

Документ подписан простой электронной подписью Информация о владельце: ФИО: Таскаев Сергей Валерьевич Должность: Ректор Дата подписания: 18.03.2025 14:53:16 Уникальный программный ключ: 04c19ed8bfb98f3b6cb77a486b9a8788b8322323	МИНИСТЕРСТВО НАУКИ РОССИИ Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Челябинский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ЧелГУ»)	Рабочая программа дисциплины "Функциональный анализ" по направлению подготовки (специальности) 01.03.02 Прикладная математика и информатика направленности (профилю) Прикладная математика и искусственный интеллект ФГБОУ ВО «ЧелГУ»	стр. 1
--	--	---	--------

## **Рабочая программа дисциплины (модуля)\***

### **Функциональный анализ**

Направление подготовки (специальность)

01.03.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль)

Прикладная математика и искусственный интеллект

Присваиваемая квалификация (степень)

бакалавр

Форма обучения

очная

Год(ы) набора 2024

\*Рабочая программа дисциплины (модуля) адаптирована для инклюзивного обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья

Челябинск 2023 г.



## Содержание

1. Цели освоения дисциплины
2. Место дисциплины в структуре ОПОП
3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины (модуля)
4. Объем дисциплины (модуля)
5. Структура и содержание дисциплины (модуля)
6. Фонд оценочных средств
  - 6.1. Перечень видов оценочных средств
  - 6.2. Типовые контрольные задания и иные материалы для текущей аттестации
  - 6.3. Типовые контрольные вопросы и задания для промежуточной аттестации
  - 6.4. Критерии оценивания
7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)
  - 7.1. Рекомендуемая литература
  - 7.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет"
  - 7.3. Перечень информационных технологий
8. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)
9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)
10. Специальные условия освоения дисциплины обучающимися с инвалидностью и ограниченными возможностями здоровья



### 1. ЦЕЛИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Сформировать у слушателя понимание обобщенного подхода к основным понятиям и методам элементарных глав математического анализа и смежных областей алгебры и геометрии. С единой точки зрения изучить различные проблемы из специальных аналитических дисциплин (анализа, алгебры, дифференциальных уравнений, вариационного исчисления) и установить связи между далекими на первый взгляд математическими теориями и тем самым способствовать более глубокому пониманию основных математических конструкций.

Результаты обучения по дисциплине направлены на достижение индикаторов, соответствующих компетенций ОПК-1:

Применяет фундаментальные знания, полученные в области математических наук в своей профессиональной деятельности

### 2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОПОП

Цикл (раздел) ОПОП: Б1.О.28

#### 2.1 Требования к предварительной подготовке обучающегося:

Комплексный анализ

Математический анализ

Алгебра

#### 2.2 Дисциплины и практики, для которых освоение данной дисциплины (модуля) необходимо как предшествующее:

Вариационное исчисление и оптимальное управление

### 3. КОМПЕТЕНЦИИ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

**ОПК-1:** Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности

**Знать:**

теоретические и практические положения функционального анализа

**В результате освоения дисциплины обучающийся должен**

**3.1 Знать:**

3.1.1 теоретические и практические положения функционального анализа

**3.2 Уметь:**

**3.3 Владеть:**

### 4. ОБЪЕМ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Общая трудоемкость

2 ЗЕТ

Часов по учебному плану : 72

в том числе :

аудиторные занятия : 48

самостоятельная работа : 19,75

:

контактная работа: 52,25

ИКР: 4,25

Виды контроля в семестрах:

зачеты 6

### 5. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Код занятия	Наименование разделов и тем /вид занятия/	Семестр / Курс	Часов	Литература
	<b>Раздел 1. Метрические и линейные нормированные пространства</b>			
1.1	Метрические и нормированные пространства: основные понятия, примеры /Лек/	6	2	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3



1.2	Полные метрические пространства /Лек/	6	2	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3
1.3	Компактные и предкомпактные множества в метрическом пространстве. Критерий компактности замкнутого шара в нормированном линейном пространстве. /Лек/	6	2	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3
1.4	Контрольная работа 1 /Лек/	6	2	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3
1.5	Свойства метрики. Полные метрические пространства /Пр/	6	2	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3
1.6	Принцип неподвижной точки Банаха /Пр/	6	2	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3
1.7	Исследование предкомпактности множеств в конкретных пространствах /Пр/	6	2	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3
<b>Раздел 2. Линейные непрерывные операторы</b>				
2.1	Линейные непрерывные операторы. Сопряженное пространство /Лек/	6	2	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3
2.2	Спектр линейного оператора в банаховом пространстве /Лек/	6	2	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3
2.3	Основные принципы линейного функционального анализа: Теорема Хана-Банаха о продолжении линейного функционала. Теорема Банаха о гомеоморфизме. Принцип равномерной ограниченности. /Лек/	6	2	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3
2.4	Контрольная работа 2 /Лек/	6	2	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3
2.5	Нахождение норм линейных ограниченных операторов /Пр/	6	2	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3
2.6	Исследование последовательности ограниченности линейных операторов на сходимость /Пр/	6	2	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3
<b>Раздел 3. Гильбертовы пространства</b>				
3.1	Основные теоремы в гильбертовых пространствах: о проекции точки на выпуклое замкнутое множество, теорема о разложении гильбертова пространства в ортогональную сумму замкнутых подпространств, теорема Рисса об общем виде линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве /Лек/	6	2	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3
3.2	Гильбертовы пространства /Пр/	6	2	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3
3.3	Ряды Фурье /Лек/	6	2	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3
3.4	Существование ортонормированного базиса в сепарабельном гильбертовом пространстве. Изоморфизм сепарабельных гильбертовых пространств. /Лек/	6	2	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3
3.5	Контрольная работа 3 /Лек/	6	2	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3
<b>Раздел 4. Линейные уравнения с компактными операторами</b>				
4.1	Компактные линейные операторы /Лек/	6	2	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3
4.2	Сопряженные операторы и приложение их к исследованию линейных операторных уравнений /Лек/	6	2	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3



4.3	Теоремы Фредгольма для уравнений с компактными операторами в банаховом пространстве /Лек/	6	2	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3
4.4	Контрольная работа 4 /Лек/	6	2	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3
4.5	Компактные линейные операторы /Пр/	6	2	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3
4.6	Спектры линейных ограниченных операторов /Пр/	6	2	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3
4.7	Подготовка к контрольным мероприятиям /Ср/	6	9,75	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3
4.8	Подготовка к зачету /Ср/	6	10	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3
<b>Раздел 5. Иная контактная работа</b>				
5.1	Индивидуальные консультации, текущий контроль /ИКР/	6	4,25	Л1.1 Л1.2Л2.1 Л2.2 Л2.3

## 6. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

### 6.1. Перечень видов оценочных средств

Контрольные мероприятия (Контрольные работы 1-4);  
Зачетная контрольная работа

### 6.2. Типовые контрольные задания и иные материалы для текущей аттестации

Пример контрольных мероприятий см. приложение

### 6.3. Типовые контрольные вопросы и задания для промежуточной аттестации

Пример заданий зачетной контрольной работы см. приложение

### 6.4. Критерии оценивания

При оценивании результатов учебной деятельности обучаемого, используется балльно-рейтинговая система оценивания результатов учебной деятельности обучающихся.  
Оценка за дисциплину формируется на основе полученных оценок за контрольно-рейтинговые мероприятия текущего контроля. Зачтено: величина рейтинга обучающегося 60-100%.  
Не зачтено: величина рейтинга обучающегося по дисциплине 0-59%. Если студент не согласен с оценкой, полученной по результатам текущего контроля, студент проходит мероприятия промежуточной аттестации в форме решения задач. Необходимо решить 4 задачи. На решение задач дается 45 минут. В этом случае, зачет по дисциплине выставляется на основе полученных оценок за контрольно-рейтинговые мероприятия текущего контроля и промежуточной аттестации. Фиксация результатов учебной деятельности по дисциплине проводится в день зачета при личном присутствии студента. Критерии оценивания контрольного мероприятия (Контрольной работы):  
Контрольная работа проводится на лекции в течение двух академических часов, максимальный балл 8. Она содержит 4 задания каждое из которых оценивается от 0 до 2 баллов:  
задача решена и решение обоснованно – 2 балла;  
решение задачи следует верной логике, но содержит незначительные пробелы в решении и –или арифметические ошибки – 1 балл;  
в остальных случаях – 0 баллов.  
Критерии оценивания зачетной контрольной работы:  
Зачетная контрольная работа проводится на последней лекции. Максимальный балл-8. Содержит 4 задания каждое из которых оценивается от 0 до 2 баллов: задача решена и решение обоснованно – 2 балла; решение задачи следует верной логике, но содержит незначительные пробелы в решении и –или арифметические ошибки – 1 балл; в остальных случаях – 0 баллов.

## 7. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

### 7.1. Рекомендуемая литература

#### 7.1.1. Основная литература

Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год	Ресурс
---------------------	----------	-------------------	--------



	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год	Ресурс
Л1.1	Люстерник Л. А., Соболев В. И.	Краткий курс функционального анализа ( <a href="https://e.lanbook.com/book/210290">https://e.lanbook.com/book/210290</a> )	Санкт- Петербург : Лань, 2022	ЭБС
Л1.2	Гуревич А. П., Корнев В. В., Хромов А. П.	Сборник задач по функциональному анализу ( <a href="https://e.lanbook.com/book/210809">https://e.lanbook.com/book/210809</a> )	Санкт- Петербург : Лань, 2022	ЭБС

#### 7.1.2. Дополнительная литература

	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год	Ресурс
Л2.1	Павлов Е. А.	Основы функционального анализа: учебное пособие ( <a href="https://e.lanbook.com/book/116362">https://e.lanbook.com/book/116362</a> )	Санкт- Петербург : Лань, 2020	ЭБС
Л2.2	Треногин В. А., Писаревский Б. М., Соболева Т. С.	Задачи и упражнения по функциональному анализу: учебное пособие ( <a href="https://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=82612">https://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=82612</a> )	Москва : Физматлит, 2005	ЭБС
Л2.3	Треногин В. А.	Функциональный анализ: учебник ( <a href="https://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=82613">https://biblioclub.ru/index.php?page=book&amp;id=82613</a> )	Москва : Физматлит, 2002	ЭБС

#### 7.3 Перечень информационных технологий

##### 7.3.1 Программное обеспечение

LibreOffice

##### 7.3.2 Профессиональные базы данных и информационно-справочные системы

eLIBRARY.RU [Электронный ресурс] : научная электронная библиотека [научной периодики на русском языке ]. — Москва,  
[1999-]. - Доступ к полным текстам после регистрации из сети ЧелГУ. – URL: <http://elibrary.ru/defaultx.asp>.

#### 8. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Для реализации дисциплины используются учебные аудитории для проведения лекционных занятий, занятий семинарского типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, а также помещения для самостоятельной работы.

Учебные аудитории укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения: проектором, экраном, магнитно-маркерной доской, маркером; с возможностью демонстрации электронных презентаций при уровне освещения, достаточном для работы с конспектом

Для проведения занятий лекционного типа имеется демонстрационное оборудование: проектор, экран.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с подключением к сети "Интернет" и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду университета.

#### 9. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

При изучении данной дисциплины используются лекционные занятия (32 ч.), практические занятия (16 ч.), и самостоятельная работа (19,75 ч.). На лекционных занятиях обсуждение теоретического материала сочетается с решением задач. Студенту желательно активно участвовать в проведении аудиторных занятий, задавать вопросы, высказывать свою точку зрения по поводу обсуждаемой проблемы, задачи. Умение обосновывать свою точку зрения, нахождения компромиссного решения в этически выдержанной дискуссии не только важно для лучшего усвоения материала, но и ценится в реальной жизни.

Важным моментом при изучении любой дисциплины является организация самостоятельной работы. Проработку теоретического материала студенту желательно проводить как после каждого занятия, так и по завершении темы. Это позволит связать воедино полученные сведения и составить цельную картину. При этом следует обращаться к различным источникам информации (помимо рекомендованной литературы поиск нужного материала в интернете). Желательно регулярно выполнять домашние занятия. Они могут содержать не только задачи, но и проработку нового теоретического материала.

В случае применения при обучении дисциплины электронного обучения, дистанционных образовательных технологий общение обучающихся и руководителя практики осуществляется в режиме реального времени (чат), или отложенного времени (система дистанционного обучения Moodle, чаты, электронная почта).

Большую часть времени обучающиеся самостоятельно работают с учебно-методическими материалами. Студенты имеют возможность консультироваться с руководителем практики по всем вопросам, возникающим в ходе самостоятельной работы посредством электронной почты, социальных сетей.

Доступ обучающегося к учебным ресурсам в режиме отложенного времени, самостоятельной работы



осуществляется через сеть Интернет в удобном для него месте, времени и темпе.

При обучении инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья электронное обучение, дистанционные образовательные технологии предусматривают возможность приема-передачи информации в доступных для них формах.

Реализация дисциплины с применением электронного обучения, дистанционных образовательных технологий (далее – ЭО, ДОТ) осуществляется на основании «Положения о реализации основных и дополнительных образовательных программ с применением электронного обучения и дистанционных образовательных технологий в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Челябинский государственный университет», «Положения о порядке зачета обучающимися по основным профессиональным образовательным программам высшего образования в ФГБОУ ВО «ЧелГУ» результатов освоения в организациях, осуществляющих образовательную деятельность, учебных предметов, курсов, дисциплин (модулей), практик, дополнительных образовательных программ» посредством электронной информационно-образовательной среды ФГБОУ ВО «ЧелГУ». В исключительных случаях (форс-мажор и т.п.) при реализации образовательной деятельности с применением ЭО, ДОТ могут применять компоненты, не входящие в перечень электронной информационно-образовательной среды.

#### **10. СПЕЦИАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ ОБУЧАЮЩИМИСЯ С ИНВАЛИДНОСТЬЮ И ОГРАНИЧЕННЫМИ ВОЗМОЖНОСТЯМИ ЗДОРОВЬЯ**

Освоение дисциплины инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья осуществляется с использованием специальных технических средств и ассистивных информационных технологий, предоставляемых Ресурсным учебно-методическим центром по обучению инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья ЧелГУ по запросу обучающегося.

1. Мобильные специальные технические средства для лиц с нарушениями зрения: портативный компьютер с вводом/выводом шрифтом Брайля с синтезатором речи «EiBraille-W14J G2»; ноутбуки с программной экранного доступа NVDA; электронные увеличители для удаленного просмотра; видеувеличители портативные; тифлоплеер; цифровые диктофоны.

2. Мобильные специальные технические средства для лиц с нарушениями слуха: система свободного звукового поля со встроенной совместимостью с FM-устройствами; радиоклассы «Сонет-PCM» с передатчиком, заушным индуктором и индукционной петлей; система информационная для слабослышащих переносная «Исток» А2 со встроенным плеером – звуковым информатором; документ-камера; программируемые слуховые аппараты индивидуального пользования.

3. Ассистивные информационные технологии: программное обеспечение экранного доступа с синтезом речи NVDA; программы экранного увеличения; программы речевого синтеза для компьютеров и ноутбуков; программы речевого синтеза для мобильных устройств; экранная клавиатура; экранная лупа.

При необходимости для обучающихся с нарушениями зрения на рабочих местах для проведения практических или лабораторных занятий устанавливается специальное программное обеспечение (программа речевой навигации NVDA, речевые синтезаторы, экранные лупы).

В учебные аудитории обеспечивается беспрепятственный доступ для обучающихся инвалидов и обучающихся с ограниченными возможностями здоровья. В каждой аудитории, где обучаются инвалиды и лица с ограниченными возможностями здоровья, предусматривается соответствующее количество мест для обучающихся с учетом нарушений их здоровья.

Для освоения дисциплины инвалидам и лицам с ограниченными возможностями здоровья предоставляется доступ к печатным источникам, имеющимся в научной библиотеке ЧелГУ, с помощью специальных технических средств; доступ к электронным источникам, представленным в форме электронного документа в фонде научной библиотеки ЧелГУ или электронно-библиотечных системах, с помощью специальных технических и программных средств (рабочее место для незрячего пользователя с программным обеспечением экранного доступа с синтезом речи NVDA, рабочее место с компьютерным роллером и клавиатурой Clevy с большими кнопками и с разделяющей клавиши накладкой).

Учебно-методические материалы для обучающихся из числа инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья предоставляются в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации:

Для лиц с нарушениями зрения:

- в печатной форме увеличенным шрифтом,
- в форме электронного документа,
- в форме аудиофайла,
- в печатной форме шрифтом Брайля.

Для лиц с нарушениями слуха:

- в печатной форме,



- в форме электронного документа.

Для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата:

- в печатной форме,
- в форме электронного документа,
- в форме аудиофайла.

Данный перечень может быть конкретизирован в зависимости от контингента обучающихся.

Для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья освоение дисциплины может быть частично или полностью осуществлено с использованием дистанционных образовательных технологий.

При проведении процедуры оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья по дисциплине обеспечивается выполнение следующих дополнительных требований в зависимости от индивидуальных особенностей, обучающихся:

а) доступная форма предоставления инструкции по порядку проведения процедуры оценивания (устно, в письменной форме, в письменной форме шрифтом Брайля, устно с использованием услуг сурдопереводчика);

б) доступная форма предоставления заданий оценочных средств (в печатной форме, в печатной форме увеличенным шрифтом, в печатной форме шрифтом Брайля, в форме электронного документа, задания зачитываются ассистентом, задания предоставляются с использованием сурдоперевода);

в) доступная форма предоставления ответов на задания (письменно на бумаге, набор ответов на компьютере, письменно шрифтом Брайля, с использованием услуг ассистента, устно).

При проведении процедуры оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья предусматривается использование технических средств, необходимых им в связи с их индивидуальными особенностями.

Эти средства могут быть предоставлены ЧелГУ или могут использоваться собственные технические средства. При необходимости инвалидам и лицам с ограниченными возможностями здоровья предоставляется дополнительное время для подготовки ответа на задания, процедура оценивания результатов обучения по дисциплине может проводиться в несколько этапов.

Проведение процедуры оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья допускается с использованием дистанционных образовательных технологий.

## КМ-1

1. Будет ли на  $\mathbb{R}$  метрикой функция  $d(x,y)=\sqrt[3]{|x-y|}$  ?
2. Будет ли полным метрическое пространство  $\mathbb{R}$  с метрикой  $d(x,y) = |\arcsctg x - \arcsctg y|$  ? Найти пополнение этого пространства.
3. Рассмотрим в  $C [0,1]$  интегральное уравнение с параметром  $\lambda \neq 0$   
 $x(t) = \lambda \int_0^1 K(t,s)x(s)ds + \varphi(t)$ , где  $K(t,s)$  - непрерывная  $[0,1] \times [0,1]$  функция и  $M = \max\{|K(t,s)|: (t,s) \in [0,1] \times [0,1]\}$ ,  $\varphi \in C [0,1]$ . Доказать, что это уравнение имеет единственное решение, если  $|\lambda| \leq 1/M$ .
4. Показать, что компактное множество в  $l_2$  нигде не плотное.

## КМ – 2

1. Рассмотрим в  $l_p$ ,  $p \geq 1$ , последовательность операторов  $(P_n)$ , где  $P_n x = (x^1, \dots, x^n, 0, 0, \dots)$ ,  $x = (x^j)$ . Показать,  $P_n$  линейный и ограниченный оператор и найти его норму. Будет ли  $(P_n)$  сходится сильно? Равномерно?
2. Рассмотрим в  $C [0,1]$  функционал  $f(x) = \int_0^1 x(\sqrt{t})dt$ . Доказать, что  $f$  линейный и ограниченный и найти норму  $f$ .
3. Будет ли функционал  $f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^j}{j}$ ,  $x = (x^j)$ , линейным и ограниченным на  $l_3$ ? Если да, то найти его норму.
4. Пусть  $X$  и  $Y$  – банаховы пространства,  $A: X \rightarrow Y$  линейный непрерывный и биективный. Показать, что область значений  $R(A)$  – замкнутое в  $Y$
5. множество.

## КМ-3

1. Пусть  $H$  – гильбертово пространство,  $H_1$  – замкнутое линейное подпространство  $H$  и  $x \in H$ . Показать, что если  $x_0 \in H_1$  и  $x - x_0$  ортогонально  $H_1$ , то  $x_0$  – проекция  $x$  на  $H_1$ , т.е.  $\|x - x_0\| = \inf\{\|x - y\|: y \in H_1\}$
2. Пусть  $(e_n)$  ортогональная последовательность в гильбертовом пространстве  $H$  и  $x \in H$ . найти проекцию  $x$  на замкнутую линейную оболочку  $(e_n)$ .
3. Найти ортогональное дополнение в  $L^2(-a, a)$ ,  $a > 0$ , к линейному

подпространству нечетных функций.

4. Оператор  $A: H \rightarrow H$  линейный и ограниченный, причем, существует константа  $C > 0$  такая, что для любого  $x \in H$   $\|Ax\| \geq C \|x\|$  ( $H$  - гильбертово пространство. Тогда множество  $AH$  замкнуто в  $H$ .

Приложение 2

## Зачёт

### Демонстрационный вариант

1. Будет ли на  $\mathbb{R}$  метрикой функция  $d(x, y) = \arctg |x - y|$ ?

2. Определяет ли формула  $f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^j}{j}$ ,  $x = (x^j)$ , линейный и ограниченный на  $l_4$  функционал?

3. Найти спектр интегрального оператора

$Ax(t) = \int_0^{\pi} \cos(2t + s)x(s)ds$ , действующего в пространстве  $C [0, \pi]$ .

4. В гильбертовом пространстве  $L^2(-\pi, \pi)$  найти проекцию  $x \in L^2(-\pi, \pi)$  на подпространство нечетных функций.

