n,$$

где функция $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ является квадратичной. В итерационном процессе этого метода кроме направления антиградиента используются также сопряженные к нему направления.

5.1. Основные определения

Определение 1. Два вектора $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$ называются *сопряженными* по отношению к матрице H (или H -сопряженными), если скалярное произведение $\langle \bar{x}, H\bar{y} \rangle = 0$. Здесь H – симметричная положительно определенная матрица размерности $n \times n$.

Замечание. Если функция $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ строго выпукла, то ее матрица Гессе (матрица вторых частных производных) во всех точках является симметричной положительно определенной матрицей.

Определение 2. Векторы $S_1, \dots, S_n \in \mathbb{R}^n$ называются сопряженными по отношению к матрице H , если

$$\begin{aligned} \langle S_i, HS_j \rangle &= 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n; \\ \langle S_i, HS_i \rangle &> 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

5.2. Построение системы сопряжённых направлений

Для последовательности итераций метода $\{\bar{x}_k\}$ построим систему сопряженных направлений по отношению к матрице Гессе функции $f(\bar{x})$ согласно следующему правилу:

$$d_1 = \nabla f(\bar{x}_1), \quad (5.1)$$

$$d_k = \nabla f(\bar{x}_k) + \omega_{k-1} d_{k-1} \quad \text{для } k > 1, \quad (5.2)$$

где ω_{k-1} вычисляется по формуле

$$\omega_{k-1} = \frac{\|\nabla f(\bar{x}_k)\|^2}{\|\nabla f(\bar{x}_{k-1})\|^2}.$$

5.3. Алгоритм

Шаг 0. Выбрать начальное приближение $\bar{x}_1 \in \mathbb{R}^n$. Задать точность $\varepsilon > 0$, номер итерации $k=1$.

Шаг 1. Проверить условие остановки: если $\|\nabla f(\bar{x}_k)\| > \varepsilon$, то перейти к шагу 2; иначе остановиться и принять \bar{x}_k приближенным решением.

Шаг 2. Рассчитать направление d_k по правилу (5.1), (5.2).

Шаг 3. Вычислить шаг α как решение задачи $\min_{\alpha \geq 0} f(\bar{x}_k - \alpha d_k)$.

Шаг 4. Положить $\bar{x}_{k+1} = \bar{x}_k - \alpha d_k$.

Шаг 5. $k:=k+1$ и перейти к шагу 1.

5.4. Сходимость метода

Теорема. Если квадратичная функция $f(\bar{x}) = \frac{1}{2} \langle \bar{x}, A\bar{x} \rangle + \langle \bar{b}, \bar{x} \rangle + c$ с положительно определенной матрицей A достигает своего минимального значения на \mathbb{R}^n , то метод Флетчера-Ривса обеспечивает отыскание точки минимума функции не более чем за n шагов.

5.5. Задание

Выбрав некоторое начальное приближение, найти точку минимума функции

$$f(\bar{x}) = \frac{1}{2} \langle \bar{x}, A\bar{x} \rangle + \langle \bar{b}, \bar{x} \rangle + c, \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^3$$

(матрицу A , вектор \bar{b} и число c следует взять в соответствии со своим вариантом) с точностью $\varepsilon = 0.01$ с помощью метода Флетчера-Ривса (реализовать метод в виде программы для ЭВМ).

Использовать при реализации метода из данной лабораторной работы класс Point с перегруженными операторами сложения и умножения на число. Кроме того, необходимо написать функции для операций скалярного произведения и умножения матрицы на вектор, чтобы затем использовать их в реализации функции $f(\bar{x})$.

Вариант 1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $c = 1$. **Вариант 2.** $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\bar{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$, $c = 2$.

Вариант 3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0.5 \\ 1 & 0.5 & 1 \end{pmatrix}$, $\bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $c = 1$. **Вариант 4.** $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c = 2$.

Вариант 5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 1 \\ 0.5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\bar{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$, $c = 1$. **Вариант 6.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0.5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0.5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $c = 0$.

Вариант 7. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$, $c = -9$. **Вариант 8.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\bar{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $c = 1$.

Вариант 9. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\bar{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$, $c = 10$. **Вариант 10.** $A = \begin{pmatrix} 2 & 1.5 & 1 \\ 1.5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $c = 1$.

Вариант 11. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $c = 4$. **Вариант 12.** $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\bar{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c = 0$.

Вариант 13. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\bar{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$, $c = 6$. **Вариант 14.** $A = \begin{pmatrix} 2.5 & 1 & 1 \\ 1 & 1.5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\bar{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$, $c = 4$.

Вариант 15. $A = \begin{pmatrix} 1.5 & -1 & 1 \\ -1 & 1.5 & -1 \\ 1 & -1 & 1.5 \end{pmatrix}$, $\bar{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c = 7$. **Вариант 16.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1.5 & 1 \\ 1 & 1 & 2.5 \end{pmatrix}$, $\bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $c = 7$.

Вариант 17. $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\bar{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$, $c = 0$. **Вариант 18.** $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c = -1$.

Вариант 19. $A = \begin{pmatrix} 3.5 & -1 & -1 \\ -1 & 1.5 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $\bar{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $c = 0$. **Вариант 20.** $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c = 0$.

Лабораторная работа 7. Квазиньютоновские методы.

Для многих задач многомерной оптимизации

$$\min f(\bar{x}), \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n,$$

где функция $f(\bar{x})$ имеет достаточно сложное строение, вычисление матрицы Гессе (матрицы вторых частных производных) и обратной к ней матрицы может оказаться чрезмерно сложной проблемой. Это препятствует применению метода Ньютона. Для таких случаев подходящей альтернативой могут оказаться квазиньютоновские методы, итерационный процесс в которых задается следующей формулой:

$$\bar{x}_{k+1} = \bar{x}_k - \alpha_k D_k \nabla f(\bar{x}_k),$$

где матрица D_k является некоторым приближением, используемым вместо матрицы обратной к матрице Гессе $-(H(f(\bar{x}_k)))^{-1}$.

Последовательность D_k определяется исходя из следующих соображений. Разложим градиент $\nabla f(\bar{x}_k)$ исследуемой функции в ряд Тейлора в окрестности точки \bar{x}_k , взяв $\bar{x} = \bar{x}_k$:

$$\nabla f(\bar{x}_{k+1}) = \nabla f(\bar{x}_k) + H(f(\bar{x}_k))(\bar{x}_{k+1} - \bar{x}_k) + o(\|\bar{x}_{k+1} - \bar{x}_k\|)$$

и преобразуем, отбросив $o(\|\bar{x}_{k+1} - \bar{x}_k\|)$,

$$(H(f(\bar{x}_k)))^{-1}(\nabla f(\bar{x}_{k+1}) - \nabla f(\bar{x}_k)) = \bar{x}_{k+1} - \bar{x}_k.$$

По аналогии с предыдущим равенством для матрицы D_{k+1} потребуем выполнение условия

$$D_{k+1}(\nabla f(\bar{x}_{k+1}) - \nabla f(\bar{x}_k)) = \bar{x}_{k+1} - \bar{x}_k. \quad (7.1)$$

Это условие называется **квазиньютоновским**.

Последовательность D_k , удовлетворяющая соотношениям (7.1), строится в виде

$$D_{k+1} = D_k + \Delta_k, \quad (7.2)$$

где Δ_k – матрица коррекции на k -той итерации, которая может быть построена различными способами (см., например, пункт 7.1.). В качестве первого элемента последовательности D_k можно взять некую положительно определенную матрицу, например, единичную матрицу размерности $n \times n$, т.е. $D_1 = E$.

АЛГОРИТМ

Шаг 0. Выбрать начальное приближение $\bar{x}_1 \in \mathbb{R}^n$. Задать точность $\varepsilon > 0$, номер итерации $k=1$. Задать матрицу D_1 .

Шаг 1. Определить шаг α_k как решение одномерной задачи $\min_{\alpha \geq 0} f(\bar{x}_k - \alpha D_k \nabla f(\bar{x}_k))$.

Шаг 2. Положить $\bar{x}_{k+1} = \bar{x}_k - \alpha_k D_k \nabla f(\bar{x}_k)$.

Шаг 3. Проверить условие остановки: если $\|\nabla f(\bar{x}_{k+1})\| > \varepsilon$, то $D_{k+1} = D_k + \Delta_k$ (см. пункт 7.1.), $k:=k+1$ и перейти к шагу 1, иначе остановиться и принять \bar{x}_{k+1} приближенным решением.

7.1. Одноранговая коррекция

Учитывая (7.2), квазиньютоновское условие (7.1) можно переписать в виде

$$\Delta_k(\nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k)) = x_{k+1} - x_k - D_k(\nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k)).$$

Отметим, что такому условия удовлетворяет большое количество матриц. Прямой подстановкой можно показать, что относительно Δ_k предыдущее уравнение имеет следующее решение:

$$\Delta_k = \frac{(x_{k+1} - x_k)y^T}{y^T(\nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k))} - \frac{D_k(\nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k))z^T}{z^T(\nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k))},$$

где y и z – произвольные n -мерные векторы, индекс T – операция транспонирования.

Замечание. Все векторы в предыдущем равенстве предполагаются векторами-столбцами, следовательно, для векторов $a, b \in \mathbb{R}^n$ результат умножения $b^T a$ является числом, а результат умножения ab^T является матрицей размерности $n \times n$.

Например, если

$$y = z = x_{k+1} - x_k - D_k(\nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k)),$$

то получим симметричную формулу ранга один для вычисления Δ_k :

$$\Delta_k = \frac{(\Delta x_k - D_k * \Delta g_k) * (\Delta x_k - D_k * \Delta g_k)^T}{(\Delta x_k - D_k * \Delta g_k)^T * \Delta g_k}.$$

Здесь обозначено $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$, $\Delta g_k = \nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k)$.

7.2. Задание

Выбрав некоторое начальное приближение, найти точку минимума функции $f(x)$ (в соответствии со своим вариантом из лабораторной работой 6) с точностью $\varepsilon = 0.01$ с помощью квазиньютоновского метода с одноранговой коррекцией (реализовать метод в виде программы для ЭВМ).

Использовать при реализации метода из данной лабораторной работы класс `Point` с перегруженными операторами сложения и умножения на число. Кроме того, необходимо написать функции для операций сложения матриц, умножения матрицы на число и умножения матриц.

Лабораторная работа 6. Метод Ньютона.

Как и методы градиентного спуска метод Ньютона решения задачи

$$\min f(\bar{x}), \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n,$$

где $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция, находит точки $\bar{x}_* \in \mathbb{R}^n$, для которых $\nabla f(\bar{x}_*) = \bar{0}$. Однако заметим, что в окрестности стационарной точки частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ малы (по абсолютному значению), что существенно замедляет процесс вычисления в градиентных методах. Поэтому в тех случаях, когда это возможно, имеет смысл применять методы, использующие информацию о вторых частных производных функции f , например, метод Ньютона.

В данной работе будем предполагать, что исследуемая на минимум функция $f(\bar{x})$ **строго выпукла**, а, следовательно, матрица Гессе (матрица вторых частных производных) этой функции – $H(f(\bar{x}))$ положительно определена.

Разложим функцию $f(\bar{x})$ в окрестности точки \bar{x} такой, что $\nabla f(\bar{x}) \neq \bar{0}$, по формуле Тейлора:

$$f(\bar{x} + \alpha \bar{p}) = f(\bar{x}) + \alpha \langle \nabla f(\bar{x}), \bar{p} \rangle + \frac{\alpha^2}{2} \langle H(f(\bar{x})) \bar{p}, \bar{p} \rangle + o(\alpha^2),$$

где $\alpha > 0$ и $o(\alpha^2)/\alpha^2 \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow 0$. Чтобы найти направление наискорейшего убывания функции $f(\cdot)$ в окрестности точки \bar{x} , решим задачу многомерной минимизации по $\bar{p} \in \mathbb{R}^n$:

$$\langle \nabla f(\bar{x}), \bar{p} \rangle + \frac{\alpha}{2} \langle H(f(\bar{x})) \bar{p}, \bar{p} \rangle \rightarrow \min.$$

Исследуемая на минимум функция строго выпукла по \bar{p} , поэтому стационарная точка этой функции является точкой абсолютного минимума:

$$\nabla f(\bar{x}) + \alpha H(f(\bar{x})) \bar{p} = \bar{0} \Rightarrow \bar{p} = -\frac{1}{\alpha} (H(f(\bar{x})))^{-1} \nabla f(\bar{x}).$$

Исходя из этого, получим формулу, описывающую итерационный процесс в методе Ньютона:

$$\bar{x}_{k+1} = \bar{x}_k - H_k^{-1} \nabla f(\bar{x}_k).$$

Здесь и далее за H_k будем обозначать матрицу Гессе функции $f(\bar{x})$, вычисленную на k -той итерации (т.е. в точке \bar{x}_k).

6.1. Метод Ньютона-Рафсона

Метод Ньютона-Рафсона является модификацией метода Ньютона, в которой величина шага на каждой итерации определяется как решение задачи одномерной оптимизации.

АЛГОРИТМ

Шаг 0. Выбрать начальное приближение $\bar{x}_1 \in \mathbb{R}^n$. Задать точность $\varepsilon > 0$, номер итерации $k=1$.

Шаг 1. Вычислить H_k^{-1} .

Шаг 2. Определить шаг α_k как решение одномерной задачи $\min_{\alpha \geq 0} f(\bar{x}_k - \alpha H_k^{-1} \nabla f(\bar{x}_k))$.

Шаг 3. Положить $\bar{x}_{k+1} = \bar{x}_k - \alpha_k H_k^{-1} \nabla f(\bar{x}_k)$.

Шаг 4. Проверить условие остановки: если $\|\nabla f(\bar{x}_{k+1})\| > \varepsilon$, то $k:=k+1$ и перейти к шагу 1, иначе остановиться и принять \bar{x}_{k+1} приближенным решением.

6.2. Задание

Выбрав некоторое начальное приближение, найти точку минимума функции $f(x)$ (в соответствии со своим вариантом) с точностью $\varepsilon=0.01$ с помощью метода Ньютона-Рафсона (реализовать метод в виде программы для ЭВМ).

Использовать при реализации метода из данной лабораторной работы класс Point с перегруженными операторами сложения и умножения на число. Кроме того, необходимо написать функции для операции умножения матрицы на вектор и вычисления обратной матрицы.

Вариант 1. $f(x_1, x_2) = e^{x_1} + (x_1 - x_2)^4 + e^{-2x_2}$.

Вариант 2. $f(x_1, x_2) = e^{x_1} + (x_1 + x_2)^4 + e^{2x_2}$.

Вариант 3. $f(x_1, x_2) = e^{-x_1} + (x_1 - x_2)^4 + e^{2x_2}$.

Вариант 4. $f(x_1, x_2) = e^{-x_1} + (2x_1 - x_2)^2 + e^{x_2}$.

Вариант 5. $f(x_1, x_2) = e^{x_1} + (x_1 - x_2)^2 + e^{-2x_2}$.

Вариант 6. $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2 + 1 + (x_2 - x_1 + 1)^4 + e^{x_2}$.

Вариант 7. $f(x_1, x_2) = e^{x_1} + (2x_1 - x_2)^2 + e^{-2x_2}$.

Вариант 8. $f(x_1, x_2) = e^{x_1^2 + 2x_1} + (x_1 + x_2)^2 + e^{x_2^2 - 5x_2}$.

Вариант 9. $f(x_1, x_2) = e^{x_1^2 - x_1} + 2x_1^2 + x_2^2 + e^{x_2^2 + 3x_2}$.

Вариант 10. $f(x_1, x_2) = e^{x_1^2 - 2x_1} + x_1^2 + x_2^2 + e^{x_2^2 + 3x_2}$.

Вариант 11. $f(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_1 + x_2 + (x_1 - x_2)^4 + e^{x_2}$.

Вариант 12. $f(x_1, x_2) = e^{x_1} + (x_1^2 + x_2^2)^2 + e^{-x_2}$.

Вариант 13. $f(x_1, x_2) = e^{x_1^2 - 2x_1} + x_1^4 + (x_2 - 1)^2 + e^{x_2^2 + 3x_2}$.

Вариант 14. $f(x_1, x_2) = e^{x_1^2 - 2x_1 + 1} + (2x_1 - x_2)^2 + e^{x_2^2 - 2x_2}$.

Вариант 15. $f(x_1, x_2) = e^{x_1^2 + 1} + (2x_1 - x_2)^2 + e^{x_2 - 1}$.

Вариант 16. $f(x_1, x_2) = e^{3x_1} + (x_1 + x_2)^2 + e^{2x_2}$.

Вариант 17. $f(x_1, x_2) = e^{3x_1} + (x_1 - x_2)^2 + e^{-2x_2}$.

Вариант 18. $f(x_1, x_2) = e^{x_1} + (x_1 + 3x_2)^2 + e^{2x_2 + 1}$.

Вариант 19. $f(x_1, x_2) = e^{x_1} + (x_1 - 3x_2)^2 + e^{-2x_2 + 1}$.

Вариант 20. $f(x_1, x_2) = e^{-x_1} + (2x_1 + x_2)^2 + e^{-x_2}$.

Контрольная работа № 2
по дисциплине «Методы оптимизации»

Вариант 1

Найти решение следующих задач методом множителей Лагранжа:

1.
$$\begin{cases} f(x_1, x_2) = 2x_1 - 3x_2 \rightarrow \min \\ x_1^2 + x_2^2 = 1 \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \rightarrow \min \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \leq 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

Тип контроля: промежуточная аттестация

Контрольное мероприятие: экзамен

1. Выпуклые множества. Теорема о строгой отделимости точки от выпуклого множества. Теорема об отделимости точки от выпуклого множества.
2. Выпуклые множества. Теорема об отделимости выпуклых множеств. Теорема о строгой отделимости выпуклых множеств.
3. Выпуклые функции. Критерии выпуклости дифференцируемой функции, зависящей от одной и нескольких переменных.
4. Выпуклые функции. Критерии выпуклости дважды дифференцируемой функции, зависящей от одной и нескольких переменных
5. Задача безусловной оптимизации. Понятие локального и глобального экстремума. Необходимое условие локального экстремума дифференцируемой функции, зависящей от одной переменной.
6. Критерий локального экстремума дважды дифференцируемой функции, зависящей от одной переменной.
7. Необходимое условие локального экстремума дифференцируемой функции, зависящей от нескольких переменных.
8. Критерий локального экстремума дважды дифференцируемой функции, зависящей от нескольких переменных.
9. Экстремальная задача с ограничениями типа равенств. Понятие локального и глобального экстремума экстремальной задачи. Правило множителей Лагранжа решения гладкой конечномерной задачи с ограничениями типа равенств.
10. Правило множителей Лагранжа решения гладкой конечномерной задачи с ограничениями типа равенств и неравенств.
11. Задача выпуклого программирования. Теорема Куна-Таккера.
12. Градиентные методы поиска минимума функции многих переменных: градиентный метод с постоянным шагом, градиентный метод с дроблением шага, метод наискорейшего спуска.
13. Метод сопряженных градиентов.
14. Метод Ньютона.
15. Понятие метаэвристических алгоритмов. Эволюционные методы оптимизации.
16. Методы «роевого интеллекта». Методы, копирующие физические процессы.

