

Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Таскаев Сергей Валерьевич
Должность: Ректор
Дата подписания: 15.09.2025 11:13:06
Уникальный программный ключ:
04c19ed8bfb98f3b6cb77a486b9a878808322523

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Челябинский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ЧелГУ»)

Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине
«Функциональный анализ» по направлению подготовки (специальности) 01.03.02
«Прикладная математика и информатика» направленности (профилю) Прикладная
математика и искусственный интеллект ФГБОУ ВО «ЧелГУ»

стр. 1

**Фонд оценочных средств
для промежуточной аттестации
по дисциплине (модулю)
Функциональный анализ**

Направление подготовки (специальность)
01.03.02 – Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль)
Прикладная математика и искусственный интеллект
Присваиваемая квалификация (степень)
Бакалавр

Форма обучения
Очная

Челябинск 2025 г.

МИНОБРНАУКИ РОССИИ Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Челябинский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ЧелГУ»)	
Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине «Функциональный анализ» по направлению подготовки (специальности) 01.03.02 «Прикладная математика и информатика» направленности (профилю) Прикладная математика и искусственный интеллект ФГБОУ ВО «ЧелГУ»	стр. 2

Содержание

1. Паспорт фонда оценочных средств
2. Перечень формируемых компетенций
 - 2.1. Компетенции, закреплённые за дисциплиной
3. Содержание оценочных средств по дисциплине
 - 3.1. Виды оценочных средств
 - 3.2. Содержание оценочных средств
4. Порядок проведения и критерии оценивания промежуточной аттестации
 - 4.1. Порядок проведения промежуточной аттестации
 - 4.2. Критерии оценивания промежуточной аттестации по видам оценочных средств.
 - 4.3. Результаты промежуточной аттестации и уровни сформированности компетенций

МИНОБРНАУКИ РОССИИ Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Челябинский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ЧелГУ»)	
Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине «Функциональный анализ» по направлению подготовки (специальности) 01.03.02 «Прикладная математика и информатика» направленности (профилю) Прикладная математика и искусственный интеллект ФГБОУ ВО «ЧелГУ»	стр. 3

1. ПАСПОРТ ФОНДА ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

Направление подготовки: 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»
 Направленность: Прикладная математика и искусственный интеллект

Дисциплина: Функциональный анализ
 Семестр (семестры) изучения: № семестра 6
 Форма (формы) промежуточной аттестации: Зачет

Примечание: для оценивания результатов используется балльно-рейтинговая система.

2. ПЕРЕЧЕНЬ ФОРМИРУЕМЫХ КОМПЕТЕНЦИЙ

2.1. Компетенции, закреплённые за дисциплиной

Изучение дисциплины «Функциональный анализ» направлено на формирование следующих компетенций:

Коды компетенции согласно ФГОС (ОПОП ВО)	Содержание компетенций согласно ФГОС (ОПОП ВО)	Индикаторы достижения компетенции согласно ОПОП	Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине
1	2	3	4
ОПК-1	Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1. Обладает фундаментальными знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук ОПК-1.2. Демонстрирует умение решать задачи, формулируемые в рамках математических и (или) естественных наук ОПК-1.3. Имеет навыки использования основных понятий, теорем, законов математики и (или) естественных наук для решения задач профессиональной деятельности	Знать: Основные понятия и методы функционального анализа и возможные приложения при решении прикладных задач. Уметь: Применять знание функционального анализа при решении задач, формулируемых в рамках математических или естественных наук, в профессиональной деятельности. Владеть: Методами применения функционального анализа при решении прикладных задач.

МИНОБРНАУКИ РОССИИ Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Челябинский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ЧелГУ»)	
Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине «Функциональный анализ» по направлению подготовки (специальности) 01.03.02 «Прикладная математика и информатика» направленности (профилю) Прикладная математика и искусственный интеллект ФГБОУ ВО «ЧелГУ»	стр. 4

СОДЕРЖАНИЕ ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

3.1 Виды оценочных средств

№ п/п	Код компетенции/ планируемые результаты обучения	Контролируемые темы/ разделы	Наименование оценочного средства для текущего контроля	Наименование оценочного средства на промежуточной аттестации/№ задания
1	ОПК-1/Способен применять знания по функциональному анализу при решении прикладных задач	Метрические и линейные нормированные пространства	Домашние задания	Вопросы к зачету
2		Линейные непрерывные операторы	Домашние задания	Вопросы к зачету
3		Основные теоремы функционального анализа, Гильбертовы пространства, Компактные линейные операторы	Домашние задания	Вопросы к зачету
4		Решение линейных операторных уравнений	Контрольная работа	Вопросы к зачету
5				
...				

3.2 Содержание оценочных средств

Перечень домашних заданий и самостоятельных работ
по курсу "Функциональный анализ"
для групп МП-301, 302

1-ое домашнее задание. Метрики и нормы

1. Доказать, что функция $\rho(x, y) = \frac{|x - y|}{|x - y| + 1}$ является метрикой на \mathbb{R} .
2. Доказать, что функция $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2}$ является нормой на \mathbb{R}^2 .
3. Доказать, что функция $\|x\| = \max |x_i|$ является нормой на c_0 .
4. Доказать, что функция $\|x\| = \sup |x_i|$ является нормой на c .
5. Доказать, что функция $\rho(x, y) = \frac{|x - y|}{\sqrt{x^2 + 1}\sqrt{y^2 + 1}}$ является метрикой на \mathbb{R} .
6. Найти необходимое и достаточное условие того, чтобы заданное на плоскости было единичным шаром для некоторой метрики.

2-ое домашнее задание. Метрики и нормы

1. Доказать, что функция $\rho_s(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|x_k - y_k|}{|x_k - y_k| + 1}$ является метрикой на пространстве всех последовательностей s .
2. Можете ли Вы придумать норму в s ?
3. Доказать, что следующие функции - нормы:
 - (a) $\|f\| = |f(a)| + \max_{t \in [a, b]} |f(t)|$ в $C[a, b]$.
 - (b) $\|f\| = \max_{t \in [a, b]} (|f(t)| + |f'(t)|)$ в $C^1[a, b]$.
 - (c) $\|f\| = \int_a^b e^{\tau} |f(\tau)| d\tau$ в $L_1[a, b]$.

2-ое домашнее задание. Метрики и нормы

1. Доказать, что функция $\rho_s(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|x_k - y_k|}{|x_k - y_k| + 1}$ является метрикой на пространстве всех последовательностей s .
2. Можете ли Вы придумать норму в s ?
3. Доказать, что следующие функции - нормы:
 - (a) $\|f\| = |f(a)| + \max_{t \in [a, b]} |f(t)|$ в $C[a, b]$.
 - (b) $\|f\| = \max_{t \in [a, b]} (|f(t)| + |f'(t)|)$ в $C^1[a, b]$.
 - (c) $\|f\| = \int_a^b e^{\tau} |f(\tau)| d\tau$ в $L_1[a, b]$.

МИНОБРНАУКИ РОССИИ Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Челябинский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ЧелГУ»)	
Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине «Функциональный анализ» по направлению подготовки (специальности) 01.03.02 «Прикладная математика и информатика» направленности (профилю) Прикладная математика и искусственный интеллект ФГБОУ ВО «ЧелГУ»	стр. 6

3-ье домашнее задание. Скалярное произведение

1. Доказать, что в предгильбертовом пространстве для любых x, y и z выполнено равенство

$$\|z - x\|^2 + \|z - y\|^2 = \frac{1}{2}\|x - y\|^2 + 2\left\|z - \frac{x + y}{2}\right\|^2.$$

2. Пусть X – вещественное линейное нормированное пространство и $\forall x, y \in X$:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Доказать, что формула

$$(x, y) = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

задаёт скалярное произведение в X .

3. Доказать, что в пространстве $C[0, 1]$ нельзя ввести скалярное произведение, которое бы индуцировало норму $\|f\| = \max |f(t)|$.

4. Доказать, что формула $(f, g) = \int_a^b f(t)g(t) + e^t f'(t)g'(t)dt$ задаёт скалярное произведение в $C^1[a, b]$.

5-ое домашнее задание. Сходимость последовательностей

1. Исследовать сходимость в зависимости от комплексного параметра α в пространствах c, c_0, ℓ_1 :

$$x_n = (1^\alpha, 2^\alpha, 3^\alpha, 4^\alpha, \dots, n^\alpha, 0, 0, 0, \dots).$$

2. Проверить сходимость в c, ℓ_1, ℓ_2 :

$$x_n = \left(1, \frac{1}{2 \ln 2}, \frac{1}{3 \ln 3}, \frac{1}{4 \ln 4}, \dots, \frac{1}{n \ln n}, 0, 0, 0, \dots\right).$$

3. Исследовать сходимость в $C[0, 1], C^1[0, 1], L_2[0, 1]$:

(a) $f_n(t) = t^n - t^{n+1}$;

(b) $f_n(t) = ne^{-nt}$.

6-ое домашнее задание. Линейные операторы

1. Проверить линейность ограниченность и найти норму оператора:

(a) $A : \ell_1 \rightarrow \ell_2, Ax = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_4, \dots)$;

(b) $B : \ell_1 \rightarrow \ell_1, Bx = (x_1 - \frac{x_2}{1}, x_2 - \frac{x_3}{2}, x_3 - \frac{x_4}{3}, \dots)$;

(c) $B : \ell_2 \rightarrow \ell_2$.

(d) $C : C[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, Cf = \int_0^1 (1 - 2t)f(t)dt$;

(e) $C : L_1(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$;

(f) $D : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1], Df(x) = \int_0^1 (x + t)f(t)dt$;

(g) $D : C[0, 1] \rightarrow L_1[0, 1]$.

МИНОБРНАУКИ РОССИИ Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Челябинский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ЧелГУ»)	
Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине «Функциональный анализ» по направлению подготовки (специальности) 01.03.02 «Прикладная математика и информатика» направленности (профилю) Прикладная математика и искусственный интеллект ФГБОУ ВО «ЧелГУ»	стр. 7

7-ое домашнее задание. Линейные операторы

1. Проверить линейность ограниченность и найти норму оператора:

(a) $A : \ell_1 \rightarrow \ell_1, (Ax)_k = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_k}{k^2}.$

(b) $B : \ell_1 \rightarrow C[-1, 1], Bx(t) = x_1 + x_2 t + x_3 t^2 + x_4 t^3 + \dots$

(c) $C : C[0, 1] \rightarrow \ell_2, (Cf)_k = \int_0^{1/k} f(t) dt.$

(d) $D : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1], Df(t) = \int_t^1 (\tau - t) f(\tau) d\tau.$

Типовые контрольные задания для текущей аттестации

Контрольная работа №1

(непрерывные линейные функционалы, структура сопряженного пространства)

Вариант 1

1. Доказать, что функционал в пространстве $C[-1,1]$ является

$$(x, f) = \frac{1}{3(x(-1) + x(1))}$$

линейным непрерывным и найти его норму

2. Является ли ограниченным в пространстве $C[0,1]$ линейный функционал?

$$(x, f) = \int_0^1 x(\sqrt{t}) dt$$

3. Найти норму и доказать непрерывность функционала

$$(x, f) = \int_{-1}^1 tx(t) dt \quad \text{в } L_1[-1,1]$$

4. Пусть X – банахово пространство, $f_n \in X^*$ и для любого $x \in X$ существует $\lim_{n \rightarrow \infty} (x, f_n) = (x, f)$. Доказать, что $f \in X^*$

Вариант 2

1. Доказать, что функционал в пространстве $C[-1,1]$ является линейным непрерывным и найти его норму $(x, f) = 2(x(1) - x(0))$

2. Является ли ограниченным в пространстве $C[0,1]$ линейный функционал?

$$(x, f) = \int_0^1 x(t^2) dt$$

3. Найти норму и доказать непрерывность функционала

$$(x, f) = \int_{-1}^1 tx(t) dt \quad \text{в } L_2[-1,1]$$

4. Пусть X – линейное нормированное пространство, $f_n \in X^*$. Доказать, что f_n сходится тогда и только тогда, когда (x, f_n) сходится равномерно в шаре $\{x \in X: \|x\| < 1\}$

МИНОБРНАУКИ РОССИИ Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Челябинский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ЧелГУ»)	
Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине «Функциональный анализ» по направлению подготовки (специальности) 01.03.02 «Прикладная математика и информатика» направленности (профилю) Прикладная математика и искусственный интеллект ФГБОУ ВО «ЧелГУ»	стр. 8

Вопросы к зачёту

1. Проверка аксиом метрики для конкретных пространств
2. Исследование последовательностей на фундаментальность.
3. Принцип вложенных шаров. Исследование метрического пространства на полноту. Теорема Бэра о категориях.
4. Сжимающий оператор. Примеры. Принцип сжимающих отображений.
5. Предкомпактные множества и компакт. Примеры, применение. Свойства предкомпактных множеств. Сеть для множества в метрическом пространстве.
6. Теорема Хаусдорфа (критерий предкомпактности). Теорема Арчела.
7. Сепарабельные метрические пространства. Примеры несепарабельных метрических пространств.
8. Линейные нормированные пространства. Норма на линейном пространстве. Банаховы пространства, примеры
9. Некомпактность шара в бесконечномерном нормированном пространстве.
10. Линейный оператор, его свойства. Признаки его непрерывности. Норма линейного оператора и её свойства.
11. Линейное нормированное пространство $L(X, Y)$ всех ограниченных линейных операторов $A: X \rightarrow Y$. Теорема о полноте этого пространства, ко-гда Y – банахово.
12. ЛНП всех непрерывных линейных функционалов $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ (или \mathbb{C}). Сопряженное пространство, и его полнота.
13. Процедура поиска норм линейного ограниченного оператора. Примеры.
14. Теоремы Хана-Банаха, для линейных пространств и линейных нормированных пространств и следствия в случае нормированного пространства.
15. Теорема Банаха-Штейнгауза.
16. Теорема Банаха об обратном операторе.
17. Определение гильбертова пространства. Примеры.
18. Определение ортонормальной системы (ОНС). Ряд Фурье элемента x по данной ОНС. Примеры.
19. Теорема об экстремальном свойстве коэффициентов Фурье. Неравенство Бесселя.
20. Определение полной ОНС. Пример.
21. Доказать теорему о проекции точки на выпуклое множество.
22. Теорема об ортогональном разложении H в сумму подпространств.
23. Теорема Рисса об общем виде линейного ограниченного функционала на Гильбертовом пространстве. Описание сопряжённого пространства к H .
24. Определение слабой сходимости. Примеры.
25. Теорема о вложении X в своё второе сопряжённое.
26. Критерий слабой сходимости в пространстве непрерывных на отрезке функций с чебышевской нормой.
27. Общий вид линейных непрерывных функционалов на l_p . Признак слабой сходимости.

МИНОБРНАУКИ РОССИИ Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Челябинский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ЧелГУ»)	
Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине «Функциональный анализ» по направлению подготовки (специальности) 01.03.02 «Прикладная математика и информатика» направленности (профилю) Прикладная математика и искусственный интеллект ФГБОУ ВО «ЧелГУ»	стр. 9

4.1. Критерии оценивания промежуточной аттестации по видам оценочных средств.

Балльно-рейтинговая система оценки знаний студента по дисциплине определяется на основе балловой оценки различных форм деятельности студентов.

Итоговая оценка выставляется, исходя из количества баллов, набранных в течение семестра.

Начисляемые рейтинговые баллы.

(По каждой позиции указывается максимальный балл)

Контрольная работа - 40

Домашние задания - 20

Решение задач из лекций - 10

Посещаемость - 10

Итого 80 баллов

4.2.1. Критерии оценивания контрольной работы

Максимальный балл за одну контрольную работу – 20 баллов

В контрольной работе 4 задачи. Максимальная оценка за каждую из них - 5 баллов. Время, отводимое для выполнения контрольной работы - 90 минут.

Критерии оценивания задачи

Максимальный балл — 5.

5 баллов	4 балла	3 баллов	0-2 балла
Высокий уровень освоения проверяемых компетенций	Средний уровень освоения проверяемых компетенций	Базовый уровень освоения проверяемых компетенций	Недостаточный уровень освоения проверяемых компетенций
Дано полное обоснованное решение задачи.	В представленном решении имеются мелкие недочеты или арифметические ошибки	Дано решение задачи с неполным обоснованием.	Задача не решена или ее решение не обосновано.

4.1.3 Критерии оценивания домашнего задания

Максимальный балл – 20 баллов

Балл	19-20 баллов	16-18 баллов	10-15 баллов	0-9 баллов
Уровень освоения проверяемых компетенций	высокий	средний	базовый	недостаточный
Критерии оценивания	Полностью выполнено задание, получен	Задание выполнено, но имеются не	Задание выполнено на 70%	Задание не выполнено, имеются грубые ошибки

МИНОБРНАУКИ РОССИИ Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Челябинский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ЧелГУ»)	
Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине «Функциональный анализ» по направлению подготовки (специальности) 01.03.02 «Прикладная математика и информатика» направленности (профилю) Прикладная математика и искусственный интеллект ФГБОУ ВО «ЧелГУ»	стр. 10

	правильный ответ	значительные недочеты или арифметическ ие ошибки	
--	---------------------	---	--

4.2. Результаты промежуточной аттестации и уровни сформированности компетенций

При подведении итогов зачет ставится, если студент за все контрольные мероприятия набрал не менее 40 баллов:

Особенности проведения процедуры оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья обозначены в рабочей программе дисциплины (модуля).

Уровни сформированности компетенций определяется следующим образом:

1. **Высокий уровень сформированности компетенций – 70-80 баллов:**
 - предполагает формирование компетенций на высоком уровне, готовность к самостоятельной профессиональной деятельности.
 - студент способен аргументировать собственную точку зрения по дискуссионным вопросам дисциплины, решать ситуационные задачи, критически оценивать информацию, формулировать собственные выводы.
2. **Средний уровень – 60-69**
 - предполагает формирование компетенций на среднем уровне: формируется комплексное знание особенностей решения прикладных задач, умение сбора, анализа и обработки данных, необходимых для решения прикладных задач.
 - студент способен давать развернутые ответы на теоретические вопросы дисциплины на уровне не ниже среднего.
3. **Базовый уровень – 40-59 баллов**
 - предполагает формирование компетенций на начальном уровне, студент освоил основные понятия и положения изучаемой дисциплины.
4. **Низкий уровень - 0-39 баллов.**

