

Документ подписан простой электронной подписью Информация о владельце: ФИО: Таскаев Сергей Валерьевич Должность: Ректор Дата подписания: 06.06.2025 11:57:50 Уникальный программный ключ: 04c19ed8b0961506cb77a486b9a878806522523	 МИНОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИИ Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Челябинский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ЧелГУ»)	Рабочая программа дисциплины "Вариационное исчисление и оптимальное управление" по направлению подготовки (специальности) 02.03.02 "Фундаментальная информатика и информационные технологии" направленности (профилю) Прикладное программирование и системы искусственного интеллекта ФГБОУ ВО «ЧелГУ»
---	---	--

стр. 1

**Рабочая программа дисциплины (модуля)\***  
**Вариационное исчисление и оптимальное управление**

Направление подготовки (специальность)

02.03.02 Фундаментальная информатика и информационные технологии

Направленность (профиль)

Прикладное программирование и системы искусственного интеллекта

Присваиваемая квалификация (степень)

бакалавр

Форма обучения

очная

Год(ы) набора 2025

\*Рабочая программа дисциплины (модуля) адаптирована для инклюзивного обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья

Челябинск 2025 г.



## Содержание

1. Цели освоения дисциплины
2. Место дисциплины в структуре ОПОП
3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины (модуля)
4. Объем дисциплины (модуля)
5. Структура и содержание дисциплины (модуля)
6. Фонд оценочных средств
  - 6.1. Перечень видов оценочных средств
  - 6.2. Типовые контрольные задания и иные материалы для текущей аттестации
  - 6.3. Типовые контрольные вопросы и задания для промежуточной аттестации
  - 6.4. Критерии оценивания
7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)
  - 7.1. Рекомендуемая литература
  - 7.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет"
  - 7.3. Перечень информационных технологий
8. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)
9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)
10. Специальные условия освоения дисциплины обучающимися с инвалидностью и ограниченными возможностями здоровья



### 1. ЦЕЛИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Цель освоения учебной дисциплины «Вариационное исчисление и оптимальное управление» состоит в приобретении студентами теоретических знаний и практических умений и навыков по бесконечномерной оптимизации, использовании их для решения прикладных задач. К задачам дисциплины относятся: ознакомление студентов с базовыми понятиями вариационного исчисления и оптимального управления; овладение аналитическими и численными методами решения математических задач на экстремум функционалов.

Результаты обучения по дисциплине направлены на достижение индикаторов:

ОПК-1.1. Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук.

ОПК-1.2. Демонстрирует умения решать типовые задачи, формулируемые в рамках математических и (или) естественных наук.

ОПК-1.3. Имеет навыки использования основных понятий, теорем, законов математики и (или) естественных наук для решения задач профессиональной деятельности.

### 2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОПОП

Цикл (раздел) ОПОП: Б1.О.18

#### 2.1 Требования к предварительной подготовке обучающегося:

Математический анализ:

Знает основные правила планирования времени при самоорганизации внеаудиторной самостоятельной работы, предусмотренной рабочей программой учебной дисциплины, базовые понятия математического анализа, применяемые в математических науках, прикладной математике и информатике. Умеет применять классические методы математического анализа в решении задач прикладной математики и информатики.

Дифференциальные уравнения:

Знает различные типы дифференциальных уравнений и способы их решения. Имеет практический опыт решения дифференциальных уравнений в математических моделях различных прикладных задач.

Алгебра:

Знает теоретические и практические основы алгебры. Умеет использовать различные алгебраические объекты и структуры в задачах профессиональной деятельности.

Геометрия:

Знает основные геометрические объекты, их свойства, геометрические методы анализа и решения прикладных задач. Умеет применять геометрические методы для анализа и решения прикладных задач. Имеет практический опыт использования разных систем координат и их баз с целью оптимизации решения как задач фундаментальной математики, так и прикладных задач.

Алгебра

Геометрия

Математический анализ

Дифференциальные и разностные уравнения

#### 2.2 Дисциплины и практики, для которых освоение данной дисциплины (модуля) необходимо как предшествующее:

### 3. КОМПЕТЕНЦИИ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

**ОПК-1: Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности**

**Знать:**

классические понятия вариационного исчисления и методы теории оптимального управления

**Уметь:**

применять вариационный подход и методы оптимального управления к решению практических задач

**Владеть:**



**В результате освоения дисциплины обучающийся должен**

<b>3.1</b>	<b>Знать:</b>
3.1.1	классические понятия вариационного исчисления и методы теории оптимального управления
<b>3.2</b>	<b>Уметь:</b>
3.2.1	применять вариационный подход и методы оптимального управления к решению практических задач
<b>3.3</b>	<b>Владеть:</b>
3.3.1	-

**4. ОБЪЕМ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)**

Общая трудоемкость		3 ЗЕТ
Часов по учебному плану	: 108	Виды контроля в семестрах: зачеты 7
в том числе	:	
аудиторные занятия	: 66	
самостоятельная работа	: 35,3	
контактная работа: 72,7		
ИКР: 6,7		

**5. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)**

Код занятия	Наименование разделов и тем /вид занятия/	Семестр / Курс	Часов	Литература
	<b>Раздел 1. Основные понятия вариационного исчисления и простейшая задача вариационного исчисления</b>			
1.1	Простейшая задача классического вариационного исчисления. Пример простейшей задачи вариационного исчисления (задача о брахистохроне). Постановка задачи. Вывод уравнения Эйлера с помощью основной леммы вариационного исчисления. Вывод уравнения Эйлера с помощью леммы Дюбуа-Реймона. Векторный случай. Интегралы уравнения Эйлера. Примеры. /Лек/	7	2	Л1.1 Л1.2Л2.1Л3.1
1.2	Обобщения простейшей задачи вариационного исчисления. Задачи вариационного исчисления со старшими производными. Уравнение Эйлера- Пуассона. Необходимое условие слабого экстремума для случая векторной искомой функции. Система уравнений Эйлера. /Лек/	7	2	Л1.1 Л1.2Л2.1Л3.1
1.3	Основные понятия вариационного исчисления. Понятие нормы. Нахождение вариации функционала /Пр/	7	4	Л1.1 Л1.2Л2.1Л3.1
1.4	Простейшая задача вариационного исчисления /Пр/	7	4	Л1.1 Л1.2Л2.1Л3.1
1.5	Обобщения простейшей задачи вариационного исчисления /Пр/	7	4	Л1.1 Л1.2Л2.1Л3.1
1.6	Подготовка к лабораторным работам /Ср/	7	4	Л1.1 Л1.2Л2.1Л3.1
1.7	Решение дифференциальных уравнений в системе Maxima /Лаб/	7	2	Л1.1 Л1.2Л2.1Л3.1
1.8	Поиск решения простейшей задачи вариационного исчисления в системе Maxima /Лаб/	7	2	Л1.1 Л1.2Л2.1Л3.1
	<b>Раздел 2. Задачи вариационного исчисления с подвижной границей</b>			
2.1	Задача Больца. Условия трансверсальности. /Лек/	7	2	Л1.1 Л1.2Л2.1Л3.1
2.2	Задачи вариационного исчисления с подвижной границей /Пр/	7	4	Л1.1 Л1.2Л2.1Л3.1



2.3	Подготовка к контрольной работе /Ср/	7	8	Л1.1 Л1.2Л2.1Л3.1
2.4	Контрольная работа №1 /Пр/	7	2	Л1.1 Л1.2Л2.1Л3.1
2.5	Подготовка к лабораторным работам /Ср/	7	4	Л1.1 Л1.2Л2.1Л3.1
2.6	Нахождение экстремали в задаче со свободной границей в системе $Maxima$ /Лаб/	7	2	Л1.1 Л1.2Л2.1Л3.1
2.7	Нахождение экстремали в задаче Больца в системе $Maxima$ /Лаб/	7	2	Л1.1 Л1.2Л2.1Л3.1
<b>Раздел 3. Изопериметрическая задача. Задача Лагранжа.</b>				
3.1	Изопериметрическая задача. Постановка задачи. Необходимое условие экстремума. Пример. Задача Дидоны. /Лек/	7	2	Л1.1 Л1.2Л2.1Л3.1
3.2	Задача Лагранжа. Постановка задачи. Необходимое условие экстремума. Теорема Эйлера - Лагранжа. Примеры. /Лек/	7	4	Л1.1 Л1.2Л2.1Л3.1
3.3	Правило множителей Лагранжа /Пр/	7	4	Л1.1 Л1.2Л2.1Л3.1
3.4	Изопериметрическая задача /Пр/	7	2	Л1.1 Л1.2Л2.1Л3.1
3.5	Задача Лагранжа /Пр/	7	4	Л1.1 Л1.2Л2.1Л3.1
3.6	Решение изопериметрической задачи в системе $Maxima$ /Лаб/	7	2	Л1.1 Л1.2Л2.1Л3.1
3.7	Подготовка к лабораторным работам /Ср/	7	2	Л1.1 Л1.2Л2.1Л3.1
<b>Раздел 4. Задачи оптимального управления</b>				
4.1	Задачи оптимального управления. Принцип максимума Понтрягина в общем случае. Постановка задачи. Формулировка теоремы. Пример. Формулировка и доказательство принципа максимума Понтрягина для задачи со свободным концом. /Лек/	7	4	Л1.1 Л1.2Л2.1Л3.1
4.2	Задачи оптимального управления /Пр/	7	4	Л1.1 Л1.2Л2.1Л3.1
4.3	Подготовка к контрольной работе /Ср/	7	8	Л1.1 Л1.2Л2.1Л3.1
4.4	Контрольная работа №2 /Пр/	7	2	Л1.1 Л1.2Л2.1Л3.1
<b>Раздел 5. Численные методы решения задач вариационного исчисления</b>				
5.1	Подготовка к лабораторным работам /Ср/	7	4	Л1.1 Л1.2Л2.1Л3.1
5.2	Метод начальных параметров для решения задач вариационного исчисления в системе $Maxima$ /Лаб/	7	2	Л1.1 Л1.2Л2.1Л3.1
5.3	Метод Рунге для решения задач вариационного исчисления в системе $Maxima$ /Лаб/	7	4	Л1.1 Л1.2Л2.1Л3.1
<b>Раздел 6. Иная контактная работа</b>				
6.1	Индивидуальные консультации, текущий контроль /ИКР/	7	6,7	Л1.1 Л1.2Л2.1Л3.1
<b>Раздел 7. Зачёт</b>				
7.1	Подготовка к зачету /Ср/	7	5,3	Л1.1 Л1.2Л2.1Л3.1

## 6. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

### 6.1. Перечень видов оценочных средств

Лабораторная работа 1



Лабораторная работа 2  
Лабораторная работа 3  
Лабораторная работа 4  
Лабораторная работа 5  
Лабораторная работа 6  
Лабораторная работа 7  
Контрольная работа 1  
Контрольная работа 2  
Активная познавательная деятельность  
Зачет

## 6.2. Типовые контрольные задания и иные материалы для текущей аттестации

Типовые задания для лабораторных и контрольных работ:  
см. приложение.

## 6.3. Типовые контрольные вопросы и задания для промежуточной аттестации

Вопросы к зачёту:  
см. приложение

## 6.4. Критерии оценивания

Лабораторные работы 1 - 7:  
Получена программа реализации решения задачи, программа работает корректно - 3 балла.  
Получена программа реализации решения задачи, программа работает корректно, студент может пояснить порядок получения результатов, расчетов и графиков - 5 баллов.  
Получена программа реализации решения задачи, программа работает корректно; студент может пояснить порядок получения результатов, расчетов и графиков; результаты работы и выводы оформлены в соответствии с указаниями - 6 баллов.  
В остальных случаях баллы не начисляются.

Контрольная работа 1:  
Контрольная работа состоит из 4 заданий, за каждое из которых студент может получить от 0 до 2 баллов:  
2 балла - задача решена верно, получен правильный ответ;  
1 балл - задача, в целом, решена верно, но имеются незначительные ошибки;  
0 баллов - в остальных случаях.

Контрольная работа 2:  
Контрольная работа состоит из 3 заданий, за каждое из которых студент может получить от 0 до 2 баллов:  
2 балла - задача решена верно, получен правильный ответ;  
1 балл - задача, в целом, решена верно, но имеются незначительные ошибки;  
0 баллов - в остальных случаях.

Активная познавательная деятельность:  
На каждой лекции студент может получить 1 балл:  
- студент правильно отвечает на вопросы по изучаемому материалу - 1 балл.  
В противном случае баллы не начисляются.  
На практических занятиях №1-8 и №10-15 студент может получить по 2 балла:  
-студент задает вопросы по изучаемому материалу или решает задачу у доски- 1 балл;  
-студент правильно отвечает на вопросы по изучаемому материалу - 1 балл.  
В противном случае баллы не начисляются

Зачет:  
Контрольное мероприятие промежуточной аттестации проводится во время зачета в форме ответа на билет, который содержит 2 теоретических вопроса. Продолжительность зачета – 60 минут. Максимальный балл за ответ на теоретический вопрос 4 балла.  
4 балла - ответ структурирован, приведен анализ положений существующих теорий по вопросу билета, студент логично и доказательно раскрывает проблему, предложенную в билете, ответ не содержит фактических ошибок и характеризуется глубиной, полнотой;  
2 балла - ответ имеет достаточный содержательный уровень, однако отличается слабой структурированностью, раскрыто содержание билета, имеются неточности при ответе;  
1 балл - ответ имеет фрагментарный характер, отличается поверхностностью и малой содержательностью, имеются неточности; материал в основном излагается, но допущены фактические ошибки;



МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Челябинский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ЧелГУ»)

Рабочая программа дисциплины "Вариационное исчисление и оптимальное управление" по направлению подготовки (специальности) 02.03.02 "Фундаментальная информатика и информационные технологии" направленности (профилю) Прикладное программирование и системы искусственного интеллекта ФГБОУ ВО «ЧелГУ»

стр. 7

0 баллов - допускаются существенные фактические ошибки при ответе или ответ отсутствует.

На зачете происходит оценивание учебной деятельности обучающихся по дисциплине на основе полученных оценок за контрольно-рейтинговые мероприятия текущего контроля. Студент может повысить свой рейтинг, пройдя контрольное мероприятие промежуточной аттестации. Студент выбирает случайный билет, содержащий два теоретических вопроса. Студенту предоставляется не более 60 минут на подготовку ответа. По истечении этого времени студент отвечает преподавателю вопросы билета. Фиксация результатов учебной деятельности по дисциплине проводится в день зачета при личном присутствии студента.

Максимальная сумма баллов за текущий контроль и зачет в сумме составляет 100 баллов:

0-60 баллов - зачтено;

61-100 - зачтено.

## 7. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

### 7.1. Рекомендуемая литература

#### 7.1.1. Основная литература

	Авторы,	Заглавие	Издательство,	Ресурс
Л1.1	Гюнтер Н. М.	Курс вариационного исчисления ( <a href="https://e.lanbook.com/book/210236">https://e.lanbook.com/book/210236</a> )	Санкт-Петербург : Лань, 2022	ЭБС
Л1.2	Абдрахманов В. Г., Рабчук А. В.	Элементы вариационного исчисления и оптимального управления. Теория, задачи, индивидуальные задания ( <a href="https://e.lanbook.com/book/211535">https://e.lanbook.com/book/211535</a> )	Санкт-Петербург : Лань, 2022	ЭБС

#### 7.1.2. Дополнительная литература

	Авторы,	Заглавие	Издательство,	Ресурс
Л2.1	Пантелеев А. В., Летова Т. А.	Методы оптимизации в примерах и задачах ( <a href="https://e.lanbook.com/book/212129">https://e.lanbook.com/book/212129</a> )	Санкт-Петербург : Лань, 2022	ЭБС

#### 7.1.3. Методические разработки

	Авторы,	Заглавие	Издательство,	Ресурс
Л3.1	Никитина С. А., Ухоботов В. И.	Основы вариационного исчисления и оптимального управления: учебное пособие ( <a href="https://library.csu.ru/rbooks2/view2?code=local/007730/nikitinasa">https://library.csu.ru/rbooks2/view2?code=local/007730/nikitinasa</a> )	Челябинск : Издательство Челябинского государственного университета, 2016	ЭБС

### 7.3 Перечень информационных технологий

#### 7.3.1 Программное обеспечение

Maxima

#### 7.3.2 Профессиональные базы данных и информационно-справочные системы

## 8. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Для реализации дисциплины используются учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, лабораторных занятий, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, а также помещения для самостоятельной работы.

Учебные аудитории укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения (компьютерная техника с подключением к сети "Интернет", предустановленным программным обеспечением MS Office, wxMaxima для лабораторных занятий).

Для проведения занятий лекционного типа предлагаются наборы демонстрационного оборудования и учебно-наглядных пособий, такие как презентации.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с подключением к сети "Интернет" и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду университета.

## 9. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)



МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Челябинский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ЧелГУ»)

Рабочая программа дисциплины "Вариационное исчисление и оптимальное управление" по направлению подготовки (специальности) 02.03.02 "Фундаментальная информатика и информационные технологии" направленности (профилю) Прикладное программирование и системы искусственного интеллекта ФГБОУ ВО «ЧелГУ»

стр. 8

см. приложение.

## **10. СПЕЦИАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ ОБУЧАЮЩИМИСЯ С ИНВАЛИДНОСТЬЮ И ОГРАНИЧЕННЫМИ ВОЗМОЖНОСТЯМИ ЗДОРОВЬЯ**

Освоение дисциплины инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья осуществляется с использованием специальных технических средств и информационных технологий, предоставляемых Ресурсным учебно-методическим центром по обучению инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья ЧелГУ по запросу обучающегося (мобильные специальные технические средства для лиц с нарушениями зрения и с нарушением слуха, ассистивные информационные технологии).

При необходимости для обучающихся с нарушениями зрения на рабочих местах для проведения практических или лабораторных занятий устанавливается специальное программное обеспечение (программа речевой навигации, речевые синтезаторы, экранные лупы).

В учебные аудитории обеспечивается беспрепятственный доступ для обучающихся с инвалидностью и с ограниченными возможностями здоровья. В каждой аудитории, где обучаются инвалиды и лица с ограниченными возможностями здоровья, предусматривается соответствующее количество мест для обучающихся с учетом нарушений их здоровья.

Для освоения дисциплины инвалидам и лицам с ограниченными возможностями здоровья предоставляется доступ к печатным источникам, имеющимся в научной библиотеке ЧелГУ, с помощью специальных технических средств; доступ с помощью специальных технических и программных средств к электронным источникам, представленным в форме электронного документа в фонде научной библиотеки ЧелГУ или электронно-библиотечных системах.

Учебно-методические материалы для обучающихся из числа инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья предоставляются в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и особенностям восприятия информации.

Для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья освоение дисциплины может быть частично или полностью осуществлено с использованием дистанционных образовательных технологий.

При проведении промежуточной аттестации по дисциплине обучающимся с инвалидностью и с ограниченными возможностями здоровья обеспечивается по их заявлению предоставление в доступной форме в зависимости от их индивидуальных особенностей инструкции о порядке проведения промежуточной аттестации, оценочных средств и возможности ответов на задания (письменно на бумаге, набор ответов на компьютере, письменно шрифтом Брайля, с использованием услуг ассистента, устно).

При проведении процедуры оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья предусматривается использование предоставленных ЧелГУ или собственных технических средств, необходимых им в связи с их индивидуальными особенностями. При необходимости инвалидам и лицам с ограниченными возможностями здоровья предоставляется дополнительное время для подготовки ответа на задания, процедура оценивания результатов обучения по дисциплине может проводиться в несколько этапов.

