Ухоботов Виктор Иванович

Родился 1 января 1946 г. Окончил механико-математический факультет Московского государственного университета в 1970 г. В 1973 г. окончил аспирантуру отделения механики механико-математический факультет Московского государственного университета. Кандидат физико-математических наук (1974), доктор физико-математических наук (1997). Профессор, заведующий кафедрой теории управления и оптимизации Челябинского государственного университета. Заслуженный работник высшей школы РФ.

Область научных интересов: дифференциальные игры и задачи управления при наличии воздействия неконтролируемых помех; вопросы принятия решений в условиях неопределенности.

Издательство
Челябинского государственного университета

Челябинский государственный университет

КЛАССИЧЕСКОЕ
УНИВЕРСИТЕТСКОЕ
ОБРАЗОВАНИЕ

В. И. Ухоботов

ИЗБРАННЫЕ ГЛАВЫ ТЕОРИИ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ

Учебное пособие

Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Челябинский государственный университет»

КЛАССИЧЕСКОЕ УНИВЕРСИТЕТСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

В. И. Ухоботов

ИЗБРАННЫЕ ГЛАВЫ ТЕОРИИ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ

Учебное пособие

Челябинск
Издательство Челябинского государственного университета
2011

ББК В126я7
У865

Серия основана в 2008 г.

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Челябинского государственного университета

Рецензенты:
кафедра системного программирования
Южно-Уральского государственного университета;
В. М. Ситников, кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры алгебры, геометрии и МПМ
Челябинского государственного педагогического университета

Ухоботов, В. И.

У865 Избранные главы теории нечетких множеств : учеб. пособие / В. И. Ухоботов. Челябинск : Изд-во Челяб. гос. ун-та, 2011. 245 с. (Классическое университетское образование).

ISBN 978-5-7271-1080-5

В учебном пособии излагается материал, содержащий основные понятия теории нечетких множеств. Возникновение этих понятий раскрывается на основе подхода, связанного с привлечением экспертов, суждения которых носят неточный характер. Теоретический материал иллюстрируется многочисленными примерами, связанными с вопросами принятия решений в разных областях деятельности человека.

Предназначено для аспирантов, занимающихся вопросами построения математических моделей на базе нечеткой логики; студентов и магистрантов, обучающихся по направлениям «Прикладная математика и информатика», «Фундаментальная информатика и информационные технологии», «Прикладная информатика».

ББК В126я73-1

ISBN 978-5-7271-1080-5

ВВЕДЕНИЕ

Одной из поразительных особенностей человеческого интеллекта является умение принимать правильные решения в условиях неполной, нечеткой и расплывчатой информации. Когда нам говорят: «Давайте встретимся около 10 часов», мы воспринимаем это естественно, хотя время встречи названо расплывчато. Высказывание «молодой человек» также содержит элементы неопределенности.

Для таких случаев классическая математика создала ряд теорий, среди которых особое применение получила теория вероятностей. Однако нечеткость ряда явлений и особенно расплывчатые повседневные высказывания носят не вероятностный характер. Кроме того, очень часто правильно применять классическую теорию вероятности невозможно из-за малого количества опытных данных. Вот что пишет по этому поводу Р. Беллман, американский математик, создатель динамического программирования [2. С. 159].

«Классическая теория вероятностей предполагает большого материала наблюдений. Она хорошо работает, если мы, например, рассматриваем представительную выборку больных или наблюдаем за одним больным в течение длительного периода времени. Однако существует много трудностей, возникающих из-за малого объема данных, например, при лечении одного больного на малом интервале времени. Здесь уже нельзя с уверенностью использовать классическую теорию вероятностей. Такая проблема возникла давно. Для ее решения требуется ввести другое понятие неопределенности. Одно из таких понятий дает теория нечетких множеств, предложенная Лотфи Заде».

В середине 1960-х гг. стали проводиться исследования по созданию интеллектуальных систем, способных адекватно взаимодействовать с человеком. Появилась потребность в математическом аппарате, позволяющем строить модели приближенных, житейски неоднозначных рассуждений человека.

Значительное продвижение в этом направлении сделано около сорока лет назад профессором Калифорнийского университета (Беркли) Лотфи А. Заде (Lotfi A. Zade). Его работа «Fuzzy Sets», появившаяся в 1965 г. в журнале Information and Control, заложила основы моделирования интеллектуальной деятельности человека.

В теории нечетких множеств развиваются методы, содержащие расплывчатые понятия. В обычной теории множеств одним из исходных понятий является понятие принадлежности элемента подмножеству. При этом существуют только две возможности для элемента: он может либо принадлежать, либо не принадлежать данному подмножеству.

Вместе с тем такие явления, как мысль людей или их восприятие не разделены точными границами.

Пусть, например, X — множество всех людей в какой-то момент времени, а A — подмножество всех молодых людей. Можно ли о конкретном человеке в возрасте 30 лет сказать, молодой он или нет? По-видимому, нельзя, и само подмножество молодых людей носит расплывчатый, нечеткий характер.

В теории нечетких множеств формализация нечеткости осуществляется путем введения понятия степени принадлежности элемента нечеткому множеству.

Подход, предложенный Л. Заде при анализе систем, в которых участвует человек (гуманистические системы), отказывается от требований точности и допускает результаты нечеткие или неопределенные. Он опирается на допущение, что элементами мышления человека являются не числа, а некоторые нечеткие множества. Человеческий разум имеет способность оперировать нечеткими понятиями и оценивать вытекающую из них информацию. В подходе Л. Заде при анализе систем вместо числовых переменных участвуют лингвистические переменные, значениями которых являются нечеткие множества.

Второе рождение теория нечетких множеств пережила в начале 1980-х гг., когда появились работы по созданию электронных систем различного применения, использующих нечеткие управляющие алгоритмы. Теория нечетких множеств дала мощную технологию построения систем управления сложными технологическими процессами, а также нашла применение в бытовой электротехнике, диагностических и других экспертных системах.

Теория нечетких множеств была создана для операций с нечеткостью и неточностью. Она дает способ представления знаний на естественном языке. Пока терминам естественного языка не сопоставлена количественная оценка, они могут интерпретироваться произвольно. Но если такая оценка состоялась как конвенциальная модель, образованная на пересечении мнений и предпочтений целого ряда экспертов, наблюдающих примерно одну и ту же, например, экономическую реальность, тогда она обладает значимостью для моделирования экономического объекта наряду с данными о самом этом объекте.

Нечеткие множества — инструмент для исследований довольно непривычный и сравнительно новый. Поток публикаций по применению нечетких множеств в различных областях знаний растет. Написано большое количество монографий по этой проблематике.

Материал данного пособия использовался автором при чтении курса «Элементы теории нечетких множеств и их приложения» студентам и магистрантам, обучающимся по направлению «Прикладная математика и информатика» в Челябинском и Южно-Уральском государственных университетах, а также студентам специальности «Информационные технологии» Уральского социально-экономического института Академии труда и социальных технологий.

Глава 1

§ 1. Определение нечетких множеств

1.1. Построение нечетких множеств с привлечением равноправных нечетких экспертов

Пусть имеется явление $\boldsymbol{A}$, которое может принимать одно из следующих значений: $x_1, \ldots, x_n$.

Пример 1.1. Явление $\boldsymbol{A}$ состоит в функционировании некоторой системы. Оценивается уровень качества ее работы по некоторой шкале: например, x_1 = {работает отлично}; x_2 = {работает очень хорошо}; x_3 = {работает довольно хорошо}; x_4 = {работает довольно плохо}; x_5 = {работает плохо}.

Пример 1.2. Пусть имеется больной человек, а $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — набор болезней, одной из которых он болеет. Явление $\boldsymbol{A}$ состоит в том, что человек имеет одно из этих заболеваний.

При формализации расплывчатости в теории нечетких множеств каждому значению x_i приписывается число p_i, которое количественно оценивает меру того, что явление $\boldsymbol{A}$ принимает значение $x_{i.}$. Существуют разные подходы для построения меры принадлежности. Один из них основан на привлечении группы экспертов.

В примере с больным человеком это может быть группа врачей одного уровня знаний и опыта.

Привлекается группа из N экспертов, каждый их которых имеет n голосов, равное числу значений x_i. Каждый эксперт, оценивая факт, что явление $\boldsymbol{A}$ принимает значение x_i, может отдать один голос, а может и не отдавать. Причем один эксперт может отдать по одному голосу сразу нескольким x_i. В этом проявляется нечеткость знания экспертов.

Максимальное число голосов, которое может собрать каждое значение x_i, равно N. Это произойдет в том случае, если все эксперты отдали по голосу значению x_i.

Предполагаемое равноправие экспертов означает, что учитывается только общее число голосов, набранное каждым значением x_i, вне зависимости от того, какие эксперты отдали эти голоса.

Пусть значение x_i набрало N_i голосов. Тогда в качестве количественной оценки того факта, что явление $\boldsymbol{A}$ принимает значение x_i, примем

$$p_i = \frac{N_i}{N},\ i = \overline{1,n}.$$

Эти числа удовлетворяют неравенствам $0 \le p_i \le 1$. Отметим, что, вообще говоря, $p_1 + \ldots + p_n \ne 1$. Это является следствием того факта, что один эксперт может отдать по голосу нескольким значениям x_i.

Допустим, что каждый эксперт относительно каждого значения x_i может однозначно сказать, принимает явление ***A*** это значение или нет. Тогда каждый эксперт отдаст только один голос и только одному значению x_i. В этом случае числа p_i будут удовлетворять равенству $p_1 + \ldots + p_n = 1$.

Свяжем с явлением ***A*** путем опроса экспертов *нечеткое подмножество A* исходного множества X, которым называется совокупность пар, вида $(x_i;\ p_i)$, $i = \overline{1,n}$. Множество $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ называется *универсальным множеством*. Число p_i называется *степенью принадлежности* элемента x_i нечеткому подмножеству A. Функция μ_A: $X \to [0, 1]$, которая определяется по правилу $\mu_A(x_i) = p_i$, называется *функцией принадлежности* нечеткого подмножества A.

Нечеткое подмножество универсального множества $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ записывается в следующем виде:

$$A = \{(x_1|p_1), \ldots, (x_n|p_n)\}.$$

Пример 1.3. Пусть имеется универсальное множество $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$. Привлечено $N = 10$ экспертов. Пусть значения x_i для рассматриваемого явления ***A*** набрали соответственно $N_1 = 4$, $N_2 = 6$, $N_3 = 3$, $N_4 = 1$ и $N_5 = 0$ голосов. Тогда нечеткое подмножество A имеет следующий вид:

$$A = \{(x_1|\ 0{,}4), (x_2|\ 0{,}6), (x_3|\ 0{,}3), (x_4|\ 0{,}1), (x_5|\ 0)\}.$$

Замечание 1.1. Хотя методологически правильнее было бы говорить о нечетком подмножестве A универсального множества X, тем не менее, будем следовать указаниям специальной литературы, где используется термин «нечеткое множество A универсального множества X».

Если для каждого $x_i \in X$ выполнено равенство $p_i = 0$, то для каждого x_i ни один эксперт не отдал голоса. Это значит, что, с точки зрения экспертов, явление ***A*** произойти не может. В этом случае нечеткое множество A будет называться *пустым* и обозначаться знаком пустого множества Ø. Таким образом,

$$\varnothing = \{(x_1|0), \ldots, (x_n|0)\}.$$

Реальные явления каким-то образом «составлены» из более простых явлений. Поэтому возникает задача о введении действий над нечеткими множествами, с помощью которых можно образовывать другие нечеткие множества.

Пусть имеются два явления ***A*** и ***B***, каждое из которых может принимать значения из универсального множества $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Группа из N экспертов оценивает возможность принятия явлениями ***A*** и ***B*** значений x_i.

Пусть для явления ***A*** значение x_i набрало N_i голосов, а для явления ***B*** это значение набрало M_i голосов. Тогда с этими явлениями связаны нечеткие множества

$$A = \{(x_1|p_1), \ldots, (x_n|p_n)\},\ p_i = \frac{N_i}{N}; \tag{1.1}$$

$$B = \{(x_1|q_1), \ldots, (x_n|q_n)\},\ q_i = \frac{M_i}{N}. \tag{1.2}$$

Введем в рассмотрение функции принадлежности этих нечетких множеств:

$$\mu_A(x_i) = p_i,\ \mu_B(x_i) = q_i,\ i = \overline{1,n}.$$

Равенство нечетких множеств. Если для каждого значения x_i явление ***A*** набрало то же самое число голосов, что и явление ***B***, то естественно считать, что нечеткое множество A совпадает с нечетким множеством B. Таким образом,

$$A = B \Leftrightarrow \mu_A(x_i) = \mu_B(x_i),\ i = \overline{1,n}.$$

Включение нечетких множеств. Если для каждого значения x_i явление ***A*** набрало не меньше числа голосов, чем явление ***B***, то оно предпочтительней. В этом случае будем говорить, что нечеткое множество A содержит нечеткое множество B и записывать $B \angle A$. Таким образом,

$$B \angle A \Leftrightarrow \mu_A(x_i) \geq \mu_B(x_i),\ i = \overline{1,n}. \tag{1.3}$$

Объединение нечетких множеств. Пусть с помощью группы из N экспертов для явлений ***A*** и ***B*** построены нечеткие множества (1.1) и (1.2). Рассмотрим явление ***C***, заключающееся в том, что происходят либо явление ***A***, либо явление ***B***, либо оба одновременно. Оценим число R_i голосов, которое набрало значение x_i для явления ***C***. Явление ***A*** отметило N_i экспертов, а явление ***B*** отметило M_i экспертов. Зная только эти числа N_i *и* M_i, мы не можем сказать, какое число R_i экспертов отметило явление ***C***. Однако дать оценку числу R_i можем.

Минимальное число экспертов, которые могли бы отметить явление ***C***, равно $\max(N_i; M_i)$. Максимальное число экспертов, которые могли бы отметить явление ***C***, равно $\min(N_i + M_i; N)$. Таким образом,

$$\max(N_i; M_i) \leq R_i \leq \min(N_i + M_i; N). \tag{1.4}$$

Если принять «наихудший» вариант, то следует считать, что число экспертов, которые отметили явление $\boldsymbol{C}$, равно

$$R_i = \max(N_i;\, M_i). \tag{1.5}$$

В общем случае существует число $0 \le \lambda_i \le 1$ такое, что

$$R_i = \lambda_i \max(N_i;\, M_i) + (1 - \lambda_i)\min(N_i + M_i;\, N).$$

В соответствии с принятым подходом свяжем с явлением $\boldsymbol{C}$ нечеткое множество

$$C = \{(x_1|\rho_1), \dots, (x_n|\rho_n)\}, \quad \rho_i = \frac{R_i}{N}.$$

Тогда, учитывая обозначения (1.1) и (1.2), будем иметь равенства

$$\rho_i = \lambda_i \max(p_i;\, q_i) + (1 - \lambda_i)\min(p_i + q_i;\, 1). \tag{1.6}$$

В теории нечетких множеств принимается формула (1.5). Тогда из формулы (1.6) при $\lambda_i = 1$ получим $\rho_i = \max(p_i;\, q_i)$.

Объединением нечетких множеств A и B назовем нечеткое множество C, функция принадлежности которого задается формулой

$$\mu_C(x_i) = \max(\mu_A(x_i);\ \ \mu_B(x_i)). \tag{1.7}$$

Объединение нечетких множеств будем обозначать $C = A \vee B$.

Пересечение нечетких множеств. Пусть с помощью группы из N экспертов для явлений $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ построены нечеткие множества (1.1) и (1.2). Рассмотрим явление $\boldsymbol{E}$, заключающееся в том, что происходят как явление $\boldsymbol{A}$, так и явление $\boldsymbol{B}$. Явление $\boldsymbol{A}$ отметили N_i экспертов, а явление $\boldsymbol{B}$ отметили M_i экспертов. Максимально возможное число экспертов, отметивших одновременно оба явления, равно $\min(N_i;\, M_i)$. Минимально возможное число экспертов, отметивших одновременно оба явления, равно 0, если $N_i + M_i \le N$, *и* равно $N_i + M_i - N$, если $N_i + M_i > N$. Таким образом, число L_i экспертов, отметивших оба явления, заключено в следующих границах:

$$\max(N_i + M_i - N;\, 0) \le L_i \le \min(N_i;\, M_i). \tag{1.8}$$

Свяжем с явлением $\boldsymbol{E}$ нечеткое множество

$$E = \{(x_1|l_1), \dots, (x_n|l_n)\}, \quad l_i = \frac{L_i}{N}.$$

Числа N_i, M_i, R_i, L_i связаны равенством

$$N_i + M_i = R_i + L_i. \tag{1.9}$$

Поэтому $l_i = \dfrac{L_i}{N} = \dfrac{N_i}{N} + \dfrac{M_i}{N} - \dfrac{R_i}{N} = p_i + q_i - \rho_i$.

Подставляя сюда формулу (1.6), получим, что

$$l_i = p_i + q_i - \lambda_i \max(p_i;\, q_i) + (1 - \lambda_i)\min(p_i + q_i;\, 1) =$$
$$= \lambda_i(p_i + q_i - \max(p_i;\, q_i)) + (1 - \lambda_i)(p_i + q_i - \min(p_i + q_i;\, 1)).$$

Отсюда следует, что

$$l_i = \lambda_i \min(p_i;\, q_i) + (1 - \lambda_i) \max(p_i + q_i - 1;\, 0). \qquad (1.10)$$

В частности, если принимается формула (1.7), то из (1.10) при $\lambda_i = 1$ следует равенство

$$l_i = \min(p_i;\, q_i). \qquad (1.11)$$

Пересечением нечетких множеств A и B назовем нечеткое множество E, функция принадлежности которого задается формулой

$$\mu_E(x_i) = \min(\mu_A(x_i);\, \mu_B(x_i)). \qquad (1.12)$$

Пересечение нечетких множеств будем обозначать $E = A \wedge B$.

Дополнение нечетких множеств. Пусть с помощью группы из N экспертов для явления $\boldsymbol{A}$ построено нечеткое множество (1.1). Рассмотрим явление $\boldsymbol{K}$, заключающееся в том, что явление $\boldsymbol{A}$ не произошло. Если явление $\boldsymbol{A}$ для значения x_i набрало N_i голосов, то $N - N_i$ экспертов для значения x_i отметили явление $\boldsymbol{K}$. Свяжем с явлением $\boldsymbol{K}$ нечеткое множество

$$K = \{(x_1|k_1),\, \ldots,\, (x_n|k_n)\}, \quad k_i = \frac{N - N_i}{N}.$$

Нечеткое множество K естественно назвать дополнением нечеткого множества A и обозначить $\bar{A}$.

Дополнением нечеткого множества A назовем нечеткое множество $\bar{A}$ с функцией принадлежности

$$\mu_{\bar{A}}(x_i) = 1 - \mu_A(x_i). \qquad (1.13)$$

Пример 1.4. Пусть имеется универсальное множество $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$. Привлечено $N = 10$ экспертов. Пусть значения x_i для рассматриваемых явлений $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{D}$ набрали соответственно $N_1 = 4$, $N_2 = 6$, $N_3 = 3$, $N_4 = 1$, $N_5 = 5$; $M_1 = 7$, $M_2 = 5$, $M_3 = 1$, $M_4 = 2$, $M_5 = 7$; $Q_1 = 3$, $Q_2 = 2$, $Q_3 = 1$, $Q_4 = 0$, $Q_5 = 4$ голоса. Тогда нечеткие множества A, B и D имеют следующий вид:

$$A = \{(x_1|\, 0{,}4),\, (x_2|\, 0{,}6),\, (x_3|\, 0{,}3),\, (x_4|\, 0{,}1),\, (x_5|\, 0{,}5)\};$$
$$B = \{(x_1|\, 0{,}7),\, (x_2|\, 0{,}5),\, (x_3|\, 0{,}1),\, (x_4|\, 0{,}2),\, (x_5|\, 0{,}7)\};$$
$$D = \{(x_1|\, 0{,}3),\, (x_2|\, 0{,}2),\, (x_3|\, 0{,}1),\, (x_4|\, 0),\, (x_5|\, 0{,}4)\}.$$

Для нечетких множеств A и D выполнено неравенство (1.3), а именно $\mu_A(x_i) \geq \mu_D(x_i)$ для всех $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Следовательно, $D \angle A$. Для множеств A и B это условие не выполнено, поскольку $\mu_A(x_2) > \mu_B(x_2)$, но $\mu_A(x_1) < \mu_B(x_1)$. Далее,

$$A \vee B = \{(x_1|\, 0{,}7),\, (x_2|\, 0{,}6),\, (x_3|\, 0{,}3),\, (x_4|\, 0{,}2),\, (x_5|\, 0{,}7)\};$$
$$A \wedge B = \{(x_1|\, 0{,}4),\, (x_2|\, 0{,}5),\, (x_3|\, 0{,}1),\, (x_4|\, 0{,}1),\, (x_5|\, 0{,}5)\};$$
$$\bar{A} = \{(x_1|\, 0{,}6),\, (x_2|\, 0{,}4),\, (x_3|\, 0{,}7),\, (x_4|\, 0{,}9),\, (x_5|\, 0{,}5)\};$$
$$A \wedge \bar{A} = \{(x_1|\, 0{,}4),\, (x_2|\, 0{,}4),\, (x_3|\, 0{,}3),\, (x_4|\, 0{,}1),\, (x_5|\, 0{,}5)\} \neq \varnothing.$$

1.2. Определение нечеткого множества

Формализуем теперь понятие нечеткого множества. Задано множество X в обычном смысле, которое будем называть *универсальным*. Задана функция μ_A: $X \to [0, 1]$.

Определение 1.1. *Нечетким множеством* A универсального множества X называется совокупность пар вида $(x|\mu_A(x))$, где $x \in X$.

Функция μ_A: $X \to [0, 1]$ называется *функцией принадлежности* нечеткого множества A. Значение $\mu_A(x)$ на конкретном элементе $x \in X$ называется *степенью* (или *мерой*) *принадлежности* этого элемента нечеткому множеству A.

Обычное подмножество $A \subset X$ можно представить в виде нечеткого множества, если в качестве функции принадлежности взять ее характеристическую функцию

$$\mu_A(x) = 1 \text{ при } x \notin A \text{ и } \mu_A(x) = 0, \text{ если } x \notin A. \qquad (1.14)$$

Нетрудно проверить, что характеристические функции объединения $A \bigcup B$, пересечения $A \bigcap B$ и дополнения $\overline{A}$ связаны с характеристическими функциями исходных множеств следующими соотношениями:

$$\mu_{A \bigcup B}(x) = \max(\mu_A(x); \mu_A(x));$$
$$\mu_{A \bigcap B}(x) = \min(\mu_A(x); \mu_A(x); \qquad (1.15)$$
$$\mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x).$$

Пустое подмножество множества X имеет характеристическую функцию, тождественно равную нулю. В связи с этим можно дать следующее определение пустого нечеткого подмножества.

Определение 1.2. Нечеткое множество Ø универсального множества X называется *пустым*, если $\mu_\varnothing(x) = 0$ для всех $x \in X$.

Пусть A и B являются нечеткими множествами универсального множества X с функциями принадлежности μ_A и μ_B. Считаем, что нечеткое множество A совпадает с нечетким множеством B, если $\mu_A(x) = \mu_B(x)$ для каждого $x \in X$. Таким образом,

$$A = B \Leftrightarrow \mu_A(x) = \mu_B(x) \text{ для любого } x \in X. \qquad (1.16)$$

Определение 1.3. Нечеткое множество A *содержит* нечеткое множество B, если $\mu_A(x) \geq \mu_B(x)$ для любого $x \in X$. Таким образом,

$$B \angle A \Leftrightarrow \mu_A(x) \geq \mu_B(x) \text{ для любого } x \in X. \qquad (1.17)$$

Отметим, что $A = B$ тогда и только тогда, когда $B \angle A$ и $A \angle B$.

Задача 1.1. Пусть A и B — обычные подмножества универсального множества X, а μ_A и μ_B — их характеристические функции. Доказать, что A содержит B (в обычном смысле) тогда и только тогда, когда $\mu_B(x) \le \mu_A(x)$ для всех $x \in X$.

Из этой задачи следует, что определение принадлежности нечетких множеств для обычных подмножеств переходит в обычное определение принадлежности.

Задача 1.2. Доказать следующие свойства отношения принадлежности:

1) для любого нечеткого множества A выполнено включение $A \angle A$ (*рефлективность*);

2) для любых нечетких множеств A, B и C универсального множества X, таких, что $B \angle A$ и $C \angle B$, выполнено $C < A$ (*транзитивность*);

3) для нечетких множеств A и B универсального множества X, таких, что $A \angle B$ и $B \angle A$, выполнено $A = B$ (*антисимметричность*).

Определение 1.4. *Объединением* нечетких множеств A и B универсального множества X с функциями принадлежности μ_A и μ_B называется нечеткое множество $A \vee B$ универсального множества X, функция принадлежности которого задается формулой

$$\mu_{A \vee B}(x) = \max(\mu_A(x); \mu_B(x)). \qquad (1.18)$$

Определение 1.5. *Пересечением* нечетких множеств A и B универсального множества X с функциями принадлежности μ_A и μ_B называется нечеткое множество $A \wedge B$ универсального множества X, функция принадлежности которого задается формулой

$$\mu_{A \wedge B}(x) = \min(\mu_A(x); \mu_B(x)). \qquad (1.19)$$

Определение 1.6. *Дополнением* нечеткого множества A универсального множества X с функцией принадлежности μ_A называется нечеткое множество $\bar{A}$ универсального множества X, функция принадлежности которого задается формулой

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x). \qquad (1.20)$$

Из формул (1.15) следует, что определения объединения, пересечения и дополнения нечетких множеств для обычных подмножеств переходят в обычные определения объединения, пересечения и дополнения подмножеств.

1.3. Нечеткие числа

Если универсальное множество X является подмножеством действительных чисел, то нечеткие множества называются *нечеткими числами*. Эксперт может задать график функции принадлежности рассматриваемого нечеткого числа.

Пример 1.5. Понятия «множество молодых людей» или «множество трудоспособных людей» носят расплывчатый характер. Формализуем их в виде нечетких множеств A = {*множество молодых людей*}, B = {*множество трудоспособных людей*}. Считаем, что свойство быть молодым или трудоспособным определяется только возрастом человека. Поэтому в качестве универсального множества возьмем множество всех положительных чисел, которое обозначим X. Считаем, что до 25 лет человек заведомо является молодым, а после 35 лет заведомо таким не является. Поэтому функция принадлежности $\mu_A(x) = 1$ при $0 \le x \le 25$ и $\mu_A(x) = 0$ при $x \ge 35$. От 25 до 35 возьмем функцию $\mu_A(x)$ линейной. Таким образом,

$$\mu_A(x) = 1 \text{ при } 0 < x \le 25; \quad \mu_A(x) = 3{,}5 - 0{,}1x \text{ при } 25 \le x \le 35;$$
$$\mu_A(x) = 0 \text{ при } 35 < x.$$

Считаем, что до 14 лет и после 80 лет человек заведомо не является трудоспособным, а от 16 до 70 лет он заведомо является трудоспособным. Тогда в качестве функции принадлежности нечеткого множества B можно взять

$$\mu_B(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 < x \le 14, \\ 0{,}5x - 7 & \text{при } 14 \le x \le 16, \\ 1 & \text{при } 16 \le x \le 70, \\ 8 - 0{,}1x & \text{при } 70 \le x \le 80, \\ 0 & \text{при } x \ge 80. \end{cases}$$

Графики этих функций изображены на рис 1.1 и 1.2.

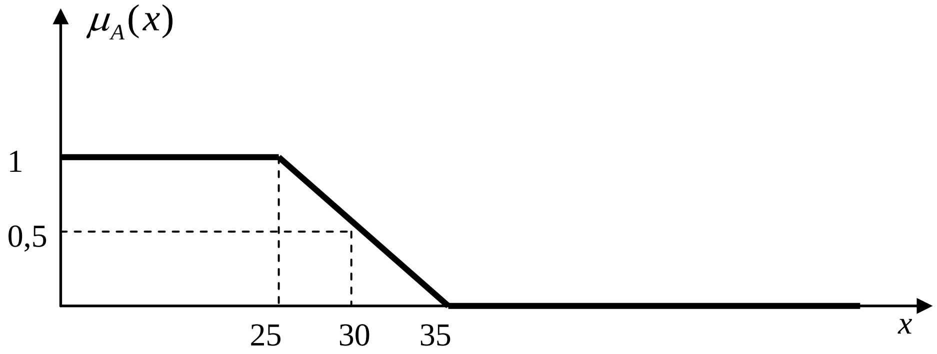

Рис. 1.1

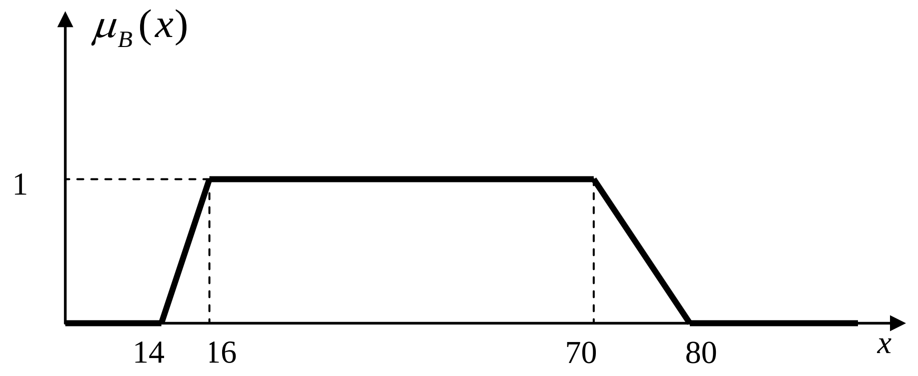

Рис. 1.2

Из формул (1.17) и (1.18) получим, что графики функций принадлежности для их пересечения, объединения, дополнения имеют следующий вид:

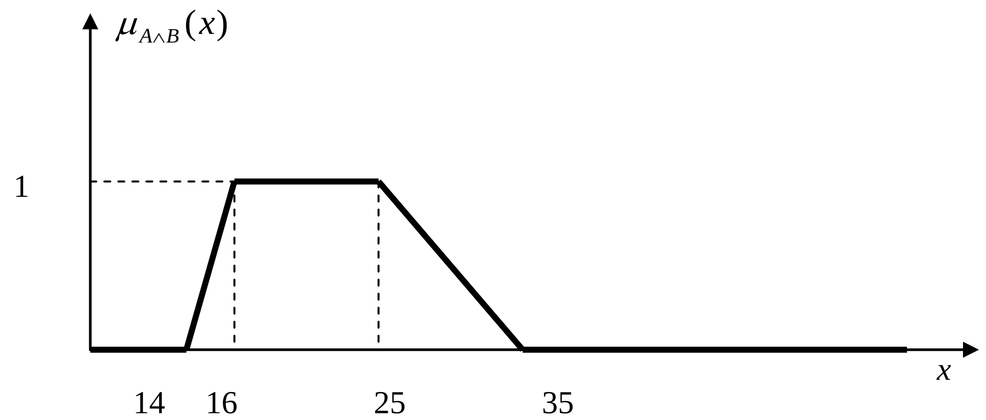

Рис. 1.3

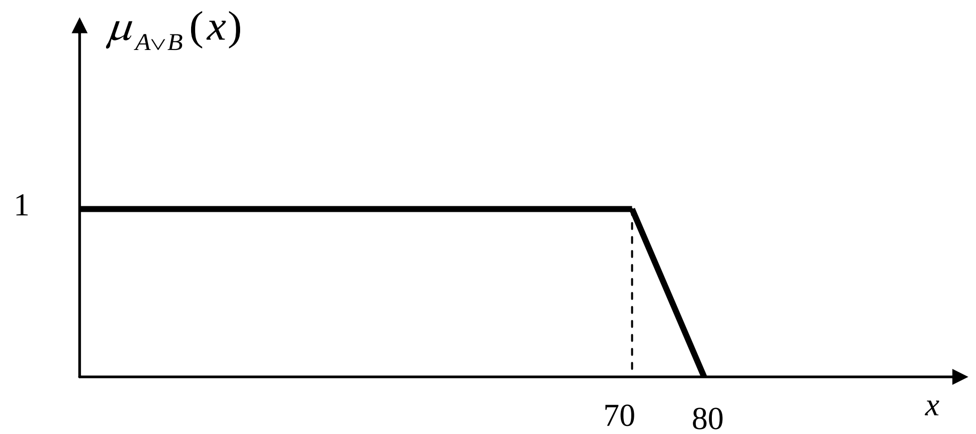

Рис. 1.4

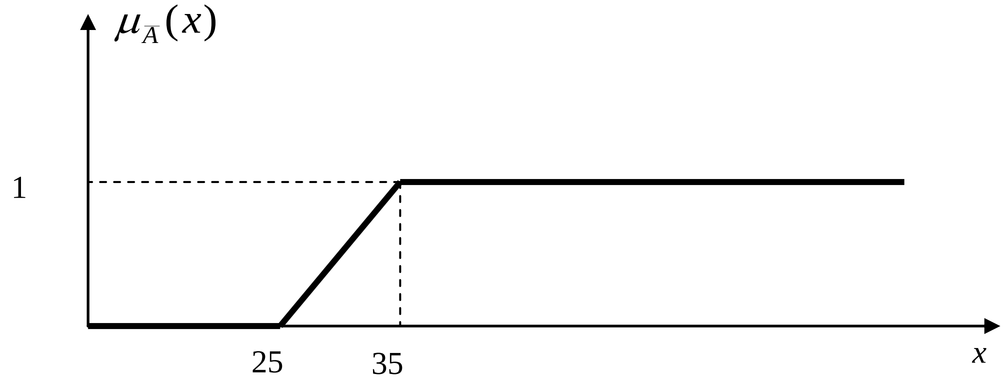

Рис. 1.5

График функции принадлежности нечеткой границы $A \wedge \bar{A}$ нечеткого множества A изображен на рис. 1.6.

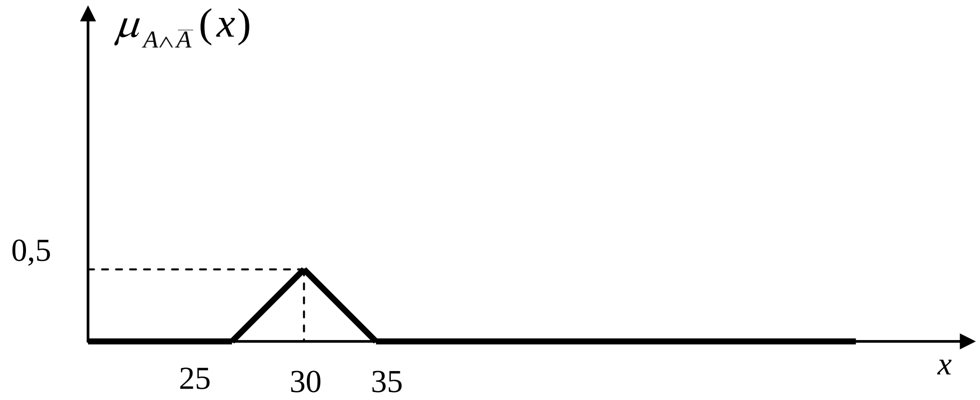

Рис. 1.6

Замечание 1.2. Часто используют функции принадлежности нечетких чисел трапецеидального вида (рис. 1.7)

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad x \le a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{при} \quad a \le x \le b, \\ 1, & \text{при} \quad b \le x \le c, \\ \dfrac{d-x}{d-c}, & \text{при} \quad c \le x \le d, \\ 0, & \text{при} \quad x \ge d. \end{cases} \tag{1.21}$$

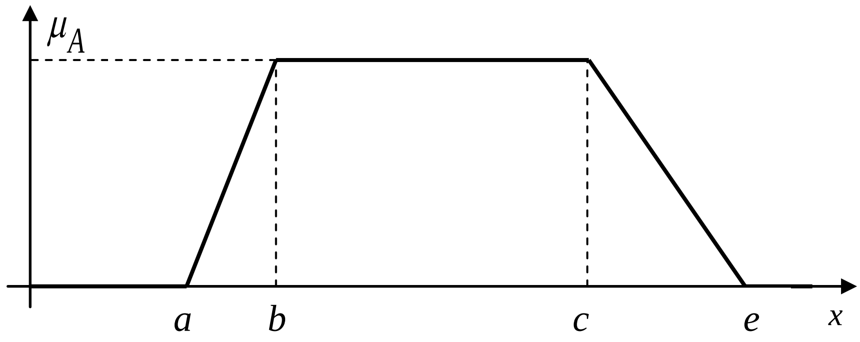

Рис. 1.7

Аналитически они задаются функцией, которая легко реализуется на компьютере.

Частным случаем являются нечеткие числа с *треугольной* функцией принадлежности (рис. 1.8):

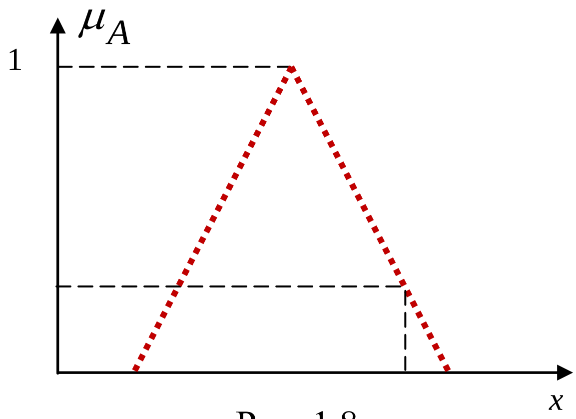

Рис. 1.8

Замечание 1.3. С помощью графиков функций принадлежности можно дать еще одну интерпретацию формул (1.18) и (1.19).

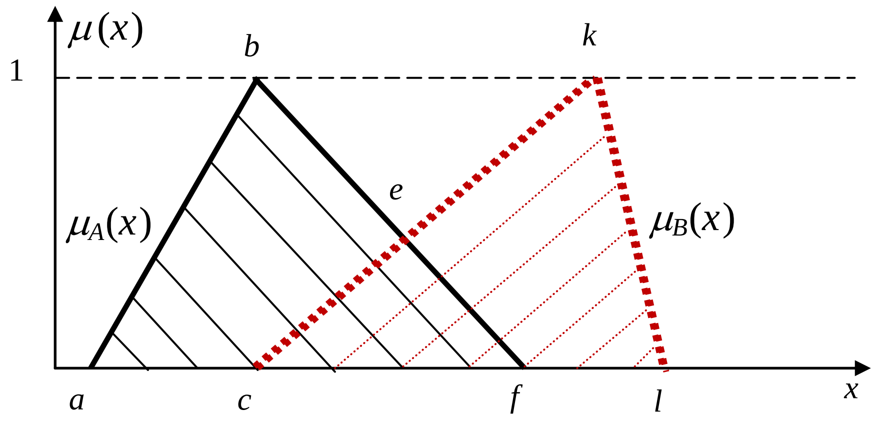

Рис. 1.9

На рис. 1.9 графиком функции $\mu_A(x)$ является ломаная *abf*, а ломаная *ckl* задает график функции $\mu_B(x)$. Графиком функции $\mu_{A\vee B}(x)$ является ломаная *abekl*, а ломаная *cef* задает график функции $\mu_{A\wedge B}(x)$. Следовательно, при объединении нечетких множеств фигуры, образованные графиками функций принадлежности и осью *x*, объединяются, а при пересечении нечетких множеств — пересекаются.

Если A и B — обычные подмножества универсального множества X, то их *разностью* называется множество $A \setminus B = \{x \in X\colon x \in A \text{ и } x \notin B\} = A \cap \overline{B}$.

Таким образом, разность двух множеств — это множество элементов, обладающих свойствами, которые описывают первое множество, и не обладающих свойствами, которые присущи элементам второго множества.

Пусть теперь даны два нечетких множества A = {*множество молодых людей*} и B = {*множество трудоспособных людей*}. Нам нужно построить нечеткое множество C = {*множество молодых людей, не являющихся трудоспособными*}. Естественно, это нечеткое множество нужно определить как разность исходных нечетких множеств.

Определение 1.7. *Разностью* нечетких множеств A и B одного универсального множества X с функциями принадлежности μ_A и μ_B называется нечеткое множество $A \setminus B$ универсального множества X, которое задается формулой

$$A \setminus B = A \wedge \overline{B}.$$

Функция принадлежности разности имеет следующий вид:

$$\mu_{A\setminus B}(x) = \min(\mu_A(x);\ 1 - \mu_B(x)). \qquad (1.22)$$

Если A и B — обычные подмножества универсального множества X, то их *дизъюнктивной суммой* называется множество $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Таким образом, дизъюнктивная сумма двух множеств — это множество элементов, обладающих либо только свойствами, которые описывают первое множество, либо только свойствами, которые присущи элементам второго множества.

Пусть теперь даны два нечетких множества A = {*множество молодых людей*} и B ={*множество трудоспособных людей*}. Необходимо построить нечеткое множество C = {*множество молодых людей, не являющихся трудоспособными, либо трудоспособных и не являющихся молодыми*}. Естественно, это нечеткое множество нужно определить как дизъюнктивную сумму исходных нечетких множеств.

Определение 1.8. *Дизъюнктивной суммой* нечетких множеств A и B одного универсального множества X с функциями принадлежности μ_A и μ_B называется нечеткое множество универсального множества X, которое задается формулой

$$(A \setminus B) \vee (B \setminus A) = (A \wedge \bar{B}) \vee (\bar{A} \wedge B).$$

Функция принадлежности дизъюнктивной суммы равна

$$\mu_{(A\setminus B)\vee(B\setminus A)}(x) = \max(\min(\mu_A(x);\, 1 - \mu_B(x));\; \min(\mu_B(x);\, 1 - \mu_A(x))). \quad (1.23)$$

Задача 1.3. Для нечетких множеств A и B из примера 1.5 нарисовать графики функций принадлежности их разности и дизъюнктивной суммы.

Задача 1.4. Записать формулы для функций принадлежности объединения, пересечения, дополнения, разности и дизъюнктивной суммы нечетких множеств трапецеидального вида (1.21). Отдельно рассмотреть случай $b = c$.

§ 2. Два метода построения функции принадлежности нечеткого множества

2.1. Метод упорядочивания последовательности принимаемых значений [9]

Пусть универсальное множество X состоит из конечного числа элементов $x_1, \ldots, x_n$. Изучается явление $\boldsymbol{A}$, которое может принимать одно из этих значений. Излагаемый метод применим, если существует отношение предпочтения

$$\omega = \begin{cases} << & - \textit{гораздо больше}, \\ < & - \textit{больше}, \\ \leq & - \textit{чуть больше}, \\ \approx & - \textit{больше или равно}, \\ \equiv & - \textit{равноценны}. \end{cases} \quad (2.1)$$

между элементами x_i с точки зрения принятия явлением $\boldsymbol{A}$ этих значений.

Имеется эксперт, который ранжирует элементы x_i отношением ω с точки зрения принятия явлением $\boldsymbol{A}$ этих значений.

Пример 2.1. Пусть n = 5 и эксперт проранжировал элементы следующим образом:

$$x_2 < x_4 << x_1 \le x_3 \approx x_5. \tag{2.2}$$

Это значит, например, что, с точки зрения эксперта, шансов, что явление ***A*** примет значение x_4, больше, чем того, что оно примет значение x_2.

Путем ранжирования эксперт построил последовательность:

$$x_{i_1}^{(1)}\,\omega_1\,x_{i_2}^{(2)}\,\omega_2\,\ldots\,\omega_{n\text{-}1}\,x_{i_n}^{(n)}. \tag{2.3}$$

Здесь индекс j элемента $x_{i_j}^{(j)}$ означает номер элемента в построенной экспертом последовательности (2.3), а индекс i_j — номер в исходном множестве $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Так, например, последовательность (2.2) принимает следующий вид:

$$x_2^{(1)} < x_4^{(2)} << x_1^{(3)} \le x_3^{(4)} \approx x_5^{(5)}. \tag{2.4}$$

Каждому значению отношения ω приписывается число:

$$\mu(\omega) = \begin{cases} 1, & \textit{если} \quad \omega = \quad << \quad - \textit{гораздо больше}, \\ 0{,}75\,, & \textit{если} \quad \omega = \quad < \quad - \textit{больше}, \\ 0{,}5\,, & \textit{если} \quad \omega = \quad \le \quad - \textit{чуть больше}, \\ 0{,}25\,, & \textit{если} \quad \omega = \quad \approx \quad - \textit{больше или равно}, \\ 0\;\;, & \textit{если} \quad \omega = \quad \equiv \quad - \textit{равноценны}. \end{cases} \tag{2.5}$$

Возьмем два элемента $x_{i_k}^{(k)}$ и $x_{i_{k+l}}^{(k+l)}$ в последовательности (2.3) и введем между ними расстояние

$$\rho(x_{i_k}^{(k)},\ x_{i_{k+l}}^{(k+l)}) = \sum_{j=k}^{k+l-1} \mu(\omega_j).$$

Так, например, для последовательности (2.4) имеем:

$$\rho\,(x_4^{(2)},\ x_3^{(4)}) = \mu(<<) + \mu(\le) = 1 + 0{,}5 = 1{,}5;$$

$$\rho\,(x_2^{(1)},\ x_5^{(5)}) = \mu(<) + \mu(<<) + \mu(\le) + \mu(\approx) = 0{,}75 + 1 + 0{,}5 + 0{,}25 = 2{,}5.$$

Возьмем элемент x_s из множества X. В последовательности (2.3) он стоит на k-м месте, то есть $x_s = x_{i_k}^{(k)}$, причем $s = i_k$. Вычислим расстояние $\rho_s = \rho\,(x_{i_1}^{(1)},\ x_{i_k}^{(k)})$ между первым элементом последовательности (2.3) и этим $x_s = x_{i_k}^{(k)}$. Самое большое значение, которое может принять это расстояние, равно $n - 1$. Положим,

$$\mu_A(x_s) = \frac{\rho_s}{n-1},\ s = \overline{1,n}. \tag{2.6}$$

Пример 2.2. Вычислим функцию (2.6) для последовательности (2.4). Имеем:

$$\rho_1 = \rho\,(x_2^{(1)},\ x_1^{(3)}) = \mu(<) + \mu(<<) = 0{,}75 + 1 = 1{,}75;$$

$$\rho_2 = \rho\,(x_2^{(1)},\ x_2^{(1)}) = 0;$$

$$\rho_3 = \rho\,(x_2^{(1)},\ x_3^{(4)}) = \mu(<) + \mu(<<) + \mu(\le) = 0{,}75 + 1 + 0{,}5 = 2{,}25;$$

$$\rho_4 = \rho\,(x_2^{(1)},\ x_4^{(2)}) = \mu(<) = 0{,}75;$$

$$\rho_5 = \rho\,(x_2^{(1)},\ x_5^{(5)}) = \mu(<) + \mu(<<) + \mu(\le) + \mu(\approx) = 0{,}75 + 1 + 0{,}5 + 0{,}25 = 2{,}5.$$

Таким образом,

$$\mu_A(x_1) = 1{,}75 \cdot 0{,}25 = 0{,}4375;\ \mu_A(x_2) = 0;\ \mu_A(x_3) = 2{,}25 \cdot 0{,}25 = 0{,}5625;$$

$$\mu_A(x_4) = 0{,}75 \cdot 0{,}25 = 0{,}1875;\ \mu_A(x_5) = 2{,}5 \cdot 0{,}25 = 0{,}625.$$

Следовательно, построенное нечеткое множество имеет вид

$$A = \{(x_1 | 0{,}4375),\ (x_2 | 0),\ (x_3 | 0{,}5625),\ (x_4 | 0{,}1875),\ (x_5 | 0{,}625)\}.$$

В случае если привлекается группа из N экспертов, каждый j-й эксперт строит функцию $\mu_A^{(j)}(x_s)$. В качестве окончательной функции принадлежности берется

$$\mu_A(x_s) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \mu_A^{(j)}(x_s),\ s = \overline{1,n}.$$

2.2. Метод иерархий Т. Саати [21]

Как и в предыдущем методе, множество X состоит из n элементов. Однако суждение эксперта относительно принимаемых явлением $\boldsymbol{A}$ значений x_i может оказаться нетранзитивным. Тогда отсутствует отношение ω между элементами. В этом случае можно использовать метод попарного сравнения степеней принадлежности $\psi_i = \mu_A(x_i)$ элемента x_i нечеткому множеству X.

Эксперт оценивает отношения $\dfrac{\psi_i}{\psi_j}$, используя шкалу, приведенную в табл. 2.1. В результате эксперт составляет матрицу:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}, \qquad (2.7)$$

в которой числа b_{ij} оценивают отношения $\dfrac{\psi_i}{\psi_j}$.

Таблица 2.1

Сравнительная оценка	Условия
1	Значение ψ_i равно значению ψ_j
3	Значение ψ_i чуть больше значения ψ_j
5	Значение ψ_i больше значения ψ_j
7	Значение ψ_i гораздо больше значения ψ_j
9	Значение ψ_i безусловно больше значения ψ_j
2, 4, 6, 8	Когда возникает сомнение при выборе между двумя соседними числами
Числа, обратные к данным	При сравнении ψ_j с ψ_i

Допустим, что эксперт точно оценивает эту дробь. Тогда матрица (2.7) равна

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\psi_1}{\psi_1} & \frac{\psi_1}{\psi_2} & \dots & \frac{\psi_1}{\psi_n} \\ \frac{\psi_2}{\psi_1} & \frac{\psi_2}{\psi_2} & \dots & \frac{\psi_2}{\psi_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\psi_n}{\psi_1} & \frac{\psi_n}{\psi_2} & \dots & \frac{\psi_n}{\psi_n} \end{pmatrix}. \qquad (2.8)$$

Для этой матрицы выполнено матричное равенство

$$\begin{pmatrix} \frac{\psi_1}{\psi_1} & \frac{\psi_1}{\psi_2} & \dots & \frac{\psi_1}{\psi_n} \\ \frac{\psi_2}{\psi_1} & \frac{\psi_2}{\psi_2} & \dots & \frac{\psi_2}{\psi_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\psi_n}{\psi_1} & \frac{\psi_n}{\psi_2} & \dots & \frac{\psi_n}{\psi_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \psi_n \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \psi_n \end{pmatrix}.$$

Это значит, что вектор $\overline{\psi} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \dots \\ \psi_n \end{pmatrix}$ является собственным вектором матрицы (2.8) с собственным значением, равным n, то есть $B\overline{\psi} = n\overline{\psi}$.

Каждая k-я строка матрицы (2.8) получается из первой путем умножения ее на число $\frac{\psi_k}{\psi_1}$. Следовательно, ранг матрицы (2.8) равен единице. Поэтому все остальные собственные значения этой матрицы равны нулю, и, следовательно, число n является максимальным собственным значением.

Алгоритм построения функции принадлежности

1. Имея матрицу (2.7), построенную экспертом, находим ее максимальное собственное значение $\lambda_{\max}$, которое является решением характеристического уравнения

$$\det\begin{pmatrix} b_{11}-\lambda & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22}-\lambda & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn}-\lambda \end{pmatrix} = 0.$$

2. Ищем собственный вектор:

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \ldots \\ \psi_n \end{pmatrix} = \lambda_{\max}\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \ldots \\ \psi_n \end{pmatrix}, \quad \sum_{i=1}^{n}\psi_i = 1.$$

3. Полагаем, что $\mu_A(x_i) = \psi_i$, $i = \overline{1,n}$.

Замечание 2.1. Все элементы матрицы (2.7) строго больше нуля. Согласно теореме Перрона — Фробениуса [7. С. 334] ее наибольшее собственное значение $\lambda_{\max}$ положительно, а соответствующий этому наибольшему собственному значению собственный вектор $\overline{\psi}$ имеет положительные координаты $\psi_i > 0$. Дополнительное равенство $\sum_{i=1}^{n}\psi_i = 1$ выделяет единственный собственный вектор с положительными координатами [7. С. 342]. Далее,

$$\min_{1\le i\le n}\sum_{k=1}^{n} b_{ik} \le \lambda_{\max} \le \max_{1\le i\le n}\sum_{k=1}^{n} b_{ik}.$$

Замечание 2.2. В качестве показателя близости построенной экспертом матрицы (2.7) к матрице (2.8) можно взять число

$$\varsigma = \frac{|\lambda_{\max} - n|}{n-1}, \tag{2.9}$$

которое называется *индексом согласованности* матрицы (2.7). Считается, что если индекс согласованности не превышает 0,1, то можно быть удовлетворенным полученной степенью близости.

Матрица (2.7), в которой выполнено равенство $b_{ij} = b_{ij}^{-1}$, называется *обратно-симметричной*. В общем случае задача нахождения максимального собственного значения и соответствующего ему собственного вектора технически сложна. Поэтому для обратно-симметричных матриц разработаны методы приближенного вычисления собственного вектора, по которому затем находится приближенное собственное значение. Опишем один из таких методов [25. С. 178].

Алгоритм приближенного построения собственного вектора

1. Суммируем элементы каждого столбца обратно-симметричной матрицы (2.7) и записываем полученный результат в столбец.

2. Заменяем каждый элемент построенного столбца на обратный ему.

3. Складываем элементы столбца из обратных величин.

4. Делим каждый из элементов столбца из обратных величин на полученную сумму.

Пример 2.3. Пусть $n = 4$, а матрица (2.7) равна

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 7 \\ \frac{1}{5} & 1 & 4 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & 1 & 4 \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}. \qquad (2.10)$$

Результаты каждого шага описанного выше способа:

$$1)\begin{pmatrix} 1{,}57 \\ 6{,}42 \\ 11{,}25 \\ 18 \end{pmatrix}; \qquad 2)\begin{pmatrix} 0{,}66 \\ 0{,}16 \\ 0{,}09 \\ 0{,}06 \end{pmatrix}; \qquad 3)\ 0{,}97; \qquad 4)\begin{pmatrix} 0{,}68 \\ 0{,}16 \\ 0{,}09 \\ 0{,}06 \end{pmatrix}.$$

Умножим матрицу (2.10) на найденный вектор. Получим

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 7 \\ \frac{1}{5} & 1 & 4 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & 1 & 4 \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}68 \\ 0{,}16 \\ 0{,}09 \\ 0{,}06 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}44 \\ 1{,}02 \\ 0{,}48 \\ 0{,}16 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим числа 2,44 : 0,68 = 3,59;   1,02 : 0,16 = 6,37;   0,48 : 0,09 = = 5,33;   0,16 : 0,06 = 2,67. В качестве приближенного собственного значения берется среднее значение полученных чисел: λ = (3,59 + + 6,37 + 5,33 + 2,67) : 4 = 4,49.

Индекс согласованности (2.9) равен $\varsigma = \dfrac{|4{,}49 - 4|}{4 - 1}$ = 0,16.

Достаточно полный обзор методов измерения нечеткости и их сравнительный анализ содержится в работе [4].

§ 3. Свойства операций с нечеткими множествами

В предыдущем параграфе были определены операции объединения, пересечения и дополнения нечетких множеств.

Теорема 3.1. Введенные операции с нечеткими множествами удовлетворяют следующим свойствам:

$$A \vee B = B \vee A; \quad A \wedge B = B \wedge A \text{ (коммутативность)}; \qquad (3.1)$$

$$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C); \quad (A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C) \text{ (ассоциативность)}; \qquad (3.2)$$

$$A \vee A = A; \quad A \wedge A = A \text{ (идемпотентность)}; \qquad (3.3)$$

$$\left.\begin{array}{l}(A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C)\\ A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)\end{array}\right\} \text{ (дистрибутивность)}; \qquad (3.4)$$

$$\overline{(\overline{A})} = A \quad \text{(инволютивность)}; \qquad (3.5)$$

$$\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}; \overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B} \text{ (законы де Моргана)}; \qquad (3.6)$$

$$A \vee X = X; \; A \wedge X = A; \; A \vee \varnothing = A; \; A \wedge \varnothing = \varnothing; \; \overline{X} = \varnothing; \; \overline{\phi} = X; \qquad (3.7)$$

$$A \angle A_1, \;\; B \angle B_1 \Rightarrow A \vee B \angle A_1 \vee B_1, \;\; A \wedge B \angle A_1 \wedge B_1 \qquad (3.8)$$

Здесь посредством X обозначено нечеткое множество такое, что его функция принадлежности $\mu_X(x)$ = 1 для любого $x \in X$.

Доказательство. Зафиксируем точку $x \in X$ и обозначим $a = \mu_A(x)$, $b = \mu_B(x)$, $c = \mu_C(x)$. Из формул (1.18) и (1.19) следует, что соотношения (3.1) — (3.3) принимают вид очевидных равенств:

$$\max(a, b) = \max(b, a); \min(a, b) = \min(b, a);$$
$$\max(\max(a, b), c) = \max(a, \max(b, c)); \min(\min(a, b), c) = \min(a, \min(b, c)); \max(a, a) = a; \min(a, a) = a.$$

Проверим выполнение свойств дистрибутивности (3.4). Для этого нужно показать, что

$$\min(\max(a, b), c) = \max(\min(a, c), \min(b, c));$$
$$\max(a, \min(b, c)) = \min(\max(a, b), \max(a, c)).$$

Справедливость первого равенства устанавливается путем рассмотрения случаев $\max(a, b) \ge c$ и $\max(a, b) < c$, а для второго нужно рассмотреть случаи $\min(b, c) \le a$ и $\min(b, c) > a$.

Зафиксируем число $-1 < \lambda < +\infty$ и рассмотрим функцию

$$\psi(p) = \frac{1-p}{1+\lambda p}, \quad 0 \le p \le 1. \tag{3.9}$$

Покажем, что $0 \le \psi(p) \le 1$ при $0 \le p \le 1$. В самом деле, если $0 \le p \le 1$ и $1 < \lambda$, то $p\,(1+\lambda) \ge 0 \Rightarrow \lambda p \ge -p$. Следовательно, $1+\lambda p \ge 1-p$. Стало быть, $\psi(p) \le 1$. Неравенство $\psi(p) \ge 0$ при $0 \le p \le 1$ является очевидным.

Определим с помощью функции (3.9) дополнение нечеткого множества

$$\mu_{\bar{A}}(x) = \psi(\mu_A(x)). \tag{3.10}$$

При $\lambda = 0$ функция $\psi(p) = 1 - p$ и, следовательно, формула (3.10) в этом случае задает операцию дополнения (1.20).

Проверим справедливость свойства инволютивности (3.5). Для этого нужно показать, что $\psi(\psi(a)) = a$ для любого числа $0 \le a \le 1$. Имеем

$$\psi\left(\psi(a)\right) = \frac{1-\dfrac{1-a}{1+\lambda a}}{1+\dfrac{\lambda(1-a)}{1+\lambda a}} = \frac{1+\lambda a-1+a}{1+\lambda a+\lambda-\lambda a} = a.$$

Для проверки справедливости первого закона де Моргана (3.6) нужно доказать равенство

$$\frac{1-\max(a;b)}{1+\lambda\max(a;b)} = \min\left(\frac{1-a}{1+\lambda a};\ \frac{1-b}{1+\lambda b}\right). \tag{3.11}$$

Прежде всего отметим, что производная функции (3.9) $\psi'(p) = -\frac{1+\lambda}{(1+\lambda p)^2} < 0$. Стало быть, функция ψ убывает. Пусть, например, $a \ge b$. Тогда левая часть в равенстве (3.11) равняется $\psi(a)$. Так как функция ψ убывает, то этому же значению равняется и правая часть равенства (3.11).

Второй закон де Моргана является следствием первого закона и свойства инволюции (3.5). В самом деле,

$$\overline{A} \vee \overline{B} = \left(\overline{\overline{\overline{A} \vee \overline{B}}}\right) = \left(\overline{\overline{\overline{A}} \wedge \overline{\overline{B}}}\right) = \overline{A \wedge B}.$$

Проверим соотношения (3.7). Имеем $\max(a, 1) = 1$, $\min(a, 1) = a$; $\max(a, 0) = a$; $\min(a, 0) = 0$; $\psi(1) = 0$ и $\psi(0) = 1$.

Для соотношений (3.8) имеем $a \le a_1$, $b \le b_1 \Rightarrow \max(a, b) \le \max(a_1, b_1)$; $\min(a, b) \le \min(a_1, b_1)$.

Отметим, что для нечетких множеств, вообще говоря, не выполнены следующие равенства:

$$A \wedge \bar{A} = \varnothing; \quad A \vee \bar{A} = X. \tag{3.12}$$

В самом деле, равенства $\min(a, 1 - a) = 0$ и $\max(a, 1 - a) = 1$ выполнены только при $a = 0$ или $a = 1$.

Пример 3.1 (*анализ сетей нечетких элементов*). Введенные операции объединения, пересечения нечетких множеств и их свойства позволяют проводить анализ сетей, работа каждого элемента которых носит нечеткий характер. Группа экспертов оценивает качество работы каждого элемента. Требуется оценить качество работы всей сети. Универсальным множеством может, например, служить множество $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, где x_1 = (*работает отлично*), x_2 = (*работает очень хорошо*), x_3 = (*работает довольно хорошо*), x_4 = (*работает довольно плохо*), x_5 = (*не работает*). После опроса экспертов с каждым элементом $\boldsymbol{A_i}$ сети свяжем нечеткое множество

$$A_i = \{(x_1|p_{i1}), (x_2|p_{i2}), (x_3|p_{i3}), (x_4|p_{i4}), (x_5|p_{i5})\}. \tag{3.13}$$

Под объединением двух элементов сети будем понимать сеть, полученную в результате параллельного соединения звеньев (см. рис. 3.1). Эта сеть работает с показателем качества x_i в том случае, если с этим показателем работает хотя бы один из элементов $\boldsymbol{A}$ или $\boldsymbol{B}$.

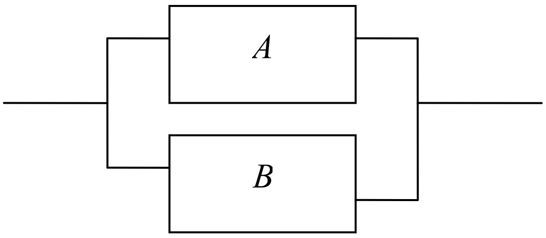

Рис. 3.1. $A \vee B$

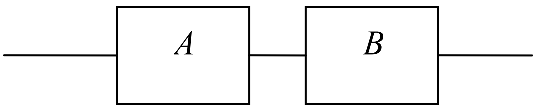

Рис. 3.2. $A \wedge B$

Под пересечением двух элементов сети будем понимать сеть, полученную в результате последовательного соединения звеньев (рис. 3.2). Эта сеть работает с показателем x_i в том случае, если с этим показателем работают оба из элементов $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$.

Рассмотрим конкретную сеть $\boldsymbol{K}$, изображенную на рис. 3.3.

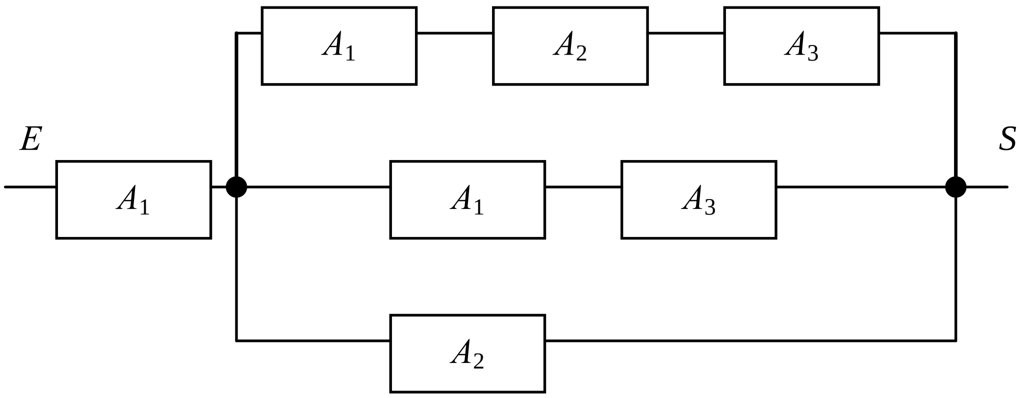

Рис. 3.3

Символ E означает вход, символ S — выход сети. Как видно из схемы, нечеткое множество K, определяемое всей сетью $\boldsymbol{K}$, задается формулой

$$K = ((A_1 \wedge A_2 \vee A_3) \vee (A_1 \wedge A_3) \vee A_2) \wedge A_1. \qquad (3.14)$$

Допустим, что группа экспертов оценила качество работы каждого элемента $\boldsymbol{A_i}$. Пусть нечеткие множества (3.13) имеют вид, представленный в табл. 3.1.

Таблица 3.1

Элемент	Универсальное множество				
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
A_1	0,1	0,3	0,4	0,8	0,9
A_2	0,2	0,7	0,3	0,4	0,6
A_3	0,6	0,8	0,5	0,2	0,1

Используя доказанные свойства операций объединения и пересечения нечетких множеств, упростим выражение (3.14). Имеем

$$K = (((A_1 \wedge A_2 \wedge A_3) \vee ((A_1 \wedge A_3) \wedge A_1) \vee (A_2 \wedge A_1) = (A_1 \wedge A_2 \wedge A_3) \vee$$
$$\vee (A_1 \wedge A_3 \wedge A_1) \vee (A_2 \wedge A_1) = (A_1 \wedge A_2 \wedge A_3) \vee (A_1 \wedge A_3) \vee (A_2 \wedge A_1).$$

Стало быть, $K = (A_1 \wedge A_3) \vee (A_2 \wedge A_1)$. Отсюда, используя свойство дистрибутивности, получим

$$K = A_1 \wedge (A_2 \vee A_3). \qquad (3.15)$$

Результаты вычисления функции принадлежности приведены в табл. 3.2.

Таблица 3.2

Элемент	Универсальное множество				
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$A_2 \vee A_3$	0,6	0,8	0,5	0,4	0,6
A_1	0,1	0,3	0,4	0,8	0,9
K	0,1	0,3	0,4	0,4	0,6

Упражнение 3.1. По формуле (3.15) восстановить новую сеть, эквивалентную исходной в смысле качества работы.

В силу свойства ассоциативности для операций объединения и пересечения мы можем, не заботясь о порядке расставления скобок, рассматривать объединение и пересечение любого конечного числа нечетких множеств универсального множества X с функциями принадлежности $\mu_i(x)$.

Упражнение 3.2. Пусть задано n нечетких множеств A_i универсального множества X. Обозначим $B = \vee A_i$, $C = \wedge A_i$, $i = \overline{1,n}$. Пусть $\mu_i(x)$ является функцией принадлежности нечеткого множества A_i. Показать, что

$$\mu_B(x) = \max(\mu_1(x), ..., \mu_n(x)), \quad \mu_C(x) = \min(\mu_1(x), \dots, \mu_n(x)).$$

В дальнейшем будут использованы понятия верхней и нижней граней числового множества Y. Напомним их.

Числовое множество Y называется *ограниченным сверху*, если существует число f такое, что $y \le f$ для любого числа $y \in Y$. Число f называется *верхней границей* множества Y.

Наименьшая из верхних границ множества Y называется *верхней гранью* множества Y и обозначается $\sup Y$. Более строгое определение следующее: число c является $\sup Y$, если оно удовлетворяет двум условиям

1) число c является *верхней границей* множества Y;
2) для любого числа $d < c$ найдется число $y \in Y$ такое, что $d < y$.

Отсюда следует, что если числовое множество Y имеет верхнюю грань, то только одну.

Верно следующее утверждение: ограниченное сверху числовое множество имеет верхнюю грань.

Числовое множество Y называется *ограниченным снизу*, если существует число g такое, что $y \ge g$ для любого числа $y \in Y$. Число g называется *нижней границей* множества Y.

Наибольшая из нижних границ множества Y называется *нижней гранью* множества Y и обозначается $\inf Y$. Более строгое определение следующее: число p является $\inf Y$, если оно удовлетворяет двум условиям:

1) число p является *нижней границей* множества Y;
2) для любого числа $p < d$ найдется число $y \in Y$ такое, что $y < d$.

Отсюда следует, что если числовое множество Y имеет нижнюю грань, то только одну.

Верно следующее утверждение: ограниченное снизу числовое множество имеет нижнюю грань.

В случае бесконечного числа нечетких множеств A_β, где параметр β принадлежит некоторому множеству Ξ, в качестве их объединения $\vee_{\beta\in\Xi} A_\beta$ и пересечения $\wedge_{\beta\in\Xi} A_\beta$ по определению принимаются нечеткие множества B и C универсального множества X с функциями принадлежности

$$\mu_B(x) = \sup_{\beta\in\Xi} \mu_{A_\beta}(x), \quad \mu_C(x) = \inf_{\beta\in\Xi} \mu_{A_\beta}(x). \qquad (3.16)$$

Поскольку значения всех функций лежат в отрезке [0, 1], то верхняя и нижняя грани в (3.16) достигаются и их значения лежат в отрезке [0, 1].

Утверждение 3.1. Пусть задано ограниченное сверху множество $C \subset R$. Тогда для любого числа a выполнено равенство

$$\sup_{c\in C} \min(c; a) = \min(\sup_{c\in C} c; a).$$

Доказательство. Обозначим $\sup\limits_{c\in C} c = c^+$. Тогда $\min(c; a) \le \min(c^+; a)$ для любого $c \in C$. Следовательно, $\sup\limits_{c\in C} \min(c; a) \le \min(c^+; a)$.

Докажем обратное неравенство. Обозначим

$$C_1 = \{c \in C : c > a\},\ C_2 = \{c \in C : c \le a\}.$$

Случай 1. Пусть $C_1 = \varnothing$. Тогда $c^+ \le a$. Следовательно,

$$\sup_{c\in C} \min(c; a) = \sup_{c\in C} c = c^+ = \min(c^+; a).$$

Случай 2. Пусть $C_2 = \varnothing$. Тогда $c > a$ для всех $c \in C$. Следовательно,

$$\sup_{c\in C} \min(c; a) = a = \min(c^+; a).$$

Случай 3. Пусть $C_1 \ne \varnothing$ и $C_2 \ne \varnothing$. Тогда

$$\sup_{c\in C} \min(c; a) = \max\{\sup_{c\in C} \min(c; a);\ \sup_{c\in C} \min(c; a)\} =$$

$$= \max\{a;\ \sup_{c\in C} c)\} = a = \min(\sup_{c\in C} c; a).$$

Утверждение 3.2. Пусть задано ограниченное снизу множество $C \subset R$. Тогда для любого числа a выполнено равенство

$$\inf_{c\in C} \max(c; a) = \max(\inf_{c\in C} c; a).$$

Доказательство. Обозначим $\inf\limits_{c\in C} c = c_+$. Тогда $\max(c; a) \ge \max(c_+; a)$ для любого $c \in C$. Следовательно, $\inf\limits_{c\in C} \max(c; a) \ge \min(c_+; a)$.

Докажем обратное неравенство. Обозначим

$$C_1 = \{c \in C : c > a\},\ C_2 = \{c \in C : c \le a\}.$$

Случай 1. Пусть $C_1 = \varnothing$. Тогда $c_+ \le a$. Следовательно,

$$\inf_{c \in C} \max(c; a) = a = \max(c_+; a).$$

Случай 2. Пусть $C_2 = \varnothing$. Тогда $c > a$ для всех $c \in C$. Следовательно,

$$\inf_{c \in C} \max(c; a) = \inf_{c \in C} c = c_+ = \max(c_+; a).$$

Случай 3. Пусть $C_1 \ne \varnothing$ и $C_2 \ne \varnothing$. Тогда $c_+ \le a$ и

$$\inf_{c \in C} \max(c; a) = \min\{\inf_{c \in C} \max(c; a);\ \inf_{c \in C} \max(c; a)\} =$$

$$= \min\{\inf_{c \in C} c; a\} = a = \max(c_+; a).$$

Утверждение 3.3. Для любого семейства нечетких множеств A_β и любого нечеткого множества M того же самого универсального множества X выполнены дистрибутивные законы

$$M \wedge (\vee_{\beta \in \Xi} A_\beta) = \vee_{\beta \in \Xi}(M \wedge A_\beta),\quad M \vee (\wedge_{\beta \in \Xi} A_\beta) = \wedge_{\beta \in \Xi}(M \vee A_\beta). \quad (3.17)$$

Доказательство. Обозначим через $\mu_\beta(x)$ функцию принадлежности нечеткого множества A_β. Тогда равенства (3.17) принимают вид

$$\min(\mu_M(x); \sup_{\beta \in \Xi} \mu_\beta(x)) = \sup_{\beta \in \Xi} (\min(\mu_M(x); \mu_\beta(x)),$$

$$\max(\mu_M(x); \inf_{\beta \in \Xi} \mu_\beta(x)) = \inf_{\beta \in \Xi} (\max(\mu_M(x); \mu_\beta(x)).$$

Согласно утверждениям 3.1 и 3.2 эти равенства выполнены.

С помощью введенного определения принадлежности нечетких множеств можно выделить другое свойство введенных объединений и пересечения.

Обозначим через $F(X)$ совокупность всех нечетких множеств универсального множества X. Тогда для некоторых пар (A, B) элементов $F(X)$ с помощью определения 1.3 задано бинарное отношение $B \angle A$, удовлетворяющее свойствам рефлективности, транзитивности и антисимметричности. Таким образом, $F(X)$ является частично упорядоченным множеством.

Определение 3.1. Элемент C из частично упорядоченного множества $F(X)$ называется *верхней гранью* элементов A и B из $F(X)$, если выполнены следующие два условия:

1) $A \angle C,\ \ B \angle C$;

2) если $A \angle D, B \angle D$, то $C \angle D$.

Утверждение 3.4. Объединение $A \vee B$ нечетких множеств A и B является верхней гранью элементов A и B в частично упорядоченном множестве $F(X)$.

Доказательство. Включения $A \angle A \vee B$ и $B \angle A \vee B$ следуют из определения объединения нечетких множеств. Далее, если $A \angle D$ и $B \angle D$, то $\mu_D(x) \geq \mu_A(x)$, $\mu_D(x) \geq \mu_B(x)$ для любого элемента $x \in X$. Отсюда следует, что $\mu_D(x) \geq \max(\mu_A(x); \mu_B(x))$. Стало быть, $A \vee B \angle D$.

Определение 3.2. Элемент C из частично упорядоченного множества $F(X)$ называется *нижней гранью* элементов A и B из $F(X)$, если выполнены следующие два условия:

1) $C \angle A$, $C \angle B$;
2) если $D \angle A$, $D <\angle B$, то $D \angle C$.

Утверждение 3.5. Пересечение $A \wedge B$ нечетких множеств A и B является нижней гранью элементов A и B в частично упорядоченном множестве $F(X)$.

Доказательство. Включения $A \wedge B \angle A$ и $A \wedge B \angle B$ следуют из определения пересечения нечетких множеств. Далее, если $D \angle A$ и $D \angle B$, то $\mu_A(x) \geq \mu_D(x)$, $\mu_B(x) \geq \mu_D(x)$ и, следовательно, $\min(\mu_A(x); \mu_B(x)) \geq \mu_D(x)$. Стало быть, $D \angle A \wedge B$.

§ 4. Конормы и нормы

В теории нечетких множеств используются разные определения операций объединения и пересечения. В общем случае это осуществляется с помощью операторов *конорм* и *норм*.

Определение 4.1. *Треугольной конормой* (*t-конормой*) называется функция φ: $[0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1]$, такая, что выполнены следующие условия:

1) $\varphi(1, 1) = 1$; $\varphi(a, 0) = a$; $\varphi(0, b) = b$;
2) $\varphi(a, b) \leq \varphi(a_1, b_1)$ при $a \leq a_1$, $b \leq b_1$ (монотонность);
3) $\varphi(a, b) = \varphi(b, a)$ (коммутативность);
4) $\varphi(a, \varphi(b, c)) = \varphi(\varphi(a, b), c)$ (ассоциативность).

Определение 4.2. *Треугольной нормой* (*t-нормой*) называется функция f: $[0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1]$, такая, что выполнены следующие условия:

1) $f(0, 0) = 0$; $f(a, 1) = a$; $f(1, b) = b$;

2) $f(a, b) \le f(a_1, b_1)$ при $a \le a_1$, $b \le b_1$ (монотонность);
3) $f(a, b) = f(b, a)$ (коммутативность);
4) $f(a, f(b, c)) = f(f(a, b), c)$ (ассоциативность).

С помощью заданных конормы $\varphi(a, b)$ и нормы $f(a, b)$ функции принадлежности объединения и пресечения двух нечетких множество A и B универсального множества X определяются формулами

$$\mu_{A\vee B}(x) = \varphi(\mu_A(x), \mu_B(x)), \quad \mu_{A\wedge B}(x) = f(\mu_A(x), \mu_B(x)). \tag{4.1}$$

Потребуем, чтобы для обычных подмножеств A и B универсального множества X, рассматриваемых в качестве его нечетких множеств, операции объединения, пересечения, задаваемые формулами (4.1), совпадали с обычными операциями объединения и пересечения. Поскольку для обычного подмножества функция принадлежности равняется ее характеристической функции, то из формул (4.1) получим, что функции $\varphi(a, b)$ и $f(a, b)$ должны удовлетворять следующим условиям:

$$\varphi(0, 0) = 0, \varphi(1, 0) = \varphi(0, 1) = \varphi(1, 1) = 1;$$
$$f(0, 0) = f(0, 1) = f(1, 0) = 0, \quad f(1, 1) = 1. \tag{4.2}$$

Эти равенства следуют из условий 1, которым удовлетворяют функции $\varphi(a, b)$ и $f(a, b)$. Из свойств монотонности для функций $\varphi(a, b)$ и $f(a, b)$ следует, что определенные с помощью них операции объединения и пересечения нечетких множеств будут удовлетворять условиям (3.8). Условия коммутативности и ассоциативности для функций $\varphi(a, b)$ и $f(a, b)$ обеспечивают коммутативность (3.8) и ассоциативность (3.9) введенных операций объединения и пересечения нечетких множеств. Запишем оставшиеся из рассмотренных в третьем параграфе свойств объединения, пересечения и дополнения нечетких множеств. С этой целью введем функцию ψ: $[0, 1] \to [0, 1]$, удовлетворяющую условию инволюции

$$\psi(\psi(a)) = a \text{ для любого } a \in [0, 1] \tag{4.3}$$

и равенствам

$$\psi(1) = 0, \quad \psi(0) = 1. \tag{4.4}$$

С помощью этой функции определим дополнение нечеткого множества A универсального множества X:

$$\mu_{\bar{A}}(x) = \psi(\mu_A(x)). \tag{4.5}$$

Тогда будем иметь соотношения:

$$\varphi(a, a) = a, \quad f(a, a) = a \text{ (идемпотентность);} \tag{4.6}$$

$$f(\varphi(a, b), c) = \varphi(f(a, c), f(b, c)),$$
$$\varphi(a, f(b, c)) = f(\varphi(a, b), \varphi(a, c)) \text{ (дистрибутивность);} \tag{4.7}$$

$$\psi(\varphi(a, b)) = f(\psi(a), \psi(b)),$$

$$\psi(f(a, b)) = \varphi(\psi(a), \psi(b)) \text{ (законы де Моргана);} \quad (4.8)$$

$$\varphi(a, 1) = 1, \quad f(a, 0) = 0. \quad (4.9)$$

Условия (4.9) означают, что выполнены первое и четвертое равенства в (3.7). Второе и третье равенство в (3.7) следуют из условий 1, которым удовлетворяют функции $\varphi(a, b)$ и $f(a, b)$.

Некоторые из функций $\varphi(a, b)$ и $f(a, b)$ можно получить из формул (1.6) и (1.10) при конкретных значениях параметра λ_i.

Рассмотрим числа

$\lambda_i = \max(p_i; q_i)$ при $p_i + q_i \le 1$ и $\lambda_i = \max(1 - p_i; 1 - q_i)$ при $p_i + q_i > 1$, которые удовлетворяют неравенствам $0 \le \lambda_i \le 1$. Подставим их в формулы (1.6) и (1.10). Тогда, рассматривая случаи $p_i + q_i \le 1$ и $p_i + q_i > 1$, получим

$$r_i = p_i + q_i - p_i q_i, \quad l_i = p_i q_i. \quad (4.10)$$

Введем в рассмотрение функции

$$\varphi(a, b) = a + b - ab, \quad f(a, b) = ab. \quad (4.11)$$

Тогда формулы (4.10) принимают вид $r_i = \varphi(p_i, q_i)$, $l_i = f(p_i, q_i)$.

Теорема 4.1. Функции (4.11) являются соответственно конормой и нормой и удовлетворяют равенствам (4.8) и (4.9) с функцией $\psi(a) = 1 - a$.

Доказательство. Функции (4.11) удовлетворяют равенствам, стоящим в первом условии, содержащемся в определениях конормы и нормы. Проверим условие монотонности. Пусть $a \le a_1$, $b \le b_1$. Тогда

$$\varphi(a, b) = a + b - ab = a(1 - b) + b \le a_1(1 - b) + b =$$

$$= a_1 + b(1 - a_1) \le a_1 + b_1(1 - a_1) = \varphi(a_1, b_1); \quad f(a, b) = ab \le a_1 b_1 = f(a_1, b_1).$$

Функции (4.11) удовлетворяют условию коммутативности, содержащемуся в определениях конормы и нормы. Проверим условие ассоциативности. Имеем

$$\varphi(a, \varphi(b, c)) = a + \varphi(b, c) - a\varphi(b, c) = a + b + c - bc - a(b + c - bc);$$

$$\varphi(\varphi(a, b), c)) = \varphi(a, b) + c - \varphi(a, b)c = a + b - ab + c - (a + b - ab)c.$$

Сравнивая два последних выражения, получим требуемое равенство. Далее,

$$f(a, f(b, c)) = af(b, c) = abc = f(f(a, b), c).$$

Проверим выполнимость равенств (4.8). Имеем

$$\psi(\varphi(a, b)) = 1 - \varphi(a, b) = 1 - a - b + ab = (1 - a)(1 - b) = f(\psi(a), \psi(b)),$$

$$\psi(f(a, b)) = 1 - f(a, b) = 1 - ab =$$

$$= (1 - a) + (1 - b) - (1 - a)(1 - b) = \varphi(\psi(a), \psi(b)).$$

Равенства (4.9) для функций (4.11) очевидны.

Упражнение 4.1. Показать, что условия идемпотентности (4.6) не выполняются при $0 < a < 1$, а первое условие дистрибутивности (4.7) не выполняется при $0 < a \le 1$, $0 < b \le 1$ и $0 < c < 1$. Второе условие дистрибутивности не выполнено при $a \ne 0$, $b \ne 1$ и $a + c \ne 1$.

Определение 4.3. *Алгебраической суммой* нечетких множеств A и B одного универсального множества X с функциями принадлежности μ_A и μ_B называется нечеткое множество $A \otimes B$ универсального множества X, функция принадлежности которого задается формулой

$$\mu_{A\otimes B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x)\, \mu_B(x). \qquad (4.12)$$

Определение 4.4. *Алгебраическим произведением* нечетких множеств A и B одного универсального множества X с функциями принадлежности μ_A и μ_B называется нечеткое множество $A \circ B$ универсального множества X, функция принадлежности которого задается формулой

$$\mu_{A\circ B}(x) = \mu_A(x)\, \mu_B(x). \qquad (4.13)$$

Следствие 4.1. Операции алгебраической суммы и произведения, а также операция дополнения, задаваемая функцией $\psi(a) = 1 - a$, удовлетворяют следующим свойствам:

$$A \otimes B = B \otimes A,\ A \circ B = B \circ A \quad \text{(коммутативность);} \qquad (4.14)$$

$$(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C), (A \circ B) \circ C = A \circ (B \circ C) \ \text{(ассоциативность);} (4.15)$$

$$\overline{A \otimes B} = \overline{A} \circ \overline{B},\ \overline{A \circ B} = \overline{A} \otimes \overline{B} \quad \text{(законы де Моргана);} \qquad (4.16)$$

$$A \otimes X = X,\quad A \otimes \varnothing = A,\quad A \circ X = A,\quad A \circ \varnothing = \varnothing; \qquad (4.17)$$

$$A \angle A_1,\ \ B \angle B_1 \Rightarrow A \otimes B \angle A_1 \otimes B_1,\ \ A \circ B \angle A_1 \circ B_1. \qquad (4.18)$$

Положим в формулах (1.6) и (1.10) $\lambda_i = 0$. Получим

$$r_i = \min(p_i + q_i; 1),\quad l_i = \max(p_i + q_i - 1; 0). \qquad (4.19)$$

Введем в рассмотрение функции

$$\varphi(a, b) = \min(a + b; 1),\quad f(a, b) = \max(a + b - 1; 0). \qquad (4.20)$$

Тогда формулы (4.19) принимают вид $r_i = \varphi(p_i, q_i)$, $l_i = f(p_i, q_i)$.

Теорема 4.2. Функции (4.20) являются соответственно конормой и нормой и удовлетворяют равенствам (4.8) и (4.9) с функцией $\psi(a) = 1 - a$.

Доказательство. Очевидно, что функции (4.20) удовлетворяют первым трем свойствам, содержащимся в определении конормы и нормы.

Проверим для функции $\varphi(a, b)$ (4.20) условие ассоциативности.

Имеем

$$\varphi(a,\ \varphi(b,\ c)) = \min(a + \varphi(b,\ c);\ 1) = \min(a + \min(1;\ b + c));\ 1),$$

$$\varphi(\varphi(a,\ b),\ c) = \min(\varphi(a,\ b) + c;\ 1) = \min(\min(a + b;\ 1) + c;\ 1)).$$

Следовательно,

$$\varphi(a,\ \varphi(b,\ c)) = \begin{cases} \min\left(a+b+c;1\right), & 1 \ge b+c, \\ 1, & 1 < b+c, \end{cases}$$

$$\varphi(\varphi(a,\ b),\ c) = \begin{cases} \min\left(a+b+c;1\right), & 1 \ge a+b, \\ 1, & 1 < a+b. \end{cases}$$

Пусть $1 \ge b + c$ и $1 \ge a + b$. В этом случае доказываемое равенство очевидно. Если $1 \ge b + c$ и $1 < a + b$, то $1 < a + b + c$. Тогда, $\varphi(a,\ \varphi(b,\ c)) = \varphi(\varphi(a,\ b),\ c) = 1$. Это равенство выполнено и при $1 < b + c$ и $1 \ge a + b$.

Для функции $f(a,\ b)$ (4.20) условие ассоциативности принимает вид $\max(a + \max(b + c - 1;\ 0);\ 0) - 1) = \max(\max(a + b - 1;\ 0) + c - 1;\ 0)$.

Левая и правая части доказываемого равенства соответственно равны $\max(a + b + c - 2;\ a - 1;\ 0)$ и $\max(a + b + c - 2;\ c - 1;\ 0)$. Так как $0 \le a \le 1$ и $0 \le c \le 1$, то эти выражения равны одному значению $\max(a + b + c - 2;\ 0)$.

Проверим выполнимость равенств (4.8). Имеем

$$\psi(\varphi(a,\ b)) = 1 - \varphi(a,\ b) = 1 - \min(a + b;\ 1) = \max(1 - a - b;\ 0) =$$
$$= f(1 - a,\ 1 - b) = f(\psi(a),\ \psi(b)),$$

$$\psi(f(a,\ b)) = 1 - f(a,\ b) = 1 - \max(a + b - 1;\ 0) = \min(1 - a + 1 - b;\ 1) =$$
$$= \varphi(1 - a,\ 1 - b) = \varphi(\psi(a),\ \psi(b)).$$

Легко проверить, что функции (4.20) удовлетворяют равенствам (4.9).

Упражнение 4.2. Выяснить, выполнены ли законы де Моргана (4.8) для функций (4.11) и (4.20), если дополнение задано с помощью функции $\psi(a) = \dfrac{1-a}{1+\lambda a}$, $\lambda > 0$.

Упражнение 4.3. Показать, что условия идемпотентности (4.6) не выполняются при $0 < a < 0{,}5$, а условия дистрибутивности (4.7) не выполняются, например, при $a = b = c = 0{,}9$.

Рассмотрим еще две функции:

$$\varphi(a,\ b) = \min(1;\ \left(a^k + b^k\right)^{\frac{1}{k}}),\ k \ge 1;$$

$$f(a,\ b) = 1 - \min(1;\ \left((1-a)^k + (1-b)^k\right)^{\frac{1}{k}}),\ k \ge 1. \qquad (4.21)$$

Теорема 4.3. Функции (4.21) являются соответственно конормой и нормой и удовлетворяют равенствам (4.8) и (4.9) с функцией $\psi(a) = 1 - a$.

Доказательство. Нетрудно проверить, что функции (4.21) удовлетворяют первым трем свойствам, содержащимся в определении конормы. Далее, из формул (4.21) видно, что выполнены равенства (4.8) и (4.9). Проверим для функции $\varphi(a, b)$ (4.20) условие ассоциативности. Имеем

$$\varphi(a, \varphi(b, c)) = \min\left(1; \left(a^k + (\varphi(b,c))^k\right)^{\frac{1}{k}}\right) =$$

$$= \min\left(1; \left(a^k + \left(\min\left(1; \left(b^k + c^k\right)^{\frac{1}{k}}\right)\right)^k\right)^{\frac{1}{k}}\right).$$

Далее,

$$\varphi(\varphi(a, b), c) = \min\left(1; \left((\varphi(a,b))^k + c^k\right)^{\frac{1}{k}}\right) =$$

$$= \min\left(1; \left(\left(\min\left(1; \left(a^k + b^k\right)^{\frac{1}{k}}\right)\right)^k + c^k\right)^{\frac{1}{k}}\right).$$

Из этих формул видно, что

$$\varphi(a, \varphi(b, c)) = \begin{cases} \min\left(1; \left(a^k + b^k + c^k\right)^{\frac{1}{k}}\right), & 1 \ge b^k + c^k, \\ 1, & 1 < b^k + c^k. \end{cases}$$

$$\varphi(\varphi(a, b), c) = \begin{cases} \min\left(1; \left(a^k + b^k + c^k\right)^{\frac{1}{k}}\right), & 1 \ge a^k + b^k, \\ 1, & 1 < a^k + b^k. \end{cases}$$

Пусть $1 \ge b^k + c^k$ и $1 \ge a^k + b^k$. Тогда

$$\varphi(a, \varphi(b, c)) = \varphi(\varphi(a, b), c) = \min\left(1; \left(a^k + b^k + c^k\right)^{\frac{1}{k}}\right).$$

Пусть $1 \ge b^k + c^k$ и $1 < a^k + b^k$. Тогда $1 < a^k + b^k + c^k$. Следовательно, $\varphi(a, \varphi(b,c)) = \varphi(\varphi(a, b), c) = 1$. Это же равенство выполнено и при $1 < b^k + c^k$ и $1 < a^k + b^k$.

Рассмотрим функцию $f(a,\ b)$ (4.21) и проверим для нее свойство ассоциативности. Имеем

$$f(a, f(b, c)) = 1 - \min\left(1; \left((1-a)^k + (1-f(b,c))^k\right)^{\frac{1}{k}}\right) =$$

$$= 1 - \min\left(1; \left((1-a)^k + \left(\min\left(1; \left((1-b)^k + (1-c)^k\right)^{\frac{1}{k}}\right)\right)^k\right)^{\frac{1}{k}}\right).$$

Далее,

$$f(f(a, b), c) = 1 - \min\left(1; \left((1-f(a,b))^k + (1-c)^k\right)^{\frac{1}{k}}\right) =$$

$$= 1 - \min\left(1; \left(\left(\min\left(1; \left((1-a)^k + (1-b)^k\right)^{\frac{1}{k}}\right)\right)^k + (1-c)^k\right)^{\frac{1}{k}}\right).$$

Из этих формул видно, что

$$f(a, f(b,c)) = \begin{cases} 1-\min\left(1; \left((1-a)^k + (1-b)^k + (1-c)^k\right)^{\frac{1}{k}}\right), & 1 \geq (1-b)^k + (1-c)^k, \\ 0, & 1 < (1-b)^k + (1-c)^k, \end{cases}$$

$$f(f(a,b),c)) = \begin{cases} 1-\min\left(1; \left((1-a)^k + (1-b)^k + (1-c)^k\right)^{\frac{1}{k}}\right), & 1 \geq (1-a)^k + (1-b)^k, \\ 0, & 1 < (1-a)^k + (1-b)^k. \end{cases}$$

Следовательно, если $1 \geq (1-a)^k + (1-b)^k$ и $1 \geq (1-b)^k + (1-c)^k$, то равенство $f(a, f(b, c)) = f(f(a, b), c)$ очевидно. Если же выполнено одно из неравенств $1 < (1-a)^k + (1-b)^k$ или $1 < (1-b)^k + (1-c)^k$, то $(1-a)^k + (1-b)^k + (1-c)^k > 1$. Следовательно, $f(a, f(b, c)) = 0 = f(f(a, b), c)$.

Упражнение 4.4. Показать, что условия идемпотентности (4.6) не выполняются при $0 < a < 1$.

Упражнение 4.5. Выяснить, удовлетворяют ли функции (4.21) условию дистрибутивности (4.7).

Приведем еще одно свойство функций (4.21).

Теорема 4.4. Для любых неотрицательных чисел a и b выполнены равенства:

$$\lim_{k\to+\infty}\left(\min\left(1;\left(a^k+b^k\right)^{\frac{1}{k}}\right)\right)=\max(a,b);$$

$$\lim_{k\to+\infty}\left(1-\min\left(1;\left((1-a)^k+(1-b)^k\right)^{\frac{1}{k}}\right)\right)=\min(a,b).$$

Доказательство. Эти формулы следуют из того, что для любых неотрицательных чисел a и b выполнено равенство

$$\lim_{k\to+\infty}\left(a^k+b^k\right)^{\frac{1}{k}}=\max(a,b).$$

В самом деле, при $a = b \geq 0$ это равенство выполнено. Пусть $a > b \geq 0$. Тогда

$$\lim_{k\to+\infty}\left(a^k+b^k\right)^{\frac{1}{k}}=a\lim_{k\to+\infty}\left(1+\left(\frac{b}{a}\right)^k\right)^{\frac{1}{k}}=a=\max(a,b).$$

§ 5. Множества уровня нечетких множеств

Широкое применение в математике имеет идея представления сложных объектов через объекты более простой природы того же класса.

Определение 5.1. Нечеткое множество A универсального множества X называется *элементарным*, если существуют конечный набор множеств $\boldsymbol{C_i} \subset X$ и набор чисел $a_i \in [0, 1]$ такие, что

$$C_i \cap C_j = \varnothing \text{ при } i \neq j, \quad \bigcup_{i=1}^{n} C_i = X \quad \text{ и } \mu_A(x) = a_i \text{ при } x \in C_i.$$

Пример 5.1. Если универсальное множество X состоит из конечного числа элементов x_i, $i = \overline{1,n}$, то всякое его нечеткое множество является элементарным. В самом деле, нужно взять $C_i = \{x_i\}$ и $a_i = \mu_A(x_i)$.

Теорема 5.1. Если A и B являются элементарными нечеткими множествами универсального множества X, то их объединение $A \vee B$, пересечение $A \wedge B$ и дополнение $\overline{A}$ также являются элементарными нечеткими множествами.

Доказательство. Пусть

$$D_i \cap D_j = \varnothing \text{ при } i \neq j, \quad \bigcup_{i=1}^{m} D_i = X \quad \text{и } \mu_B(x) = b_i \text{ при } x \in D_i.$$

Обозначим через $K_{ij} = C_i \cap D_j$. Поскольку $\bigcup_{i=1}^{n} C_i = X$ и $\bigcup_{i=1}^{m} D_i = X$, то множество $K_{ij} \neq \varnothing$ для некоторых номеров i и j. Рассмотрим только такие пары номеров. Множество таких пар обозначим Ξ. Если у пар $(i, j) \in \Xi$ и $(k, l) \in \Xi$ номера $i \neq k$ или $j \neq l$, то $K_{ij} \cap K_{kl} = \varnothing$.

В самом деле, пусть $x \in K_{ij} \cap K_{kl}$ и, например, $i \neq k$. Тогда $x \in C_i \cap D_j$ и $x \in C_k \cap D_l$. Следовательно, получим противоречие $x \in C_i \cap C_k = \varnothing$. Далее, $\bigcup_{(i,j)\in\Xi} K_{ij} = X$. Пусть $x \in K_{ij}$. Тогда $\mu_{A\vee B}(x) = \max(a_i; b_j)$, $\mu_{A\wedge B}(x) = \min(a_i; b_j)$. Наконец, если $x \in C_i$, то $\mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x) = 1 - a_i$.

Пример 5.2. Пусть B — обычное подмножество универсального множества X, а число α заключено в пределах от нуля до единицы. Рассмотрим нечеткое множество $(B|\alpha)$ с функцией принадлежности следующего вида:

$$\mu_{B|\alpha}(x) = \begin{cases} \alpha & \text{при } x \in B, \\ 0 & \text{при } x \notin B. \end{cases} \tag{5.1}$$

Нечеткое множество $(B|\alpha)$ является элементарным. В самом деле, возьмем

$$C_1 = B, \quad a_1 = a; \quad C_2 = \overline{B}, \quad a_2 = 0.$$

Функции вида (5.1) являются естественным обобщением характеристических функций (1.14) обычных подмножеств. В случае экспертного подхода нечеткие множества вида $(B|\alpha)$ возникают следующим образом: каждый элемент $x \in B$ набирает одно и то же количество голосов, а любой $x \notin B$ не набирает ни одного голоса. Оказывается, что любое нечеткое множество может быть представлено в виде объединения нечетких множеств вида (5.1).

Определение 5.2. *Множеством уровня* $A(\alpha)$ при числе $\alpha \in (0, 1]$ нечеткого множества A универсального множества X называется обычное подмножество множества X, задаваемое формулой

$$A(\alpha) = \{x \in X\colon \mu_A(x) \geq \alpha\}. \tag{5.2}$$

На рис. 5.1 изображено множество уровня.

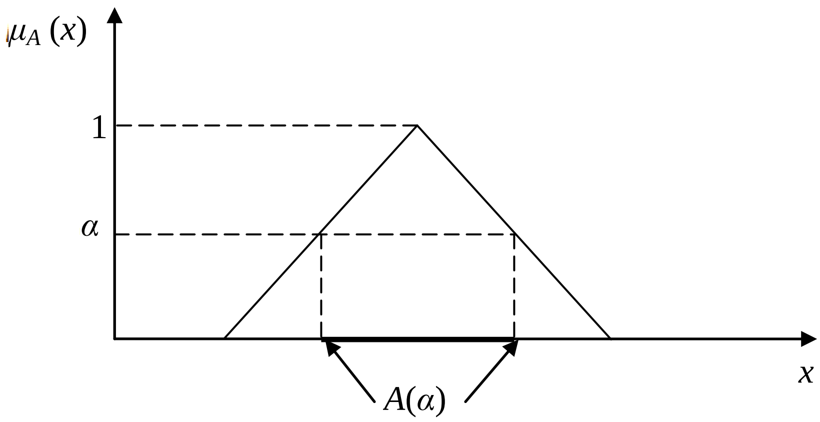

Рис. 5.1

Пример 5.3. Имеется нечеткое множество $A = \{(x_1|0{,}1),\ (x_2|0{,}4),\ (x_3|0{,}5),\ (x_4|0{,}2)\}$. Его множества уровня приведены в табл. 5.1.

Таблица 5.1

α	$A(\alpha)$
$0 < \alpha \le 0{,}1$	(x_1, x_2, x_3, x_4)
$0{,}1 < \alpha \le 0{,}2$	(x_2, x_3, x_4)
$0{,}2 < \alpha \le 0{,}4$	(x_2, x_3)
$0{,}4 < \alpha \le 0{,}5$	(x_3)
$0{,}5 < \alpha \le 1$	$\varnothing$

Теорема 5.2. Для любого нечеткого множества A универсального множества X имеет место разложение

$$A = \mathrm{V}_{0<\alpha\le 1}\,(A(\alpha)|\ \alpha). \tag{5.3}$$

Доказательство. Обозначим через $\mu(x)$ функцию принадлежности нечеткого множества A. Тогда согласно формулам (5.1) и (5.2) функция принадлежности μ_α нечеткого множества $(A(\alpha)|\alpha)$ равна

$$\mu_\alpha(x) = \begin{cases} \alpha & \textit{при}\ \mu(x) \ge \alpha, \\ 0 & \textit{при}\ \mu(x) < \alpha. \end{cases}$$

Поэтому, согласно формуле (3.16), функция принадлежности нечеткого множества, стоящего в правой части доказываемого равенства (5.3), имеет следующий вид (см. рис. 5.2):

$$\sup_{0<\alpha\le 1} \begin{cases} \alpha & \textit{при}\ \mu(x) \ge \alpha, \\ 0 & \textit{при}\ \mu(x) < \alpha \end{cases} = \mu(x).$$

Стало быть, равенство (5.3) о разложении нечеткого множества по множествам уровня доказано.

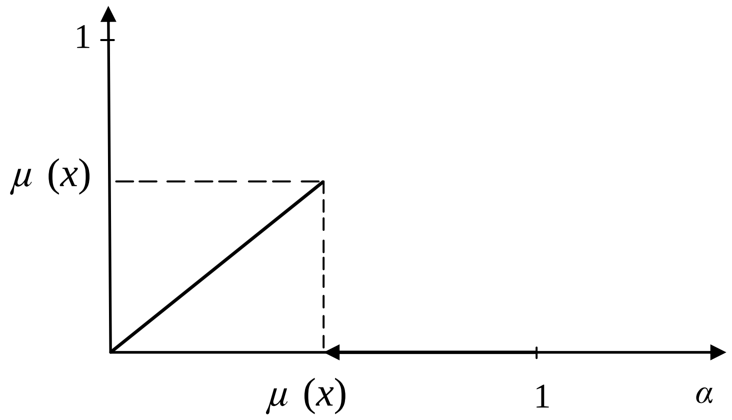

Рис. 5.2

Следствие к теореме 5.2. Из доказанной теоремы следует, что

$$\mu(x) = \sup\{\alpha \in (0, 1]: x \in A(\alpha)\} \text{ при } x \in \mathrm{V}_{0<\alpha\le 1} A(\alpha)\}$$

$$\text{и } \mu(x) = 0, \text{ если } x \notin \mathrm{V}_{0<\alpha\le 1} A(\alpha).$$

Пример 5.4. Разложение по множествам уровня нечеткого множества из примера 5.3 имеет следующий вид:

$$A = \{(x_1|0{,}1), (x_2|0{,}1), (x_3|0{,}1), (x_4|0{,}1)\} \vee \{(x_1|0), (x_2|0{,}2), (x_3|0{,}2), (x_4|0{,}2)\} \vee$$
$$\vee \{(x_1|0), (x_2|0{,}4), (x_3|0{,}4), (x_4|0)\} \vee \{(x_1|0), (x_2|0), (x_3|0{,}5), (x_4|0)\}.$$

В §4 мы анализировали сети, у которых качество работы элементов носит нечеткий характер. Нечеткое множество A_i, характеризующее качество работы i-го элемента сети, строится в результате опроса группы из N экспертов. Допустим, принято соглашение: если значение x_k отметило не меньше чем M из N экспертов, считается, что значение x_k заведомо принимается. Тогда совокупность таких значений $x_k \in X$ является множеством уровня нечеткого множества A_i с числом $\alpha = M/N$.

Нечеткое множество A, характеризующее качество работы всей сети, строится с помощью операций объединения и пересечения из нечетких множеств, характеризующих качество работы каждого элемента. Возникает вопрос о связи множества уровня нечеткого множества A со множествами уровня нечетких множеств A_i. Ответ на этот вопрос можно получить с помощью следующей теоремы.

Теорема 5.3. Пусть A и B — нечеткие множества универсального множества X. Тогда

$$A = B \Leftrightarrow A(\alpha) = B(\alpha)$$

$$\text{и } A \angle B \Leftrightarrow A(\alpha) \subset B(\alpha), \text{ для любого } \alpha \in (0, 1]; \tag{5.4}$$

$$(A \vee B)(\alpha) = A(\alpha) \cup B(\alpha)$$

$$\text{и } (A \wedge B)(\alpha) = A(\alpha) \cap B(\alpha) \text{ для любого } \alpha \in (0, 1]. \tag{5.5}$$

Доказательство. Утверждения (5.4) очевидны. Докажем утверждения (5.5). Одновременно покажем, что только объединение и пересечение нечетких множеств, задаваемых формулами (1.18) и (1.19), обладают свойствами (5.5).

Допустим, что объединение задается формулой (4.1) и для любых нечетких множеств A и B выполнено первое равенство (5.5).

Предположим, что для некоторых чисел a и b из отрезка [0, 1] выполнено неравенство $\varphi(a, b) > \max(a; b)$. Возьмем нечеткие множества с функциями принадлежности $\mu_A(x) = a$ и $\mu_B(x) = b$ для всех $x \in X$ и число α такое, чтобы $\varphi(a, b) > \alpha > \max(a; b)$. Тогда $(A \vee B)(\alpha) =$ $= X$, а $A(\alpha) \cup B(\alpha) = \varnothing$.

Пусть теперь $\varphi(a, b) < \max(a; b)$. Тогда для α, заключенного между этими числами, и для вышеописанных нечетких множеств A и B выполнены равенства $(A \vee B)(\alpha) = \varnothing$, а $A(\alpha) \cup B(\alpha) = X$.

Пусть $\varphi(a, b) = \max(a; b)$. Это значит, что объединение задается формулой (1.18). В этом случае

$$(A \vee B)(\alpha) = \{x \in X\colon \max(\mu_A(x); \mu_B(x)) \geq \alpha)\} = \{x \in X\colon \mu_A(x) \geq \alpha \text{ или } \mu_B(x) \geq \alpha)\} = \{x \in X\colon \mu_A(x) \geq \alpha)\} \cup \{x \in X\colon \mu_B(x) \geq \alpha)\} = A(\alpha) \cup B(\alpha).$$

Аналогично показывается, что, если пересечение нечетких множеств удовлетворяет равенству (5.5), в формуле (4.1) функция $f(a, b)$ $= \min(a; b)$.

Задача 5.1. Показать, что пересечение нечетких множеств удовлетворяет равенству (5.5) тогда и только тогда, когда $f(a, b) = \min(a; b)$.

Утверждение 5.1. Для любого конечного набора нечетких множеств A_i, $i = \overline{1,k}$ универсального множества X выполнено равенство

$$\left(\bigvee_{i=1}^{n} A_i\right)(\alpha) = \bigcup_{i=1}^{n} A_i(\alpha), \quad \forall \alpha \in (0,1]. \tag{5.6}$$

Доказательство проводится индукцией по числу n с использованием формулы (5.4).

Утверждение 5.2. Для любого семейства нечетких множеств A_β универсального множества X, где параметр β принадлежит произвольному множеству Ξ, выполнено равенство

$$(\wedge_{\beta \in \Xi} A_\beta)(\alpha) = \bigcap_{\beta \in \Xi} A_\beta(\alpha) \text{ для любого } \alpha \in (0, 1]. \tag{5.7}$$

Доказательство. Пусть точка x принадлежит множеству, стоящему в левой части доказываемого равенства (5.7). Тогда, согласно формуле (3.16),

$$\inf_{\beta\in\Xi}\mu_\beta(x) \ge \alpha \Leftrightarrow \mu_\beta(x) \ge \alpha \text{ для любого } \beta \in \Xi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in A_\beta(\alpha) \text{ для любого} \beta \in \Xi.$$

Следовательно, $x \in (\wedge_{\beta\in\Xi} A_\beta)(\alpha)$ тогда и только тогда, когда $x \in \bigcap\limits_{\beta\in\Xi} A_\beta(\alpha)$.

Утверждение 5.3. Для любого нечеткого множества A

$$(\bar{A})(\alpha) = \bigcap_{\varepsilon>0} \overline{A(1-\alpha+\varepsilon)} \qquad (5.8)$$

для любого $\alpha \in (0, 1]$.

Доказательство. Имеем $x \in (\bar{A})(\alpha) \Leftrightarrow 1 - \mu(x) \ge \alpha \Leftrightarrow \mu(x) \le$ $\le 1 - \alpha \Leftrightarrow \mu(x) < 1 - \alpha + \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0 \Leftrightarrow x \notin A(1 - \alpha + \varepsilon)$ для любого $\varepsilon > 0 \Leftrightarrow x \in \overline{A(1-\alpha+\varepsilon)}$ для любого $\varepsilon > 0 \Leftrightarrow x \in \bigcap\limits_{\varepsilon>0} \overline{A(1-\alpha+\varepsilon)}$.

Утверждение 5.4. Для любых нечетких множеств A и B универсального множества X выполнено равенство

$$(A\backslash B)(\alpha) = \bigcap_{\varepsilon>0}(A(\alpha) \setminus B(1 - \alpha + \varepsilon)) \text{ для любого } \alpha \in (0, 1].$$

Доказательство. Имеем

$$(A\backslash B)(\alpha) = (A \wedge \bar{B})(\alpha) = A(\alpha) \cap (\bar{B})(\alpha) = A(\alpha) \cap \Big(\bigcap_{\varepsilon>0} \overline{B(1-\alpha+\varepsilon)}\Big) =$$

$$= \bigcap_{\varepsilon>0}\big(A(\alpha) \cap \overline{B(1-\alpha+\varepsilon)}\big) = \bigcap_{\varepsilon>0}(A(\alpha) \setminus B(1 - \alpha + \varepsilon)).$$

Множества уровня (5.2) обладают следующими свойствами.

Свойство 5.1. Если $0 < \tau < \alpha \le 1$, то $A(\alpha) \subset A(\tau)$.

Свойство 5.2. Если $0 < \alpha \le 1$, то $\bigcap\limits_{0\le\tau<\alpha} A(\tau) = A(\alpha)$.

Первое свойство очевидно. Для проверки второго свойства нужно показать, что множество, стоящее в левой части доказываемого равенства, принадлежит множеству $A(\alpha)$. Пусть точка $x \in A(\tau)$ при всех $0 < \tau < \alpha$. Это значит, что $\mu_A(x) \ge \tau$ при всех $0 < \tau < \alpha$. Стало быть, $\mu_A(x) \ge \alpha$. Поэтому точка $x \in A(\alpha)$.

Рассмотрим вопрос об аппроксимации заданного семейства множеств $A_{(\alpha)} \subset X$ множествами уровня нечеткого множества универсального множества X. Пусть при каждом числе $0 < \alpha \le 1$ определено множество (возможно и пустое) $A_{(\alpha)} \subset X$.

Определение 5.3. Нечеткое множество C универсального множества X назовем *верхней аппроксимацией* семейства множеств $A_{(\alpha)}$, если его множества уровня $C(\alpha)$ удовлетворяют включению $A_{(\alpha)} \subset C(\alpha)$ при любых числах $0 < \alpha \le 1$.

Из второго равенства (5.5) следует, что пересечение двух верхних аппроксимаций одного и того же семейства множеств $A_{(\alpha)}$ является его верхней аппроксимацией.

Определение 5.4. Нечеткое множество B универсального множества X назовем *точной верхней аппроксимацией* семейства множеств $A_{(\alpha)}$, если оно является его верхней аппроксимацией и для любой другой верхней аппроксимации C семейства множеств $A_{(\alpha)}$ выполнено включение $B \angle C$.

Теорема 5.4. Точная верхняя аппроксимация B семейства множеств $A_{(\alpha)} \subset X$ имеет вид

$$B = \vee_{0 < \alpha \leq 1}(A_{(\alpha)} | \, \alpha). \tag{5.9}$$

Его функция принадлежности равна

$$\mu_B(x) = 0, \text{ если } x \notin \bigcup_{0<\alpha\leq 1} A_{(\alpha)};$$

$$\mu_B(x) = \sup \{t \in (0, 1]: x \in A_{(t)}\} \text{ при } x \in \bigcup_{0<\alpha\leq 1} A_{(\alpha)}. \tag{5.10}$$

Лемма 5.1. При каждом $\alpha \in (0, 1]$ множества уровня $B(\alpha)$ нечеткого множества $B(5, 9)$ удовлетворяют равенству

$$B(\alpha) = \bigcap_{0<\tau<\alpha} \bigcup_{\tau \leq t \leq 1} A_{(t)}. \tag{5.11}$$

Доказательство. Зафиксируем число $0 < \alpha \leq 1$ и точку $x \in B(\alpha)$. Тогда $\mu_B(x) \geq \alpha$. Возьмем любое число $0 < \tau < \alpha$. Поскольку $\mu_B(x) \geq \alpha$, то из формулы (5.10) следует, что найдется число $\tau < t \leq 1$, при котором точка $x \in A_{(t)}$. Следовательно, точка x принадлежит множеству, стоящему в правой части доказываемого равенства (5.11).

Пусть точка x принадлежит множеству, стоящему в правой части доказываемого равенства (5.11). Тогда для любого числа $0 < \tau < \alpha$ найдется число $\tau \leq t \leq 1$ такое, что $x \in A_{(t)}$. Отсюда и из формулы (5.10) следует, что $\mu_B(x) \geq t \geq \tau$. Из произвольности числа $\tau < \alpha$ следует неравенство $\mu_B(x) \geq \alpha$. Стало быть, $x \in B(\alpha)$.

Доказательство теоремы 5.4. Зафиксируем число $0 < \alpha \leq 1$ и покажем, что $A_{(\alpha)} \subset B(\alpha)$. Возьмем любое число $0 < \tau < \alpha$. Тогда выполнено включение $A_{(\alpha)} \subset \bigcup_{\tau \leq t \leq 1} A_{(t)}$. Отсюда и из произвольности числа $0 < \tau < \alpha$ следует, что $A_{(\alpha)} \subset \bigcap_{0<\tau<\alpha} \bigcup_{\tau \leq t \leq 1} A_{(t)}$. Из этого включения и из формулы (5.11) получим, что $A_{(\alpha)} \subset B(\alpha)$.

Пусть нечеткое множество C универсального множества X является верхней аппроксимацией семейства множеств $A_{(\alpha)}$. Покажем, что $B \angle C$.

Возьмем точку $x \in X$. При $\mu_B(x) = 0$ требуемое неравенство $\mu_B(x) \le \le \mu_C(x)$ выполнено. Пусть $\alpha = \mu_B(x) > 0$. Из включения $x \in B(\alpha)$ и из формулы (5.11) следует, что для любого числа $0 < \tau < \alpha$ найдется число $t \in [\tau, 1]$ такое, что точка $x \in A_{(t)} \subset C(t)$. Стало быть, $\mu_C(x) \ge t \ge \tau$ для любого $0 < \tau < \alpha$. Отсюда получим, что $\mu_C(x) \ge \alpha = \mu_B(x)$.

Следствие 5.1. Пусть семейство множеств $A_{(\alpha)} \subset X$ удовлетворяет свойству монотонности 5.1. Тогда для множества (5.9) при каждом $0 < \alpha \le 1$ выполнено равенство

$$B(\alpha) = \bigcap_{0<\tau<\alpha} A_{(\tau)}. \tag{5.12}$$

Доказательство. В самом деле, из условия монотонности $A_{(t)} \subset \subset A_{(\tau)}$ при $\tau < t \le 1$ и из формулы (5.11) следует требуемая формула (5.12).

Следствие 5.2. Пусть семейство множеств $A_{(\alpha)} \subset X$ удовлетворяет свойству монотонности 5.1 и

$$\bigcap_{0<\tau<\alpha} A_{(\tau)} \subset A_{(\alpha)} \text{ при любом } 0 < \alpha \le 1. \tag{5.13}$$

Тогда $B(\alpha) = A_{(\alpha)}$ при каждом $\alpha \in (0, 1]$.

Доказательство. Действительно, из формул (5.12) и (5.13) следует, что выполнено включение $B(\alpha) \subset A_{(\alpha)}$. Для доказательства обратного включения рассмотрим любую точку $x \in A_{(\alpha)}$. Тогда из свойства 5.1 получим, что эта точка $x \in A_{(\tau)}$ при всех $0 \le \tau < \alpha$. Из формулы (5.12) следует, что $x \in B(\alpha)$.

Рассмотрим задачу о нижней аппроксимации.

Определение 5.5. Нечеткое множество C универсального множества X назовем *нижней аппроксимацией* семейства множеств $A_{(\alpha)}$, если его множества уровня $C(\alpha)$ удовлетворяют включению $C(\alpha) \subset \subset A_{(\alpha)}$ при любых числах $0 < \alpha \le 1$.

Если существует нечеткое множество C универсального множества X такое, что $C(\alpha) \subset A_{(\alpha)}$ при любом $0 < \alpha \le 1$ и $C(1) \ne \varnothing$, то $C(1) \subset \subset C(\alpha) \subset A_{(\alpha)}$. Следовательно,

$$\bigcap_{0<\tau\le 1} A_{(\tau)} \ne \varnothing. \tag{5.14}$$

Если выполнено условие (5.14), то нечеткое множество $C = ((\bigcap_{0<\tau\le 1} A_{(\tau)}) | 1)$ является нижней аппроксимацией семейства множеств $A_{(\alpha)}$.

Из первого равенства (5.5) следует, что объединение двух нижних аппроксимаций одного и того же семейства множеств $A_{(\alpha)}$ является его нижней аппроксимацией.

Пусть выполнено условие (5.14). Введем в рассмотрение нечеткое множество

$$D = \vee_{0<\alpha\le 1} ((\bigcap_{0<\tau\le\alpha} A_{(\tau)}) | \alpha) \tag{5.15}$$

с функцией принадлежности

$$\mu_D(x) = 0, \text{ если } x \notin \bigcap_{0<\tau\le 1} A_{(\tau)};$$

$$\mu_D(x) = \sup\{\alpha \in (0, 1]: x \in \bigcap_{0<\tau\le\alpha} A_{(\tau)}\} \text{ при } x \in \bigcap_{0<\tau\le 1} A_{(\tau)}. \tag{5.16}$$

Утверждение 5.5. Пусть выполнено условие (5.14). Тогда для любой нижней аппроксимации C семейства множеств $A_{(\alpha)}$ выполнено включение $C \angle D$.

Доказательство. Зафиксируем любое число $0 < \alpha \le 1$. Тогда из свойства 5.2 для множеств уровня следует, что для любого числа $0 < \tau \le \alpha$ выполнено включение $C(\alpha) \subset C(\tau) \subset A_{(\tau)}$. Стало быть,

$$C(\alpha) \subset \bigcap_{0<\tau\le\alpha} A_{(\tau)} \text{ при любых } 0 < \alpha \le 1. \tag{5.17}$$

Возьмем точку $x \in X$. Если $x \notin \bigcap_{0<\tau\le 1} A_{(\tau)}$, то из включения (5.17) следует, что $x \notin C(\alpha)$ при любых $0 < \alpha \le 1$. Следовательно, $\mu_C(x) = 0 = \mu_D(x)$.

Пусть $x \in \bigcap_{0<\tau\le 1} A_{(\tau)}$. Считаем, что $\mu_C(x) = \alpha > 0$. Тогда из включения (5.17) и из формулы (5.16) следует требуемое неравенство $\mu_C(x) \le \mu_D(x)$.

Утверждение 5.6. Пусть выполнены требование (5.14) и следующее условие:

$$\text{если } x \in \bigcap_{0<\tau\le\alpha_n} A_{(\tau)},\ 0 < \alpha_n \le \alpha \le 1,\ \alpha_n \to \alpha, \text{ то } x \in A_{(\alpha)}. \tag{5.18}$$

Тогда множество D, определяемое формулой (5.15), является нижней аппроксимацией семейства множеств $A_{(\alpha)}$.

Доказательство. Зафиксируем любое число $0 < \alpha \le 1$ и возьмем точку $x \in D(\alpha)$. Тогда $\mu_D(x) \ge \alpha$. Пусть $\mu_D(x) = \alpha$. Тогда из формулы

(5.15) следует, что существует последовательность чисел $0 < \alpha_n \le \alpha$ такая, что $\alpha_n \to \alpha$ и $x \in \bigcap\limits_{0<\tau\le\alpha_n} A_{(\tau)}$. Отсюда из предположения (5.18) получим, что $x \in A_{(\alpha)}$.

Пусть $\mu_D(x) > \alpha$. Тогда из формулы (5.15) следует, что существует последовательность чисел $\alpha < \alpha_n \le \mu_D(x)$ такая, что $\alpha_n \to \mu_D(x)$ и $x \in \bigcap\limits_{0<\tau\le\alpha_n} A_{(\tau)} \subset A_{(\alpha)}$.

Определение 5.6. Нечеткое множество B универсального множества X назовем *точной нижней аппроксимацией* семейства множеств $A_{(\alpha)}$, если оно является его нижней аппроксимацией и для любой другой нижней аппроксимации C семейства множеств $A_{(\alpha)}$ выполнено включение $C \angle B$.

Из утверждений 5.5 и 5.6 следует, что при выполнении условий (5.14) и (5.18) точной нижней аппроксимацией семейства множеств $A_{(\alpha)}$ является множество D, определяемое формулой (5.15).

Пример 5.5. Пусть $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, семейство множеств $A_{(\alpha)}$ задано табл. 5.2.

Таблица 5.2

α	$A_{(\alpha)}$
$0 < \alpha \le 0{,}1$	(x_1, x_2, x_4)
$0{,}1 < \alpha \le 0{,}2$	(x_1, x_4, x_5)
$0{,}2 < \alpha \le 0{,}4$	(x_1, x_2, x_3)
$0{,}4 < \alpha \le 0{,}5$	(x_1, x_3, x_4)
$0{,}5 < \alpha \le 1$	(x_1, x_4)

По формуле (5.9) найдем точную верхнюю аппроксимацию:

$B = ((x_1, x_2, x_4)|0{,}1) \vee ((x_1, x_4, x_5)|0{,}2) \vee ((x_1, x_2, x_3)|0{,}4) \vee ((x_1, x_3,x_4)|0{,}5) \vee ((x_1, x_4)|1) = \{(x_1|1); (x_2|0{,}4); (x_3|0{,}5); (x_4|1); (x_5|0{,}2)\}$.

Множества уровня $B(\alpha)$ приведены в табл. 5.3.

Таблица 5.3

α	$B(\alpha)$
$0 < \alpha \le 0{,}1$	$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$
$0{,}1 < \alpha \le 0{,}2$	$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$
$0{,}2 < \alpha \le 0{,}4$	(x_1, x_2, x_3, x_4)
$0{,}4 < \alpha \le 0{,}5$	$(x_1, x_3, x_4$
$0{,}5 < \alpha \le 1$	(x_1, x_4)

Далее, точка $x_1 \in A_{(\alpha)}$ для всех чисел $0 < \alpha \le 1$. Поэтому условие (5.14) выполнено. Обозначим $Q(\alpha) = \bigcap\limits_{0<\tau\le\alpha} A_{(\tau)}$. Значения $Q(\alpha)$ приведены в табл. 5.4.

Таблица 5.4

α	$Q(\alpha)$
$0 < \alpha \le 0{,}1$	(x_1, x_2, x_4)
$0{,}1 < \alpha \le 0{,}2$	(x_1, x_4)
$0{,}2 < \alpha \le 0{,}4$	(x_1)
$0{,}4 < \alpha \le 0{,}5$	(x_1)
$0{,}5 < \alpha \le 1$	(x_1)

Отсюда и из формулы (5.15) получим

$$D = ((x_1, x_2, x_4)\,|\,0{,}1) \vee ((x_1, x_4)\,|\,0{,}2) \vee ((x_1)\,|\,0{,}4) \vee ((x_1)\,|\,0{,}5) \vee ((x_1)\,|\,1) =$$
$$= \{(x_1\,|\,1);\ (x_2\,|\,0{,}1);\ (x_3\,|\,0);\ (x_4\,|\,0{,}2);\ (x_5\,|\,0)\}.$$

Множества уровня $D(\alpha)$ приведены в табл. 5.5.

Таблица 5.5

α	$D(\alpha)$
$0 < \alpha \le 0{,}1$	(x_1, x_2, x_4)
$0{,}1 < \alpha \le 0{,}2$	(x_1, x_4)
$0{,}2 < \alpha \le 1$	(x_1)

Из табл. 5.2 и 5.5 следует включение $D(\alpha) \subset A_{(\alpha)}$ при $0 < \alpha \le 1$. Отсюда и из утверждения 5.5 следует, что построенное множество D является точной нижней аппроксимацией семейства множеств $A_{(\alpha)}$.

В заключение этого параграфа введем понятие *декартова произведения* двух нечетких множеств. Вначале отметим, что если X и Y являются множествами произвольной природы, то для любых их подмножеств $\mathrm{A} \subset X$ и $\mathrm{B} \subset Y$ декартово произведение $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$ определяется как множество пар вида $(x; y)$, где $x \in \mathrm{A}$, $y \in \mathrm{B}$.

Пусть теперь A является нечетким множеством универсального множества X, а B — нечетким множеством универсального множества Y. Рассмотрим при $0 < \alpha \le 1$ прямые произведения $A(\alpha) \times B(\alpha)$ их множеств уровня. Точную верхнюю аппроксимацию этого семейства множеств назовем прямым произведением $A \times B$ нечетких множеств A и B. Используя формулу (5.9), будем иметь

$$A \times B = \mathrm{V}_{0 < \alpha \le 1}\,(((A(\alpha) \times B(\alpha))\,|\,\alpha). \tag{5.19}$$

Покажем, что семейство множеств $A(\alpha) \times B(\alpha)$ удовлетворяет свойствам 5.1 и 5.2. Тогда из следствия 5.2 получим равенство $(A \times B)(\alpha) = A(\alpha) \times B(\alpha)$.

Свойство 5.1 следует из монотонности семейств множеств $A(\alpha)$ и $B(\alpha)$. Покажем свойство 5.2. Пусть точка $(x;\ y) \in A(\tau) \times B(\tau)$ при всех $0 < \tau < \alpha$. Это значит, что $x \in A(\tau)$ и $y \in B(\tau)$ при всех $0 < \tau < \alpha$. Отсюда и из того, что семейства множеств $A(\alpha)$ и $B(\alpha)$ удовлетворяют свойству 5.2, получим требуемое включение $(x;\ y) \in A(\alpha) \times B(\alpha)$.

При вычислении функции принадлежности прямого произведения потребуется равенство

$$\bigcup_{0<\alpha\le 1}\big(A(\alpha)\times B(\alpha)\big)=\left(\bigcup_{0<\alpha\le 1}A(\alpha)\right)\times\left(\bigcup_{0<\alpha\le 1}B(\alpha)\right).$$

Пусть точка $(x;\ y)$ принадлежит множеству, стоящему в правой части доказываемого равенства. Тогда $x \in A(\alpha_1)$ и $y \in B(\alpha_2)$ при некоторых числах $0 << \alpha_i \le 1$. Пусть, например, $\alpha_1 \le \alpha_2$. Тогда из условия монотонности 5.1 получим, что $y \in B(\alpha_1)$. Следовательно, точка $(x;\ y) \in A(\alpha_1) \times B(\alpha_1)$. Стало быть, точка $(x;\ y)$ принадлежит множеству, стоящему в левой части доказываемого равенства. Обратное включение непосредственно следует из определения прямого произведения множеств.

Используя доказанное равенство и формулу (5.10), получим

$$\mu_{A\times B}(x, y) = 0, \text{ если } (x,y)\notin\left(\bigcup_{0<\alpha\le 1}A(\alpha)\right)\times\left(\bigcup_{0<\alpha\le 1}B(\alpha)\right);$$

$$\mu_{A\times B}(x, y) = \sup\,\{t \in (0,1]:\ (x, y) \in A(t) \times B(t)\}$$

$$\text{при } (x,y)\in\left(\bigcup_{0<\alpha\le 1}A(\alpha)\right)\times\left(\bigcup_{0<\alpha\le 1}B(\alpha)\right).$$

Отсюда следует, что

$$\mu_{A\times B}(x, y) = \min(\mu_A(x);\ \mu_B(y)). \tag{5.20}$$

Пример 5.6. Рассмотрим нечеткие множества $A = \{(x_1|0{,}1), (x_2|0{,}4)\}$ и $B = \{(y_1|0{,}3), (y_2|0{,}4), (y_3|0{,}6)\}$. Их прямое произведение $A \times B$ равно

$$\{((x_1;\ y_1)|0{,}1),\quad ((x_1;\ y_2)|0{,}1),\quad ((x_1;\ y_3)|0{,}1),$$
$$((x_2;\ y_1)|0{,}3),\quad (x_2;\ y_2)|0{,}4),\quad ((x_2;\ y_3)|0{,}4)\}.$$

§6. Принцип обобщения Заде

Рассмотрим задачу об определении образа нечеткого множества A универсального множества X при заданном, вообще говоря, многозначном отображении f: $X \to Y$. Следующий пример показывает прикладное значение этой задачи.

Пример 6.1. Пусть $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ — признаки, по которым оцениваются места работы $Y = \{y_1, \ldots, y_m\}$. Построим отображение f множества X во множество Y по следующему правилу: точка y_k принадлежит $f(x_i)$ тогда и только тогда, когда место работы y_k обладает признаком x_i. Поскольку признаком x_i могут обладать несколько мест работы, то отображение f является многозначным. Группа из N экспертов опрашивается на предмет престижности признаков x_i. Пусть признак x_i отметило N_i экспертов. По этой информации построим нечеткое множество A = {*престижный признак*} универсального множества X:

$$A = \{(x_1 \mid p_1), \ldots, \{(x_n \mid p_n)\}, p_i = N_i / N, \quad i = \overline{1,n}. \tag{6.1}$$

Зафиксируем место работы y_k. Это место работы обладает рядом признаков, всю совокупность которых с помощью отображения f можно записать в следующем виде:

$$f^{-1}(y_k) = \{x_i \in X\colon y_k \in f(x_i)\}. \tag{6.2}$$

Оценим число Q_k экспертов, которые через эти признаки отметили место работы y_k. При этом считаем, что эксперт отметил место работы y_k, если он отметил хотя бы один из его признаков. Тогда, как и в случае объединения нечетких множеств, верна оценка

$$\max_{x_i \in f^{-1}(y_k)} N_i \le Q_k \le \min\left(\sum_{x_i \in f^{-1}(y_k)} N_i; N\right). \tag{6.3}$$

Если принять «наихудший» вариант, то следует считать, что число экспертов, отметивших место работы y_k, равно

$$Q_k = \max_{x_i \in f^{-1}(y_k)} N_i. \tag{6.4}$$

С помощью чисел Q_k построим нечеткое множество $f_\blacklozenge(A)$ = {*престижное место работы*} универсального множества Y:

$$f_\blacklozenge(A) = \{(y_1 \mid q_1), \ldots, (y_m \mid q_m)\}, \quad q_k = Q_k / N, k = \overline{1,m}. \tag{6.5}$$

Тогда из формулы (6.4) получим, что

$$q_k = \max_{x_i \in f^{-1}(y_k)} p_i, \quad k = \overline{1,m}. \tag{6.6}$$

Такое определение множества (6.5) обладает важным свойством, которое положим в основу определения образа нечеткого множества. С этой целью для любого множества $C \subset X$ обозначим

$$f(C) = \{y \in Y\colon y = f(x) \text{ при некотором } x \in C\} = \bigcup_{x \in C} f(x). \quad (6.7)$$

Лемма 6.1. Пусть функция принадлежности нечеткого множества (6.5) определяется равенствами (6.6). Тогда для любого числа $0 < \alpha \le 1$ выполнено равенство $f_\blacklozenge(A)(\alpha) = f(A(\alpha))$.

Доказательство. Пусть точка y_k принадлежит множеству $f(A(\alpha))$. Это значит, что $y_k \in f(x_i)$ при некотором $x_i \in A(\alpha)$. Стало быть, $x_i \in f^{-1}(y_k)$ и, согласно определению множества уровня, степень принадлежности $p_i \ge \alpha$. Отсюда и из (6.6) следует, что $q_k \ge \alpha$. Поэтому точка y_k принадлежит $f_\blacklozenge(A)(\alpha)$.

Допустим, что точка $y_k \in f_\blacklozenge(A)(\alpha)$. Это значит, что $q_k \ge \alpha$. Отсюда и из равенств (6.6) следует, что для некоторой точки $x_i \in f^{-1}(y_k)$ ее степень принадлежности $p_i \ge \alpha$. Стало быть, $y_k \in f(x_i)$ и $x_i \in A(\alpha)$. Следовательно, выполнено включение $y_k \in f(A(\alpha))$.

Применяя теорему о разложении нечеткого множества по множествам уровня, можем записать

$$f_\blacklozenge(A) = \bigvee_{0 < \alpha \le 1} (f(A(\alpha)) \mid \alpha). \quad (6.8)$$

Рассмотрим теперь общий случай определения образа нечеткого множества A универсального множества X при отображении $f\colon X \to Y$. Рассмотрим при каждом $0 < \alpha \le 1$ множество $f(A(\alpha)) \subset Y$. Обозначим через $f_\blacklozenge(A)$ точную верхнюю аппроксимацию семейства множеств $f(A(\alpha))$.

Семейство множеств $A(\alpha)$ удовлетворяет условию монотонности 5.1. Поэтому из формулы (6.7) следует, что этому условию монотонности удовлетворяет и семейство множеств $f(A(\alpha))$. Из следствия 5.1 получим

$$f_\blacklozenge(A)(\alpha) = \bigcap_{0 < \tau \le \alpha} (f(A(\tau)).$$

Рассмотрим случай, когда множества X и Y являются метрическими пространствами.

Теорема 6.1. Пусть при каждом $0 < \alpha \le 1$ множество уровня $A(\alpha)$ является компактом, а отображение $f\colon X \to Y$ удовлетворяет следующему условию замкнутости:

$$\text{если } x_n \in X,\ x_n \to x,\ y \in f(x_n), \text{ то } y \in f(x). \quad (6.9)$$

Тогда семейство множеств $f(A(\alpha))$ удовлетворяет свойству 5.2.

Доказательство. Возьмем число $0 < \alpha \le 1$ и точка $y \in \bigcap_{0 \le \tau < \alpha} f(A(\tau))$. Возьмем последовательность чисел $0 < \tau_1 < \ldots < \tau_{n-1} < \tau_n \to \alpha$. Тогда из включения $y \in f\,(A(\tau_n))$ следует, что можно построить последовательность точек $x_n \in X$ такую, что $x_n \in A(\tau_n) \subset A(\tau_1)$ и $y \in f(x_n)$. Поскольку множество $A(\tau_1)$ является компактом, то можно считать, что $x_n \to x \in X$ (иначе перейдем к сходящейся подпоследовательности). Зафиксируем любое число $\tau < \alpha$. Тогда, начиная с некоторого номера, все числа $\tau < \tau_n < \alpha$. Следовательно, для этих номеров точки $x_n \in A(\tau_n) \subset \subset A(\tau)$. Поскольку множество $A(\tau)$ является компактом, то предельная точка $x \in A(\tau)$. Применяя свойство 5.2 для множества $A(\alpha)$, получим, что $x \in A(\alpha)$. Отсюда и из условия замкнутости (6.9) следует, что $y \in f(A(\alpha))$. Обратное включение в свойстве 5.2 следует из монотонности множеств $f(A(\alpha))$.

Следствие 6.1. Если нечеткое множество A универсального множества X и отображение f: $X \to Y$ удовлетворяют условиям, сформулированным в условиях теоремы 6.1, то для любого числа $0 < \alpha \le 1$ выполнено равенство

$$f_\blacklozenge(A)(\alpha) = f(A(\alpha)). \tag{6.10}$$

Определение 6.1. Образом нечеткого множества A универсального множества X при отображении f: $X \to Y$ называется точная верхняя аппроксимация $f_\blacklozenge(A)$ семейства множеств $f(A(\alpha))$.

Замечание 6.1. Формула (6.8), с помощью которой определяется образ $f_\blacklozenge(A)$ нечеткого множества A, является *принципом обобщения Заде*. Он позволяет расширить области определения и значения отображения f: $X \to Y$, включив в них и нечеткие множества.

Вычислим теперь функцию принадлежности образа нечеткого множества.

Теорема 6.2. Функция принадлежности $\mu_{f\blacklozenge(A)}$: $Y \to [0, 1]$ нечеткого множества $f_\blacklozenge(A)$ связана с функцией принадлежности $\mu_A(x)$ нечеткого множества A следующим равенством:

$$\mu_{f\blacklozenge(A)}(y) = 0, \text{ если } y \notin f(X);$$
$$\mu_{f\blacklozenge(A)}(y) = \sup_{x \in f^{-1}(y)} \mu_A(x) \text{ при } y \in f(X). \tag{6.11}$$

Доказательство. Из формулы (6.8), применяя теорему 5.4, получим

$$\mu_{f\blacklozenge(A)}(y) = 0, \text{ если } y \notin \bigcup_{0<\alpha\le 1} f\,(A(\alpha)) = f\left(\bigcup_{0<\alpha\le 1} A(\alpha)\right) = Y_0, \tag{6.12}$$

и, если $y \in Y_0$, то

$$\mu_{f_{\blacklozenge}(A)}(y) = \sup\{t \in (0, 1]: y \in f(A(t))\} = \sup\{t \in (0, 1]:$$
существует точка
$$x \in f^{-1}(y) \text{ такая, что } \mu_A(x) \geq t\} = \sup_{x \in f^{-1}(y)} \mu_A(x). \qquad (6.13)$$

Возьмем любую точку $y \in f(X)$. Если $y \in Y_0$, то формула (6.11) следует из (6.13). Пусть $y \notin Y_0$. Покажем, что $\mu_A(x) = 0$ для всех $x \in f^{-1}(y)$. Тогда формула (6.11) будет следовать из формулы (6.12).

Допустим, что $\mu_A(x) = \alpha > 0$. Тогда $y = f(x) \in f(A(\alpha)) \subset Y_0$. Получили противоречие.

Если же $y \notin f(X)$, то $y \notin Y_0$. В этом случае формула (6.11) следует из (6.12).

Иллюстрация формулы (6.13) приведена на рис. 6.1.

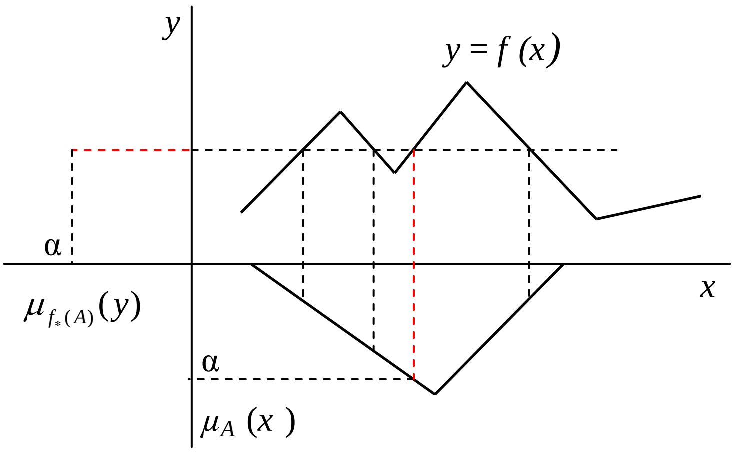

Рис. 6.1

Пример 6.2. Пусть два места работы y_1 и y_2 оцениваются по трем признакам: x_1 = (возможность карьерного роста), x_2 = (хорошая зарплата) и x_3 = (наличие пакета социальных услуг). В табл. 6.1 знаком плюс отмечено наличие признака x_i у места работы y_j.

Таблица 6.1

Признак	Место работы	
	y_1	y_2
x_1	+	
x_2	+	+
x_3		+

Из таблицы видно, что отображение $f: X \to Y$ задано соотношениями $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = \{y_1, y_2\}$, $f(x_3) = y_2$. Человек, выбирающий место работы, задает свои пожелания в виде нечеткого множества

$$A = \{(x_1|0{,}5),\ (x_2|0{,}75),\ (x_3|0{,}9)\}.$$

Рекомендация о возможном месте работы задается в виде нечеткого множества $f_\blacklozenge(A) = \{(y_1|0{,}75),\ (y_2|0{,}9)\}$. Следовательно, ему стоит выбрать место работы y_2.

Пример 6.3. Действия менеджера по продажам состоит в выборе суммы инвестиций x в рекламу из множества неотрицательных чисел R_+. Состояние фирмы описывается суммой $y \in R_+$ ее продаж. Существует отображение f: $R_+ \to R_+$, которое каждой сумме инвестиций x ставит в соответствие сумму результирующих продаж $y = f(x)$.

Выведем вид этой функции, принимая следующую модель фирмы.

Существует максимальный объем рынка, который обозначим c. Тогда, если в рекламу инвестирована сумма, равная x, оставшийся объем рынка равен $c - f(x)$. Пусть в рекламу инвестируется дополнительная сумма, равная Δx. Считаем, что прирост продаж пропорционален как оставшемуся объему рынка, так и величине дополнительных инвестиций. Стало быть,

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx k(c - f(x))\,\Delta x, \quad k = const > 0.$$

Разделим обе части этого соотношения на Δx и устремим $\Delta x \to 0$. Получим, $f'(x) = k(c - f(x))$. Далее, $f(0) = 0$. Решая это дифференциальное уравнение, находим вид функции:

$$f(x) = c(1 - e^{-kx}). \tag{6.14}$$

Из этой формулы видно, что

$$f(R_+) = [0, c),\ f^{-1}(y) = -\frac{1}{k}\, ln\left(1 - \frac{y}{c}\right) \text{ при } 0 \le y < c.$$

Пусть действиям менеджера присуща неуверенность и его решение об инвестировании задается нечетким множеством A с функцией принадлежности $\mu_A(x)$. Тогда возможная сумма от продаж носит нечеткий характер и задается нечетким множеством B с функцией принадлежности

$$\mu_B(y) = 0 \text{ при } y \ge c;\ \mu_B(y) = \mu_A\left(-\frac{1}{k}\ln\left(1 - \frac{y}{c}\right)\right) \text{ при } 0 \le y < c.$$

Обозначим через $\mu_f(x,y)$ *характеристическую функцию* графика отображения f: $X \to Y$, то есть

$$\mu_f(x,y) = 1 \text{ при } y \in f(x);\ \mu_f(x, y) = 0 \text{ при } y \notin f(x)). \tag{6.15}$$

Тогда формулы (6.11) можно записать в виде одного равенства

$$\mu_{f\blacklozenge(A)}(y) = \sup_{x \in X} \min(\mu_A(x);\ \mu_f(x, y)). \tag{6.16}$$

Рассмотрим эту формулу для случая, когда универсальные множества состоят из конечного числа элементов $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ и $Y = \{y_1, \ldots, y_m\}$. В этом случае отображение f: $X \to Y$ можно задать матрицей $R = \{r_{ij}\}$, где

$$r_{ij} = 1, \text{ если } y_j \in f(x_i) \text{ и } r_{ij} = 0, \text{ если } y_j \notin f(x_i);\ i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,k}. \quad (6.17)$$

Тогда из формулы (6.15) следует, что образ $f_\blacklozenge(A) = \{(y_1 | q_1), \ldots, (y_m | q_m)\}$ нечеткого $A = \{(x_1 | p_1), \ldots, (x_n | p_n)\}$ определяется из следующей системы соотношений:

$$\max(\min(p_1; r_{11}); \min(p_2; r_{21}); \ldots; \min(p_n; r_{n1})) = q_1, \quad (6.18)$$
$$\max(\min(p_1; r_{1m}); \min(p_2; r_{2m}); \ldots; \min(p_n; r_{nm})) = q_m.$$

Эти соотношения можно записать в матричном виде:

$$(p_1, p_2, \ldots, p_n) \blacklozenge \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \ldots & r_{1m} \\ r_{21} & r_{22} & \ldots & r_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_{n1} & r_{n2} & \ldots & r_{nm} \end{pmatrix} = (q_1, q_2, \ldots, q_m). \quad (6.19)$$

Здесь для обозначения операции (max – min)-композиции применено обозначение ♦.

Пример 6.4. Рассмотрим конкретный пример о выборе абитуриентом одного из четырех вузов — y_1, y_2, y_3, y_4. Каждый вуз оценивается по следующим признакам:

x_1 = (возможность приобретения навыков занятия научной работой);
x_2 = (местонахождение);
x_3 = (стоимость получения образования);
x_4 = (возможность получения престижной специальности);
x_5 = (возможность занятия спортом);
x_6 = (репутация вуза).

В табл. 6.2 знаком плюс отмечено наличие признака x_i у вуза y_j.

Таблица 6.2

Признак	Вуз			
	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1		+		+
x_2	+	+		+
x_3			+	
x_4		+	+	
x_5	+	+		+
x_6		+	+	

Абитуриент выдает свои пожелания в виде нечеткого множества

$$A = \{(x_1|0{,}2), (x_2|0{,}3), (x_3|0{,}8), (x_4|0{,}9), (x_5|0{,}2), (x_6|0{,}3)\},$$

универсальным множеством которого является множество признаков X.

Чтобы выдать ему рекомендацию в виде нечеткого множества

$$B = \{(y_1|q_1),\ (y_2|q_2),\ (y_3|q_3),\ (y_4|q_4)\},$$

решаем задачу (6.19). Для рассматриваемого случая формулы (6.18) принимают вид:

$$\max(\min(0{,}2;\ 0);\ \min(0{,}3;\ 1);\ \min(0{,}8;\ 0);\ \min(0{,}9;\ 0);\ \min(0{,}2;\ 1);\ \min(0{,}3;\ 0)) = q_1;$$

$$\max(\min(0{,}2;\ 1);\ \min(0{,}3;\ 1);\ \min(0{,}8;\ 0);\ \min(0{,}9;\ 1);\ \min(0{,}2;\ 1);\ \min(0{,}3;\ 1)) = q_2,$$

$$\max(\min(0{,}2;\ 0);\ \min(0{,}3;\ 0);\ \min(0{,}8;\ 1);\ \min(0{,}9;\ 1);\ \min(0{,}2;\ 0);\ \min(0{,}3;\ 1))= q_3,$$

$$\max(\min(0{,}2;\ 1);\ \min(0{,}3;\ 1);\ \min(0{,}8;\ 0);\ \min(0{,}9;\ 0);\ \min(0{,}2;\ 1);\ \min(0{,}3;\ 0)) = q_4.$$

Отсюда получим, что $\max(0;\ 0{,}3;\ 0;\ 0;\ 0{,}2;\ 0) = q_1$, $\max(0{,}2;\ 0{,}3;\ 0;\ 0{,}9;\ 0{,}2;\ 0{,}3) = q_2$, $\max(0;\ 0;\ 0{,}8;\ 0{,}9;\ 0;\ 0{,}3) = q_2$, $\max(0{,}2;\ 0{,}3;\ 0;\ 0;\ 0{,}2) = q_4$. Следовательно, $B = \{(y_1|0{,}3),\ (y_2|0{,}9),\ (y_3|0{,}9),\ (y_4|0{,}3)\}$. Рекомендуем выбрать вузы y_2 или y_3.

В заключение, не вдаваясь в подробное изложение, отметим, что образ нечеткого множества A при отображении f: $X \to Y$ можно определить, используя выражение, стоящее в правой части неравенства (6.3). Тогда вместо формул (6.6) и (6.18) будем иметь

$$q_k = \min\left(\sum_{x_i \in f^{-1}(y_k)} p_i; 1\right); \quad q_k = \min\left(\sum_{i=1}^{n} \min(p_i; r_{ik}); 1\right). \tag{6.20}$$

Эта формула имеет смысл и в более общем случае. Предположим, что уравнение $y = f(x)$ относительно $x \in X$ при любом $y \in Y$ либо не имеет решения, либо число решений конечно. Тогда вместо формулы (6.16) будем иметь

$$\mu_{f\blacklozenge(A)}(y) = \min\left(\sum_{x \in X} \min\Big(\mu_A(x);\ \mu_f(x,y)\Big);\ 1\right). \tag{6.21}$$

Пример 6.5. Рассмотрим пример 6.5. Тогда, используя ранее сделанные вычисления, будем иметь

$$\sum_{i=1}^{6} \min(p_i; r_{i1}) = 0{,}5; \quad \sum_{i=1}^{6} \min(p_i; r_{i2}) = 1{,}9;$$

$$\sum_{i=1}^{6} \min(p_i; r_{i3}) = 2; \quad \sum_{i=1}^{6} \min(p_i; r_{i4}) = 0{,}7.$$

Подставим эти числа в формулы (6.20). Получим $q_1 = 0{,}5$; $q_2 = 1$; $q_3 = 1$; $q_4 = 0{,}7$.

§ 7. Некоторые характеристики нечетких множеств

В качестве некоторых из характеристик нечеткого множества A служат: *ядро* $core\ A = \{x \in X\colon \mu_A(x) = 1\}$; *носитель* $supp\ A = \{x \in X\colon \mu_A(x) > 0\}$; *высота* $hgt\ A = \sup\limits_{x \in X} \mu_A(x)$.

Пример 7.1. Для нечеткого числа A, график функции принадлежности которого изображен на рис. 7.1, $core\ A = [b, c]$; $supp\ A = (a, e)$; $hgt\ A = 1$.

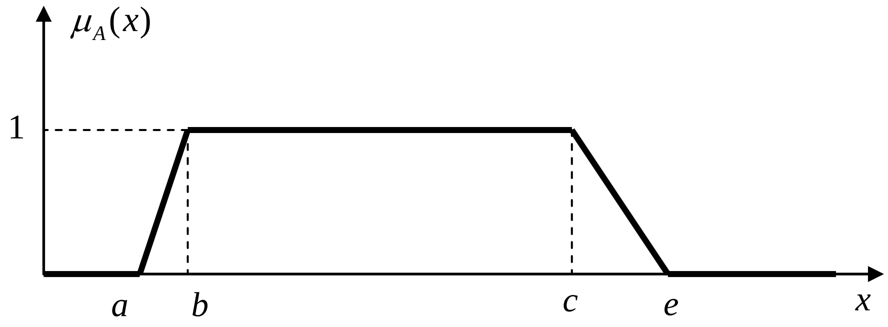

Рис. 7.1

Нечеткое множество A с $\mathrm{hgt}\ A = 1$ называется *нормальным*, а при $\mathrm{hgt}\ A < 1$ — *субнормальным*.

Поперечными точками нечеткого множества A называется множество $\{x \in X\colon \mu_A(x) = 0{,}5\}$ (см. рис. 7.2).

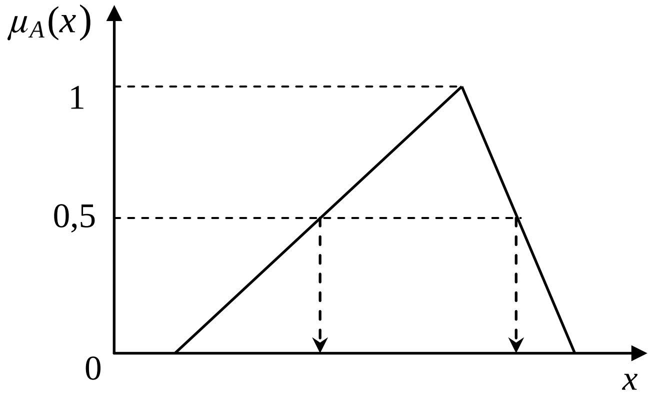

Рис. 7.2. Поперечные точки множества А

Для оценки близости между нечеткими множествами вводят расстояние $\rho(A; B)$ между нечеткими множествами A и B универсального множества X. Как правило, к расстоянию предъявляются следующие условия:

$$\rho(A;B) \ge 0,\quad \rho(A;A) = 0;\quad \rho(A;B) = \rho(B;A);$$
$$\rho(A;B) \le \rho(A;C) + \rho(C;B). \qquad (7.1)$$

Приведем примеры некоторых расстояний.

Расстояние Хемминга (или линейное расстояние) — для случая, когда универсальное множество $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, задается формулой

$$\rho_1(A;B) = \sum_{i=1}^{n} \left| \mu_A(x_i) - \mu_B(x_i) \right|. \qquad (7.2)$$

Евклидово (или квадратичное) *расстояние* — для случая, когда универсальное множество $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, задается формулой

$$\rho_2(A;B) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left| \mu_A(x_i) - \mu_B(x_i) \right|^2}. \qquad (7.3)$$

Упражнение 7.1. Показать, что расстояние, определяемое одной из формул — (7.2) или (7.3),— удовлетворяет условиям (7.1), причем $\rho(A;B) = 0$ тогда и только тогда, когда $A = B$.

В случае если универсальное множество X является конечным отрезком $[a, b] \subset R$, линейное и квадратичное расстояния задаются формулами

$$\rho_1(A;B) = \int_a^b \left| \mu_A(x) - \mu_B(x) \right| dx,\quad \rho_2(A;B) = \sqrt{\int_a^b \left| \mu_A(x) - \mu_B(x) \right|^2 dx}.$$

Существование соответствующих интегралов, стоящих в этих формулах, предполагается.

Рассмотрим случай, когда универсальное множество X является линейным нормированным пространством с нормой $\|x\|$, $x \in X$. Введем расстояние между двумя его нечеткими множествами с помощью следующей формулы:

$$\rho(A;B) = \max\,[\sup_{x\in X} \inf_{y\in X}(\left|\mu_A(x) - \mu_B(y)\right| + \|x-y\|);$$
$$\sup_{y\in X} \inf_{x\in X}(\left|\mu_A(x) - \mu_B(y)\right| + \|x-y\|)]. \qquad (7.4)$$

Покажем, что величина (7.4) удовлетворяет свойствам расстояния (7.1). Первые три свойства непосредственно видны из формулы (7.4). Докажем четвертое свойство. Пусть, например, максимальным из двух чисел в формуле (7.4) является первое. Тогда для любого числа $a < \rho(A, B)$ найдется точка $z \in X$ такая, что

$$\left|\mu_A(z) - \mu_B(y)\right| + \|z-y\| \ge a$$

для всех точек $y \in X$.

Отсюда следует, что для любых точек $u \in X$, $y \in X$ и для любого нечеткого множества C выполнено неравенство

$$a \le \left|\mu_A(z) - \mu_C(u)\right| + \|z-u\| + \left|\mu_C(u) - \mu_B(y)\right| + \|u-y\|.$$

Следовательно,

$$a \le \left|\mu_A(z) - \mu_C(u)\right| + \|z-u\| + \inf_{y\in X} \left(\left|\mu_C(u) - \mu_B(y)\right| + \|u-y\|\right) \le$$
$$\le \left|\mu_A(z) - \mu_C(u)\right| + \|z-u\| + \sup_{x\in X} \inf_{y\in X} \left(\left|\mu_C(x) - \mu_B(y)\right| + \|x-y\|\right)$$

для любого $u \in X$. Отсюда получим

$$a \le \inf_{y\in X} \left(\left|\mu_A(z) - \mu_C(y)\right| + \|z-y\|\right) + \sup_{x\in X} \inf_{y\in X} \left(\left|\mu_C(x) - \mu_B(y)\right| +\right.$$
$$\left. + \|x-y\|\right) \le \sup_{x\in X} \inf_{y\in X} \left(\left|\mu_A(x) - \mu_C(y)\right| + \|x-y\|\right) +$$
$$+ \sup_{x\in X} \inf_{y\in X} \left(\left|\mu_C(x) - \mu_B(y)\right| + \|x-y\|\right) \le \rho(A, C) + \rho(C, B).$$

Из произвольности числа $a < \rho(A; B)$ следует четвертое свойство (7.1).

Зафиксируем два подмножества $\boldsymbol{A} \subset X$ и $\boldsymbol{B} \subset X$ и рассмотрим их в качестве нечетких множеств, функции принадлежности которых задаются их характеристическими функциями. Подставим в формулу (7.4) функции

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 \ \text{при}\ x \in A, \\ 0 \ \text{при}\ x \notin A \end{cases}, \quad \mu_B(x) = \begin{cases} 1 \ \text{при}\ x \in B, \\ 0 \ \text{при}\ x \notin B \end{cases}.$$

Получим

$$\rho(\boldsymbol{A}; \boldsymbol{B}) = \max\left[\sup_{x\in \boldsymbol{A}} \inf_{y\in \boldsymbol{B}} \|x-y\|; \sup_{y\in \boldsymbol{B}} \inf_{x\in \boldsymbol{X}} \|x-y\|\right]. \quad (7.5)$$

Обозначим как $S = \{x \in X: \|x\| \le 1\}$ — шар единичного радиуса с центром в начале координат. Тогда, если множества $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ являются компактами, то из формулы (7.6) следует:

$$\rho(\boldsymbol{A}; \boldsymbol{B}) = \min\{\varepsilon \ge 0: \boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{B} + \varepsilon S; \boldsymbol{B} \subset \boldsymbol{A} + \varepsilon S\}. \quad (7.6)$$

Расстояние между компактами, задаваемое формулой (7.6), называется *Хаусдорфовым расстоянием*.

Рассмотрим вопрос о введении *показателей размытости* нечетких множеств. Если явление $\boldsymbol{A}$ принимает значение x из универсального множества X с показателем принадлежности $\mu_A(x)$, то это значение оно не принимает с показателем принадлежности $1 - \mu_A(x)$. Таким образом, внутренняя неопределенность, двусмысленность элемента x на предмет принятия явлением $\boldsymbol{A}$ этого значения проявляется в том, что это явление, пусть в разной степени, «принимает» и «не принимает» данное значение. Эта двусмысленность максимальна, если $\mu_A(x) = 1 - \mu_A(x) \Rightarrow \mu_A(x) = 0{,}5$. Стало быть, максимальная двусмысленность наблюдается в поперечных точках. Рассматриваемая двусмысленность минимальна, если $\mu_A(x) = 1$ или $\mu_A(x) = 0$. При построении показателя размытости (*индекса нечеткости*) нечеткого множества существует несколько подходов.

Рассмотрим подход, основанный на построении обычного множества $A_* \subset X$ (*четкого множества* A_*), «ближайшего» к нечеткому множеству A. Считается, что, чем ближе нечеткое множество A к четкому множеству A_*, тем меньше у него индекс нечеткости.

При таком подходе нужно выбрать расстояние $\rho(A; B)$ между нечеткими множествами A и B универсального множества X.

Рассмотрим случай, когда универсальное множество состоит из конечного числа элементов $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. При нахождении ближайшего четкого множества потребуется следующая функция f: $[0, 1] \to R$:

$$f(p) = \min_{q=0,1} |p - q| = \begin{cases} p, & \text{если} \quad p \le 0{,}5 \\ 1 - p, & \text{если} \quad p > 0{,}5 \end{cases} = \min(p;\ 1 - p). \qquad (7.7)$$

Утверждение 7.1. Функция $f(p)$ удовлетворяет следующим свойствам:

1. $0 \le f(p) \le 1$ при любом $p \in [0, 1]$.
2. $f(p) = 0 \Leftrightarrow p = 0$ или $p = 1$.
3. $f(p) = 0{,}5 \Leftrightarrow p = 0{,}5$.
4. $f(p) = f(1 - p)$.
5. $f(\max(p_1, p_2)) + f(\min(p_1, p_2)) = f(p_1) + f(p_2)$.
6. Если $p_1 \le p_2 \le 0{,}5$ или $p_1 \ge p_2 > 0{,}5$, то $f(p_1) \le f(p_2)$.

Доказательство. Первые четыре свойства непосредственно следуют из формулы (7.7). Свойство 5 верно для любой функции f и проверяется рассмотрением, например, случая $p_1 \ge p_2$.

Проверим свойство 6. Пусть $p_1 \le p_2 \le 0{,}5$. Тогда $f(p_1) = p_1 \le p_2 = f(p_2)$. Пусть $p_1 \ge p_2 > 0{,}5$. Тогда $f(p_1) = 1 - p_1 \le 1 - p_2 = f(p_2)$.

Отметим, что минимальное значение в (7.7) достигается на элементе

$$q = q(p) = 0 \text{ при } 0 \le p \le 0{,}5 \text{ и } q = q(p) = 1, \text{ если } 0{,}5 \le p \le 1. \qquad (7.8)$$

Найдем ближайшее четкое множество $A_* = \{(x_1 | q_1); \ldots; (x_n | q_n)\}$. Его функция принадлежности принимает значения либо 0, либо 1. Из формул (7.2), (7.3), (7.7) и (7.8) получим, что $q_i = q(\mu(x_i))$. Далее,

$$\rho_1(A; A_*) = \sum_{i=1}^{n} f(\mu_A(x_i)) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \min\left(\mu_A(x_i); 1-\mu_A(x_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} \min\left(\mu_A(x_i);\ \mu_{\bar{A}}(x_i)\right);$$

$$\rho_2(A; A_*) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} f^2\left(\mu_A(x_i)\right)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \min\left(\mu_A^2(x_i); \mu_{\bar{A}}^2(x_i)\right)}. \qquad (7.9)$$

При получении последней формулы используется равенство

$$\min(a^2; b^2) = (\min(a; b))^2$$

для любых чисел $a \geq 0$ и $b \geq 0$.

Поскольку $f(p) \leq 0{,}5$, то из предыдущих формул получим неравенства

$$\rho_1(A; A_*) \leq \frac{n}{2}, \quad \rho_2(A; A_*) \leq \frac{\sqrt{n}}{2}. \qquad (7.10)$$

Отметим, что, если все $\mu_A(x_i) = 0{,}5$, эти неравенства превращаются в равенства.

Введем *линейный и квадратичный индексы нечеткости*:

$$d_1(A) = \frac{2}{n}\rho_1(A; A_*) = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} \min\left(\mu_A(x_i);\ \mu_{\bar{A}}(x_i)\right); \qquad (7.11)$$

$$d_2(A) = \frac{2}{\sqrt{n}}\rho_2(A; A_*) = \frac{2}{\sqrt{n}}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \min\left(\mu_A^2(x_i); \mu_{\bar{A}}^2(x_i)\right)}. \qquad (7.12)$$

Введенные индексы нечеткости удовлетворяют следующим условиям:

1. $0 \leq d(A) \leq 1$ для любого нечеткого множества A.
2. $d(A) = 0 \Leftrightarrow A$ — четкое множество.
3. $d(A) = 1 \Leftrightarrow \mu_A(x_i) = 0{,}5$ для всех $i = \overline{1,n}$.
4. $d(A) = d(\bar{A})$ для любого нечеткого множества A.
5. $d(A \vee B) + d(A \wedge B) = d(A) + d(B)$ для любых нечетких множеств A и B универсального множества X.
6. Если нечеткое множество A является *заострением* нечеткого множества B, то есть $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ при $\mu_B(x) \leq 0{,}5$ и $\mu_A(x) \geq \mu_B(x)$ при $\mu_B(x) \geq 0{,}5$, то $d(A) \leq d(B)$.

Замечание 7.1. Из формулы (7.7) следует, что $f(\mu_A(x_i)) = \mu_{A\wedge\bar{A}}(x_i)$. Поэтому линейный индекс нечеткости можно записать в следующем виде:

$$d_1(A) = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu_{A\wedge\bar{A}}(x_i).$$

Пример 7.2. Вычислим линейный индекс нечеткости нечеткого множества $A = \{(x_1|0{,}1),\ (x_2|0{,}3),\ (x_3|0{,}4),\ (x_4|0{,}8),\ (x_5|0{,}6)\}$. Из формулы (7.11) численное значение линейного индекса нечеткости $d_1(A)$:

$$\frac{2}{5}(\min(0{,}1;\ 0{,}9) + \min(0{,}3;\ 0{,}7) + \min(0{,}4;\ 0{,}6) +$$

$$+ \min(0{,}8;\ 0{,}2) + \min(0{,}6;\ 0{,}4)) = 0{,}56.$$

Пример 7.3. Пусть все $\mu_A(x_i) = p = const$. Тогда из формулы (7.11) следует, что

$$d_1(A) = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\min\left(p;1-p\right) = 2\,min(p;\ 1-p) = 2\,f(p).$$

В случае если универсальное множество X является конечным отрезком $[a,\ b] \subset R$, индексы нечеткости задаются формулами:

$$d_1(A) = \frac{2}{b-a}\rho_1(A;\ A_*) = \frac{2}{b-a}\int_a^b \min\left(\mu_A(x);\mu_{\bar{A}}(x)\right)dx;$$

$$d_2(A)=\frac{2}{\sqrt{b-a}}\rho_2(A;A_*) = \frac{2}{\sqrt{b-a}}\sqrt{\int_a^b \min\left(\mu_A^2(x);\mu_{\bar{A}}^2(x)\right)dx}\,.$$

Эти индексы нечеткости также удовлетворяют условиям 1—6.

Рассмотрим построение оценки нечеткости через *энтропию*. Энтропия системы, которая может принимать значения $x_1,\ \ldots,\ x_n$ с вероятностями $p_1,\ \ldots,\ p_n$ $(0 \le p_i \le 1,\ p_1 + \ldots + p_n = 1)$, определяется формулой

$$H(p_1,\ \ldots,\ p_n) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \ln p_i\,.$$

Отметим, что функция $y = h(x) = -x\ln x$ при $0 < x \le 1$ и $h(0) = 0$ является непрерывной на отрезке $[0,\ 1]$ и $h(x) > 0$ при $0 < x < 1$. Ее максимальное значение на отрезке $[0,\ 1]$ достигается в точке $x = e^{-1}$ и равно e^{-1} (см. рис. 7.3). Поэтому функция $H(p_1,\ \ldots,\ p_n) \ge 0$ при всех $0 \le p_i \le 1$, $p_1 + \ldots + p_n = 1$. Далее, если некоторое $p_i = 1$, а все остальные $p_j = 0$, то $H(p_1,\ \ldots,\ p_n) = 0$.

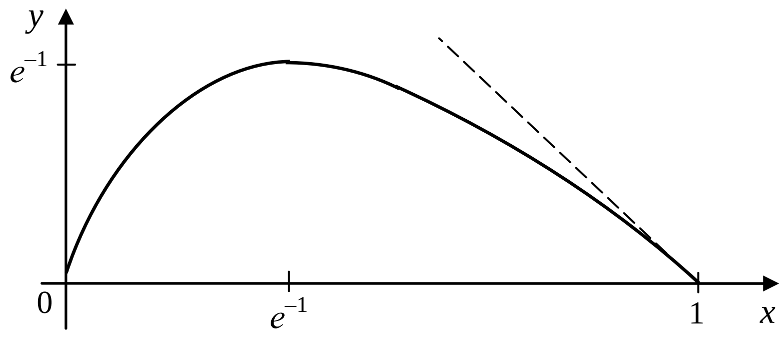

Рис. 7.3

Покажем теперь, что

$$\ln n = \max\left(-\sum_{i=1}^{n} p_i \ln p_i\right), \quad p_1 + \ldots + p_n = 1, \quad 0 \le p_i \le 1, \quad i = \overline{1,n}.$$

Множество вероятностных наборов $(p_1, \ldots, p_n) \in R^n$ является замкнутым и ограниченным, а целевая функция в предыдущей оптимизационной задаче является непрерывной. По теореме Вейерштрасса решение в этой задаче существует. Поскольку целевая функция и связи симметричны относительно переменных p_i, то у оптимального решения $p_1 = \ldots = p_n = 1/n$. Значение целевой функции на этом решении равно $\ln n$.

Для нечеткого множества A условие $\mu_A(x_1) + \ldots + \mu_A(x_n) = 1$, вообще говоря, не выполнено. Проведем нормировку $p_i = \mu_A(x_i) / (\mu_A(x_1) + \ldots + \mu_A(x_n))$ и определим индекс нечеткости формулой

$$d(A) = -\frac{1}{\ln n}\sum_{i=1}^{n} p_i \ln p_i. \qquad (7.13)$$

Тогда $0 \le d(A) \le 1$. Однако при оценке нечеткости эта формула обладает рядом недостатков. Например, если все $\mu_A(x_i) = a = const$, то все $p_i = \frac{1}{n}$. Следовательно, индекс нечеткости (7.13) $d(A) = 1$.

Замечание 7.2. Другой возможный подход в использовании функции энтропии для оценки нечеткости — построение индекса нечеткости с помощью функции

$$f(p) = \min(h(p); h(1 - p)), \qquad (7.14)$$

которая удовлетворяет свойствам, сформулированным в утверждении 7.1.

§ 8. Арифметические действия с нечеткими множествами

Рассмотрим случай, когда универсальное множество X является линейным пространством над полем действительных чисел. Применяя для отображений f: $X \times X \to X$ и f_λ: $X \to X$ (λ — действительное число) принцип обобщения Заде, можно ввести операции сложения нечетких множеств и умножения нечеткого множества на число. Следующий пример показывает прикладное значение этого вопроса.

Пример 8.1. Пусть в пространстве X перемещается точка, положение $x \in X$ которой состоит из начального состояния $x_0 \in X$, сложенного с перемещением $u_0 \in X$.

Информация о возможном значении начального состояния и о возможном значении перемещения поступает из N источников. Причем каждый i-й источник дает только область $X_i \subset X$ возможного начального состояния и область $U_i \subset X$ возможного перемещения.

Для каждого вектора $x \in X$ обозначим через $n_1(x)$ количество областей X_i, содержащих этот вектор. Аналогично, для каждого вектора $u \in X$ обозначим через $n_2(u)$ количество областей U_k, содержащих этот вектор.

Информация о том, что конкретные области X_i и U_k поступили из одного источника или из разных, отсутствует.

Зафиксируем вектор $x \in X$ и оценим максимально возможное число $n(x)$ источников, по поступившей информации от которых предполагаем, что движущаяся точка может оказаться в этом состоянии x. Другими словами, оценим максимально возможное число номеров i, для которых выбранный вектор $x \in X_i + U_i$. Это включение выполнено тогда и только тогда, когда при некотором векторе $y \in X$ выполнены включения $y \in X_i$ и $u = x - y \in U_i$. Количество областей X_i, содержащих этот вектор y, равно $n_1(y)$. Число областей U_k, содержащих вектор $x - y$, равно $n_2(x - y)$.

Далее, $n(x) \leq \min(n_1(y); n_2(x - y))$. Поэтому

$$n(x) \leq \sup_{y \in X} \min(n_1(y); n_2(x - y)).$$

Поскольку никакой дополнительной информации нет, то примем $n(x)$ равной правой части этого неравенства. Значение функции $\mu_1(x) = n_1(x) / N$ задает меру достоверности того, что начальное состояние равно x. Аналогично, значения функций $\mu_2(u) = n_2(u) / N$ и $\mu(x) = n(x) / N$ задают соответственно величину мер достоверности того, что перемещение равно u, а после перемещения точка окажется в состоянии x. В силу нашего допущения эти три функции связаны соотношением

$$\mu(x) = \sup_{y \in X} \min(\mu_1(y); \mu_2(x - y)).$$

Пусть положение точки определяется формулой $x = \lambda x_0$, где число $\lambda \neq 0$. Тогда $n(x) = n_1(\lambda^{-1}x)$. Следовательно, $\mu(x) = \mu_1(\lambda^{-1}x)$.

Выведем полученные в рассмотренном примере формулы в общем виде. Определим сумму двух множеств $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ и умножение множества $\boldsymbol{A}$ на число λ в пространстве X следующими формулами:

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \{x \in X: x = y + z, y \in \boldsymbol{A}, z \in \boldsymbol{B}\}; \tag{8.1}$$

$$\lambda \boldsymbol{A} = \{x \in X\colon x = \lambda y, y \in \boldsymbol{A}\}. \qquad (8.2)$$

Пусть A и B — два нечетких множества универсального множества X. При $\alpha \in (0, 1]$ определена сумма их множеств уровня $A(\alpha) + B(\alpha) \subset X$.

Определение 8.1. Суммой $A \oplus B$ двух нечетких множеств A и B универсального множества X назовем точную верхнюю аппроксимацию семейства множеств $A(\alpha) + B(\alpha)$, $0 < \alpha \le 1$.

Из теоремы 5.4 следует, что

$$A \oplus B = \bigvee_{0<\alpha\le 1} \Big(\big(A(\alpha) + B(\alpha) \big) | \alpha \Big). \qquad (8.3)$$

Поскольку семейства множеств $A(\alpha)$ и $B(\alpha)$ удовлетворяют свойству монотонности 5.1, этому свойству удовлетворяет и их сумма $A(\alpha) + B(\alpha)$. Согласно следствию 5.1 при любом $0 < \alpha \le 1$ выполнено равенство

$$(A \oplus B)(\alpha) = \bigcap_{0<\tau<\alpha} \big(A(\tau) + B(\tau) \big).$$

Теорема 8.1. Пусть пространство X является нормированным и при любом числе $0 < \alpha \le 1$ каждое из множеств $A(\alpha)$ и $B(\alpha)$ является замкнутым, а одно из них является компактом. Тогда семейство множеств $A(\alpha) + B(\alpha)$ удовлетворяет включению (5.13).

Доказательство. Зафиксируем число $0 < \alpha \le 1$ и точку

$$y \in \bigcap_{0<\tau<\alpha} \big(A(\tau) + B(\tau) \big).$$

Возьмем последовательность чисел $0 < \tau_1 < \ldots < \tau_{n-1} < \tau_n \to \alpha$. Тогда найдутся точки $a_n \in A(\tau_n)$ и $b_n \in B(\tau_n)$ такие, что $y = a_n + b_n$. Пусть, например, множество $A(\tau_1)$ является компактом. Тогда из включения $a_n \in A(\tau_n) \subset A(\tau_1)$ следует, что из последовательности точек a_n можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Не вводя новых обозначений, считаем, что сама последовательность $a_n \to a$. Из равенства $b_n = y - a_n$ следует, что $b_n \to b = y - a$. Зафиксируем любое число $0 < \tau < \alpha$. Тогда, начиная с некоторого номера, все числа $\tau < \tau_n < \alpha$. Следовательно, точки $a_n \in A(\tau_n) \subset A(\tau)$ и $b_n \in B(\tau_n) \subset B(\tau)$. Из замкнутости множеств $A(\tau)$ и $B(\tau)$ следует, что предельные точки $a \in A(\tau)$ и $b \in B(\tau)$. Из произвольности числа $\tau \in (0, \alpha)$ и из свойства 5.2 для множеств $A(\tau)$ и $B(\tau)$, получим, что $a \in A(\alpha)$ и $b \in B(\alpha)$. Стало быть, $y = a + b \in A(\alpha) + B(\alpha)$.

Следствие 8.1. Если нечеткие множества A и B удовлетворяют условиям, сформулированным в теореме 8.1, то при любом числе $0 < \alpha \le 1$ выполнено равенство

$$(A \oplus B)(\alpha) = A(\alpha) + B(\alpha). \tag{8.4}$$

Доказательство следует из следствия 5.2.

Определение 8.2. Произведением $\lambda \bullet A$ нечеткого множества A универсального множества X на действительное число λ назовем точную верхнюю аппроксимацию семейства множеств $\lambda A(\alpha)$, $0 < \alpha \le 1$.

Из теоремы 5.4 следует, что

$$\lambda \bullet A = \bigvee_{0<\alpha\le 1} \left(\left(\lambda A(\alpha) \right) | \alpha \right). \tag{8.5}$$

Следствие 8.2. При любом числе $\lambda \in R$ верно равенство

$$(\lambda \bullet A)(\alpha) = \lambda A(\alpha). \tag{8.6}$$

В самом деле, семейство множеств $\lambda A(\alpha)$ удовлетворяет свойствам 5.1 и 5.2. Согласно следствию 5.2 при любом числе $0 < \alpha \le 1$ выполнено равенство (8.6).

Вычислим функции принадлежности нечетких множеств (8.3) и (8.5).

Теорема 8.2. Имеют место следующие формулы:

$$\mu_{A\oplus B}(x) = \sup_{y+z=x} \min(\mu_A(y); \mu_B(z)); \tag{8.7}$$

$$\mu_{0\bullet A}(x) = 0, \text{ если } x \ne 0; \ \mu_{0\bullet A}(0) = 1;$$

$$\mu_{\lambda\bullet A}(x) = \mu_A(\lambda^{-1}x), \text{ если } \lambda \ne 0. \tag{8.8}$$

Доказательство. Из формул (5.10) и (8.3) следует, что

$$\mu_{A\oplus B}(x) = 0, \text{ если } x \notin \bigcup_{0<\alpha\le 1} \left(A(\alpha) + B(\alpha) \right) = X_0,$$

$$\mu_{A\oplus B}(x) = \sup \{t \in (0, 1]: x \in A(t) + B(t)\} \text{ при } x \in X_0. \tag{8.9}$$

Возьмем любую точку $x \in X$. Если $x \in X_0$, то из формулы (8.9) имеем

$$\mu_{A\oplus B}(x) = \sup \{t \in (0, 1]: x = y + z, y \in A(t), z \in B(t)\} = \sup \{t \in (0, 1]: x =$$
$$= y + z, \mu_A(y) \ge t, \mu_B(z) \ge t\} = \sup \{t \in (0, 1]: x =$$
$$= y + z, \min(\mu_A(y); \mu_B(z)) \ge t\} = \sup_{y+z=x} \min(\mu_A(y); \mu_B(z)).$$

Пусть $x \notin X_0$. Это значит, что, если $x = y + z$, то при любом $0 < \alpha \le 1$ либо $y \notin A(\alpha)$, либо $z \notin B(\alpha)$. Следовательно, $\min(\mu_A(y); \mu_B(z)) < \alpha$ при любом числе $0 < \alpha \le 1$. Стало быть, $\min(\mu_A(y); \mu_B(z)) = 0$ при любых $y + z = x$. Поэтому правая часть в формуле (8.7) равна нулю.

Докажем теперь равенства (8.9). Пусть $\lambda = 0$. Тогда $\bigcup\limits_{0<\alpha\le 1}\big(0A(\alpha)\big) = 0$.

Из формул (5.10) и (8.5) следует, что значение $\mu_{0\bullet A}(x)$ определяется формулой (8.9). Далее, $\bigcup\limits_{0<\alpha\le 1}\big(\lambda A(\alpha)\big) = X$ при $\lambda \ne 0$. Тогда из формулы (5.10) получим

$$\mu_{\lambda\bullet A}(x) = \sup\,\{t \in (0, 1]: \lambda^{-1}x \in A(t)\} =$$
$$= \sup\,\{t \in (0, 1]: \mu_A(\lambda^{-1}x) \ge t\} = \mu(\lambda^{-1}x).$$

Пример 8.2. Рассмотрим нечеткие множества вида $A = (\boldsymbol{A}|\, q)$. Здесь $\boldsymbol{A}$ является непустым множеством в пространстве X, а число $q \in (0, 1]$. Функция принадлежности такого нечеткого множества равна

$$\mu_A(x) = q \text{ при } x \in \boldsymbol{A} \text{ и } \mu_A(x) = 0 \text{ при } x \notin \boldsymbol{A}.$$

Функция принадлежности суммы $A \oplus B$ двух таких нечетких множеств A и B универсального множества X равна

$$\mu_{A\oplus B}(x) = \sup_{y+z=x}\min\left(\begin{cases} q_A, y \in A; \\ 0,\ y \notin A \end{cases};\begin{cases} q_B, z \in B; \\ 0,\ z \notin B \end{cases}\right) =$$

$$= \sup_{y+z=x}\left(\begin{cases} \min\,(q_A; q_B), y \in A, z \in B; \\ 0, \qquad\qquad y \notin A\,\textit{или}\; z \notin B \end{cases}\right).$$

Таким образом,

$$\mu_{A\oplus B}(x) = \begin{cases} \min\big(q_A; q_B\big),\ x \in A + B, \\ 0, \qquad\qquad\qquad x \notin A + B. \end{cases}$$

Далее, $0 \bullet A = O = (0|\, 1)$. Если $\lambda \ne 0$, то $\mu_{\lambda\bullet A}(x) = \mu_A(\lambda^{-1}x) = q$ при $\lambda^{-1}x \in \boldsymbol{A}$ и $\mu_{\lambda\bullet A}(x) = 0$ при $\lambda^{-1}x \notin \boldsymbol{A}$. Следовательно, $\lambda \bullet A = (\lambda\,\boldsymbol{A}|\, q)$ при $\lambda \ne 0$.

Таким образом,

$$(\boldsymbol{A}|\, q_A) \oplus (\boldsymbol{B}|\, q_B) = ((\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})|\, \min(q_A; q_B));$$
$$\lambda \bullet A = (\lambda\boldsymbol{A}|\, q);\ 0 \bullet A = O = (0|\, 1). \qquad (8.10)$$

Обозначим через $F(X)$ совокупность нечетких множеств универсального множества X. Тогда формулами (8.7) и (8.8) определены операции сложения нечетких множеств и умножения их на действительные числа. Введенные операции удовлетворяют следующим свойствам:

I.

1) $A \oplus B = B \oplus A$ (коммутативность);

2) $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$ (ассоциативность);

3) существует нечеткое множество O такое, что $A \oplus O = A$ для любого нечеткого множества A.

II.

1) $1 \bullet A = A$;

2) $\alpha \bullet (\beta \bullet A) = (\alpha\beta) \bullet A$.

III. $\alpha \bullet (A \oplus B) = (\alpha \bullet A) \oplus (\alpha \bullet B)$.

Свойство коммутативности следует из вида функции принадлежности (8.7). Докажем свойство ассоциативности (I, 2). Рассмотрим нечеткие множества $U = (A \oplus B) \oplus C$ и $V = A \oplus (B \oplus C)$. Из формулы (8.7) следует, что их функции принадлежности равны

$$\mu_U(x) = \sup_{y+z=x} \min\Big(\sup_{a+b=y} \min(\mu_A(a); \mu_B(b)); \mu_C(z)\Big),$$

$$\mu_V(x) = \sup_{y+w=x} \min\Big(\mu_A(y); \sup_{a+b=w} \min(\mu_B(a)); \mu_C(b)\Big). \qquad (8.11)$$

Из первой формулы в (8.11) следует, что для любого числа $\varepsilon > 0$ существуют точки y_ε, z_ε, a_ε, b_ε из множества X такие, что $y_\varepsilon + z_\varepsilon = x$, $a_\varepsilon + b_\varepsilon = y_\varepsilon$ и

$$\mu_A(a_\varepsilon) \ge \mu_U(x) - 2\varepsilon, \quad \mu_B(b_\varepsilon) \ge \mu_U(x) - 2\varepsilon, \ \mu_C(z_\varepsilon) \ge \mu_U(x) - \varepsilon.$$

Отсюда получим, что

$$\min\Big(\mu_A(a_\varepsilon); \sup_{a+b=b_\varepsilon+z_\varepsilon} \min(\mu_B(b); \mu_C(b))\Big) \ge \mu_U(x) - 2\varepsilon.$$

Из этого неравенства, учитывая вторую формулу в (8.11) и соотношение $b_\varepsilon + z_\varepsilon + a_\varepsilon = x$, получим, что $\mu_V(x) \ge \mu_U(x) - 2\varepsilon$. Отсюда, учитывая произвольность числа $\varepsilon > 0$, получим неравенство $\mu_V(x) \ge \mu_U(x)$. Аналогично доказывается и обратное неравенство.

Докажем следующее свойство (I, 3). Возьмем нечеткое множество O с функцией принадлежности

$$\mu_O(x) = 0 \text{ при } x \ne 0; \ \mu_O(0) = 1. \qquad (8.12)$$

Тогда, как следует из формул (8.7) и (8.8), для любого нечеткого множества A универсального множества X выполнено

$$\mu_{A\oplus O}(x) = \sup_{y+z=x} \min(\mu_A(y); \mu_O(z)) = \mu_A(x); \quad \mu_{0\bullet A}(x) = \mu_O(x).$$

Следовательно, для любого нечеткого множества A выполнены равенства

$$A \oplus O = A; \quad 0 \bullet A = O. \qquad (8.13)$$

Свойство II, 1, а также свойство II, 2 непосредственно следуют из формул (8.7) и (8.8).

Проверим свойство III, 1. Пусть $\alpha \neq 0$. Тогда из формул (8.7) и (8.8) следует, что

$$\mu_{\alpha\bullet(A\oplus B)}(x) = \mu_{A\oplus B}(\alpha^{-1}x) = \sup_{\alpha y+\alpha z=x} \min(\mu_A(y); \mu_B(z)) =$$

$$= \sup_{g+w=x} \min(\mu_A(\alpha^{-1}g); \mu_B(\alpha^{-1}w)) = \mu_{(\alpha\bullet A)\oplus(\alpha\bullet B)}(x).$$

Пусть теперь $\alpha = 0$. Тогда, как следует из равенств (8.13), $0 \bullet (A \oplus B) = O$, $0 \bullet A = O$, $0 \bullet B = O$. Стало быть, согласно свойству I, 3, $O \oplus O = O$.

Замечание 8.1. Проверенные свойства операций сложения нечетких множеств и умножения их на действительные числа показывают, что выполнены все, кроме двух аксиом линейного пространства. Покажем, что оставшиеся две аксиомы не выполняются.

Рассмотрим пустое $\varnothing$ нечеткое множество универсального множества X с функцией принадлежности $\mu_\varnothing(x) = 0$ для всех $x \in X$. Тогда, как следует из (8.7), $A \oplus \varnothing = \varnothing$ для любого нечеткого множества A универсального множества X. Предположим, что выполнена аксиома существования обратного элемента, то есть для любого нечеткого множества A существует нечеткое множество $(-A)$ такое, что $A \oplus (-A) = O$. Однако, $\varnothing \oplus (-\varnothing) = \varnothing$ и $\varnothing \neq O$.

Покажем теперь, что не всегда выполняется равенство

$$(\alpha + \beta)\bullet A = (\alpha\bullet A) \oplus (\beta\bullet A). \tag{8.14}$$

В самом деле, пусть $X = R$. Рассмотрим нечеткое множество $A = \{(0\,|\,1); (2\,|\,1)\}$. Тогда из первой формулы (8.10) получим

$$A \oplus A = \{(0\,|\,1); (2\,|\,1); (4\,|\,1)\}.$$

С другой стороны, из второй формулы (8.10) следует, что $2\bullet A = \{(0\,|\,1); (4\,|\,1)\}$. Стало быть, нечеткие множества $A \oplus A$ и $2\bullet A$ не совпадают

Установим связь введенных операций с операциями объединения и пересечения нечетких множеств.

Теорема 8.3. Для любого семейства нечетких множеств A_β и любого нечеткого множества B того же самого универсального множества X выполнено:

$$(\vee_\beta A_\beta) \oplus B = \vee_\beta(A_\beta \oplus B), \tag{8.15}$$

$$(\wedge_\beta A_\beta) \oplus B \angle \wedge_\beta(A_\beta \oplus B), \tag{8.16}$$

$$\lambda \bullet (\vee_\beta A_\beta) = \vee_\beta(\lambda \bullet A_\beta),\ \lambda \bullet (\wedge_\beta A_\beta) = \wedge_\beta(\lambda \bullet A_\beta)$$

$$\text{для любого } \lambda \in R. \tag{8.17}$$

Доказательство. Обозначим через $\mu_\beta(x)$ функцию принадлежности нечеткого множества A_β. Тогда функция принадлежности множества, стоящего в левой части доказываемого равенства (8.15), равна

$$\mu(x) = \sup_{y+z=x} \min(\sup_\beta \mu_\beta(y);\ \mu_B(z)).$$

Применяя утверждение 3.1, получим

$$\mu(x) = \sup_{y+z=x} \sup_\beta \min(\mu_\beta(y);\ \mu_B(z)) = \sup_\beta \sup_{y+z=x} \min(\mu_\beta(y);\ \mu_B(z)).$$

Последнее выражение задает функцию принадлежности нечеткого множества, стоящего в правой части доказываемого равенства (8.15).

Функция принадлежности нечеткого множества, стоящего в левой части (8.16), равна

$$\mu(x) = \sup_{y+z=x} \min(\inf_\beta \mu_\beta(y);\ \mu_B(z)) = \sup_{y+z=x} \inf_\beta \min(\mu_\beta(y);\ \mu_B(z)) \le$$

$$\le \inf_\beta \sup_{y+z=x} \min(\mu_\beta(y);\ \mu_B(z)).$$

Последнее выражение задает функцию принадлежности нечеткого множества, стоящего в правой части доказываемого включения (8.16).

Доказательство равенств (8.17) непосредственно следует из формулы (8.8).

Приведем пример, который показывает, что равенства в (8.16), вообще говоря, быть не может.

Пример 8.3. Пусть $X = R$, а нечеткие множества A_1, A_2 и B имеют следующий вид: $A_1 = ((-\infty, 3] \mid 1)$, A_2 $((3, +\infty) \mid 1)$ и $B = ((-\infty, +\infty) \mid 0{,}5)$. Из первой формулы (8.10) получим, что $A_1 \oplus B = B$ и $A_2 \oplus B = B$. Следовательно, $(A_1 \oplus B) \wedge (A_2 \oplus B) = B$. С другой стороны, $A_1 \wedge A_2 = \varnothing$. Поэтому, $(A_1 \wedge A_2) \oplus B = \varnothing$.

Следствие 8.3. Для любых семейств нечетких множеств A_β и B_γ одного и того же универсального множества X выполнено

$$(\mathrm{V}_\beta A_\beta) \oplus (\mathrm{V}_\gamma B_\gamma) = \mathrm{V}_\beta \mathrm{V}_\gamma (A_\beta \oplus B_\gamma). \tag{8.18}$$

Доказательство. Имеем

$$(\mathrm{V}_\beta A_\beta) \oplus (\mathrm{V}_\gamma B_\gamma) = \mathrm{V}_\beta (A_\beta \oplus (\mathrm{V}_\gamma B_\gamma)) = \mathrm{V}_\beta ((\mathrm{V}_\gamma B_\gamma) \oplus A_\beta) =$$

$$= \mathrm{V}_\beta (\mathrm{V}_\gamma (B_\gamma \oplus A_\beta)) = \mathrm{V}_\beta \mathrm{V}_\gamma (A_\beta \oplus B_\gamma).$$

Пример 8.4. При экспертной оценке дохода фирмы за текущий месяц в у. е. было получено нечеткое множество $A = \{(230 \mid 0{,}4);$

$(240 \mid 0{,}6)$; $(250 \mid 0{,}8)\}$. Экспертный прогноз прироста дохода на следующий месяц дал нечеткое множество $B = \{(-10 \mid 0{,}3);\ (10 \mid 0{,}5)\}$. Требуется вычислить прогнозируемый доход фирмы за следующий месяц.

Решение. Нужно вычислить нечеткое множество $A \oplus B$. Имеем

$$A = A_1 \vee A_2 \vee A_3, \quad B = B_1 \vee B_2,$$

где $A_1 = (230 \mid 0{,}4)$, $A_2 = (240 \mid 0{,}6)$, $A_3 = (250 \mid 0{,}8)$, $B_1 = (-10 \mid 0{,}3)$, $B_2 = (10 \mid 0{,}5)$.

Далее,

$A_1 \oplus B_1 = ((230 - 10) \mid \min(0{,}4;\ 0{,}3)) = (220 \mid 0{,}3)$, $A_1 \oplus B_2 = (240 \mid 0{,}4)$, $A_2 \oplus B_1 = (230 \mid 0{,}3)$, $A_2 \oplus B_2 = (250 \mid 0{,}5)$, $A_3 \oplus B_1 = (240 \mid 0{,}3)$, $A_3 \oplus B_2 = (260 \mid 0{,}5)$.

Таким образом, применяя формулу (8.18), получим

$$A \oplus B = (A_1 \oplus B_1) \vee (A_1 \oplus B_2) \vee (A_2 \oplus B_1) \vee (A_2 \oplus B_2) \vee (A_3 \oplus B_1) \vee$$
$$\vee (A_3 \oplus B_2) = (220 \mid 0{,}3) \vee (240 \mid 0{,}4) \vee (230 \mid 0{,}3) \vee (250 \mid 0{,}5) \vee$$
$$\vee (240 \mid 0{,}3) \vee (260 \mid 0{,}5) = (220 \mid 0{,}3) \vee (240 \mid \max(0{,}4;\ 0{,}3)) \vee (230 \mid 0{,}3) \vee$$
$$\vee (250 \mid 0{,}5) \vee (260 \mid 0{,}5) = \{(220 \mid 0{,}3);\ (230 \mid 0{,}3);\ (240 \mid 0{,}4);$$
$$(250 \mid 0{,}5);\ (260 \mid 0{,}5)\}.$$

Следовательно, рекомендуется исходить из того, что доход фирмы за следующий месяц будет 250 или 260 у. е.

Теорема 8.4. Для любых нечетких множеств A и B выполнены равенства

$$\mathrm{hgt}\,(A \oplus B) = \min(\mathrm{hgt}\,A;\ \mathrm{hgt}\,B), \tag{8.19}$$

$$\mathrm{hgt}\,(0 \bullet A) = 1, \quad \mathrm{hgt}\,(\lambda \bullet A) = \mathrm{hgt}\,A \text{ при } \lambda \neq 0. \tag{8.20}$$

Доказательство. Имеем

$$\mathrm{hgt}\,(A \oplus B) = \sup_{x \in X} \sup_{y+z=x} \min(\mu_A(y);\ \mu_B(z)) = \sup_{z \in X} \sup_{y \in X} \min(\mu_A(y);\ \mu_B(z)).$$

Отсюда, применяя утверждение 3.1, получим

$$\mathrm{hgt}\,(A \oplus B) = \sup_{z \in X} \min(\sup_{y \in X} \mu_A(y);\ \mu_B(z)) = \sup_{z \in X} \min(\mathrm{hgt}\,A;\ \mu_B(z)) =$$
$$= \min(\mathrm{hgt}\,A;\ \mathrm{hgt}\,B).$$

Доказательство равенств (8.20) непосредственно следует из формул (8.8).

Рассмотрим случай, когда универсальное множество X является прямой суммой $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ линейных пространств X_i. В этом случае каждая точка $x \in X$ единственным образом представляется в виде $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $x_i \in X_i$, $i = \overline{1, n}$. Заданы нечеткие множества A_i и B_i

универсального множества X_i, $i = \overline{1,n}$. Их прямые произведения $A = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ и $B = B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_n$ являются нечеткими множествами универсального множества X.

Теорема 8.5. Верно равенство

$$(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n) \oplus (B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_n) = \\ = (A_1 \oplus B_1) \times \ldots \times (A_n \oplus B_n). \qquad (8.21)$$

Доказательство. Значения функций принадлежности нечетких множеств A и B в каждой точке $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ определяются формулой (5.20)

$$\mu_A(x) = \min_{1 \le i \le n} \mu_A^{(i)}(x_i), \quad \mu_B(x) = \min_{1 \le i \le n} \mu_B^{(i)}(x_i).$$

Здесь $\mu_A^{(i)} : X_i \to [0, 1]$ и $\mu_B^{(i)} : X_i \to [0, 1]$ функции принадлежности нечетких множеств A_i и B_i соответственно. Далее,

$$\mu_{A\oplus B}(x) = \sup_{y+z=x} \min\left(\min_{1 \le i \le n} \mu_A^{(i)}(y_i), \min_{1 \le i \le n} \mu_B^{(i)}(z_i)\right) =$$

$$= \sup_{y+z=x} \min_{1 \le i \le n} \min\left(\mu_A^{(i)}(y_i), \mu_B^{(i)}(z_i)\right) =$$

$$= \sup_{y_n+z_n=x_n} \ldots \sup_{y_1+z_1=x_1} \min(\min(\mu_A^{(1)}(y_1), \mu_B^{(1)}(z_1)); \min_{2 \le i \le n} \min(\mu_A^{(i)}(y_i), \mu_B^{(i)}(z_i))).$$

Отсюда и из утверждения 3.1 следует:

$$\mu_{A\oplus B}(x) =$$

$$= \sup_{y_n+z_n=x_n} \sup_{y_2+z_2=x_2} \min(\sup_{y_1+z_1=x_1} \min(\mu_A^{(1)}(y_1), \mu_B^{(1)}(z_1)); \min_{2 \le i \le n} \min(\mu_A^{(i)}(y_i), \mu_B^{(i)}(z_i)).$$

Продолжая эту процедуру дальше, получим

$$\mu_{A\oplus B}(x) = \min_{1 \le i \le n} \left(\sup_{y_i+z_i=x_i} \min(\mu_A^{(i)}(y_i), \mu_B^{(i)}(z_i))\right).$$

В правой части этого равенства стоит функция принадлежности нечеткого множества $(A_1 \oplus B_1) \times \ldots \times (A_n \oplus B_n)$.

Найдем условия на нечеткое множество А, при которых выполняется равенство

$$(\lambda \bullet A) \oplus ((1-\lambda) \bullet A) = A \text{ для любого } \lambda \in [0, 1]. \qquad (8.22)$$

Отметим, что в линейных пространствах равенство $(\lambda A) + ((1-\lambda) A) = A$ для любого числа $\lambda \in [0, 1]$ выполнено для выпуклых множеств.

Поскольку $(0 \bullet A) \oplus (1 \bullet A) = O \oplus A = A$, то равенство (8.22) выполнено при $\lambda = 0$ и $\lambda = 1$. Пусть $0 < \lambda < 1$. Тогда

$$\mu_{((\lambda\bullet A)\oplus((1-\lambda)\bullet A))}(x) = \sup_{y+z=x} \min(\mu_{\lambda\bullet A}(y); \mu_{(1-\lambda)\bullet A}(z)) = \sup_{y+z=x} \min(\mu_A(\lambda^{-1}y);$$

$$\mu_A((1-\lambda)^{-1}z))) = \sup_{\lambda u+(1-\lambda)v=x} \min(\mu_A(u); \mu_A(v)). \qquad (8.23)$$

Теорема 8.6. Для того чтобы при любом $\lambda \in (0,1)$ выполнялось равенство (8.22), необходимо и достаточно, чтобы

$$\mu_A(\lambda u + (1-\lambda)v) \geq \min(\mu_A(u);\ \mu_A(v)) \quad \text{для любых } u, v \in X. \tag{8.24}$$

Доказательство. Пусть выполнено равенство (8.22). Тогда из формулы (8.23) следует, что для любых точек x, u, v из множества X, таких что $x = \lambda u + (1-\lambda)v$, выполнено неравенство $\mu_A(x) \geq \min(\mu_A(u);\ \mu_A(v))$. Отсюда получим доказываемое неравенство (8.24). Далее, если выполнено неравенство (8.24), то

$$\mu_A(x) \geq \sup_{\lambda u + (1-\lambda)v = x} \min(\mu_A(u);\ \mu_A(v)) = \mu_{((\lambda\bullet A)\oplus((1-\lambda)\bullet A))}(x).$$

С другой стороны,

$$\mu_{((\lambda\bullet A)\oplus((1-\lambda)\bullet A))}(x) = \sup_{\lambda u + (1-\lambda)v = x} \min(\mu_A(u);\ \mu_A(v)) \geq \min(\mu_A(x);\ \mu_A(x)) = \mu_A(x).$$

Определение 8.3. Нечеткое множество A универсального множества X называется *выпуклым*, если оно удовлетворяет равенству (8.22).

Пример 8.5. Нечеткое множество $A = (\boldsymbol{A}|\ q)$ при выпуклом множестве $\boldsymbol{A} \subset X$, является выпуклым. В самом деле, если $u \notin \boldsymbol{A}$ или $v \notin \boldsymbol{A}$, то правая часть в неравенстве (8.24) равна нулю и, следовательно, не превосходит левой части. Если $u \in \boldsymbol{A}$ и $v \in \boldsymbol{A}$, то $\lambda u + (1-\lambda)v \in \boldsymbol{A}$. В этом случае правая и левая части в (8.24) равны q.

Теорема 8.7. Для того чтобы нечеткое множество A универсального множества X было выпуклым, необходимо и достаточно чтобы все его множества уровня $A(\alpha) \subset X$ являлись выпуклыми множествами.

Доказательство. Пусть нечеткое множество A является выпуклым. Пусть точки u и v принадлежат множеству $A(\alpha)$. Это значит, что $\mu_A(u) \geq \alpha$ и $\mu_A(v) \geq \alpha$. Отсюда и из (8.24) следует, что $\mu_A(\lambda u + (1 - \lambda)v) \geq \alpha$. Стало быть, $\lambda u + (1-\lambda)v \in A(\alpha)$. Значит, множество уровня $A(\alpha)$ является выпуклым.

Пусть все множества уровня $A(\alpha)$ являются выпуклыми. Возьмем точки u и v из множества X. Обозначим $\alpha = \min(\mu_A(u);\ \mu_A(v))$. Тогда точки u и v принадлежат множеству $A(\alpha)$. Отсюда и из выпуклости множества уровня следует, что $\lambda u + (1-\lambda)v \in A(\alpha)$. Стало быть,

$$\mu_A(\lambda u + (1-\lambda)v) \geq \alpha = \min(\mu_A(u);\ \mu_A(v)).$$

Следовательно, нечеткое множество A является выпуклым.

Теорема 8.8. Если A и B — выпуклые нечеткие множества универсального множества X, а a — число, то выпуклыми являются множества $A \oplus B$ и $a \bullet A$.

Доказательство. Нужно показать, что для любых точек u и v из множества X выполнено неравенство

$$\mu_{A\oplus B}(\lambda u + (1-\lambda)v) \geq \min(\mu_{A\oplus B}(u);\ \mu_{A\oplus B}(v)). \qquad (8.25)$$

Из формулы (8.7) следует, что

$$\mu_{A\oplus B}(\lambda u + (1-\lambda)v) \geq \min(\mu_A(y);\ \mu_B(z))$$

для любых точек y и z из множества X, таких, что $y + z = \lambda u + (1-\lambda)v$. Отсюда получим, что для любых точек y_1, y_2, z_1, z_2 из множества X, таких, что $y_1+z_1 = u$, $y_2 + z_2 = v$, будет выполнено неравенство

$$\mu_{A\oplus B}(\lambda u + (1-\lambda)v) \geq \min(\mu_A(\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2);\ \ \mu_B(\lambda z_1 + (1-\lambda)z_2)).$$

Применяя к этому неравенству условие выпуклости (8.24) для нечетких множеств A и B, получим

$$\mu_{A\oplus B}(\lambda u + (1-\lambda)v) \geq \min(\min(\mu_A(y_1);\ \mu_A(y_2));\ \ \min(\mu_B(z_1);\ \mu_B(z_2))) =$$
$$= \min(\min(\mu_A(y_1);\ \mu_B(z_1));\ \min(\mu_A(y_2);\ \mu_B(z_2))).$$

Отсюда и из произвольности точек $y_1 + z_1 = u$, $y_2 + z_2 = v$ следует, что

$$\mu_{A\oplus B}(\lambda u + (1-\lambda)v) \geq \min\Big(\sup_{y_1+z_1=u} \min(\mu_A(y_1);\ \mu_B(z_1));\ \sup_{y_2+z_2=v} \min(\mu_A(y_2));\ \mu_B(z_2))\Big).$$

Применяя к правой части этого выражения формулу (8.7), получим требуемое неравенство (8.25).

Выпуклость нечеткого множества $a \bullet A$ достаточно проверить при $a \neq 0$. Имеем

$$\mu_{a\bullet A}(\lambda u + (1-\lambda)v) = \mu_A(\lambda a^{-1}u + (1-\lambda)a^{-1}v) \geq \min(\mu_A(a^{-1}u);\ \mu_A(a^{-1}v)) =$$
$$= \min(\mu_{a\bullet A}(u);\ \mu_{a\bullet A}(v)).$$

Пусть X и Y — вещественные линейные пространства, а f: $X \to Y$ — *линейное отображение*. Обозначим через $F(X)$ и $F(Y)$ совокупности нечетких множеств универсальных множеств X и Y. Тогда с помощью принципа обобщения Заде можем определить отображение $f_\blacklozenge$: $F(X) \to F(Y)$.

Теорема 8.9. Для любого линейного отображения f: $X \to Y$ отображение $f_\blacklozenge$ является линейным относительно операций умножения $\bullet$ и сложения $\oplus$ нечетких множеств, то есть

$$f_\blacklozenge(A \oplus B) = f_\blacklozenge(A) \oplus f_\blacklozenge(B);\quad f_\blacklozenge(\lambda \bullet A) = \lambda \bullet f_\blacklozenge(A). \qquad (8.26)$$

Доказательство. Из формул (8.7) и (6.11) следует, что функция принадлежности образа $f_\blacklozenge(A \oplus B)$ нечеткого множества $A \oplus B$ равна

$$\mu_{f\blacklozenge(A\oplus B)}(y)=\begin{cases}0 & \textit{при} \quad y\notin f(X),\\ \sup\limits_{x\in f^{-1}(y)}\mu_{A\oplus B}(x) & \textit{при} \quad y\in f(X)\end{cases} =$$

$$=\begin{cases}0 & \textit{при} \quad y\notin f(X),\\ \sup\limits_{x\in f^{-1}(y)}\sup\limits_{u+v=x}\min(\mu_A(u);\,\mu_B(v)) & \textit{при}\ y\in f(X)\end{cases} =$$

$$=\begin{cases}0 & \textit{при} \quad y\notin f(X),\\ \sup\limits_{f(u+v)=y}\min(\mu_A(u);\,\mu_B(v)) & \textit{при}\ y\in f(X)\end{cases} =$$

$$=\begin{cases}0 & \textit{при}\ y\notin f(X),\\ \sup\limits_{f(u)+f(v)=y}\min(\mu_A(u);\,\mu_B(v)) & \textit{при}\ y\in f(X)\end{cases} =$$

$$=\sup_{f(u)+f(v)=y}\min\left(\begin{cases}0 & \textit{при}\ y\notin f(X),\\ \mu_A(u) & \textit{при}\ y\in f(X)\end{cases}\ \begin{cases}0 & \textit{при}\ y\notin f(X),\\ \mu_B(v) & \textit{при}\ y\in f(X)\end{cases}\right).$$

Таким образом,

$$\mu_{f\blacklozenge(A\oplus B)}(y)=\sup_{f(u)+f(v)=y}\begin{cases}0 & \textit{при}\ y\notin f(X),\\ \min(\mu_A(u);\mu_B(v)) & \textit{при}\ y\in f(X).\end{cases}$$

Далее,

$$\mu_{f\blacklozenge(A)\oplus f\blacklozenge(B)}(y)=\sup_{\varphi+\zeta=y}\min(\mu_{f\blacklozenge(A)}(\varphi);\,\mu_{f\blacklozenge(B)}(\zeta))=$$

$$=\sup_{\varphi+\zeta=y}\min\left(\begin{cases}0 & \textit{при}\,\varphi\notin f(X),\\ \sup\limits_{u\in f^{-1}(\varphi)}\mu_A(u) & \textit{при}\ \varphi\in f(X)\end{cases}\ \begin{cases}0 & \textit{при}\ \zeta\notin f(X),\\ \sup\limits_{v\in f^{-1}(\zeta)}\mu_B(v) & \textit{при}\ \zeta\in f(X)\end{cases}\right)=$$

$$=\sup_{f(u)+f(v)=y}\begin{cases}0 & \textit{при}\ y\notin f(X),\\ \min(\mu_A(u);\mu_B(v)) & \textit{при}\ y\in f(X)\end{cases}=\mu_{f\blacklozenge(A\oplus B)}(y).$$

Докажем теперь второе равенство в (8.26). Пусть $\lambda\neq 0$. Тогда

$$\mu_{f\blacklozenge(\lambda\bullet A)}(y)=\begin{cases}0 & \textit{при}\ y\notin f(X),\\ \sup\limits_{x\in f^{-1}(y)}\mu_A\left(\dfrac{x}{\lambda}\right) & \textit{при}\ y\in f(X)\end{cases} =$$

$$=\begin{cases}0 & \textit{при}\ \dfrac{y}{\lambda}\notin f(X),\\ \sup\limits_{u\in f^{-1}\left(\frac{y}{\lambda}\right)}\mu_A(u) & \textit{при}\ \dfrac{y}{\lambda}\in f(X)\end{cases}=\mu_{f_*(A)}\left(\frac{y}{\lambda}\right)=\mu_{\lambda\bullet f\blacklozenge(A)}(y).$$

Пусть теперь $\lambda = 0$. Тогда $\mu_{0\bullet f\blacklozenge(A)}(y) = 0$ при $y \neq 0$ и $\mu_{0\bullet f\blacklozenge(A)}(0) = 1$. С другой стороны,

$$\mu_{f\blacklozenge(0\bullet A)}(y) = \begin{cases} 0 & \textit{при } y \notin f(X), \\ \sup\limits_{x \in f^{-1}(y)} \mu_{(0\bullet A)}(x) & \textit{при } y \in f(X) \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0 & \textit{при } y \notin f(X), \\ 0 & \textit{при } 0 \notin f^{-1}(y),\ y \notin f(X), \\ 1 & \textit{при } 0 \in f^{-1}(y),\ y \notin f(X). \end{cases}$$

Из линейности отображения f следует, что $0 \in f^{-1}(y)$ тогда и только тогда, когда $y = 0$. Поэтому $\mu_{0\bullet f\blacklozenge(A)}(y) = 0$ при $y \neq 0$ и $\mu_{0\bullet f\blacklozenge(A)}(0) = 1$. Таким образом, требуемое равенство $\mu_{0\bullet f\blacklozenge(A)}(y) = \mu_{f\blacklozenge(0\bullet A)}(y)$ доказано.

§ 9. Нечеткие числа с трапецеидальной функцией принадлежности

Нечеткие множества, универсальным множеством которых является множество действительных чисел R, называются *нечеткими числами*. Рассмотрим нечеткое число, функция принадлежности $\mu_A(x)$ которого имеет трапецеидальный вид (рис. 9.1).

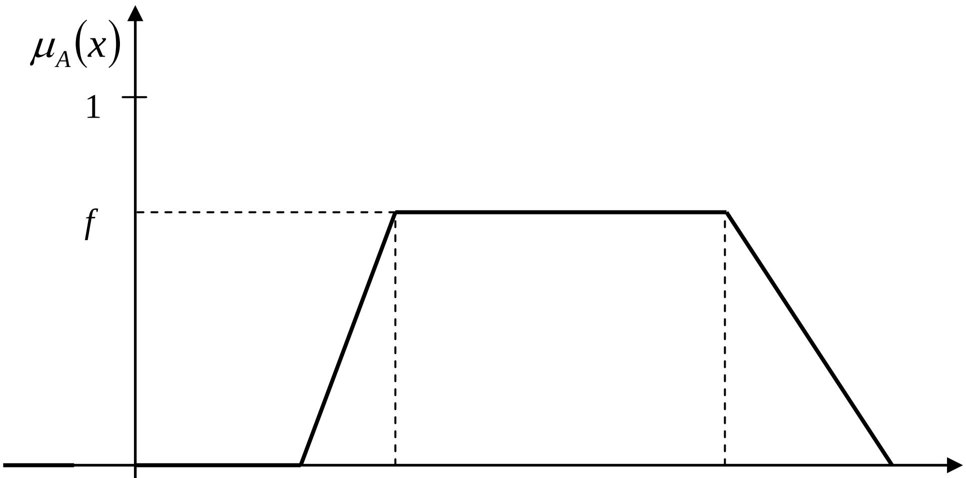

Рис. 9.1

Аналитически функции $\mu_A(x)$ и $\mu_{\bar{A}}(x)$ задаются формулами

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & при\, x \le a, \\ f\dfrac{x-a}{b-a} & при\, a \le x \le b, \\ f, & при\, b \le x \le c, \\ f\dfrac{e-x}{e-c} & при \quad c \le x \le e, \\ 0 & при\, x \ge e, \end{cases} \qquad \mu_{\overline{A}}(x) = \begin{cases} 1 & при\, x \le a, \\ 1-f\dfrac{x-a}{b-a} & при\, a \le x \le b, \\ 1-f, & при\, b \le x \le c, \\ 1-f\dfrac{e-x}{e-c} & при\, c \le x \le e, \\ 1 & при\, x \ge e. \end{cases} \quad (9.1)$$

Здесь $a \le b \le c \le e$, $0 \le f \le 1$ являются заданными числами. Эти функции легко реализуются на компьютере.

График функции $\mu_{\overline{A}}(x)$ изображен на рис. 9.2. Графики функций принадлежности нечетких множеств A и $\overline{A}$ при разных значениях числа f изображены на рис. 9.3 (в случае, когда $0{,}5 < f \le 1$), рис. 9.4 (если $f < 0{,}5$) и на рис. 9.5 (в случае $f = 0{,}5$).

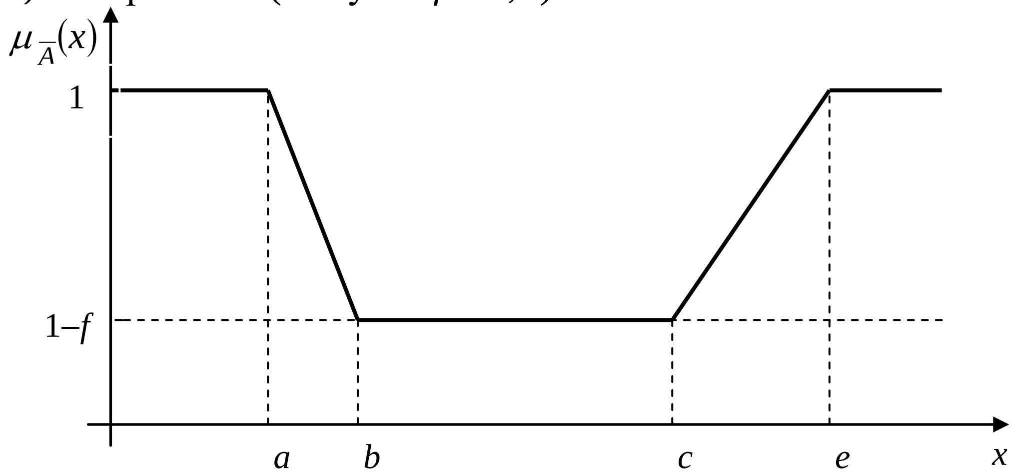

Рис. 9.2

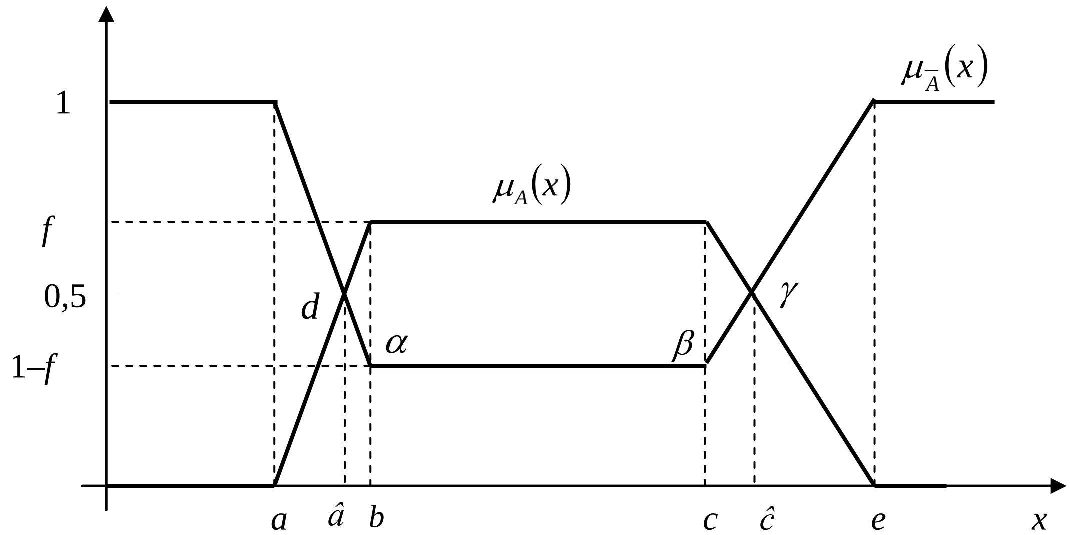

Рис. 9.3

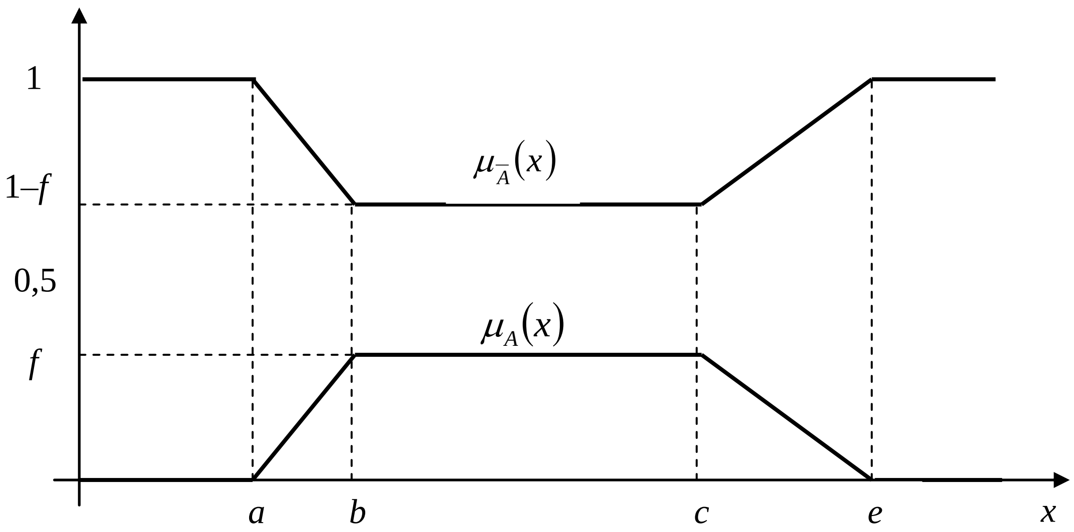

Рис. 9.4

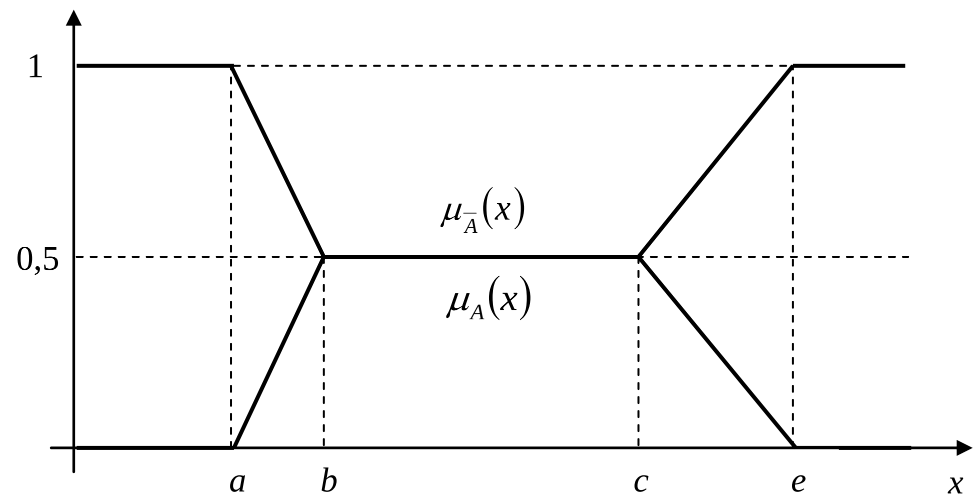

Рис. 9.5

Вычислим линейный индекс нечеткости:

$$d_1(A) = \frac{2}{e-a}\int_a^e q(x)\,dx,\ q(x) = \min\left(\mu_A(x); \mu_{\bar{A}}(x)\right). \qquad (9.2)$$

Рассмотрим случай, когда $0{,}5 < f \le 1$. Тогда из рис. 9.3 видно, что график функции $q(x)$ при $a \le x \le e$ задается ломаной $ad\alpha\beta\gamma e$. Интеграл в формуле (9.3) равен площади фигуры, образованной этой ломаной. Вычислим значения чисел $\hat{a}$ и $\hat{c}$ (см. рис. 9.3). Имеем

$$f\,\frac{x-a}{b-a} = 1 - f\,\frac{x-a}{b-a} \Rightarrow \hat{a} = a + \frac{b-a}{2f};\quad |\hat{a}d| = f\,\frac{\hat{a}-a}{b-a} = 0{,}5;$$

$$f\,\frac{e-x}{e-c} = 1 - f\,\frac{e-x}{e-c} \Rightarrow \hat{c} = e - \frac{e-c}{2f};\quad |\hat{c}\gamma| = f\,\frac{e-\hat{c}}{e-c} = 0{,}5.$$

Следовательно, площадь S многоугольника $ad\alpha\beta\gamma e$ равна

$$S = 0{,}5\ (\hat{a} - a)|\hat{a}d| + 0{,}5(1 - f + |\hat{a}d|)(b - \hat{a}) + 0{,}5(e - \hat{c})|\hat{c}\gamma| +$$
$$+ 0{,}5(1 - f + |\hat{c}\gamma|)(\hat{c} - c) + (1 - f)(c - b) =$$
$$= (b - a + e - c)\frac{1}{8f}(1 + (3 - 2f)(2f - 1)) + (1 - f)(c - b) =$$
$$= (b - a + e - c)\frac{1}{2f}(0{,}5 - (1 - f)^2) + (1 - f)(c - b).$$

Стало быть,

$$d_1(A) = \frac{2}{e-a}S = (1 - \varepsilon)\frac{1}{f}(0{,}5 - (1 - f)^2) + (1 - f)\varepsilon; \quad \varepsilon = \frac{c-b}{e-a}. \quad (9.3)$$

Пусть, например, $f = 1$. Тогда линейный индекс нечеткости равен

$$d_1(A) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{c-b}{e-a}\right). \quad (9.4)$$

В случае, когда функция принадлежности имеет треугольный вид, числа c и b равны и, следовательно, $\varepsilon = 0$. В этом случае линейный индекс нечеткости равен

$$d_1(A) = \frac{1}{f}(0{,}5 - (1 - f)^2). \quad (9.5)$$

При $f = 1$ получим $d_1(A) = 0{,}5$.

Таким образом, линейный индекс нечеткости любого нечеткого числа A с треугольной функцией принадлежности, у которой $\mathrm{hgt}\ A = 1$, равен 0,5.

Как видно из рис. 9.6, при $0 < \alpha \le f \le 1$, множество уровня нечеткого числа с трапецеидальной функцией принадлежности равно

$$A(\alpha) = [g(\alpha), G(\alpha)],\ g(\alpha) = \alpha\frac{b-a}{f} + a, \quad G(\alpha) = e - \alpha\frac{e-c}{f}. \quad (9.6)$$

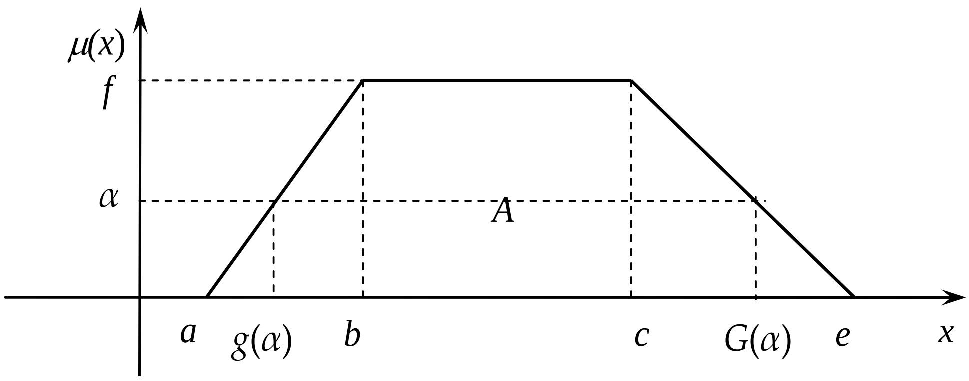

Рис. 9.6

Вычислим сумму $A_1 \oplus A_2$ двух трапецеидальных нечетких чисел A_i. Их функции принадлежности определяются параметрами $(a_i, b_i, c_i, e_i, f_i)$, $i = 1{,}2$.

Обозначим через $f = \min(f_1; f_2)$. Тогда $A_1(\alpha) + A_2(\alpha) = \varnothing$ при $f < \alpha$ и, если $\alpha \in [0, f]$, то $A_1(\alpha) + A_2(\alpha) = [g_1(\alpha), G_1(\alpha)] + [g_2(\alpha), G_2(\alpha)]$.

Покажем, что

$$[g_1(\alpha), G_1(\alpha)] + [g_2(\alpha), G_2(\alpha)] = [g_1(\alpha) + g_2(\alpha), G_1(\alpha) + G_2(\alpha)]. \quad (9.8)$$

В самом деле, возьмем числа $z_i \in [g_i, G_i]$, $i = 1,2$. Тогда $g_i \le z_i \le G_i$. Складывая эти два неравенства, получим $g_1 + g_2 \le z_1 + z_2 \le G_1 + G_2$. Стало быть, $z_1 + z_2 \in [g_1 + g_2, G_1 + G_2]$.

Пусть число $z \in [g_1 + g_2, G_1 + G_2]$. Пусть также $z \le g_2 + G_1$. Тогда число $w = z - g_2$ принадлежит отрезку $[g_1, G_1]$. Поэтому $z = g_2 + w \in [g_1, G_1] + [g_2, G_2]$. Пусть число $z > g_2 + G_1$. Тогда $u = z - G_1 \in [g_2, G_2]$. Поэтому $z = G_1 + u \in [g_1, G_1] + [g_2, G_2]$.

Из доказанного равенства (9.8) следует:

$$A_1(\alpha) + A_2(\alpha) = [g(\alpha), G(\alpha)] \text{ при } 0 < \alpha \le f. \quad (9.7)$$

Здесь функции $g(\alpha)$ и $G(\alpha)$ задаются формулами (9.6), в которых

$$a = a_1 + a_2, \quad b = a_1 + a_2 + \min(f_1; f_2)\left(\frac{b_1 - a_1}{f_1} + \frac{b_2 - a_2}{f_2}\right), \quad e = e_1 + e_2, \quad (9.8)$$

$$c = e_1 + e_2 - \min(f_1; f_2)\left(\frac{e_1 - c_1}{f_1} + \frac{e_2 - c_2}{f_2}\right), \quad f = \min(f_1; f_2). \quad (9.9)$$

Поскольку при $0 \le \alpha \le f$ множества $A_i(\alpha)$ являются отрезками, то выполнены условия теоремы 8.1. Поэтому, согласно следствию 8.1, верно равенство $(A_1 \oplus A_2)(\alpha) = A_1(\alpha) + A_2(\alpha)$.

Таким образом, сумма $A_1 \oplus A_2$ двух нечетких трапецеидальных чисел A_1 и A_2 является трапецеидальным числом, параметры которого задаются формулами (9.8) и (9.9).

Возьмем любое действительное число λ и произвольное трапецеидальное нечеткое число A. Рассмотрим нечеткое число $A_* = \lambda \bullet A$. Согласно теореме 8.1, $\mu_{0\bullet A}(x) = 0$, если $x \ne 0$; $\mu_{0\bullet A}(0) = 1$; $\mu_{\lambda\bullet A}(x) = \mu_A(\lambda^{-1}x)$, если $\lambda \ne 0$. Стало быть, $A_* = \lambda \bullet A$ является трапецеидальным числом, параметры функции принадлежности которого задаются формулами:

$$\text{если } \lambda = 0, \text{ то } a_* = 0,\ b_* = 0,\ c_* = 0,\ e_* = 0,\ f_* = 1;$$
$$\text{если } \lambda > 0, \text{ то } a_* = \lambda a,\ b_* = \lambda b,\ c_* = \lambda c,\ e_* = \lambda e,\ f_* = f;$$
$$\text{если } \lambda < 0, \text{ то } a_* = \lambda e,\ b_* = \lambda c,\ c_* = \lambda b,\ e_* = \lambda a,\ f_* = f. \quad (9.10)$$

Трапецеидальное нечеткое число A задается пятью числами a, b, c, e, f, удовлетворяющими неравенствам

$$a \le b \le c \le e, \quad 0 \le f \le 1. \quad (9.11)$$

С помощью формул (9.8) — (9.10) задаем операции сложения и умножения на число

$$(a_1, b_1, c_1, e_1, f_1) \oplus (a_2, b_2, c_2, e_2, f_2) = (a, b, c, e, f), \quad \lambda \bullet (a, b, c, e, f) = = (a_*, b_*, c_*, e_*, f_*). \qquad (9.12)$$

В случае, если $f_1 = f_2 = f$, формулы (9.8) и (9.9) принимают следующий вид:

$$a = a_1 + a_2, \quad b = b_1 + b_2, \quad c = c_1 + c_2, \quad e = e_1 + e_2, \quad f = \min(f; f). \quad (9.13)$$

Рассмотрим нечеткое число с треугольной функцией принадлежности.

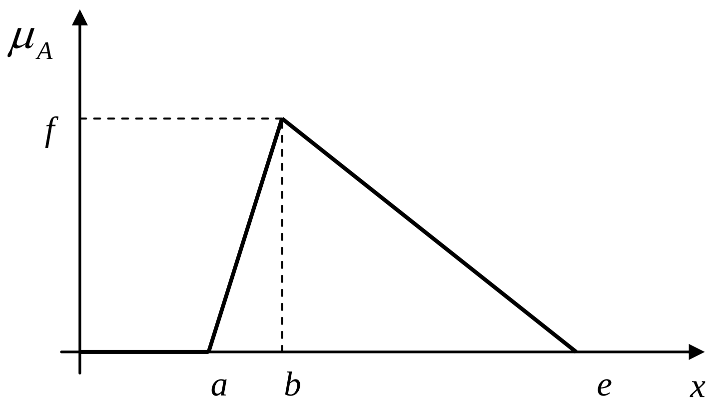

Рис. 9.7

График функции принадлежности треугольного нечеткого числа изображен на рис. 9.7. Аналитическая запись этой функции получается из формулы (9.1), если положить в ней $b = c$. Из формул (9.8) и (9.9) следует, что при сложении двух треугольных нечетких чисел $(a_1, b_1, e_1, f_1) \oplus (a_2, b_2, e_2, f_2) = (a, b, c, e, f)$ получим трапецеидальное нечеткое число

$$a = a_1 + a_2, \quad b = a_1 + a_2 + \min(f_1; f_2)\left(\frac{b_1 - a_1}{f_1} + \frac{b_2 - a_2}{f_2}\right), \quad e = e_1 + e_2, \quad (9.14)$$

$$c = e_1 + e_2 - \min(f_1; f_2)\left(\frac{e_1 - b_1}{f_1} + \frac{e_2 - b_2}{f_2}\right), \quad f = \min(f_1; f_2). \qquad (9.15)$$

Согласно формулам (9.10) при умножении треугольного нечеткого числа на любое действительное число λ получается треугольное нечеткое число.

В случае, если $f_1 = f_2 = f$, формулы (9.14) и (9.15) принимают следующий вид:

$$a = a_1 + a_2, \quad b = b_1 + b_2 = c, \quad e = e_1 + e_2, \quad f = \min(f; f). \qquad (9.16)$$

Стало быть, результатом сложения двух треугольных нечетких чисел с равными высотами является треугольное нечеткое число.

Рассмотрим вопрос о сравнении двух трапецеидальных нечетких чисел.

Вначале рассмотрим задачу сравнения двух отрезков $[g_i; G_i]$, i =1,2.

С этой целью возьмем на плоскости $(z_1; z_2)$ множества

$$S_1 = \{(z_1; z_2): z_1 \in [g_1; G_1], z_2 \in [g_2; G_2], z_1 \geq z_2\};$$

$$S_2 = \{(z_1; z_2): z_1 \in [g_1; G_1], z_2 \in [g_2; G_2], z_1 \leq z_2\}.$$

На рис. 9.8 множество S_1 является многоугольником $KNCDA$, а множество S_2 — треугольником KBN.

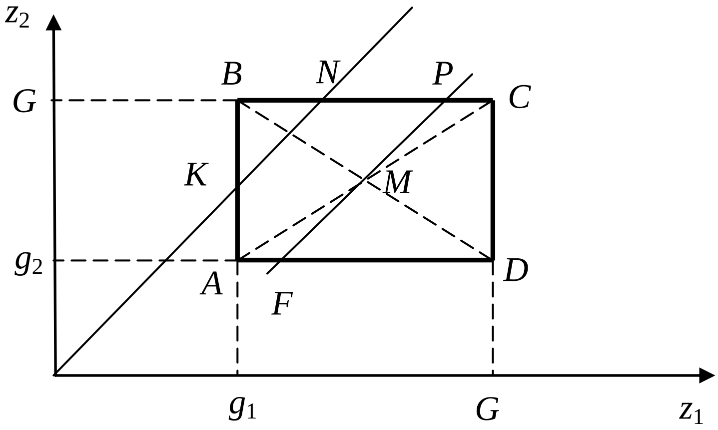

Рис. 9.8

Определение 9.1. Будем говорить, что отрезок $[g_1; G_1]$ *не хуже* отрезка $[g_2; G_2]$, если площадь множества S_1 не меньше площади множества S_2.

Этим определением мы формализуем тот факт, что число пар $(z_1; z_2)$ чисел $z_1 \in [g_1; G_1]$ и $z_2 \in [g_2; G_2]$, у которых $z_1 \geq z_2$, *больше*, чем число пар, у которых $z_1 \leq z_2$. Поэтому, отрезок $[g_1; G_1]$ предпочтительней отрезка $[g_2; G_2]$.

Утверждение 9.1. Площадь множества S_1 больше или равна площади множества S_2 тогда и только тогда, когда $g_1 + G_1 \geq g_2 + G_2$.

Доказательство. Как видно из рис. 9.8, площадь множества S_1 больше или равна площади множества S_2 тогда и только тогда, когда точка M с координатами $z_1 = 0{,}5(g_1 + G_1)$, $z_2 = 0{,}5(g_2 + G_2)$ лежит ниже прямой $z_1 = z_2$. На рис. 9.8 это прямая, которая проходит через начало координат и точку N. Далее, неравенство $g_1 + G_1 \geq g_2 + G_2$ выполнено тогда и только тогда, когда точка M лежит ниже прямой $z_1 = z_2$. Если точка M лежит ниже прямой $z_1 = z_2$, то параллельная ей прямая FP, проходящая через точку M, делит прямоугольник $ABCD$ на две части с одинаковыми площадями. В этом случае, как видно из рис. 9.8, площадь множества S_1 больше или равна площади множества S_2.

Изложим вначале предлагаемый подход к сравнению нечетких чисел более общего вида. Рассмотрим два нечетких числа A_i, у которых множества уровня $A_i(\alpha)$ являются отрезками $[g_i(\alpha),\ G_i(\alpha)]$, возможно и пустыми. Положим $g_i(\alpha) + G_i(\alpha) = -\infty$, если $A_i(\alpha) = \varnothing$. Обозначим

$$J_{ik} = \{\alpha \in (0, 1]: g_i(\alpha) + G_i(\alpha) \geq g_k(\alpha) + G_k(\alpha)\}. \qquad (9.17)$$

Задана функция p: $[0, 1] \to [0, 1]$. Она характеризует меру важности степени уровня $\alpha \in (0, 1]$ с точки зрения конкретной решаемой задачи.

Определение 9.2. Будем говорить, что нечеткое множество A_i *не хуже* нечеткого множества A_k, если

$$P_{ik} \geq P_{ki}, \text{ где } P_{ik} = \int\limits_{J_{ik}} p(\alpha)d\alpha \text{ при } J_{ik} \neq \varnothing \text{ и } P_{ik} = 0, \text{ если } J_{ik} = \varnothing. \qquad (9.18)$$

Возьмем два нечетких числа A_i с трапецеидальными функциями принадлежности. Будем считать, что их высоты hgt $A_i = 1$.

Обозначим

$$\varepsilon_{ik} = (b_i - b_k) + (c_i - c_k) - (a_i - a_k) - (e_i - e_k),\ \delta_{ik} = (a_i - a_k) + (e_i - e_k). \qquad (9.19)$$

Тогда, используя формулы (9.6), можем переписать неравенство, с помощью которого определено множество (9.17), в следующем виде:

$$h_{ik}(\alpha) = \delta_{ik} + \alpha\varepsilon_{ik} \geq 0. \qquad (9.20)$$

Отметим, что числа (9.19) удовлетворяют условиям $\varepsilon_{ki} = -\varepsilon_{ik}$, $\delta_{ki} = -\delta_{ik}$.

Случай 1. Если $\delta_{ik} = 0$ и $\varepsilon_{ik} = 0$, то $\delta_{ki} = 0$ и $\varepsilon_{ki} = 0$. Из формул (9.17) и (9.20) следует, что $J_{ik} = (0, 1]$ и $J_{ki} = (0, 1]$. Отсюда и из формулы (9.18) получим, что $P_{ik} = P_{ki} = P$. Здесь обозначен $P = \int\limits_0^1 p(\alpha)d\alpha$.

Случай 2. Пусть $\delta_{ik} = 0$ и $\varepsilon_{ik} < 0$. Тогда $J_{ik} = \varnothing$ и $J_{ki} = (0, 1]$; $P_{ik} = 0$, $P_{ki} = P$.

Случай 3. Пусть $\delta_{ik} = 0$ и $\varepsilon_{ik} > 0$. Тогда $J_{ik} = (0, 1]$ и $J_{ki} = \varnothing$; $P_{ik} = P$, $P_{ki} = 0$.

Случай 4. Если $\delta_{ik} > 0$ и $\delta_{ik} + \varepsilon_{ik} = 0$, то $J_{ik} = (0, 1]$, $J_{ki} = \varnothing$; $P_{ik} = P$, $P_{ki} = 0$.

Случай 5. Пусть $\delta_{ik} > 0$ и $\delta_{ik} + \varepsilon_{ik} < 0$. В этом случае неравенство (9.20) выполнено при $0 < \alpha \le \beta_{ik}$. Здесь обозначено $0 < \beta_{ik} = -\dfrac{\delta_{ik}}{\varepsilon_{ik}} < 1$. Стало быть,

$$J_{ik} = (0, \beta_{ik}], \quad J_{ki} = [\beta_{ik}, 1]; \quad P_{ik} = \int_0^{\beta_{ik}} p(\alpha)d\alpha, P_{ki} = \int_{\beta_{ik}}^1 p(\alpha)d\alpha.$$

Случай 6. Если $\delta_{ik} > 0$ и $\delta_{ik} + \varepsilon_{ik} > 0$, то $J_{ik} = (0, 1]$ и $J_{ki} = \varnothing$; $P_{ik} = P$ и $P_{ki} = 0$.

Случай 7. Если $\delta_{ik} < 0$ и $\delta_{ik} + \varepsilon_{ik} = 0$, то $J_{ik} = \varnothing$ и $J_{ki} = (0, 1]$; $P_{ik} = 0$ и $P_{ki} = P$.

Случай 8. Если $\delta_{ik} < 0$ и $\delta_{ik} + \varepsilon_{ik} < 0$, то $J_{ik} = \varnothing$ и $J_{ki} = (0, 1]$; $P_{ik} = 0$ и $P_{ki} = P$.

Случай 9. Пусть $\delta_{ik} < 0$, $\delta_{ik} + \varepsilon_{ik} > 0$. Неравенство (9.20) выполнено при любом $\beta_{ik} \le \alpha \le 1$. Стало быть, $J_{ik} = [\beta_{ik}, 1]$, $J_{ki} = (0, \beta_{ik}]$;

$$P_{ik} = \int_{\beta_{ik}}^1 p(\alpha)d\alpha, \; P_{ki} = \int_0^{\beta_{ik}} p(\alpha)d\alpha.$$

Результаты сравнения чисел P_{12} и P_{21} приведены в табл. 9.1.

Таблица 9.1

	$\delta_{12} < 0$	$\delta_{12} = 0$	$\delta_{12} > 0$
$\delta_{12} + \varepsilon_{12} < 0$	$P_{12} < P_{21}$	$P_{12} < P_{21}$	$P_{12} < P_{21} \Leftrightarrow$ $2\int_0^{-\frac{\delta_{12}}{\varepsilon_{12}}} p(\alpha)d\alpha <$ $< \int_0^1 p(\alpha)d\alpha$
$\delta_{12} + \varepsilon_{12} = 0$	$P_{12} < P_{21}$	$P_{12} = P_{21}$	$P_{12} > P_{21}$
$\delta_{12} + \varepsilon_{12} > 0$	$P_{12} > P_{21} \Leftrightarrow$ $2\int_0^{-\frac{\delta_{12}}{\varepsilon_{12}}} p(\alpha)d\alpha <$ $< \int_0^1 p(\alpha)d\alpha$	$P_{12} > P_{21}$	$P_{12} > P_{21}$

Возьмем функцию $p(\alpha) = m\alpha^{m-1}$, $m \ge 1$. В этом случае из табл. 9.1 получим табл. 9.2.

Таблица 9.2

	$\delta_{12} < 0$	$\delta_{12} = 0$	$\delta_{12} > 0$
$\delta_{12} + \varepsilon_{12} < 0$	$P_{12} < P_{21}$	$P_{12} < P_{21}$	$P_{12} < P_{21} \Leftrightarrow$ $2\left(-\frac{\delta_{12}}{\varepsilon_{12}}\right)^m < 1$
$\delta_{12} + \varepsilon_{12} = 0$	$P_{12} < P_{21}$	$P_{12} = P_{21}$	$P_{12} > P_{21}$
$\delta_{12} + \varepsilon_{12} > 0$	$P_{12} > P_{21} \Leftrightarrow$ $2\left(-\frac{\delta_{12}}{\varepsilon_{12}}\right)^m < 1$	$P_{12} > P_{21}$	$P_{12} > P_{21}$

Рассмотрим случай, когда степень $m = 1$. Тогда из табл. 9.2 получим табл. 9.3.

Таблица 9.3

	$\delta_{12} < 0$	$\delta_{12} = 0$	$\delta_{12} > 0$
$\delta_{12} + \varepsilon_{12} < 0$	$P_{12} < P_{21}$	$P_{12} < P_{21}$	$P_{12} < P_{21} \Leftrightarrow$ $2\delta_{12} + \varepsilon_{12} < 0$
$\delta_{12} + \varepsilon_{12} = 0$	$P_{12} < P_{21}$	$P_{12} = P_{21}$	$P_{12} > P_{21}$
$\delta_{12} + \varepsilon_{12} > 0$	$P_{12} > P_{21} \Leftrightarrow$ $2\delta_{12} + \varepsilon_{12} > 0$	$P_{12} > P_{21}$	$P_{12} > P_{21}$

Из формул (9.19) следует:

$$\delta_{12} + \varepsilon_{12} = (b_1 + c_1) - (b_2 + c_2), \quad \delta_{12} = (a_1 + e_1) - (a_2 + e_2),$$
$$2\delta_{12} + \varepsilon_{12} = (a_1 + b_1 + c_1 + e_1) - (a_2 + b_2 + c_2 + e_2).$$

С учетом этих формул табл. 9.3 примет следующий вид (табл. 9.4).

Таблица 9.4

	$a_1 + e_1 < a_2 + e_2$	$a_1 + e_1 = a_2 + e_2$	$a_1 + e_1 > a_2 + e_2$
$b_1 + c_1 < b_2 + c_2$	$P_{12} < P_{21}$	$P_{12} < P_{21}$	$P_{12} < P_{21} \Leftrightarrow a_1 +$ $+ b_1 + c_1 + e_1 <$ $< a_2 + b_2 + c_2 + e_2$
$b_1 + c_1 = b_2 + c_2$	$P_{12} < P_{21}$	$P_{12} = P_{21}$	$P_{12} > P_{21}$
$b_1 + c_1 > b_2 + c_2$	$P_{12} > P_{21} \Leftrightarrow$ $a_1 + b_1 + c_1 + e_1 >$ $> a_2 + b_2 + c_2 + e_2$	$P_{12} > P_{21}$	$P_{12} > P_{21}$

Рассмотрим предельный случай $m \to +\infty$. Поскольку в табл. 9.2 в соответствующих случаях число $\left(-\frac{\delta_{12}}{\varepsilon_{12}}\right) < 1$, то $\left(-\frac{\delta_{12}}{\varepsilon_{12}}\right)^m \to 0$. Таблица, составленная из предельных значений, имеет следующий вид:

Таблица 9.5

	$a_1 + e_1 < a_2 + e_2$	$a_1 + e_1 = a_2 + e_2$	$a_1 + e_1 > a_2 + e_2$
$b_1 + c_1 < b_2 + c_2$	$P_{12} < P_{21}$	$P_{12} < P_{21}$	$P_{12} < P_{21}$
$b_1 + c_1 = b_2 + c_2$	$P_{12} < P_{21}$	$P_{12} = P_{21}$	$P_{12} > P_{21}$
$b_1 + c_1 > b_2 + c_2$	$P_{12} > P_{21}$	$P_{12} > P_{21}$	$P_{12} > P_{21}$

Из табл. 9.5 видно, что вначале нужно провести сравнение нечетких множеств A_i по ядру core $A_i = [b_i, c_i]$. В случае равенства сравнение нужно провести по носителю supp $A_i = [a_i, e_i]$. Другими словами, нужно найти оптимальное в *лексикографическом смысле* решение двухкритериальной задачи

$$b_i + c_i \to \max, \quad a_i + e_i \to \max, \quad i = 1,2.$$

Рассмотрим нечеткие числа A_i с треугольной функцией принадлежности ($b = c$). Табл. 9.4 примет следующий вид:

Таблица 9.6

	$a_1 + e_1 < a_2 + e_2$	$a_1 + e_1 = a_2 + e_2$	$a_1 + e_1 > a_2 + e_2$
$b_1 < b_2$	$P_{12} < P_{21}$	$P_{12} < P_{21}$	$P_{12} < P_{21} \Leftrightarrow a_1 + 2b_1 + e_1 > a_2 + 2b_2 + e_2$
$b_1 = b_2$	$P_{12} < P_{21}$	$P_{12} = P_{21}$	$P_{12} > P_{21}$
$b_1 > b_2$	$P_{12} > P_{21} \Leftrightarrow a_1 + 2b_1 + e_1 > a_2 + 2b_2 + e_2$	$P_{12} > P_{21}$	$P_{12} > P_{21}$

Аналогично переписывается табл. 9.5:

Таблица 9.7

	$a_1 + e_1 < a_2 + e_2$	$a_1 + e_1 = a_2 + e_2$	$a_1 + e_1 > a_2 + e_2$
$b_1 < b_2$	$P_{12} < P_{21}$	$P_{12} < P_{21}$	$P_{12} < P_{21}$
$b_1 = b_2$	$P_{12} < P_{21}$	$P_{12} = P_{21}$	$P_{12} > P_{21}$
$b_1 > b_2$	$P_{12} > P_{21}$	$P_{12} > P_{21}$	$P_{12} > P_{21}$

§ 10. Методы дефазификации

Рассмотрим нечеткое множество A универсального множества X с функцией принадлежности $\mu(x)$. Процедура выделения из этого нечеткого множества A конкретного значения $x_0 \in X$ называется *дефазификацией.* Существует несколько методов дефазификации. Приведем некоторые из них.

Обозначим через Y подмножество элементов, максимизирующих функцию принадлежности $\mu(x)$, то есть

$$Y = \{x \in X\colon \mu(x) = \max_{y \in X} \mu(y)\}. \tag{10.1}$$

Метод *максимума* выделяет произвольное конкретное значение $x_0 \in Y$.

Если универсальное множество X состоит из конечного числа элементов, то функция принадлежности $\mu(x)$ достигает на нем своего максимального значения. Следовательно, в этом случае множество Y является непустым.

Рассмотрим далее случай нечетких чисел. Считаем, что универсальное множество X является отрезком $[a, b]$ числовой оси, а функция принадлежности непрерывна на нем.

Метод *первого максимума* выделяет конкретное значение x_0, являющееся наименьшим значением x, при котором достигается максимальное значение функции принадлежности. Таким образом,

$$x_0 = \min(x\colon x \in Y). \tag{10.2}$$

Метод центра масс выделяет конкретное значение x_0, являющееся центром масс этого нечеткого множества, то есть

$$x_0 = \frac{\int_X x\mu(x)dx}{\int_X \mu(x)dx}. \tag{10.3}$$

В *методе высотной дефазификации* задается число $\alpha \in (0, 1)$ и строится множество уровня $A(\alpha) = \{x \in X\colon \mu(x) \geq \alpha\}$. Конкретное значение равно

$$x_0 = x(\alpha), \quad x(\alpha) = \frac{\int_{A(\alpha)} x\mu(x)dx}{\int_{A(\alpha)} \mu(x)dx}. \tag{10.4}$$

Таким образом, в этом методе точки x, для которых значения функции принадлежности меньше, чем уровень α, в расчет не принимаются.

Метод *среднего максимума* выделяет конкретное значение, равное

$$x_0 = \frac{\int_Y x\mu(x)dx}{\int_Y \mu(x)dx}. \tag{10.5}$$

Рассмотрим метод *взвешенного центра масс*. Возьмем произвольную функцию l: [0, 1] $\to$ [0, 1], обладающую следующими свойствами:

$$l(0) = 0, \quad l(1) = 1; \quad 0 \le \alpha_1 < \alpha_2 \le 1 \Rightarrow l(\alpha_1) < l(\alpha_2).$$

Возьмем разбиение ω: $0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_i < \alpha_{i+1} < \ldots < \alpha_{n+1} = 1$

с диаметром разбиения $d(\omega) = \max\limits_{0 \le i \le n} (\alpha_{i+1} - \alpha_i)$. Для каждого числа α_i из этого разбиения методом высотной дефазификации находим точку

$$x(\alpha_i) = \frac{\int_{A(\alpha_i)} x\mu(x)dx}{\int_{A(\alpha_i)} \mu(x)dx}.$$

Все эти точки принадлежат отрезку X. Поскольку

$$\sum_{i=1}^{n}\left(l(\alpha_{i+1}) - l(\alpha_i)\right) = l(1) - l(0) = 1 \text{ и } l(\alpha_{i+1}) - l(\alpha_i) > 0,$$

то этому же отрезку принадлежит и их выпуклая комбинация

$$x_\omega = \sum_{i=0}^{n} x(\alpha_i)\left(l(\alpha_{i+1}) - l(\alpha_i)\right).$$

Устремим диаметр разбиения $d(\omega) \to 0$. Тогда $x_\omega \to x_0$, где

$$x_0 = \int_0^1 x(\alpha)dl(\alpha).$$

Здесь интеграл понимается в смысле Римана — Стилтьеса.

Если взять $l(\alpha_i) = \alpha^2$, то формула для вычисления взвешенной точки примет следующий вид:

$$x_0 = \int_0^1 2x(\alpha)\alpha d\alpha. \tag{10.6}$$

Рассмотрим метод *взвешенной точки.* Будем считать, что множества уровня $A(\alpha)$ являются отрезками $[g(\alpha), G(\alpha)]$, причем функции $g(\alpha) \le G(\alpha)$ являются непрерывными при $0 \le \alpha \le 1$. Тогда, подставляя в формулу (10.6) вместо функции $x(\alpha)$ середину отрезка $[g(\alpha), G(\alpha)]$, получим *взвешенную точку*

$$x_0 = \int_0^1 (g(\alpha)+G(\alpha))\alpha d\alpha . \qquad (10.7)$$

В качестве еще одного метода дефазификации рассмотрим метод, основанный на делении площади фигуры, образованной осью x и графиком функции принадлежности, на две равные части. Считаем, что функция $\mu(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда разность интегралов

$$f(x) = \int_a^x \mu(\alpha)d\alpha - \int_x^b \mu(\alpha)d\alpha, \quad x \in [a, b]$$

с переменными пределами интегрирования является непрерывной функцией, которая в концах отрезка $[a, b]$ принимает значения разного знака. Следовательно, существует точка $x_0 \in (a, b)$, в которой $f(x_0) = 0$. Другими словами, формула для вычисления точки x_0 примет вид

$$\int_a^{x_0} \mu(\alpha)d\alpha = \int_{x_0}^b \mu(\alpha)d\alpha .$$

Если $\mu(x) > 0$ при $x \in (a, b)$, то производная $f'(x) > 0$ при $x \in (a, b)$. Следовательно, уравнение $f(x_0) = 0$ имеет единственное решение.

В качестве примера рассмотрим нечеткое число с трапецеидальной функцией принадлежности, у которой высота hgt A = 1. График функции принадлежности изображен на рис. 10.1.

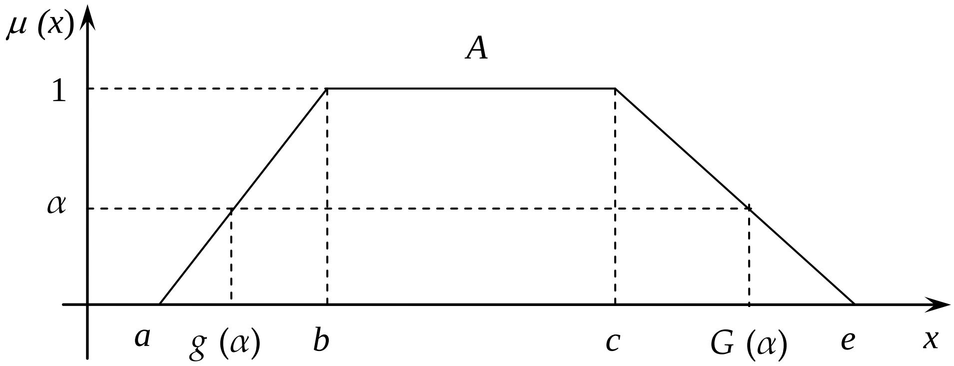

Рис. 10.1

Максимум этой функции принадлежности достигается в каждой точке отрезка $[b, c]$. Поэтому множество (10.1) равно $Y = [b, c]$. Из формулы (10.2) получим, что метод первого максимума дает точку $x_0 = b$.

Вычислим точку (10.3). Из формулы площади трапеции находим:

$$\int_a^e \mu(x)\,dx = \frac{(c-b)+(e-a)}{2}. \qquad (10.8)$$

Далее,

$$\int_a^e x\mu(x)\,dx = \int_a^b x\frac{x-a}{b-a}\,dx + \int_b^c x\,dx + \int_c^e x\frac{e-x}{e-c}\,dx =$$

$$= \frac{1}{b-a}\left(\frac{b^3-a^3}{3} - a\,\frac{b^2-a^2}{2}\right) + \frac{c^2-b^2}{2} + \frac{1}{e-c}\left(e\frac{e^2-c^2}{2} - \frac{e^3-c^3}{3}\right) =$$

$$= \frac{2b^2-ab-a^2}{6} + \frac{c^2-b^2}{2} + \frac{e^2+ec-2c^2}{6}.$$

Следовательно,

$$\int_a^e x\mu(x)\,dx = \frac{1}{6}(c^2+ce+e^2) - \frac{1}{6}(a^2+ab+b^2). \qquad (10.9)$$

Отсюда и из (10.8) получим, что центр масс равен

$$x_0 = \frac{1}{3}\frac{(c^2+ce+e^2)-(a^2+ab+b^2)}{(c+e)-(a+b)}. \qquad (10.10)$$

Рассмотрим метод высотной дефазификации. Тогда, учитывая формулы

$$g(\alpha) = a + \alpha(b-a), \quad G(\alpha) = e - \alpha(e-c), \qquad (10.11)$$

получим

$$S(\alpha) = \int_{A(\alpha)} \mu(x)dx = \int_{g(\alpha)}^{G(\alpha)} \mu(x)\,dx = (1-\alpha)\frac{G(\alpha)-g(\alpha)+c-b}{2} +$$

$$+ \alpha(G(\alpha)-g(\alpha)) = (1-\alpha)\frac{e-\alpha(e-c)-a-\alpha(b-a)+c-b}{2} +$$

$$+ \alpha(e-\alpha(e-c)-a-\alpha(b-a)) =$$

$$= (1-\alpha)\frac{((e+c)-(a+b))-\alpha((e-c)+(b-a))}{2} + \alpha((e-a)-\alpha((e-c)+(b-a))).$$

Отсюда следует, что

$$S(\alpha) = -\frac{\alpha^2}{2}((e-c)+(b-a)) + \frac{(c-b)+(e-a)}{2}. \qquad (10.12)$$

Далее,

$$J(\alpha) = \int_{A(\alpha)} x\mu(x)dx = \int_{g(a)}^{b} x\frac{x-a}{b-a}\,dx + \int_b^c x\,dx + \int_c^{G(\alpha)} x\frac{e-x}{e-c}\,dx.$$

Вычислим производную по параметру α от этой функции. Получим

$$J'(\alpha) = -g(\alpha)\frac{g(\alpha)-a}{b-a}g'(\alpha) + G(\alpha)\frac{e-G(\alpha)}{e-c}G'(\alpha) =$$

$$= -\alpha(a + \alpha(b-a))\,(b-a) - \alpha(e - \alpha(e-c))\,(e-c) =$$

$$= \alpha^2((e-c)^2 - (b-a)^2) - \alpha(a(b-a) + e(e-c)).$$

Значение $J(0)$ задается правой частью формулы (10.9). Интегрируя предыдущее равенство, находим

$$J(\alpha) = \frac{1}{3}\alpha^3((e-c)^2 - (b-a)^2) - \frac{1}{2}\alpha^2(a(b-a) + e(e-c)) +$$

$$+\frac{1}{6}(c^2 + ce + e^2) - \frac{1}{6}(a^2 + ab + b^2). \qquad (10.13)$$

Формула (10.4) принимает вид

$$x(\alpha) = \frac{1}{3}\,\frac{2L\alpha^3 - 3M\alpha^2 + K}{-N\alpha^2 + R}. \qquad (10.14)$$

Здесь обозначено

$$N = (e-c) + (b-a),\quad R = \frac{(c-b)+(e-a)}{2},\quad L = (e-c)^2 - (b-a)^2,$$

$$M = a(b-a) + e(e-c),\quad K = (c^2 + ce + e^2) - (a^2 + ab + b^2). \qquad (10.15)$$

Из формулы (10.5) получим, что метод среднего максимума дает точку

$$x_0 = \frac{b+c}{2}. \qquad (10.16)$$

Формула (10.7) для вычисления взвешенного центра масс примет вид

$$x_0 = \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{2L\alpha^3 - 3M\alpha^2 + K}{-N\alpha^2 + R}\alpha\, d\alpha. \qquad (10.17)$$

Из формул (10.8) и (10.11) получим, что метод взвешенной точки дает

$$x_0 = \int_0^1 ((a+e) + \alpha(b-a-e+c))\alpha\, d\alpha = \frac{a+e}{2} + \frac{b-a+c-e}{3} =$$

$$\frac{1}{6}a + \frac{4}{6}\left(\frac{b+c}{2}\right) + \frac{1}{6}e. \qquad (10.18)$$

Таким образом, взвешенная точка является выпуклой комбинацией крайних точек a и e, а также среднего максимума, причем весовой коэффициент у среднего максимума в четыре раза больше весовых коэффициентов крайних точек.

Рассмотрим метод деления площади на две равные части. Имеем, что функция принадлежности $\mu(x) > 0$ при $x \in (a, e)$. Следовательно, искомая точка единственна. Ищем ее на отрезке $[b, c]$. Тогда

$$\frac{b-a}{2} + x_0 - b = \int_a^{x_0} \mu(\alpha)d\alpha = \int_{x_0}^{e} \mu(\alpha)d\alpha = c - x_0 + \frac{e-c}{2}.$$

Отсюда находим:

$$x_0 = \frac{1}{4}a + \frac{1}{4}b + \frac{1}{4}c + \frac{1}{4}e. \qquad (10.19)$$

Рассмотрим нечеткое число с треугольной функцией принадлежности, у которой высота $\mathrm{hgt}\, A = 1$. Такая функция является частным случаем трапецеидальной функцией с параметрами $b = c$. Максимум у такой функции принадлежности достигается в одной точке b. Поэтому методы *максимума*, *первого максимума* и *среднего максимума* выделяют одну точку $x_0 = b$.

Из формулы (10.10) при $b = c$ получим, что центр масс равен

$$x_0 = \frac{a+b+e}{3}. \qquad (10.20)$$

Полагая в формуле (10.18) $b = c$, найдем взвешенную точку

$$x_0 = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}\frac{a+b+e}{3}. \qquad (10.21)$$

Таким образом, взвешенная точка является серединой отрезка, концами которого являются точка максимума и точка центра масс.

Полагая в формуле (10.19) $b = c$, найдем точку, делящую площадь на две равные части:

$$x_0 = \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{4}e. \qquad (10.22)$$

Глава 2

§ 11. Операции срезки с числами и их свойства

Зафиксируем два произвольных числа $0 \le a \le 1$ и $0 \le b \le 1$ и рассмотрим неравенства $\min(a; x) \le b$, $0 \le x \le 1$ относительно переменной x.

На рис. 11.1 изображен график функции $y = \min(a; x)$.

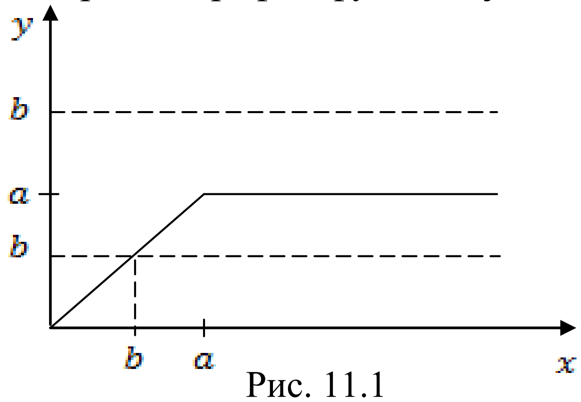

Рис. 11.1

Видно, что если $0 \le a \le b \le 1$, то все числа $0 \le x \le 1$ удовлетворяют неравенству $\min(a; x) \le b$. Если же $0 \le b < a$, то все числа $0 \le x \le b$ являются решениями неравенства $\min(a; x) \le b$, и наоборот.

Таким образом,

$$\min(a; x) \le b, \quad 0 \le x \le 1 \Leftrightarrow 0 \le x \le a \blacksquare b = \begin{cases} 1 & при\ a \le b, \\ b & при\ a > b \end{cases}. \qquad (11.1)$$

Введем еще одну операцию срезки

$$a \square b = \begin{cases} 1 & при\ a < b, \\ a & при\ a \ge b \end{cases}. \qquad (11.2)$$

Лемма 11.1. Операции срезки (11.1) и (11.2) удовлетворяют следующим свойствам:

$$a_1 < a_2 \Rightarrow a_1 \blacksquare b \ge a_2 \blacksquare b; \qquad (11.3)$$

$$b_1 < b_2 \Rightarrow a \blacksquare b_1 \le a \blacksquare b_2; \quad a \square b_1 \le a \square b_2. \qquad (11.4)$$

Доказательство. Зафиксируем числа $0 \le a_1 < a_2 \le 1$ и $0 \le b \le 1$. Возможные значения $a_i \blacksquare b$ и $a_i \square b$ приведены в табл. 11.1.

Таблица 11.1

Срезка	Возможные значения				
	$a_1 < a_2 < b$	$a_1 < a_2 = b$	$a_1 < b < a_2$	$a_1 = b < a_2$	$b < a_1 < a_2$
$a_1 \blacksquare b$	1	1	1	1	b
$a_2 \blacksquare b$	1	1	b	b	b
$a_1 \square b$	1	1	1	a_1	a_1
$a_2 \square b$	1	a_2	a_2	a_2	a_2

Зафиксируем числа $0 \le b_1 < b_2 \le 1$ и $0 \le a \le 1$. Возможные значения $a \blacksquare b_i$ и $a \square b_i$ приведены в табл. 11.2.

Таблица 11.2

Срезка	Возможные значения				
	$a < b_1 < b_2$	$a = b_1 < b_2$	$b_1 < a < b_2$	$b_1 < a = b_2$	$b_1 < b_2 < a$
$a \blacksquare b_1$	1	1	b_1	b_1	b_1
$a \blacksquare b_2$	1	1	1	1	b_2
$a \square b_1$	1	a	a	a	a
$a \square b_2$	1	1	1	a	a

Следствие 11.1. Для любой функции g: $I \to [0, 1]$ и любого числа $a \in [0, 1]$ выполнены неравенства:

$$\sup_{i\in I}(a \blacksquare g(i)) \le a \blacksquare \sup_{i\in I} g(i); \quad \sup_{i\in I}(a \square g(i)) \le a \square \sup_{i\in I} g(i); \qquad (11.5)$$

$$a \blacksquare \inf_{i\in I} g(i) \le \inf_{i\in I}(a \blacksquare g(i)); \quad a \square \inf_{i\in I} g(i) \le \inf_{i\in I}(a \square g(i)); \qquad (11.6)$$

$$\sup_{i\in I} g(i) \blacksquare a \le \inf_{i\in I}(g(i) \blacksquare a); \quad \sup_{i\in I}(g(i) \blacksquare a) \le \inf_{i\in I} g(i) \blacksquare a. \qquad (11.7)$$

Доказательство. Неравенства (11.5) и (11.6) следуют из неравенств (11.3), а неравенства (11.7) — из неравенств (11.4).

Лемма 11.2. Для любой функции g: $I \to [0, 1]$ и для любого числа $0 \le a \le 1$ выполнены равенства

$$\inf_{i\in I}(g(i) \blacksquare a) = \sup_{i\in I} g(i) \blacksquare a; \; \inf_{i\in I}(a \blacksquare g(i)) = a \blacksquare \inf_{i\in I} g(i);$$

$$\sup_{i\in I}(a \square g(i)) = a \square \sup_{i\in I} g(i). \qquad (11.8)$$

$$\sup_{i\in I} \min(g(i); a) = \min(\sup_{i\in I} g(i); a);$$

$$\inf_{i\in I} \max(g(i); a) = \max(\inf_{i\in I} g(i); a). \qquad (11.9)$$

Доказательство. Докажем первое равенство в (11.8). Пусть $\sup_{i\in I} g(i) \le a$. Тогда $g(i) \le a$ для всех $i \in J$. Отсюда следует, что $g(i) \blacksquare a = 1$ для всех $i \in J$. Поэтому $\inf_{i\in I}(g(i) \blacksquare a) = 1 = \sup_{i\in I} g(i) \blacksquare a$.

Пусть $\sup_{i\in I} g(i) > a$. Тогда $\sup_{i\in I} g(i) \blacksquare a = a$ и $g(j) > a$ для некоторых $j \in J$. Для этих номеров j имеем, что $g(j) \blacksquare a = a$. Для оставшихся номеров $k \in J$ выполнено неравенство $g(k) \le a$ и, следовательно, $g(k) \blacksquare a = 1$. Поэтому

$$\inf_{i\in I}(g(i) \blacksquare a) = \inf_{j}(g(j) \blacksquare a) = a = \sup_{i\in I} g(i) \blacksquare a.$$

Докажем второе равенство в (11.8). Рассмотрим случай $a \le \inf\limits_{i \in I} g(i)$. Тогда $a \blacksquare \inf\limits_{i \in I} g(i) = 1$ и $a \le g(i)$ для всех $i \in J$. Следовательно, $a \blacksquare g(i) = 1$ для всех $i \in J$. Поэтому, $\inf\limits_{i \in I} (a \blacksquare g(i)) = 1 = a \blacksquare \inf\limits_{i \in I} g(i)$.

Пусть $a > \inf\limits_{i \in I} g(i)$. Тогда $a \blacksquare \inf\limits_{i \in I} g(i) = \inf\limits_{i \in I} g(i)$ и $a > g(j)$ для некоторых $j \in J$. Для этих номеров j выполнено равенство $a \blacksquare g(j) = g(j)$. Для оставшихся номеров $k \in J$ выполнено неравенство $a \le g(k)$ и, следовательно, $a \blacksquare g(k) = 1$. Поэтому

$$\inf_{i \in I} (a \blacksquare g(i)) = \inf_{j} (a \blacksquare g(j)) = \inf_{j} g(j) = \inf_{i \in I} g(i) = a \blacksquare \inf_{i \in I} g(i).$$

Докажем третье равенство (11.8). Пусть $a \ge \sup\limits_{i \in I} g(i)$. Тогда $a \,\square\, \sup\limits_{i \in I} g(i) = a$ и $a \ge g(i)$ для всех $i \in J$. Следовательно, $a \,\square\, g(i) = a$ для всех $i \in J$. Поэтому

$$\sup_{i \in I} (a \,\square\, g(i)) = a = a \,\square\, \sup_{i \in I} g(i).$$

Пусть $a < \sup\limits_{i \in I} g(i)$. Тогда $a \,\square\, \sup\limits_{i \in I} g(i) = 1$ и $a < g(j)$ для некоторых $j \in J$. Для этих номеров j выполнено равенство $a \,\square\, g(j) = 1$. Поэтому

$$\sup_{i \in I} (a \,\square\, g(i)) = 1 = a \,\square\, \sup_{i \in I} g(i).$$

Равенства (11.9) являются следствиями утверждений 3.1 и 3.2.

Лемма 11.3. Пусть функция $g\colon I \to [0, 1]$ такова, что $\sup\limits_{i \in I} g(i) = g(i_0)$ при некотором $i_0 \in I$. Тогда для любого числа $a \in [0, 1]$ выполнены равенства

$$\sup_{i \in I} (a \blacksquare g(i)) = a \blacksquare \sup_{i \in I} g(i). \qquad (11.10)$$

Доказательство. Имеем $\sup\limits_{i \in I} (a \blacksquare g(i)) \ge a \blacksquare g(i_0) = a \blacksquare \sup\limits_{i \in I} g(i)$. Отсюда, используя первое неравенство (11.5), получим равенства (11.10).

Лемма 11.4. Пусть функция $g\colon I \to [0, 1]$ такова, что $\inf\limits_{i \in I} g(i) = g(i_0)$ при некотором $i_0 \in I$. Тогда для любого числа $a \in [0, 1]$ выполнены равенства

$$a \,\square\, \inf_{i \in I} g(i) = \inf_{i \in I} (a \,\square\, g(i)); \; \sup_{i \in I} (g(i) \blacksquare a) = \inf_{i \in I} g(i) \blacksquare a. \qquad (11.11)$$

Доказательство. Имеем

$$a \,\square\, \inf_{i\in I} g(i) = a \,\square\, g(i_0) \geq \inf_{i\in I} (a \,\square\, g(i)).$$

Отсюда и из второго неравенства (11.6) получим первое равенство (11.11).

Далее, $\sup_{i\in I} (g(i) \blacksquare a) \geq g(i_0) \blacksquare a = \inf_{i\in I} g(i) \blacksquare a$.

Отсюда и из второго неравенства (11.7) получим второе равенство (11.11).

Лемма 11.5. Для любых чисел $0 \leq a \leq 1$ и $0 \leq b \leq 1$ решения неравенств

$$\min(x; a) \leq \min(x; b), \quad 0 \leq x \leq 1 \tag{11.12}$$

имеют вид $0 \leq x \leq a \blacksquare b$.

Доказательство. Пусть $0 \leq a \leq b \leq 1$. Возможные в этом случае значения выражений $\min(x; a)$ и $\min(x; b)$ приведены в табл. 11.3.

Таблица 11.3

Выражение	Возможные значения		
	$0 \leq x \leq a$	$a < x \leq b$	$b < x \leq 1$
$\min(x; a)$	x	a	a
$\min(x; b)$	x	x	b

Из этой таблицы видно, что решения неравенств (11.12) в рассматриваемом случае имеют вид $0 \leq x \leq 1 = a \blacksquare b$.

Пусть $0 \leq b < a \leq 1$. Возможные в этом случае значения выражений $\min(x; a)$ и $\min(x; b)$ приведены в табл. 11.4.

Таблица 11.4

Выражение	Возможные значения		
	$0 \leq x \leq b$	$b < x \leq a$	$a < x \leq 1$
$\min(x; a)$	x	x	a
$\min(x; b)$	x	b	b

Из этой таблицы видно, что решения неравенств (11.12) в рассматриваемом случае имеют вид $0 \leq x \leq b = a \blacksquare b$.

Лемма 11.6. Для любых чисел $0 \leq a \leq 1$ и $0 \leq b \leq 1$ выполнены равенства

$$\min(a; a \blacksquare b) = \min(a; b), \min(b; a \blacksquare b) = b; \tag{11.13}$$

$$a \blacksquare \min(a; b) = a \blacksquare b, \quad \max(b; a \blacksquare b) = a \blacksquare b; \tag{11.14}$$

$$(a \blacksquare b) \blacksquare b = b \blacksquare a, \quad a \blacksquare (a \blacksquare b) = a \blacksquare b. \tag{11.15}$$

Доказательство. Возможные значения выражений, стоящих в доказываемых формулах (11.13) — (11.15), приведены в табл. 11.5.

Таблица 11.5

Выражение	Возможные значения		
	$0 \le a < b \le 1$	$0 \le a = b \le 1$	$0 \le b < a \le 1$
$\min(a; b)$	a	$a = b$	b
$\max(a; b)$	b	$a = b$	a
$a \blacksquare b$	1	1	b
$\min(a; a \blacksquare b)$	a	$a = b$	b
$\min(b; a \blacksquare b)$	b	$a = b$	b
$a \blacksquare \min(a; b)$	1	1	b
$\max(b; a \blacksquare b)$	1	1	b
$(a \blacksquare b) \blacksquare b$	b	b	1
$b \square a$	b	b	1
$a \blacksquare (a \blacksquare b)$	1	1	b

Из этой таблицы следует справедливость формул (11.13) — (11.15).

Лемма 11.7. Для любых чисел $0 \le a \le 1$ и $0 \le b \le 1$ выполнено

$$a \blacksquare x \ge b,\ 0 \le x \le 1 \Leftrightarrow \min(a; b) \le x \le 1. \qquad (11.16)$$

Доказательство. Из формулы (11.1) следует, что $a \blacksquare x = x$ при $0 \le x < a$ и $a \blacksquare x = 1$ при $a \le x \le 1$. Поэтому, если $b \le a$, то множеством чисел $0 \le x \le 1$, каждое из которых удовлетворяет неравенству $a \blacksquare x \ge b$, являются все числа из отрезка $\min(a; b) = b \le x \le 1$. Если $a < b$, то множеством чисел $0 \le x \le 1$, каждое из которых удовлетворяет неравенству $a \blacksquare x \ge b$, являются все числа из отрезка $\min(a; b) = a \le x \le 1$.

Лемма 11.8. Для любых чисел $0 \le a \le 1$ и $0 \le b \le 1$ выполнено равенство

$$\{x \in [0, 1]: x \blacksquare a \ge b\} = [0; b \blacksquare a]. \qquad (11.17)$$

Доказательство. Из формулы (11.1) следует, что $x \blacksquare a = 1$ при $0 \le x \le a$ и $x \blacksquare a = a$ при $a < x \le 1$. Поэтому, если $b \le a$, то множество чисел $0 \le x \le 1$, каждое из которых удовлетворяет неравенству $x \blacksquare a \ge b$, являются все числа из отрезка $0 \le x \le 1 = b \blacksquare a$. Если $a < b$, то множество чисел $0 \le x \le 1$, каждое из которых удовлетворяет неравенству $x \blacksquare a \ge b$, являются все числа из отрезка $0 \le x \le a = b \blacksquare a$.

Лемма 11.9. Для любых чисел $0 \le a \le 1$ и $0 \le b \le a$ выполнено

$$\{x \in [0, 1]: \min(a; x) \ge b\} = [b; 1]. \qquad (11.18)$$

Доказательство. Значения функции $\min(a;\ x)$ приведены в табл. 11.6.

Таблица 11.6

x	$0 \le x < b$	$b \le x \le a$	$a < x \le 1$
$\min(a; x)$	x	x	a

Из этой таблицы следует утверждение леммы.

Введем еще одну операцию с числами:

$$a \nabla b = \begin{cases} 1 & \text{при } a \le b, \\ \dfrac{b}{a} & \text{при } a > b. \end{cases} \tag{11.19}$$

Значения срезок $a \nabla b$ и $a \blacksquare (a \nabla b)$ приведены в табл. 11.7.

Таблица 11.7

Срезка	Значение срезки			
	$0 \le a < b \le 1$	$0 \le a = b \le 1$	$0 \le b < a \le 1,\ a^2 \le b$	$0 \le b < a^2$
$a \nabla b$	1	1	$\dfrac{b}{a}$	$\dfrac{b}{a}$
$a \blacksquare (a \nabla b)$	1	1	1	a

Пример 11.1. Приведем значения срезок (11.1), (11.2) и (11.19) на числах 0 и 1. Имеем:

$0 \blacksquare 0 = 1,\quad 0 \blacksquare 1 = 1,\quad 1 \blacksquare 0 = 0,\quad 1 \blacksquare 1 = 1;$

$0 \square 0 = 0,\quad 0 \square 1 = 1,\quad 1 \square 0 = 1,\quad 1 \square 1 = 1;$

$0 \nabla 1 = 1,\quad 1 \nabla 1 = 1,$ значения $0 \nabla 0$ и $1 \nabla 0$ не определены.

§ 12. Образы четких множеств при бинарных отношениях

Начнем рассмотрение материала со следующего примера.

Пример 12.1. Пусть $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ — признаки, по которым оцениваются места работы $Y = \{y_1, \ldots, y_m\}$. Построим отображение f множества X во множество Y по следующему правилу: место работы y_k принадлежит множеству $f(x_i) \subset Y$ тогда и только тогда, когда оно обладает признаком x_i.

Поскольку признаком x_i могут обладать несколько мест работы, то отображение f является многозначным (см. рис. 12.1).

На прямом произведении $X \times Y$ совокупность точек (x, y), удовлетворяющих условию $y \in f(x)$, задает некоторое множество R.

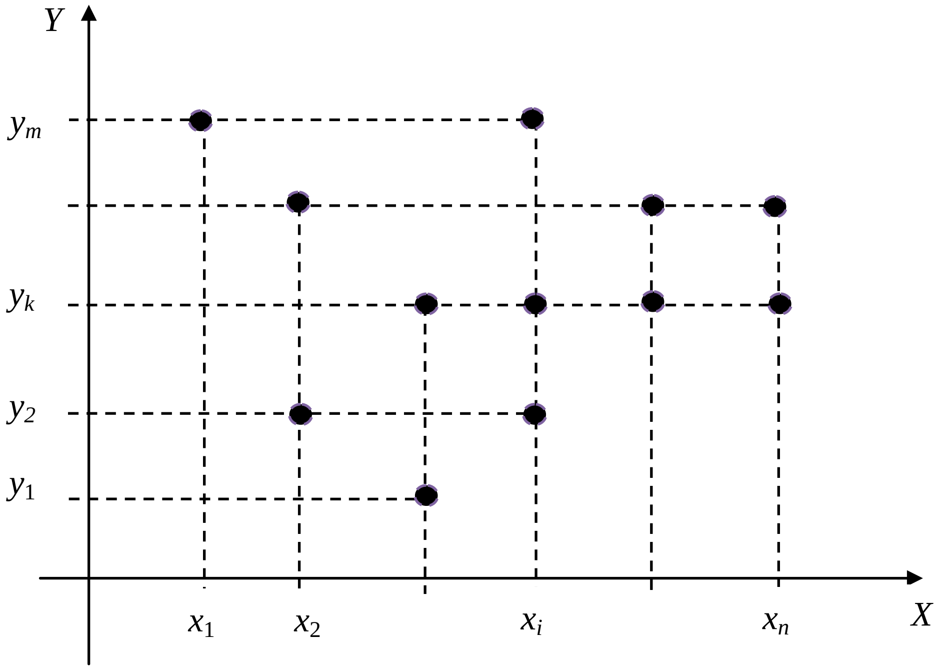

Рис. 12.1

Человек, который ищет место работы, указывает несколько признаков, которые для него важны при выборе места работы. Этот набор признаков обозначим как $A \subset X$. Возникает вопрос — какое из мест работы ему рекомендовать? Рассмотрим несколько подходов к решению данной проблемы.

Для каждого места работы $y \in Y$ обозначим

$$f^{-1}(y) = \{x \in X\colon y \in f(x)\}. \tag{12.1}$$

Другими словами, множество $f^{-1}(y) \subset X$ является набором признаков из рассматриваемого множества X, которыми обладает место работы y.

Возможны следующие подходы к выбору места работы y по указанному множеству признаков $A \subset X$.

Подход 12.1. Рекомендуется выбрать то место работы y, для которого $A \cap f^{-1}(y) \neq \varnothing$. Это значит, что среди признаков, которыми обладает место работы y, имеется хотя бы один, принадлежащий указанному множеству A. Множество всех таких мест работы обозначим $f_{\blacklozenge}(A)$. Тогда

$$f_{\blacklozenge}(A) = \{y \in Y\colon A \cap f^{-1}(y) \neq \varnothing\}. \tag{12.2}$$

Отсюда и из формулы (12.1) следует:

$$f_{\blacklozenge}(A) = \bigcup_{x \in A} f(x). \tag{12.3}$$

Подход 12.2. Рекомендуется выбрать то место работы y, для которого $A \subset f^{-1}(y)$. В этом подходе рекомендуется то место работы, которое обладает всеми указанными признаками. Множество всех таких мест работы обозначим как $f_{\blacktriangleleft}(A)$. Тогда

$$f_{\blacktriangleleft}(A) = \{y \in Y\colon A \subset f^{-1}(y)\}. \qquad (12.4)$$

Используя формулу (12.1), получим

$$f_{\blacktriangleleft}(A) = \bigcap_{x \in A} f(x). \qquad (12.5)$$

Подход 12.3. Рекомендуется выбрать место работы y, которое удовлетворяет включению $f^{-1}(y) \subset A$. Это значит, что каждый признак, которым обладает место работы y, содержится в указанном множестве признаков A. Множество всех таких мест работы обозначим как $f_{\blacktriangleright}(A)$. Тогда

$$f_{\blacktriangleright}(A) = \{y \in Y\colon f^{-1}(y) \subset A\}. \qquad (12.6)$$

Очевидно, что

$$f_{\blacklozenge}(A) \supset f_{\blacktriangleleft}(A) \cup f_{\blacktriangleright}(A).$$

Пример 12.2. Рассмотрим задачу инвестирования в рекламу по продажам (см. пример 6.3).

В этом примере множества X и Y совпадают и равны $R_+ = [0, +\infty)$, а функция $f\colon X \to Y$ задается формулой

$$f(x) = c(1 - e^{-kx}), \quad c > 0, k > 0.$$

Будем считать, что параметры c и k точно не известны, а известны их границы изменения: $c_1 \le c \le c_2$ и $k_1 \le k \le k_2$. Тогда при сумме инвестирования x в рекламу объем продаж y точно не известен, а известны только его минимальное и максимальное значения

$$c_1(1 - e^{-k_1 x}) \le y \le c_2(1 - e^{-k_2 x}).$$

В этом случае отображение $f\colon X \to Y$ является многозначным и задается формулой

$$f(x) = [c_1(1 - e^{-k_1 x});\ \ c_2(1 - e^{-k_2 x})]. \qquad (12.7)$$

На рис. 12.2 изображено это множество $f(x)$.

Допустим, планируемая сумма инвестирования в рекламу заранее точно не известна, а известно, что ее величина $x \in A = [a, b]$. Здесь числа $0 \le a \le b$ известны. Прогноз, построенный по формуле (12.3), дает $f(A) = [c_1(1 - e^{-k_1 a});\ \ c_2(1 - e^{-k_2 b})]$.

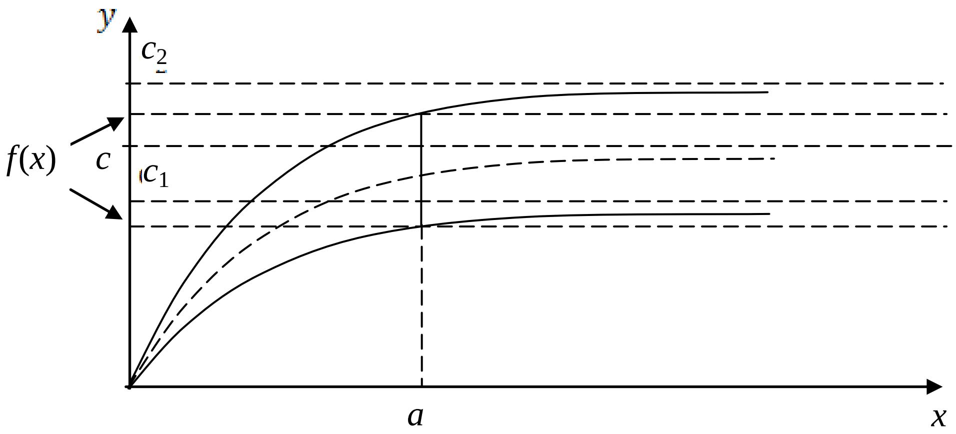

Рис. 12.2

На рис. 12.3 изображено это множество $f(A)$.

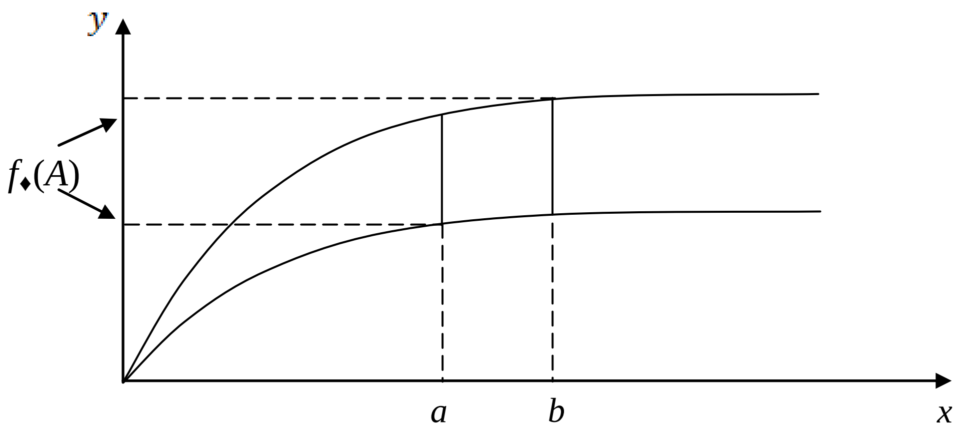

Рис. 12.3

Прогноз, построенный по формуле (12.5), дает

$$f_{\blacktriangleleft}(A) = \varnothing \text{ при } c_2(1 - e^{-k_2 a}) < c_1(1 - e^{-k_1 b});$$

$$f_{\blacktriangleleft}(A) = [c_1(1 - e^{-k_1 b});\ \ c_2(1 - e^{-k_2 a})], \text{ при } c_2(1 - e^{-k_2 a}) \geq c_1(1 - e^{-k_1 b}).$$

На рис. 12.4 изображено множество $f_{\blacktriangleleft}(A)$.

Построим прогноз по формуле (12.6). Из формулы (12.7) следует:

$$0 \leq y < c_1 \Rightarrow f^{-1}(y) = [-\frac{1}{k_2} ln(1 - \frac{y}{c_2}); -\frac{1}{k_1} ln(1 - \frac{y}{c_1})],$$

$$c_1 \leq y < c_2 \Rightarrow f^{-1}(y) = [-\frac{1}{k_2} ln(1 - \frac{y}{c_2}); +\infty), \quad c_2 \leq y < +\infty \Rightarrow f^{-1}(y) = \varnothing.$$

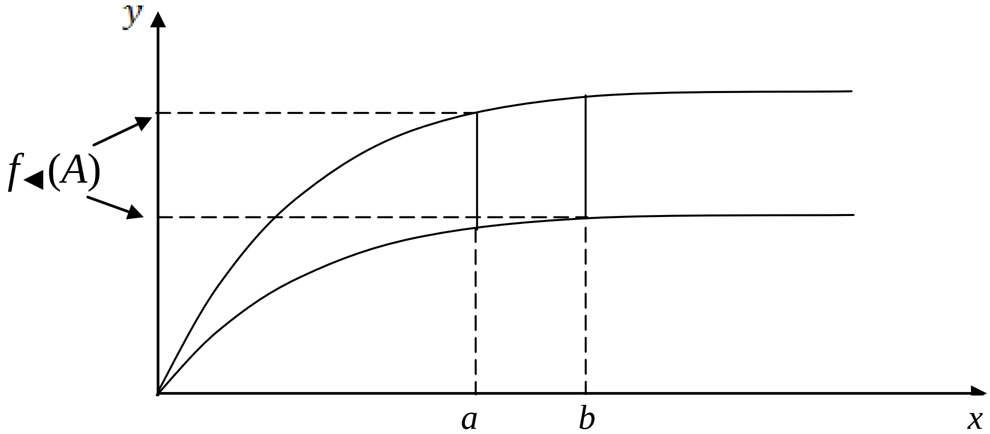

Рис. 12.4

Из формулы (12.6) получим, что $f_{\blacktriangleright}(A) = \{y \geq 0\colon f^{-1}(y) \subset [a; b]\}$. Отсюда и из предыдущих формул следует:

$$f_{\blacktriangleright}(A) = \varnothing \text{ при } c_1 \leq y \text{ и } c_2(1 - e^{-k_2 a}) > c_1(1 - e^{-k_1 b}),$$

и, если

$$0 \leq y < c_1,\ c_2(1 - e^{-k_2 a}) \leq c_1(1 - e^{-k_1 b}),$$

то

$$f_{\blacktriangleright}(A) = [c_2(1 - e^{-k_2 a});\ c_1(1 - e^{-k_1 b})].$$

Это множество $f_{\blacktriangleright}(A)$ изображено на рис. 12.5.

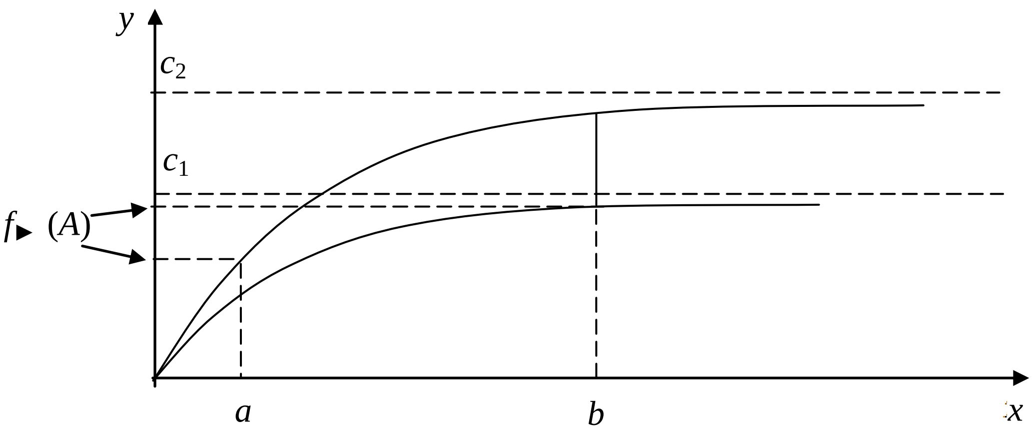

Рис. 12.5

Дальнее изложение проведем на языке бинарных отношений. На прямом произведении $X \times Y$ совокупность точек (x, y), удовлетворяющих условию $y \in f(x)$, задает некоторое множество R.

Бинарное отношение R из множества X во множество Y определяется как подмножество прямого произведения $X \times Y$. Это записывают следующим образом: $R \subset X \times Y$. Для точки $(x, y) \in X \times Y$ будем писать xRy тогда и только тогда, когда выполнено включение $(x, y) \in R$ (см. рис. 12.6).

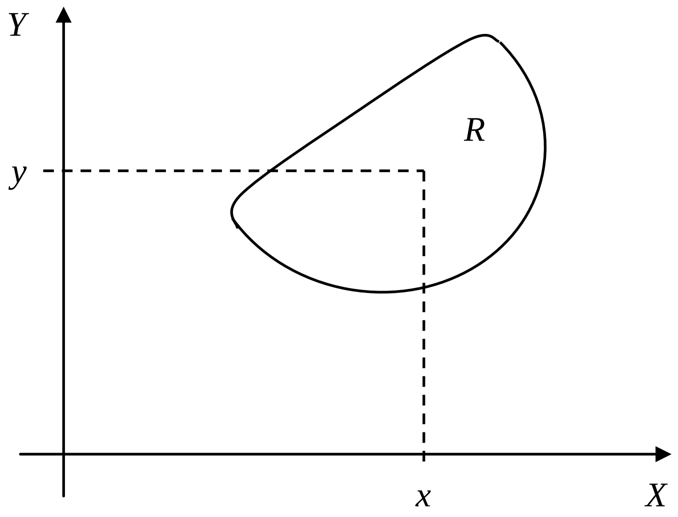

Рис. 12.6

Образом $xR \subset Y$ точки $x \in X$ называется множество

$$xR = \{y \in Y: xRy\}. \qquad (12.8)$$

Образ xR изображен на рис. 12.7.

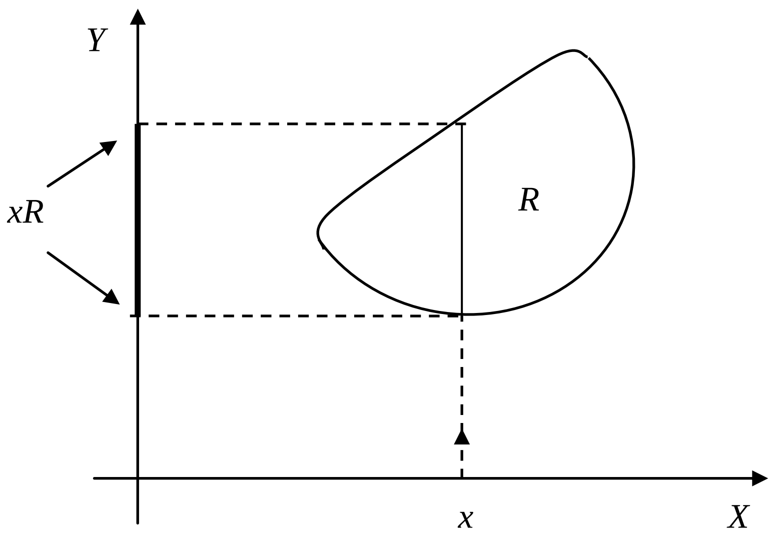

Рис. 12.7

Прообразом $Ry \subset X$ для элемента $y \in Y$ называется множество (см. рис. 12.8)

$$Ry = \{x \in X: xRy\}. \qquad (12.9)$$

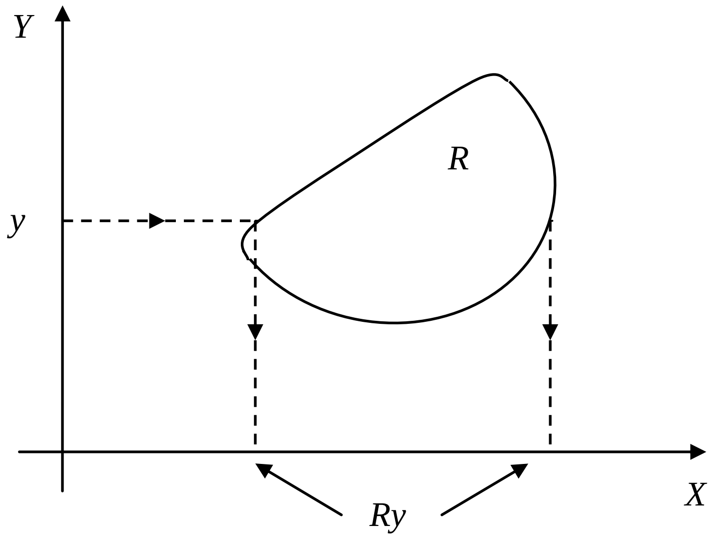

Рис. 12.8

Замечание 12.1. В рассмотренном примере 12.1 бинарное отношение $R \subset X \times Y$ возникает следующим образом: $(x, y) \in R$ тогда и только тогда, когда $y \in f(x)$. Следовательно, образ $xR = f(x)$, а прообраз $Ry = f^{-1}(y)$.

Зафиксируем множество $A \subset X$ и дадим возможные определения его образа при бинарном отношении $R \subset X \times Y$. В соответствии с подходом 12.1 рассмотрим множество точек

$$\{y \in Y\colon (x, y) \in R \text{ для некоторого } x \in A\}.$$

Определение 12.1. Образом множества $A \subset X$ при бинарном отношении $R \subset X \times Y$ называется множество

$$A \blacklozenge R = \{y \in Y\colon A \cap Ry \neq \varnothing\}. \qquad (12.10)$$

Учитывая определение прообраза (12.9), запишем формулу (12.10) в следующем виде:

$$A \blacklozenge R = \bigcup_{x \in A} (xR). \qquad (12.11)$$

На рис. 12.9 изображено множество $A \blacklozenge R$.

Утверждение 12.1. Множество $B = A \blacklozenge R$ удовлетворяет включению

$$A \times B \supset (A \times Y) \cap R \qquad (12.12)$$

и является пересечением всех множеств $B \subset Y$, каждое из которых удовлетворяет включению (12.12) (см. рис. 12.10).

Доказательство. Возьмем любую точку $(x, y) \in (A \times Y) \cap R$. Это значит, что $x \in A$ и $(x, y) \in R$. Следовательно, $x \in A$ и $y \in xR \subset A \blacklozenge R$. Стало быть, включение (12.12) выполнено для множества $B = A \blacklozenge R$.

Пусть множество $B \subset Y$ удовлетворяет включению (12.12). Возьмем любую точку $y^* \in A \blacklozenge R$. Это значит, что точка $(x^*, y^*) \in R$ для некоторого элемента $x^* \in A$. Стало быть, точка $(x^*, y^*) \in (A \times Y) \cap R$. Из включения (12.12) получим, что $(x^*, y^*) \in A \times B$. Поэтому точка

$y^* \in B$. Следовательно, выполнено включение $A \blacklozenge R \subset B$.

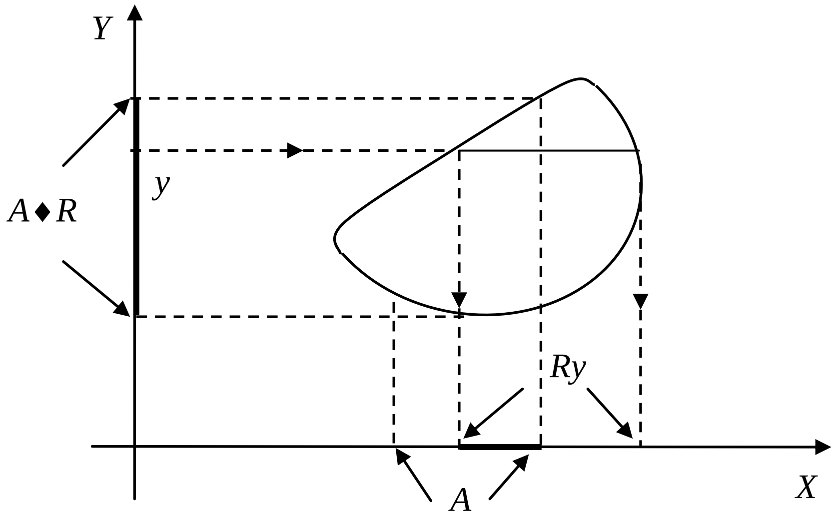

Рис. 12.9

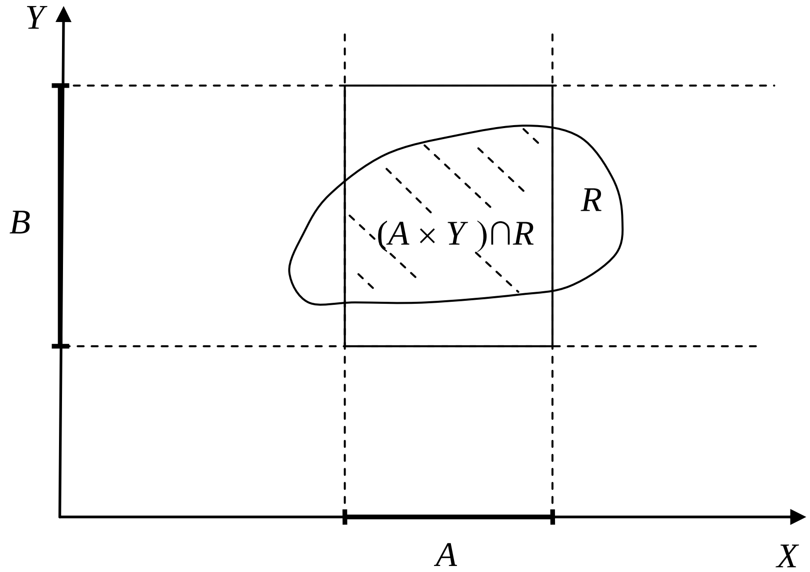

Рис. 12.10

Запишем *характеристическую функцию* $\delta_{A\blacklozenge R}(y)$ множества $A \blacklozenge R$ через характеристические функции $\delta_A(x)$ и $\delta_R(x, y)$ множеств A и R.

Лемма 12.1. При любом $y \in Y$ верно равенство

$$\delta_{A\blacklozenge R}(y) = \sup_{x \in X} \min(\delta_A(x);\ \delta_R(x, y)). \qquad (12.13)$$

Доказательство. Из определения характеристической функции имеем

$$\delta_{A\blacklozenge R}(y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x\,R\,y \text{ для некоторого } x \in A, \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 1, \textit{ если } \min(\delta_A(x); \delta_R(x,y)) = 1 \quad \textit{для некоторого } x \in X, \\ 0, \textit{ если } \min(\delta_A(x); \delta_R(x,y)) = 0 \quad \textit{для любого } x \in X. \end{cases}$$

Отсюда получим требуемую формулу (12.13).

В соответствии с подходом 12.2 рассмотрим множество точек $\{y \in Y\colon (x, y) \in R$ для любого $x \in A\}$.

Определение 12.2. Подпрямым образом множества $A \subset X$ при бинарном отношении $R \subset X \times Y$ называется множество

$$A \blacktriangleleft R = \{y \in Y\colon A \subset Ry\}. \tag{12.14}$$

Учитывая определение прообраза (12.9), запишем формулу (12.14) в виде

$$A \blacktriangleleft R = \bigcap_{x \in A} (xR). \tag{12.15}$$

Это множество изображено на рис. 12.11.

Утверждение 12.2. Множество $B = A \blacktriangleleft R$ удовлетворяет включению

$$A \times B \subset R \tag{12.16}$$

и является объединением всех множеств $B \subset Y$, каждое из которых удовлетворяет включению (12.16) (см. рис. 12.12).

Доказательство. Возьмем любые точки $x \in A$ и $y \in A \blacktriangleleft R$. Из формулы (12.15) следует, что точка $(x, y) \in R$. Стало быть, включение (12.16) выполнено.

Пусть множество $B \subset Y$ удовлетворяет включению (12.16). Возьмем любую точку $y \in B$. Тогда для любой точки $x \in A$ точка $(x, y) \in A \times B \subset R$. Отсюда и из формулы (12.15) следует, что $y \in A \blacktriangleleft R$.

Запишем характеристическую функцию $\delta_{A \blacktriangleleft R}(y)$ множества $A \blacktriangleleft R$.

Лемма 12.2. При любом $y \in Y$ верно равенство

$$\delta_{A \blacktriangleleft R}(y) = \inf_{x \in X} ((\delta_A(x)) \blacksquare (\delta_R(x, y))). \tag{12.17}$$

Доказательство. Характеристическая функция прямого произведения $A \times B$ множеств $A \subset X$ и $B \subset Y$ равна $\min(\delta_A(x);\ \delta_B(y))$. Поэтому включение (12.16) равносильно неравенству

$$\min(\delta_A(x);\ \delta_B(y)) \le \delta_R(x, y) \text{ для любых } x \in X \text{ и } y \in Y. \tag{12.18}$$

Согласно утверждению 12.1, характеристическая функция $\delta_{A \blacktriangleleft R}(y)$ множества $A \blacktriangleleft R$ является верхней гранью всех решений $\delta_B(y)$ неравенства (12.18). Отсюда, применяя операцию срезки (11.1), получим требуемую формулу (12.17).

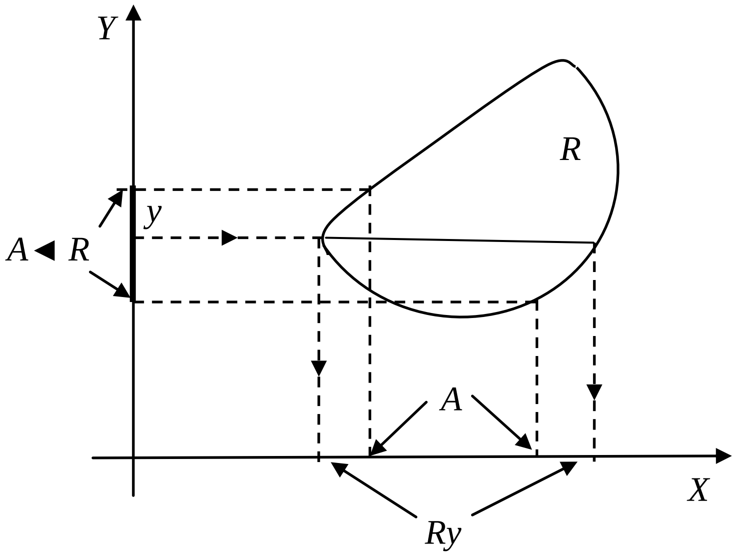

Рис. 12.11

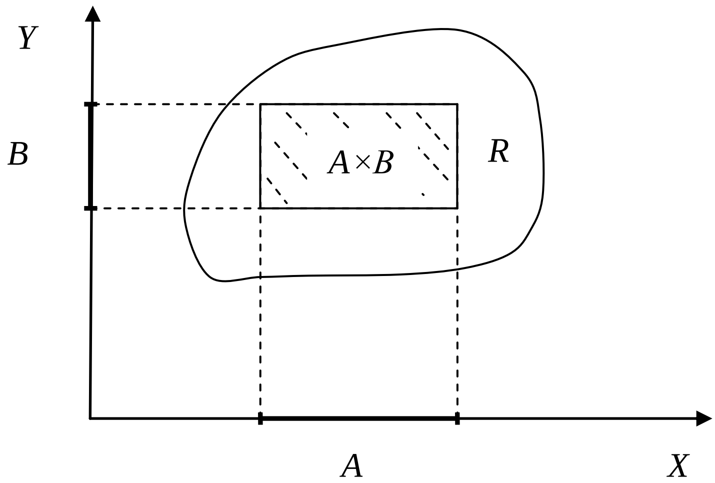

Рис. 12.12

В соответствии с подходом 12.3 рассмотрим множество точек $\{y \in Y$: если $(x, y) \in R$ при некотором $x \in X$, то $x \in A\}$.

Определение 12.3. Надпрямым образом множества $A \subset X$ при бинарном отношении $R \subset X \times Y$ называется множество

$$A \blacktriangleright R = \{y \in Y\colon Ry \subset A\}. \qquad (12.19)$$

На рис. 12.13 изображено множество $A \blacktriangleright R$.

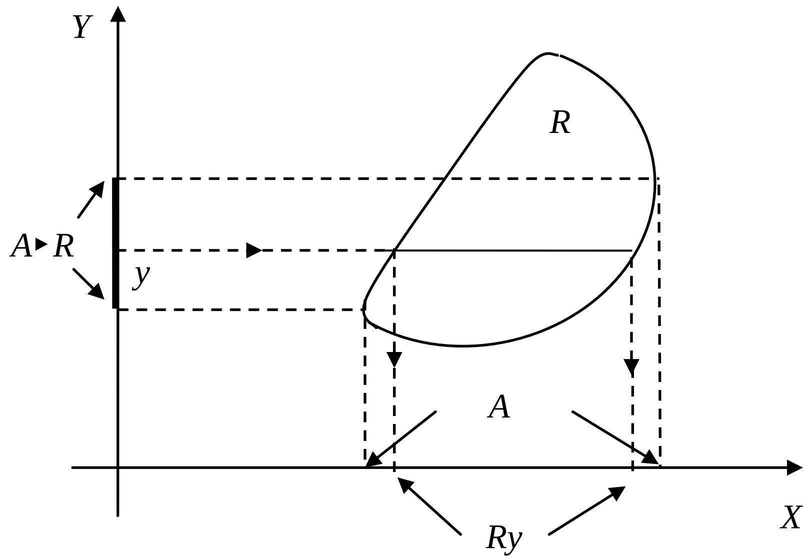

Рис. 12.13

Утверждение 12.3. Множество $B = A \blacktriangleright R$ удовлетворяет включению

$$(X \times B) \bigcap R \subset A \times Y \qquad (12.20)$$

и является объединением всех множеств $B \subset Y$, каждое из которых удовлетворяет включению (12.20) (см. рис. 12.14).

Доказательство. Возьмем любую точку $(x, y) \in (X \times (A \blacktriangleright R)) \bigcap R$. Это значит, что $y \in A \blacktriangleright R$ и $(x, y) \in R$. Отсюда и из формулы (12.19) следует, что точка $x \in A$. Стало быть, $(x, y) \in A \times Y$.

Пусть множество $B \subset Y$ удовлетворяет включению (12.20). Возьмем любые точки $y \in B$ и $x \in Ry$. Тогда $(x, y) \in X \times B$ и $(x, y) \in R$. Отсюда и из включения (12.20) следует, что $x \in A$. Применяя формулу (12.19), получим требуемое включение $y \in A \blacktriangleright R$.

Запишем *характеристические функции* $\delta_{A\blacktriangleright R}(y)$ множества $A \blacktriangleright R$.

Лемма 12.3. При любом $y \in Y$ верно равенство

$$\delta_{A\blacktriangleright R}(y) = \inf_{x\in X} ((\delta_R(x, y)) \blacksquare (\delta_A(x))). \qquad (12.21)$$

Доказательство. Имеем

$$\delta_{A\blacktriangleright R}(y) = \begin{cases} 0, \textit{ если } (x, y) \in R \textit{ при некотором } x \notin A, \\ 1 \textit{ в противном случае} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0, \textit{ если } \delta_R(x, y) = 1 \textit{ и } \delta_A(x) = 0 \textit{ при некотором } x \in X, \\ 1 \textit{ в противном случае} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0, \textit{ если } \delta_R(x, y) > \delta_A(x) \textit{ при некотором } x \in X, \\ 1 \textit{ в противном случае} \end{cases} =$$

$$= \inf_{x\in X} \begin{cases} 1, & \text{если } \delta_R(x,y) \le \delta_A(x) \text{ для всех } x \in X, \\ \delta_A(x), & \text{если } \delta_R(x,y) > \delta_A(x) \text{ при некотором } x \in X \end{cases} =$$

$$= \inf_{x\in X} ((\delta_R(x, y)) \blacksquare (\delta_A(x))).$$

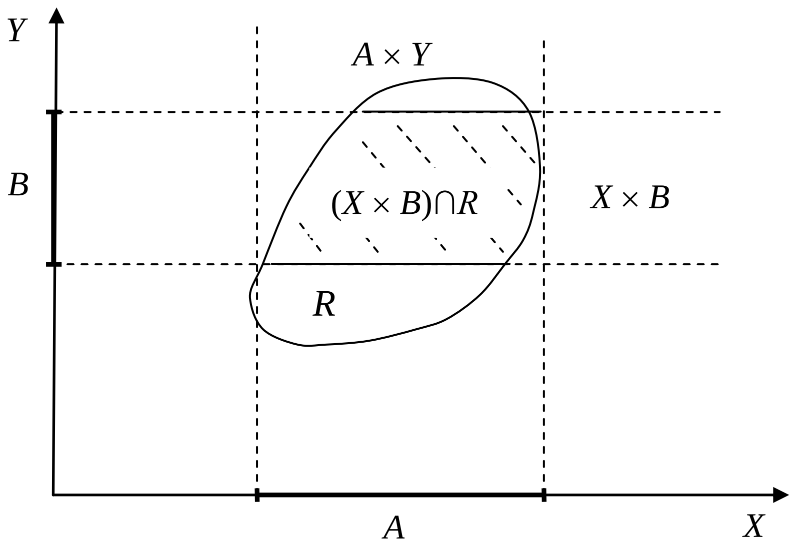

Рис. 12.14

Пример 12.3. Пусть $X = Y = R^n$, S — евклидов шар в R^n единичного радиуса с центром в начале координат. Зафиксируем число $a \ge 0$ и рассмотрим бинарное отношение xRy тогда и только тогда, когда выполнено включение $x + y \in aS$.

Возьмем в качестве множества $A = bS$, где число $b \ge 0$. Тогда

$xR = –x + aS$; $Ry = –y + aS$; $A \blacklozenge R = (a + b)S$;

$A \blacktriangleleft R = \varnothing$, если $a < b$, и $A \blacktriangleleft R = (a – b)S$, если $a \ge b$;

$A \blacktriangleright R = \varnothing$, если $a > b$, и $A \blacktriangleright R = (b – a)S$, если $a \le b$.

Таким образом,

$$(A \blacktriangleleft R) \cup (A \blacktriangleright R) = |a – b|\, S \ne (a + b)S = A \blacklozenge R.$$

§ 13. Образ нечеткого множества при нечетком бинарном отношении

Рассмотрим задачу об определении образа нечеткого множества A универсального множества X в случае, когда само отображение между множествами X и Y носит нечеткий характер.

Пример 13.1. Пусть в данном городе имеется несколько высших учебных заведений, которые обозначим y_1, …, y_m. Абитуриент при выборе конкретного вуза, оценивает его по некоторым признакам x_1, …, x_m. Например, x_1 = {возможность получить востребованную специальность} и т. д. В качестве экспертов выступают N абитуриентов, причем, они оценивают как престижность признака x_i, так и наличие этого признака в вузе y_j.

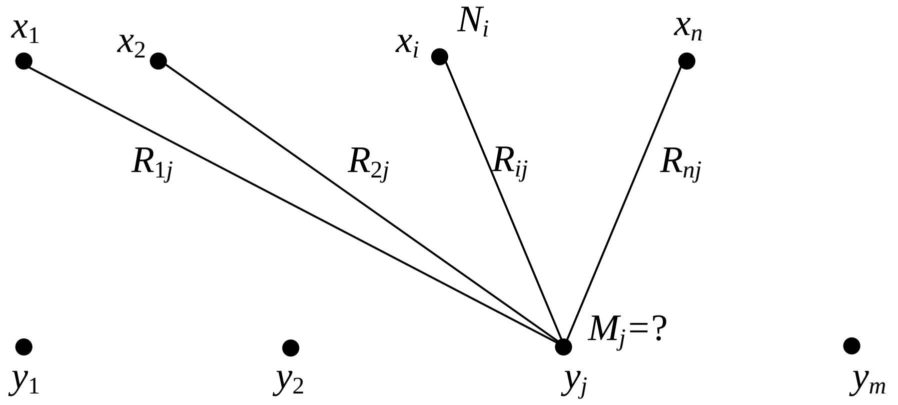

Рис. 13.1

Пусть R_{ij} абитуриентов отметило наличие признака x_i в вузе y_j, а N_i абитуриентов отметило признак x_i (см. рис. 13.1). Тогда число Q_{ij} абитуриентов, отметивших одновременно признак x_i и наличие его в вузе y_j, заключено в границах

$$\max(R_{ij}+N_i - N;\ 0) \le Q_{ij} \le \min(N_i;\ R_{ij}).$$

Если для конкретного вуза y_j перебрать все признаки x_i, то максимально возможное число абитуриентов, которые отметили какой-то признак и наличие его в этом вузе, равно

$$M_j = \max_{1 \le i \le n} \min(N_i;\ R_{ij}).$$

Будем считать, что число абитуриентов, отметивших вуз y_j посредством признаков x_i и их наличия в вузах, определяется этой формулой.

Обозначим $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ и $Y = \{y_1, \ldots, y_m\}$. Введем в рассмотрение нечеткое множество A = (*престижный признак*) универсального множества X и нечеткое множество B = (*престижный вуз*) универсального множества Y с функциями принадлежности

$$\mu_A(x_i) = \frac{N_i}{N}, \quad \mu_B(y_j) = \frac{M_j}{N}.$$

Тогда

$$\mu_B(y_j) = \max_{1 \le i \le n} \min(\mu_A(x_i); r_{ij}), \quad r_{ij} = \frac{R_{ij}}{N}. \tag{13.1}$$

Число $0 \le r_{ij} \le 1$ характеризует степень того, что признак x_i имеется в вузе y_j. Эти числа можно интерпретировать как значения функции принадлежности $\mu_R(x_i; y_j) = r_{ij}$ нечеткого множества прямого произведения $X \times Y$.

Рассмотрим общий случай определения образа нечеткого множества A универсального множества X при заданном нечетком бинарном отношении R из множества X во множество Y.

Определение 13.1. Нечетким отношением R из множества X во множество Y называется нечеткое множество R прямого произведения $X \times Y$ с функцией принадлежности $\mu_R(x; y)$.

Значения функции принадлежности $\mu_R(x;y)$ характеризуют меру наличия причинно-следственной связи между элементами x и y.

Положим в основу определения образа нечеткого множества A универсального множества X при заданном нечетком бинарном отношении R из множества X во множество Y свойство образа четкого множества при четком бинарном отношении. Ищем пересечение всех нечетких множеств B универсального множества Y, удовлетворяющих включению

$$(A \times Y) \wedge R \angle A \times B. \tag{13.2}$$

Функция прямого произведения двух нечетких множеств N универсального множества X и M универсального множества Y задается формулой (5.20)

$$\mu_{N \times M}(x, y) = \min(\mu_N(x); \mu_M(y)).$$

Поэтому включение (13.2) принимает вид неравенства

$$\min(\mu_A(x); \mu_B(y)) \ge \min(\min(\mu_A(x); \mu_Y(y)); \mu_R(x,y))$$

для любых $x \in X$, $y \in Y$. Функция принадлежности нечеткого множества Y тождественно равна единице. Поэтому предыдущее неравенство примет вид

$$\min(\mu_A(x);\ \mu_B(y)) \geq \min(\mu_A(x);\ \mu_R(x, y)) \qquad (13.3)$$

для любых $x \in X$, $y \in Y$.

Из леммы 11.9 и неравенства (13.3) получим

$$\mu_B(y) \geq \sup_{x \in X} \min(\mu_A(x);\ \mu_R(x, y)) \text{ для любых } y \in Y.$$

Следовательно, функция принадлежности нечеткого множества $A \blacklozenge R$, являющаяся нижней гранью всех функций μ_B: $Y \to [0, 1]$, удовлетворяющих предыдущему неравенству, равняется

$$\mu_{A \blacklozenge R}(y) = \sup_{x \in X} \min(\mu_A(x);\ \mu_R(x, y)). \qquad (13.4)$$

Определение 13.2. Образом нечеткого множества A универсального множества X нечеткого отношения R из множества X во множество Y называется нечеткое множество $A \blacklozenge R$ универсального множества Y, функция принадлежности которого определяется равенством (13.4).

Чтобы вычислить множества уровня $(A \blacklozenge R)(\alpha)$ при каждом $0 \leq \alpha \leq 1$ построим бинарное отношение $R(\alpha)$ из множества X во множество Y следующим образом:

$$(x, y) \in R(\alpha) \text{ тогда и только тогда, когда } \mu_R(x, y) \geq \alpha. \qquad (13.5)$$

Будем называть построенное бинарное отношение $R(\alpha)$ *отношением уровня* α нечеткого отношения R.

Для каждого числа $0 < \alpha \leq 1$ построим образ множества $A(\alpha)$ при бинарном отношении $R(\alpha) \subset X \times Y$:

$$A(\alpha) \blacklozenge R(\alpha) = \bigcup_{x \in A(\alpha)} xR(\alpha).$$

Приведем достаточные условия, при выполнении которых имеет место равенство

$$(A \blacklozenge R)(\alpha) = A(\alpha) \blacklozenge R(\alpha)). \qquad (13.6)$$

Теорема 13.1. Пусть при каждом числе $\alpha \in (0, 1]$ множество уровня $A(\alpha)$ является компактом, а нечеткое отношение R из X в Y удовлетворяет следующему условию замкнутости:

если $x_n \in X$, $x_n \to x \in A(\alpha)$, $y \in Y$, $\mu_R(x_n, y) \geq \alpha$, то $\mu_R(x, y) \geq \alpha$. (13.7)

Тогда при любом числе $0 < \alpha \leq 1$ выполнено равенство (13.6).

Доказательство. Возьмем число $0 < \alpha \leq 1$ и точку $y \in (A \blacklozenge R)(\alpha)$. Из формулы (13.4) получим

$$\sup_{x \in X} \min(\mu_A(x);\ \mu_R(x,y)) \geq \alpha.$$

Возьмем последовательность чисел $0 < \tau_1 < \ldots < \tau_{n-1} < \tau_n \to \alpha$. Тогда из предыдущего неравенства следует, что можно построить последовательность точек $x_n \in X$ такую, что $\min(\mu_A(x_n); \mu_R(x_n,y)) > \tau_n$. Отсюда следует, что существует последовательность точек $x_n \in A(\tau_n) \subset \subset A(\tau_1)$ и $\mu_R(x_n, y)) > \tau_n > \alpha$. Поскольку множество $A(\tau_1)$ является компактом, то можно считать, переходя, если нужно, к сходящейся подпоследовательности, что последовательность $x_n \to x \in X$. Зафиксируем любое число $\tau < \alpha$. Тогда, начиная с некоторого номера, все числа $\tau < \tau_n < \alpha$. Следовательно, $x_n \in A(\tau_n) \subset A(\tau)$ и $\mu_R(x_n, y) > \tau$. Поскольку множество $A(\tau)$ является компактом, то $x \in A(\tau)$. Таким образом, последовательность $x_n \in X$, $x_n \to x \in A(\tau)$, $y \in Y$, $\mu(x_n, y) \geq \tau$. Отсюда и из условия замкнутости (13.7) следует, что $\mu(x, y) \geq \tau$. Поскольку здесь взято любое число $\tau < \alpha$, то из свойства 5.2 для множеств уровня получим, что $x \in A(\alpha)$ и $\mu(x, y) \geq \alpha$. Стало быть, точка $y \in A(\alpha) \blacklozenge R(\alpha)$.

Пусть точка $y \in A(\alpha) \blacklozenge R(\alpha)$. Тогда $\mu(x_*, y) \geq \alpha$ для некоторой точки $x_* \in A(\alpha)$. Следовательно, $\min(\mu_A(x_*); \mu_R(x, y)) \geq \alpha$. Отсюда и из формулы (13.4) получим, что $\mu_{A\blacklozenge R}(y) \geq \alpha$. Стало быть, точка $y \in (A \blacklozenge R)(\alpha)$.

В общем случае можем построить верхнюю аппроксимацию

$$A \# R = \bigvee_{0<\alpha\leq 1} ((A(\alpha) \blacklozenge R(\alpha)) \,|\, \alpha). \tag{13.8}$$

семейства множеств $A(\alpha) \blacklozenge R(\alpha)$. Тогда из теоремы 5.4 следует:

$$\mu_{A\# R}(y) = 0, \text{ если } y \notin Y_0 = \bigcup_{0<\alpha\leq 1} (A(\alpha) \blacklozenge R(\alpha))$$

$$\text{и } \mu_{A\# R}(y) = \sup_{x\in X} \min(\mu_A(x); \mu_R(x, y)), \text{ если } y \in Y_0.$$

Рассмотрим случай, когда универсальные множества состоят из конечного числа элементов. Обозначим $\mu_A(x_i) = p_i$, $\mu_{A\blacklozenge R}(y_j) = q_j$, $\mu_R(x_i; y_j) = r_{ij}$. Тогда формулу (13.4) можно записать в матричном виде

$$(p_1, p_2, \ldots, p_n) \blacklozenge \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \ldots & r_{1m} \\ r_{21} & r_{22} & \ldots & r_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_{n1} & r_{n2} & \ldots & r_{nm} \end{pmatrix} = (q_1, q_2, \ldots, q_m). \tag{13.9}$$

В координатной форме эти уравнения принимают следующий вид:

$$\begin{gathered} \max(\min(p_1; r_{11});\ \min(p_2; r_{21}); \ldots; \min(p_n; r_{n1})) = q_1, \\ \max(\min(p_1; r_{1m});\ \min(p_2; r_{2m}); \ldots; \min(p_n; r_{nm})) = q_m. \end{gathered} \tag{13.10}$$

Проведем анализ формул (13.10). Степень принадлежности q_j элемента y_j образу нечеткого множества A универсального множества X при заданном нечетком бинарном отношении R из множества X во множество Y равна единице тогда и только тогда, когда найдется элемент $x_i \in X$ такой, что его степень принадлежности p_i нечеткому множеству A, а также числовой показатель r_{ij} наличия связи между x_i и y_j равны единице.

Степень принадлежности q_j элемента y_j образу нечеткого множества A универсального множества X при заданном нечетком бинарном отношении R из множества X во множество Y равна нулю тогда и только тогда, когда для любого элемента $x_i \in X$ либо его степень принадлежности p_i нечеткому множеству A, либо числовой показатель r_{ij} наличия связи между x_i и y_j, равны нулю.

Пример 13.2. Путь оцениваются три вуза (y_1, y_2, y_3) по четырем признакам (x_1, x_2, x_3, x_4). В результате опроса абитуриентов построены нечеткое множество A = (престижный признак) и матрица R, которая задает количественные показатели наличия признака x_i в вузе y_j. Пусть $A = \{(x_1 | 0); (x_2 | 1); (x_3 | 0,2); (x_4 | 0,5)\}$, а

$$R = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,6 & 0,4 \\ 1 & 0 & 0,2 \\ 0,2 & 0 & 0,9 \\ 0,4 & 0 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

У вуза y_1 существует признак x_2, для которого $p_2 = 1$ и $r_{12} = 1$. Следовательно, $q_1 = 1$. Для вуза y_2 числа $r_{22} = r_{32} = r_{42} = 0$ и $p_1 = 0$. Следовательно, $q_2 = 0$. Расписывая формулы (13.10), получим

$q_1 = \max(\min(0; 0,8); \min(1; 1); \min(0,2; 0,2); \min(0,5; 0,4)) = 1;$

$q_2 = \max(\min(0; 0,6); \min(1; 0); \min(0,2; 0); \min(0,5; 0)) = 0;$

$q_3 = \max(\min(0; 0,4); \min(1; 0,2); \min(0,2; 0,9); \min(0,5; 0,4)) = 0,4.$

Стало быть, при выборе вуза нужно ориентироваться на вуз y_1.

Пример 13.3. Рассмотрим конкретный пример о выборе одного из четырех мест работы y_1, y_2, y_3, y_4. Каждое место работы оценивается по следующим признакам:

x_1 = (*возможность научной работы*); x_2 = (*местонахождение*);

x_3 = (*возможность карьерного роста*); x_4 = (*материальные выгоды*);

x_5 = (*хороший коллектив*); x_6 = (*репутация места работы*).

Результаты опроса экспертов приведены в табл. 13.1.

Таблица 13.1

Признак	Место работы			
	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,1	0,4	0,3	0,5
x_2	0,8	0,7	0,4	0,4
x_3	0,3	0,1	0,8	0
x_4	0	0,6	0,5	0,4
x_5	0,2	0,5	0,4	0,8
x_6	0,2	0,4	0,6	0,1

В этой таблице на пересечении строки x_i со столбцом y_j стоит число, которое характеризует степень наличия признака x_i на месте работы y_j. Человек, ищущий место работы, выдает свои пожелания в виде нечеткого множества $A = \{(x_1|0{,}2), (x_2|0{,}3), (x_3|0{,}8), (x_4|0{,}9), (x_5|0{,}2), (x_6|0{,}3)\}$, универсальным множеством которого является множество признаков X.

Чтобы выдать ему рекомендацию в виде нечеткого множества

$$A \blacklozenge R = \{(y_1|q_1), (y_2|q_2), (y_3|q_3), (y_4|q_4)\},$$

решаем задачу (13.9):

$$(0{,}2;\ 0{,}3;\ 0{,}8;\ 0{,}9;\ 0{,}2;\ 0{,}3) \blacklozenge \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ 0{,}8 & 0{,}7 & 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}8 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 0{,}5 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}8 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}6 & 0{,}1 \end{pmatrix} = (q_1, q_2, q_3, q_4).$$

Из формул (13.10), находим: $A \blacklozenge R = \{(y_1|0{,}3), (y_2|0{,}6), (y_3|0{,}8), (y_4|0{,}4)\}$.

Рекомендуется выбрать в качестве место работы y_3.

Пример 13.4. Рассмотрим еще один конкретный пример о выборе одного из четырех мест работы y_1, y_2, y_3, y_4. Каждое место работы оценивается по шести признакам x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6.

Информация о наличии или отсутствии признака x_i у места работы y_j приведена в табл. 13.2. В этой таблице на пересечении строки x_i со столбцом y_j стоит единица, если место работы y_j обладает признаком x_i.

Таблица 13.2

Признак	Место работы			
	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0	1	1	0
x_2	1	1	0	1
x_3	0	1	1	0
x_4	0	0	1	1
x_5	1	0	0	1
x_6	0	0	1	1

Человек, ищущий место работы, выдает свои пожелания в виде нечеткого множества $A = \{(x_1|0{,}2), (x_2|0{,}3), (x_3|0{,}8), (x_4|0{,}9), (x_5|0{,}2), (x_6|0{,}3)\}$.

Чтобы выдать ему рекомендацию в виде нечеткого множества $B = \{(y_1|q_1), (y_2|q_2), (y_3|q_3), (y_4|q_4)\}$, решаем задачу (13.9):

$$(0{,}2;\ 0{,}3;\ 0{,}8;\ 0{,}9;\ 0{,}2;\ 0{,}3) \blacklozenge \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (q_1, q_2, q_3, q_4).$$

Из формул (19.10) находим нечеткое множество $B = \{(y_1|0{,}3), (y_2|0{,}8), (y_3|0{,}9), (y_4|0{,}9)\}$. Рекомендуем выбрать одно из мест работы — y_3 или y_4.

Теорема 13.2. Нечеткий образ (13.4) обладает следующими свойствами:

$$A_1 \angle A_2 \Rightarrow A_1 \blacklozenge R \angle A_2 \blacklozenge R; \quad R_1 \angle R_2 \Rightarrow A \blacklozenge R_1 \angle A \blacklozenge R_2; \tag{13.11}$$

$$\bigvee_{i=1}^{n} (A \blacklozenge R_i) = A \blacklozenge (\bigvee_{i=1}^{n} R_i); \tag{13.12}$$

$$A \blacklozenge (\bigwedge_{i=1}^{n} R_i) \angle \bigwedge_{i=1}^{n} (A \blacklozenge R_i). \tag{13.13}$$

Доказательство. Включения (13.11) непосредственно следуют из формулы (13.4). Покажем равенство (13.12). Обозначим через $\mu_i(x,y)$ функцию принадлежности нечеткого отношения R_i. Тогда доказываемое равенство (13.12) примет вид:

$$\max_{1 \le i \le n} \sup_{x \in X} \min(\mu_A(x);\ \mu_i(x, y)) = \sup_{x \in X} \min(\mu_A(x);\ \max_{1 \le i \le n} \mu_i(x, y)).$$

Переставляя местами операции max и sup, получим, что это соотношение выполнено, если для любой точки $x \in X$ выполнено равенство

$$\max_{1\le i\le n}\min(\mu(x);\ \mu_i(x, y)) = \min(\mu(x);\ \max_{1\le i\le n}\mu_i(x, y)).$$

Последнее равенство следует из первого равенства (11.9) в лемме 11.2.

Покажем включение (13.13). Имеем:

$$\sup_{x\in X}\min(\mu_A(x);\ \min_{1\le i\le n}\mu_i(x, y)) = \sup_{x\in X}\min_{1\le i\le n}\min(\mu_A(x);\ \mu_i(x, y)) \le$$

$$\le \min_{1\le i\le n}\sup_{x\in X}\min(\mu_A(x);\ \mu_i(x, y)).$$

Рассмотрим вопрос о композиции нечетких отношений, определяемых формулой (13.4). Пусть X, Y и Z — универсальные множества, R — нечеткое отношение из X в Y, F — нечеткое отношение из Y в Z. Возьмем нечеткое множество A универсального множества X и применим к нему нечеткое отношение R. Получим нечеткое множество $B = A \blacklozenge R$ универсального множества Y. Применим к нему нечеткое отношение F. Получим нечеткое множество $C = B \blacklozenge F = (A \blacklozenge R) \blacklozenge F$. В итоге построено нечеткое отношение T из X в Z. Это отношение называется *композицией нечетких отношений* F и R. Обозначим его:

$$T = R \blacklozenge F. \tag{13.14}$$

Вычислим функцию принадлежности композиции. Имеем

$$\mu_C(z) = \sup_{y\in Y}\min(\mu_B(y);\ \mu_F(y, z)) =$$

$$= \sup_{y\in Y}\min\,[\sup_{x\in X}\min\,\{\mu_A(x);\ \mu_R(x, y)\};\ \mu_F(y, z)].$$

Отсюда и из первого равенства (11.9) в лемме 11.2 получим

$$\mu_C(z) = \sup_{y\in Y}\sup_{x\in X}\min\,[\min\,\{\mu_A(x);\ \mu_R(x, y)\};\ \mu_F(y, z)] =$$

$$= \sup_{y\in Y}\sup_{x\in X}[\min\,\{\mu_A(x);\ \min(\mu_R(x, y);\ \mu_F(y, z))\}].$$

Переставляя местами операции взятия sup и применяя первое равенство (11.9) в лемме 11.2, будем иметь

$$\mu_C(z) = \sup_{x\in X}\min\,\{\mu_A(x);\ \sup_{y\in Y}\min(\mu_R(x, y);\ \mu_F(y, z))\}.$$

С другой стороны, $\mu_C(z) = \sup_{x\in X}\min(\mu_A(x);\ \mu_T(x, z))$. Сравнивая эти две формулы, получаем выражения для функции принадлежности композиции:

$$\mu_{R\blacklozenge F}(x, z) = \sup_{y\in Y}\min(\mu_R(x, y);\ \ \mu_F(y, z)). \tag{13.15}$$

Нечеткое отношение $R \blacklozenge F$ называется (max — min)-композицией нечетких отношений R и F.

Пусть универсальные множества X, Y и Z состоят из конечного числа элементов n, m и l соответственно. Тогда нечеткие отображения можно записать в виде матриц

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1m} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nn} \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1l} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{m1} & f_{m2} & \dots & f_{ml} \end{pmatrix},$$

$$T = R \blacklozenge F = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1m} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nn} \end{pmatrix} \blacklozenge \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1l} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{m1} & f_{m2} & \dots & f_{ml} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1l} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nl} \end{pmatrix}.$$

Координаты t_{ij} матрицы T вычисляются по формулам

$$t_{ij} = \max_{1 \le k \le n} \min(r_{ik}; f_{kj}). \qquad (13.16)$$

Это значит, что i-я строка матрицы R «*умножается*» на j-й столбец матрицы F с использованием операции min. Полученный результат *свертывается* с помощью операции max.

Теорема 13.3. Операция (max — min)-композиция нечетких отношений R из X в Y, F из Y в Z и Q из Z в W: *ассоциативна*, то есть

$$R \blacklozenge (F \blacklozenge Q) = (R \blacklozenge F) \blacklozenge Q; \qquad (13.17)$$

дистрибутивна относительно объединения, то есть для любых нечетких отношение F_1 и F_2 из Y в Z выполнено

$$R \blacklozenge (F_1 \vee F_2) = (R \blacklozenge F_1) \vee (R \blacklozenge F_2); \qquad (13.18)$$

монотонна:

$$F_1 \angle F_2 \Rightarrow R \blacklozenge F_1 \angle R \blacklozenge F_2. \qquad (13.19)$$

Доказательство. Обозначим $U = R \blacklozenge (F \blacklozenge Q)$ и $V = (R \blacklozenge F) \blacklozenge Q$. Тогда

$$\mu_U(x, w) = \sup_{y \in Y} (\min(\mu_R(x, y); \mu_{F \blacklozenge Q}(y, w)) =$$

$$= \sup_{y \in Y} \min(\mu_R(x, y); \sup_{z \in Z} \min(\mu_F(y, z); \mu_Q(z, w))).$$

Отсюда, используя первое равенство (11.9) в лемме 11.2, получим

$$\mu_U(x, w) = \sup_{y \in Y} \sup_{z \in Z} \min(\mu_R(x, y); \mu_F(y, z); \mu_Q(z, w))).$$

Аналогично показывается, что этому же выражению равняется и функция μ_V.

Обозначим через $U = R \blacklozenge (F_1 \vee F_2)$ и $V = (R \blacklozenge F_1) \vee (R \blacklozenge F_2)$. Тогда из формулы (13.17) имеем:

$$\mu_U(x, z) = \sup_{y \in Y} \min(\mu_R(x, y); \max(\mu_{F_1}(y, z); \mu_{F_2}(y, z))) =$$

$$= \sup_{y \in Y} \min(\mu_R(x, y); \max(\mu_{F_1}(y, z); \mu_{F_2}(y, z))) =$$

$$= \sup_{y \in Y} \max(\min(\mu_R(x, y); \mu_{F_1}(y, z)); \min(\mu_R(x, y); \mu_{F_2}(y, z))) =$$

$$= \max(\sup_{y \in Y} \min(\mu_R(x, y); \mu_{F_1}(y, z)); \sup_{y \in Y} \min(\mu_R(x, y); \mu_{F_2}(y, z))) = \mu_V(x, z).$$

Свойство (13.19) непосредственно следует из формулы (13.15).

§ 14. Подпрямой образ нечеткого множества при нечетком бинарном отношении

Рассмотрим задачу об определении подпрямого образа нечеткого множества A универсального множества X при заданном бинарном нечетком отношении R из множества X во множество Y.

Положим в основу определения подпрямого образа нечеткого множества A универсального множества X при заданном нечетком бинарном отношении R из множества X во множество Y свойство подпрямого образа четкого множества при четком бинарном отношении, сформулированном в утверждении 12.2. Ищем объединение всех нечетких множеств B универсального множества Y, удовлетворяющих включению

$$A \times B \angle R. \tag{14.1}$$

Функция принадлежности прямого произведения двух нечетких множеств A универсального множества X и B универсального множества Y задается формулой $\mu_{A \times B}(x, y) = \min(\mu_A(x); \mu_B(y))$. Поэтому включение (14.1) принимает вид неравенства

$$\min(\mu_A(x); \mu_B(y)) \le \mu_R(x, y) \text{ для любых } x \in X, y \in Y.$$

Отсюда, используя операцию срезки (11.1), получим

$$\mu_B(y) \le \mu_A(x) \blacksquare \mu_R(x, y) \text{ для любых } x \in X, y \in Y.$$

Следовательно, верхняя грань всех функций μ_B: $Y \to [0, 1]$, удовлетворяющих предыдущему неравенству, равняется

$$\mu_{A \blacktriangleleft R}(y) = \inf_{x \in X} (\mu_A(x) \blacksquare \mu_R(x, y)). \tag{14.2}$$

Определение 14.1. Подпрямым образом нечеткого множества A универсального множества X при заданном бинарном нечетком отношении R из множества X во множество Y называется нечеткое множество $A \blacktriangleleft R$ универсального множества Y, функция принадлежности которого задается формулой (14.2).

Рассмотрим случай, когда универсальные множества состоят из конечного числа элементов. Обозначим $\mu_A(x_i) = p_i$, $\mu_{A \blacktriangleleft R}(y_j) = q_j$, $\mu_R(x_i; y_j) = r_{ij}$. Тогда формулу (14.2) можно записать в матричном виде

$$(p_1, p_2, \ldots, p_n) \blacktriangleleft \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1m} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nm} \end{pmatrix} = (q_1, q_2, \ldots, q_m). \qquad (14.3)$$

В координатной форме эти уравнения принимают следующий вид:

$$\begin{array}{c} \min((p_1 \blacksquare r_{11}); (p_2 \blacksquare r_{21}); \ldots; (p_n \blacksquare r_{n1})) = q_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \min((p_1 \blacksquare r_{1m}); (p_2 \blacksquare r_{2m}); \ldots; (p_n \blacksquare r_{nm})) = q_m. \end{array} \qquad (14.4)$$

Пример 14.1. Рассмотрим пример 13.3 о выборе одного из четырех мест работы y_1, y_2, y_3, y_4, каждое из которых оценивается по шести признакам — $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$.

Матричная запись системы уравнений (14.4) имеет следующий вид:

$$(0{,}2; 0{,}3; 0{,}8; 0{,}9; 0{,}2; 0{,}3) \blacktriangleleft \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ 0{,}8 & 0{,}7 & 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}8 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 0{,}5 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}8 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}6 & 0{,}1 \end{pmatrix} = (q_1, q_2, q_3, q_4). \qquad (14.5)$$

Распишем подробно формулы (14.4). Имеем:

$$\min((0{,}2 \blacksquare 0{,}1); (0{,}3 \blacksquare 0{,}8); (0{,}8 \blacksquare 0{,}3); (0{,}9 \blacksquare 0); (0{,}2 \blacksquare 0{,}2); (0{,}3 \blacksquare 0{,}2)) = q_1;$$

$$\min((0{,}2 \blacksquare 0{,}4); (0{,}3 \blacksquare 0{,}7); (0{,}8 \blacksquare 0{,}1); (0{,}9 \blacksquare 0{,}6); (0{,}2 \blacksquare 0{,}5); (0{,}3 \blacksquare 0{,}4)) = q_2;$$

$$\min((0{,}2 \blacksquare 0{,}3); (0{,}3 \blacksquare 0{,}4); (0{,}8 \blacksquare 0{,}8); (0{,}9 \blacksquare 0{,}5); (0{,}2 \blacksquare 0{,}4); (0{,}3 \blacksquare 0{,}6)) = q_3;$$

$$\min((0{,}2 \blacksquare 0{,}5); (0{,}3 \blacksquare 0{,}4); (0{,}8 \blacksquare 0); (0{,}9 \blacksquare 0{,}4); (0{,}2 \blacksquare 0{,}8); (0{,}3 \blacksquare 0{,}1)) = q_4.$$

Отсюда, используя формулу (11.1), находим:

$$\min(0{,}1; 1; 0{,}3; 0; 1; 0{,}2) = q_1, \quad \min(1; 1; 0{,}1; 0{,}6; 1; 1) = q_2,$$
$$\min(1; 1; 1; 0{,}5; 1; 1) = q_3, \quad \min(1; 1; 0; 0{,}4; 1; 0{,}1) = q_4.$$

Стало быть, $A \blacktriangleleft R = \{(y_1|0), (y_2|0{,}1), (y_3|0{,}5), (y_4|0)\}$. Рекомендуется выбрать место работы y_3.

Выясним теперь связь между множествами $A(\alpha) \blacktriangleleft R(\alpha)$ и $(A \blacktriangleleft R)(\alpha)$.

Пример 14.2. Пусть имеются универсальные множества $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$. Бинарное нечеткое отношение R из множества X во множество Y задано матрицей

$$R = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0{,}6 & 0{,}1 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}6 \\ 1 & 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим нечеткое множество $A = \{(x_1| 0{,}1), (x_2| 0{,}3), (x_3| 0{,}8), (x_4| 0{,}4), (x_5| 0{,}2)\}$. Тогда множества уровня для значений параметра $\alpha = 0{,}3$ и $\alpha = 0{,}4$ равны $A(0{,}3) = \{x_2, x_3, x_4\}$, $A(0{,}4) = \{x_3, x_4\}$. Множества уровня нечеткого отношения R для этих значений α имеют вид

$$R(0{,}3) = R(0{,}4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычисляя по формуле (12.17) характеристические функции множеств $A(0{,}3) \blacktriangleleft R(0{,}3)$ и $A(0{,}4) \blacktriangleleft R(0{,}4)$, получим, что $\delta_{A(0,3)\blacktriangleleft R(0,3)}(y_1) = 1$, $\delta_{A(0,3)\blacktriangleleft R(0,3)}(y_i) = 0$ при $i = 2, 3$; $\delta_{A(0,4)\blacktriangleleft R(0,4)}(y_i) = 0$ при $i = 1, 2$, $\delta_{A(0,4)\blacktriangleleft R(0,4)}(y_3) = 1$. Следовательно, $A(0{,}3) \blacktriangleleft R(0{,}3) = \{y_1\}$ и $A(0{,}4) \blacktriangleleft R(0{,}4) = \{y_1, y_2\}$.

Рассмотренный пример показывает, что множества $A(\alpha) \blacktriangleleft R(\alpha)$, вообще говоря, не удовлетворяют условию убывания с ростом параметра уровня α и с их помощью нельзя, опираясь на теорему о разложении нечеткого множества, построить подпрямой образ нечеткого множества A.

Замечание 14.1. Отметим, что, если универсальные множества состоят из конечного числа элементов, формула (12.17) переходит в равенства (14.4).

Пример 14.3. Рассмотрим пример 14.1. При каждом числе $\alpha \in [0, 1]$ рассмотрим соотношения (14.4), записанные в матричной форме (14.3). В этих соотношениях $p_i = \delta_{A(\alpha)}(x_i)$, $r_{ij} = \delta_{R(\alpha)}(x_i, y_j)$, $q_j = \delta_{A(\alpha)\blacktriangleleft R(\alpha)}(y_j)$. Имеем

$$\alpha = 0 \Rightarrow (1, 1, 1, 1, 1, 1) \blacktriangleleft \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (1, 1, 1, 1);$$

$$0 < \alpha \le 0{,}1 \Rightarrow (1, 1, 1, 1, 1, 1) \blacktriangleleft \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (0, 1, 1, 0);$$

$$0{,}1 < \alpha \le 0{,}2 \Rightarrow (1, 1, 1, 1, 1, 1) \blacktriangleleft \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (0, 0, 1, 0);$$

$$0{,}2 < \alpha \le 0{,}3 \Rightarrow (0, 1, 1, 1, 0, 1) \blacktriangleleft \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (0, 0, 1, 0);$$

$$0{,}3 < \alpha \le 0{,}4 \Rightarrow (0, 0, 1, 1, 0, 0) \blacktriangleleft \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (0, 0, 1, 0);$$

$$0{,}4 < \alpha \le 0{,}5 \Rightarrow (0, 0, 1, 1, 0, 0) \blacktriangleleft \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (0, 0, 1, 0);$$

$$0{,}5 < \alpha \le 0{,}6 \Rightarrow (0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0) \blacktriangleleft \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (0,\ 0,\ 0,\ 0);$$

$$0{,}6 < \alpha \le 0{,}7 \Rightarrow (0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0) \blacktriangleleft \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (0,\ 0,\ 0,\ 0);$$

$$0{,}7 < \alpha \le 0{,}8 \Rightarrow (0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0) \blacktriangleleft \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (0,\ 0,\ 0,\ 0);$$

$$0{,}8 < \alpha \le 0{,}9 \Rightarrow (0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0) \blacktriangleleft \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (0,\ 0,\ 0,\ 0);$$

$$0{,}9 < \alpha \le 1 \Rightarrow (0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0) \blacktriangleleft \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (1,\ 1,\ 1,\ 1).$$

Запишем теперь числа $q_j = \delta_{(A \blacktriangleleft R)(\alpha)}(y_j)$ для множества $A \blacktriangleleft R =$ $= \{(y_1|0), (y_2|0{,}1), (y_3|0{,}5), (y_4|0)\}$. Имеем $\alpha = 0 \Rightarrow (1, 1, 1, 1)$; $0 < \alpha \le 0{,}1 \Rightarrow$ $\Rightarrow (0, 1, 1, 0)$; $0{,}1 < \alpha \le 0{,}5 \Rightarrow (0, 0, 1, 0)$; $0{,}5 < \alpha \le 1 \Rightarrow (0, 0, 0, 0)$. В табл. 14.1 показаны множества уровня.

Таким образом, равенства $A(\alpha) \blacktriangleleft R(\alpha) = (A \blacktriangleleft R)(\alpha)$ выполнены при $0 \le \alpha \le 0{,}9$. Видим, что множество

$$\bigcup_{0 \le \alpha \le 1} ((A(\alpha) \blacktriangleleft R(\alpha)) \mid \alpha) = \{(y_1|1), (y_2|1), (y_3|1), (y_4|1)$$

не совпадает с множеством $A \blacktriangleleft R$.

Таблица 14.1

α	$A(\alpha) \blacktriangleleft R(\alpha)$	$(A \blacktriangleleft R)(\alpha)$
$\alpha = 0$	y_1, y_2, y_3, y_4	y_1, y_2, y_3, y_4
$0 < \alpha \le 0{,}1$	y_2, y_3	y_2, y_3
$0{,}1 < \alpha \le 0{,}5$	y_3	y_3
$0{,}5 < \alpha \le 0{,}9$	$\varnothing$	$\varnothing$
$0{,}9 < \alpha \le 1$	y_1, y_2, y_3, y_4	$\varnothing$

Рассмотрим вопрос о вычислении множеств уровня $(A \blacktriangleleft R)(\alpha)$ в общем случае. С этой целью введем в рассмотрение следующие множества.

При любом $y \in Y$ рассмотрим совокупность $X_{A,R}(y)$ тех точек $x \in X$, значение функции принадлежности $\mu_A(x)$ в каждой из которых больше, чем показатель $\mu_R(x,y)$ наличия причинно-следственной связи между этой точкой x и точкой $y \in Y$. Таким образом,

$$X_{A,R}(y) = \{x \in X: \mu_A(x) > \mu_R(x, y)\}. \tag{14.6}$$

Обозначим

$$A \circ R = \{y \in Y: X_{A,R}(y) = \varnothing\} = \\ = \{y \in Y: \mu_A(x) \le \mu_R(x, y) \text{ для любого } x \in X\}. \tag{14.7}$$

Другими словами, точка $y \in A \circ R$ тогда и только тогда, когда для каждой точки $x \in X$ показатель $\mu_R(x, y)$ наличия причинно-следственной связи между этой точкой x и точкой y не меньше значения функции $\mu_A(x)$.

Введем в рассмотрение еще одно нечеткое множество $A \triangleleft R$, функция принадлежности которого задается формулой

$$\mu_{A \triangleleft R}(y) = \begin{cases} 0, & \text{если } X_{A,R}(y) = \phi, \\ \inf\limits_{x \in X_{A,R}(y)} \mu_R(x, y), & \text{если } X_{A,R}(y) \ne \phi. \end{cases} \tag{14.8}$$

Пример 14.4. Пусть $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$. На рис. 14.1 указаны численные значения $\mu_R(x_i, y_j)$ показателей причинно-следственных связей между элементами x_i и y_j. Отсутствие на рисунке линии, соединяющей пару элементов x_i и y_j, означает, что число $\mu_R(x_i, y_j) = 0$. Рассмотрим нечеткое множество $A = \{(x_1 | 0{,}2), (x_2 | 0{,}1), (x_3 | 0{,}1), (x_4 | 0{,}2)\}$. Тогда, как видно из рис. 14.1, множество $A \circ R$ состоит из точки y_3.

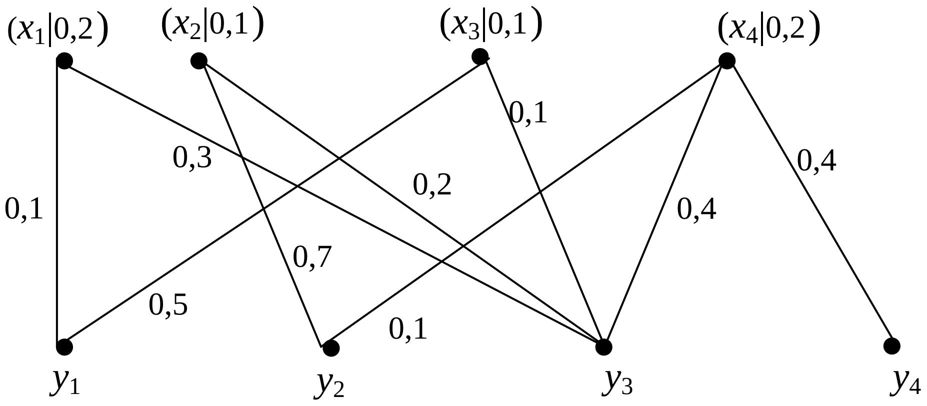

Рис. 14.1

Перейдем к матричной записи нечеткого отношения и вычислим по формулам (14.3) и (14.4) множество $A \blacktriangleleft R$. Имеем:

$$(0{,}2;\ 0{,}1;\ 0{,}1;\ 0{,}2) \blacktriangleleft \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0 & 0{,}3 & 0 \\ 0 & 0{,}7 & 0{,}2 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}1 & 0 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}4 \end{pmatrix} = (0;\ 0;\ 1;\ 0).$$

Из формулы (14.6) получим, что $X_{A,R}(y_1) = \{x_1, x_2, x_4\}$, $X_{A,R}(y_2) =$ $= \{x_1, x_3, x_4\}$, $X_{A,R}(y_3) = \varnothing$, $X_{A,R}(y_4) = \{x_2, x_2, x_3\}$. Следовательно, множество $A \circ R = y_3$.

Из формулы (14.8) следует, что $\mu_{A \triangleleft R}(y_i) = 0$ для всех $i = 1, 2, 3, 4$. Таким образом, в этом примере $A \triangleleft R = \varnothing$ и $A \circ R = A \blacktriangleleft R$.

Пример 14.5. Рассмотрим пример 14.1. Запишем значения $\mu_A(x_i)$ в виде столбца рядом с матрицей R

$$\begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}3 \\ 0{,}8 \\ 0{,}9 \\ 0{,}2 \\ 0{,}3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ 0{,}8 & 0{,}7 & 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}8 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 0{,}5 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}8 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}6 & 0{,}1 \end{pmatrix}.$$

Из формулы $X_{A,R}(y_j) = \{x \in X\colon \mu_A(x_i) > \mu_R(x_i, y_j)\}$ находим:

$$X_{A,R}(y_1) = \{x_1, x_3, x_4, x_6\},\ X_{A,R}(y_2) = \{x_3, x_4\},\ X_{A,R}(y_3) = \\ = \{x_4\},\ X_{A,R}(y_4) = \{x_3, x_4, x_6\}.$$

Следовательно, $A \circ R = \varnothing$. Из формулы (14.8) получим, что $\mu_{A \triangleleft R}(y_1) = 0$, $\mu_{A \triangleleft R}(y_2) = 0{,}1$, $\mu_{A \triangleleft R}(y_3) = 0{,}5$, $\mu_{A \triangleleft R}(y_4) = 0$. Видим, что $A \triangleleft R = A \blacktriangleleft R$.

Теорема 14.1. При любом числе $0 < \alpha \le 1$ верно равенство

$$(A \blacktriangleleft R)(\alpha) = (A \circ R) \bigcup (A \triangleleft R)(\alpha). \qquad (14.9)$$

Доказательство. Из формулы (14.2) следует, что $y \in (A \blacktriangleleft R)(\alpha)$ тогда и только тогда, когда $(\mu_A(x)) \blacksquare (\mu_R(x,y)) \ge \alpha$ при всех $x \in X$. Отсюда и из формулы (11.1) получим

$$y \in (A \blacktriangleleft R)(\alpha) \Leftrightarrow \{1 \ge \alpha, \text{ если } \mu_A(x) \le \mu_R(x, y)$$
$$\text{и } \mu_R(x, y) \ge \alpha, \text{ если } \mu_A(x) > \mu_R(x, y)\}.$$

Используя обозначение (14.6), предыдущее утверждение запишем в виде

$$y \in (A \blacktriangleleft R)(\alpha) \Leftrightarrow 1 \ge \alpha, \text{ если } x \notin X_{A,R}(y)$$
$$\text{и } \mu_R(x,y) \ge \alpha, \text{ если } x \in X_{A,R}(y).$$

Отсюда и из формул (14.7) и (14.8) следует:

$$y \in (A \blacktriangleleft R)(\alpha) \Leftrightarrow y \in (A \circ R) \bigcup (A \triangleleft R)(\alpha).$$

Пример 14.6. Пусть $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$, нечеткое множество $A = \{(x_1|0{,}2), (x_2|0{,}3), (x_3|0{,}8), (x_4|0{,}9), (x_5|0{,}2), (x_6|0{,}3)\}$, а нечеткое бинарное отношение из множества X во множество Y равно

$$R = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ 0{,}8 & 0{,}7 & 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}8 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 0{,}9 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}8 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}6 & 0{,}1 \end{pmatrix}.$$

Тогда из формулы (14.6) находим, что $X_{A,R}(y_1) = \{x_1, x_3, x_4, x_6\}$, $X_{A,R}(y_2) = \{x_3, x_4\}$, $X_{A,R}(y_3) = \varnothing$, $X_{A,R}(y_4) = \{x_3, x_4, x_6\}$. Следовательно, $A \circ R = \{y_3\}$. Далее, из формулы (14.8) получим

$$\mu_{A \triangleleft R}(y_1) = 0;\ \mu_{A \triangleleft R}(y_2) = 0{,}1;\ \mu_{A \triangleleft R}(y_3) = 0;\ \mu_{A \triangleleft R}(y_4) = 0.$$

Стало быть, $A \triangleleft R = \{(y_1|0), (y_2|0{,}1), (y_3|0), (y_4|0)\}$. Далее, из равенств

$$(0{,}2;\ 0{,}3;\ 0{,}8;\ 0{,}9;\ 0.2;\ 0{,}3) \blacktriangleleft \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ 0{,}8 & 0{,}7 & 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}8 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 0{,}9 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}8 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}6 & 0{,}1 \end{pmatrix} = (0;\ 0{,}1;\ 1;\ 0)$$

следует, что $A \blacktriangleleft R = \{(y_1|0), (y_2|0{,}1), (y_3|0{,}2), (y_4|0)\}$.

В табл. 14.2 приведены множества $(A \triangleleft R)(\alpha)$ и $(A \blacktriangleleft R)(\alpha)$. Эта таблица иллюстрирует формулу (14.9).

Таблица 14.2

α	$(A \triangleleft R)(\alpha)$	$(A \blacktriangleleft R)(\alpha)$
$0 < \alpha \le 0{,}1$	y_2	y_2, y_3
$0{,}1 < \alpha \le 1$	$\varnothing$	y_3

Теорема 14.2. Нечеткое отношение (14.2) обладает следующими свойствами:

$$A_1 \angle A_2 \Rightarrow A_2 \blacktriangleleft R \angle A_1 \blacktriangleleft R; \quad R_1 \angle R_2 \Rightarrow A \blacktriangleleft R_1 \angle A \blacktriangleleft R_2; \qquad (14.10)$$

$$A \blacktriangleleft (\bigvee_{i=1}^{n} R_i) \angle \bigvee_{i=1}^{n} (A \blacktriangleleft R_i); \quad \bigwedge_{i=1}^{n} (A \blacktriangleleft R_i) = A \blacktriangleleft (\bigwedge_{i=1}^{n} R_i). \qquad (14.11)$$

Доказательство. Докажем первое утверждение в (14.10). Обозначим через $\mu_i(x)$ и $\nu_i(y)$ функции принадлежности нечетких множеств A_i и $A_i \blacktriangleleft R$ соответственно, $i = 1, 2$. Из неравенства $\mu_1(x) \le \mu_2(x)$ при любом $x \in X$ и из неравенства (11.3) в лемме 11.1 получим, что $\mu_1(x) \blacksquare \mu_R(x, y) \ge \mu_2(x) \blacksquare \mu_R(x, y)$ при любых $x \in X$ и $y \in Y$. Отсюда и из формулы (14.2) следует, что $\nu_2(y) \le \nu_1(y)$ при любом $y \in Y$. Стало быть, $A_2 \blacktriangleleft R \angle A_1 \blacktriangleleft R$.

Докажем теперь второе утверждение в (14.10). Обозначим через $\mu_i(x,y)$ и $\nu_i(y)$ функции принадлежности нечетких множеств R_i и $A \blacktriangleleft R_i$ соответственно, $i = 1, 2$. Из неравенства $\mu_1(x,y) \le \mu_2(x,y)$ для любых $x \in X, y \in Y$ и из первого неравенства в лемме 11.1 получим

$$\mu_A(x) \blacksquare \mu_1(x, y) \le \mu_A(x) \blacksquare \mu_2(x, y)$$

при любых $x \in X$ и $y \in Y$.

Отсюда и из формулы (14.2) следует, что $\nu_2(y) \ge \nu_1(y)$ при любых $y \in Y$. Стало быть, $A \blacktriangleleft R_1 \angle A \blacktriangleleft R_2$.

Докажем включение (14.11). Пусть $\nu(y)$ — функция принадлежности нечеткого множества $\bigvee_{i=1}^{n} (A \blacktriangleleft R_i)$, а $\mu_i(x, y)$ — функция принадлежности нечеткого отношения R_i. Тогда

$$\nu(y) = \max_{1 \le i \le n} \inf_{x \in X} (\mu_A(x) \blacksquare \mu_i(x, y)) \le \inf_{x \in X} \max_{1 \le i \le n} (\mu_A(x) \blacksquare \mu_i(x, y)).$$

Отсюда и из равенства (11.8) в лемме 11.2 получим

$$\nu(y) \le \inf_{x \in X} (\mu_A(x) \blacksquare \max_{1 \le i \le n} \mu_i(x, y)).$$

Последнее выражение является функцией принадлежности нечеткого множества $A \blacktriangleleft (\bigvee_{i=1}^{n} R_i)$.

Докажем равенство (14.11). Пусть $\nu(y)$ — функция принадлежности нечеткого множества $\bigwedge_{i=1}^{n}(A \blacktriangleleft R_i)$. Тогда

$$\nu(y) = \min_{1\le i\le n} \inf_{x\in X} (\mu_A(x) \blacksquare \mu_i(x, y)) = \inf_{x\in X} \min_{1\le i\le n} (\mu_A(x) \blacksquare \mu_i(x, y)).$$

Отсюда и из второго равенства (11.8) в лемме 11.2 получим

$$\nu(y) = \inf_{x\in X} (\mu_A(x) \blacksquare \min_{1\le i\le n} \mu_i(x, y)).$$

Последнее выражение является функцией принадлежности нечеткого множества $A \blacktriangleleft (\bigwedge_{i=1}^{n} R_i)$.

§ 15. Надпрямой образ нечеткого множества при нечетком бинарном отношении

Рассмотрим задачу об определении подпрямого образа нечеткого множества A универсального множества X при заданном бинарном нечетком отношении R из множества X во множество Y.

Положим в основу определения надпрямого образа нечеткого множества A универсального множества X при заданном нечетком бинарном отношении R из множества X во множество Y свойство надпрямого образа четкого множества при четком бинарном отношении, сформулированном в утверждении 12.3. Ищем объединение всех нечетких множеств B универсального множества Y, удовлетворяющих включению

$$(X \times B) \wedge R \angle A \times Y. \tag{15.1}$$

Учитывая равенства $\mu_X(x) \equiv 1$, $\mu_Y(y) \equiv 1$, запишем это включение с помощью функций принадлежности в виде неравенства

$$\min(1; \mu_B(y); \mu_R(x, y)) \le \min(\mu_A(x);1) \text{ для любых } x \in X, y \in Y.$$

Отсюда получим

$$\min(\mu_B(y); \mu_R(x, y)) \le \mu_A(x) \text{ для любых } x \in X, y \in Y.$$

Применяя операцию срезки (11.1), запишем последнее неравенство в следующем виде:

$$\mu_B(y) \le \mu_R(x, y) \blacksquare \mu_A(x) \text{ для любых } x \in X, y \in Y.$$

Следовательно, верхняя грань всех функций μ_B: $Y \to [0, 1]$, удовлетворяющих предыдущему неравенству, равняется

$$\mu_{A\blacktriangleright R}(y) = \inf_{x\in X} (\mu_R(x, y) \blacksquare \mu_A(x)). \tag{15.2}$$

Определение 15.1. *Надпрямым образом* нечеткого множества A универсального множества X при заданном бинарном нечетком отношении R из множества X во множество Y называется нечеткое множество $A \blacktriangleright R$ универсального множества Y, функция принадлежности которого задается формулой (15.2).

Рассмотрим случай, когда универсальные множества состоят из конечного числа элементов. Обозначим $\mu_A(x_i) = p_i$, $\mu_{A \blacktriangleleft R}(y_j) = q_j$, $\mu_R(x_i; y_j) = r_{ij}$. Тогда формулу (15.2) можно записать в матричном виде:

$$(p_1, p_2, \ldots, p_n) \blacktriangleright \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \ldots & r_{1m} \\ r_{21} & r_{22} & \ldots & r_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_{n1} & r_{n2} & \ldots & r_{nm} \end{pmatrix} = (q_1, q_2, \ldots, q_m). \qquad (15.3)$$

В координатной форме эти уравнения принимают следующий вид:

$$\begin{gathered} \min((r_{11} \blacksquare p_1); (r_{21} \blacksquare p_2); \ldots; (r_{n1} \blacksquare p_n)) = q_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \min((r_{1m} \blacksquare p_1); (r_{2m} \blacksquare p_2); \ldots; (r_{nm} \blacksquare p_n)) = q_m. \end{gathered} \qquad (15.4)$$

Пример 15.1. Рассмотрим пример 14.1 о выборе одного из четырех мест работы y_1, y_2, y_3, y_4, каждое из которых оценивается по шести признакам — $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$. Матричная запись системы уравнений (15.4) имеет следующий вид:

$$(0{,}2; 0{,}3; 0{,}8; 0{,}9; 0{,}2; 0{,}3) \blacktriangleright \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ 0{,}8 & 0{,}7 & 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}8 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 0{,}5 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}8 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}6 & 0{,}1 \end{pmatrix} = (q_1, q_2, q_3, q_4).$$

Распишем подробно формулы (15.4). Имеем:

$\min((0{,}1 \blacksquare 0{,}2); (0{,}8 \blacksquare 0{,}3); (0{,}3 \blacksquare 0{,}8); (0 \blacksquare 0{,}9); (0{,}2 \blacksquare 0{,}2); (0{,}2 \blacksquare 0{,}3)) = q_1;$

$\min((0{,}4 \blacksquare 0{,}2); (0{,}7 \blacksquare 0{,}3); (0{,}1 \blacksquare 0{,}8); (0{,}6 \blacksquare 0{,}9); (0{,}5 \blacksquare 0{,}2); (0{,}4 \blacksquare 0{,}3)) = q_2;$

$\min((0{,}3 \blacksquare 0{,}2); (0{,}4 \blacksquare 0{,}3); (0{,}8 \blacksquare 0{,}8); (0{,}5 \blacksquare 0{,}9); (0{,}4 \blacksquare 0{,}2); (0{,}6 \blacksquare 0{,}3)) = q_3;$

$\min((0{,}5 \blacksquare 0{,}2); (0{,}4 \blacksquare 0{,}3); (0 \blacksquare 0{,}8); (0{,}4 \blacksquare 0{,}9); (0{,}8 \blacksquare 0{,}2); (0{,}1 \blacksquare 0{,}3)) = q_4.$

Отсюда, используя вид срезки (11.1), находим:

$\min(1; 0{,}3; 1; 1; 1; 1) = q_1;$ $\quad \min(0{,}2; 0{,}3; 1; 1; 0{,}2; 0{,}3) = q_2;$

$\min(0{,}2; 1; 1; 1; 0{,}2; 0{,}3) = q_3;$ $\quad \min(0{,}2; 0{,}3; 1; 1; 0{,}2; 1) = q_4.$

Стало быть, $A \blacktriangleright R = \{(y_1|0{,}3), (y_2|0{,}2), (y_3|0{,}2), (y_4|0{,}2)$. Рекомендуется выбрать y_1 в качестве места работы.

Замечание 15.1. Отметим, что, если универсальные множества состоят из конечного числа элементов, то формула (12.21) переходит в равенства (15.4).

Выясним теперь связь между множествами $A(\alpha) \blacktriangleright R(\alpha)$ и $(A \blacktriangleright R)(\alpha)$.

Пример 15.2. Рассмотрим пример 15.1. При каждом числе $\alpha \in [0, 1]$ рассмотрим соотношения (15.4), записанные в матричной форме (15.3). В этих соотношениях $p_i = \delta_{A(\alpha)}(x_i)$, $r_{ij} = \delta_{R(\alpha)}(x_i, y_j)$, $q_j = \delta_{A(\alpha) \blacktriangleright R(\alpha)}(y_j)$. Имеем

$$\alpha = 0 \Rightarrow (1, 1, 1, 1, 1, 1) \blacktriangleright \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (1, 1, 1, 1);$$

$$0 < \alpha \le 0{,}1 \Rightarrow (1, 1, 1, 1, 1, 1) \blacktriangleright \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (1, 1, 1, 1);$$

$$0{,}1 < \alpha \le 0{,}2 \Rightarrow (1, 1, 1, 1, 1, 1) \blacktriangleright \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (1, 1, 1, 1);$$

$$0{,}2 < \alpha \le 0{,}3 \Rightarrow (0, 1, 1, 1, 0, 1) \blacktriangleright \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (1, 0, 0, 0);$$

$$0{,}3 < \alpha \le 0{,}4 \Rightarrow (0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0) \blacktriangleright \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (0,\ 0,\ 0,\ 0);$$

$$0{,}4 < \alpha \le 0{,}5 \Rightarrow (0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0) \blacktriangleright \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (0,\ 0,\ 0,\ 0);$$

$$0{,}5 < \alpha \le 0{,}6 \Rightarrow (0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0) \blacktriangleright \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (0,\ 0,\ 0,\ 0);$$

$$0{,}6 < \alpha \le 0{,}7 \Rightarrow (0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0) \blacktriangleright \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (0,\ 0,\ 1,\ 0);$$

$$0{,}7 < \alpha \le 0{,}8 \Rightarrow (0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0) \blacktriangleright \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (0,\ 1,\ 1,\ 0);$$

$$0{,}8 < \alpha \le 0{,}9 \Rightarrow (0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0) \blacktriangleright \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (1,\ 1,\ 1,\ 1);$$

$$0{,}9 < \alpha \le 1 \Rightarrow (0,\, 0,\, 0,\, 0,\, 0,\, 0) \blacktriangleright \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (1,\, 1,\, 1,\, 1).$$

Запишем теперь числа $q_j = \delta_{(A \blacktriangleright R)(\alpha)}(y_j)$ для множества $A \blacktriangleright R =$ $= \{(y_1|0{,}3),\ (y_2|0{,}2),\ (y_3|0{,}2),\ (y_4|0{,}2)$. Имеем

$$0 \le \alpha \le 0{,}2 \Rightarrow (1,\, 1,\, 1,\, 1);\ 0{,}2 < \alpha \le 0{,}3 \Rightarrow (0,\, 1,\, 1,\, 1);$$

$$0{,}3 < \alpha \le 1 \Rightarrow (0,\, 0,\, 0,\, 0).$$

В табл. 15.1 приведены множества уровня.

Таблица 15.1

α	$A(\alpha) \blacktriangleright R(\alpha)$	$(A \blacktriangleright R)(\alpha)$
$0 \le \alpha \le 0{,}2$	y_1, y_2, y_3, y_4	y_1, y_2, y_3, y_4
$0{,}2 < \alpha \le 0{,}3$	y_2, y_3, y_4	y_1
$0{,}3 < \alpha \le 0{,}6$	$\varnothing$	$\varnothing$
$0{,}6 < \alpha \le 0{,}7$	$\varnothing$	y_3
$0{,}7 < \alpha \le 0{,}8$	$\varnothing$	y_2, y_3
$0{,}8 < \alpha \le 1$	$\varnothing$	y_1, y_2, y_3, y_4

Таким образом, равенства $A(\alpha) \blacktriangleright R(\alpha) = (A \blacktriangleright R)(\alpha)$ выполнены при $0 \le \alpha \le 0{,}2$. Множество

$$\bigcup_{0<\alpha\le 1} ((A(\alpha) \blacktriangleright R(\alpha)) \,|\, \alpha) = \{(y_1|0{,}2),\ (y_2|0{,}3),\ (y_3|0{,}3),\ (y_4|0{,}3)\}$$

не совпадает с множеством $A \blacktriangleright R$.

Теорема 15.1. Нечеткое отношение (15.2) обладает следующими свойствами:

$$A_1 \angle A_2 \Rightarrow A_1 \blacktriangleright R \angle A_2 \blacktriangleright R;\quad R_1 \angle R_2 \Rightarrow A \blacktriangleright R_2 \angle A \blacktriangleright R_1; \quad (15.5)$$

$$\bigvee_{i=1}^{n} (A \blacktriangleright R_i) \angle A \blacktriangleright (\bigwedge_{i=1}^{n} R_i);\quad \bigwedge_{i=1}^{n} (A \blacktriangleright R_i) = A \blacktriangleright (\bigvee_{i=1}^{n} R_i). \quad (15.6)$$

Доказательство. Обозначим через $\mu_i(x)$ и $\nu_i(y)$ функции принадлежности нечетких множеств A_i и $A_i \blacktriangleright R$ соответственно, $i = 1, 2$.

Докажем вначале первое включение в (15.4). Пусть$\mu_1(x) \le \mu_2(x)$ при любом $x \in X$. Тогда из первого неравенства (11.4) в лемме 11.1 следует:

$$\mu_R(x, y) \blacksquare \mu_1(x) \le \mu_R(x, y) \blacksquare \mu_2(x) \text{ для любых } x \in X \text{ и } y \in Y.$$

Отсюда и из формулы (15.2) следует, что $\nu_1(y) \le \nu_2(y)$ для любого $y \in Y$.

Докажем теперь второе включение в (15.4). Обозначим через $\mu_i(x,y)$ и $\nu_i(y)$ функции принадлежности нечетких множеств R_i и $A \blacktriangleright R_i$ соответственно, $i = 1, 2$. Пусть $\mu_1(x, y) \le \mu_2(x, y)$ при любых $x \in X$ и $y \in Y$. Тогда из неравенства (11.3) в лемме 11.1 получим

$$\mu_2(x, y) \blacksquare \mu_A(x) \le \mu_1(x, y) \blacksquare \mu_A(x) \text{ для любых } x \in X \text{ и } y \in Y.$$

Отсюда и из формулы (15.2) следует, что $\nu_2(y) \le \nu_1(y)$ для любого $y \in Y$.

Докажем первое включение в (15.6). Обозначим через $\mu(y)$ функцию принадлежности нечеткого множества $\bigvee_{i=1}^{n} (A \blacktriangleright R_i)$, а через $\mu_i(x, y)$ — функцию принадлежности нечеткого отношения R_i. Тогда

$$\mu(y) = \max_{1 \le i \le n} \inf_{x \in X} (\mu_i(x, y) \blacksquare \mu_A(x)) \le \inf_{x \in X} \max_{1 \le i \le n} (\mu_i(x, y) \blacksquare \mu_A(x)).$$

Отсюда и из второго неравенства (11.7) в следствии 11.1 получим

$$\mu(y) \le \inf_{x \in X} (\min_{1 \le i \le n} \mu_i(x, y) \blacksquare \mu_A(x)).$$

Последнее выражение является функцией принадлежности нечеткого множества $A \blacktriangleright (\bigwedge_{i=1}^{n} R_i)$.

Докажем второе равенство в (15.6). Обозначим через $\mu(y)$ функцию принадлежности нечеткого множества $\bigwedge_{i=1}^{n} (A \blacktriangleright R_i)$. Тогда

$$\mu(y) = \min_{1 \le i \le n} \inf_{x \in X} (\mu_i(x, y) \blacksquare \mu_A(x)) = \inf_{x \in X} \min_{1 \le i \le n} (\mu_i(x, y) \blacksquare \mu_A(x)).$$

Отсюда и из первого равенства (11.8) в лемме 11.2 получим

$$\mu(y) = \inf_{x \in X} (\max_{1 \le i \le n} \mu_i(x, y) \blacksquare \mu_A(x)).$$

Последнее выражение является функцией принадлежности нечеткого множества $A \blacktriangleright (\bigvee_{i=1}^{n} R_i)$.

§ 16. Прообразы нечеткого множества при нечетком бинарном отношении

Рассмотрим пример *упрощенной модели диагностики автомобиля*, который показывает необходимость введения понятия прообраза нечеткого множества при нечетком отображении.

Пример 16.1. Рассмотрим упрощенную модель диагностики неисправности автомобиля. Обозначим возможные неизвестные факторы его неполадок: x_1 — неисправность аккумулятора, x_2 — отработка машинного масла. На выходе наблюдаются: y_1 — затруднение при запуске, y_2 — ухудшение цвета выхлопных газов, y_3 — недостаток мощности. Между x_i и y_j существуют причинно-следственные связи, которые эксперт-автомеханик задал матрицей

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \end{pmatrix}.$$

Результаты осмотра автомобиля задали нечеткое множество $B = \{(y_1 | q_1),\ (y_2 | q_2),\ (y_3 | q_3)\}$. Требуется восстановить нечеткое множество $A = \{(x_1 | p_1),(x_2 | p_2)\}$, которое задает неисправности автомобиля. Это множество характеризуется тем, что при применении к нему нечеткого отношения R оно переходит в нечеткое множество B. При этом возможны следующие связи: $B = A \blacklozenge R$, $B = A \blacktriangleleft R$ и $B = A \blacktriangleright R$.

Рассмотрим эту задачу в общем виде. Пусть заданы два универсальных множества X и Y. Заданы нечеткое отношение R из X в Y и нечеткое множество B универсального множества Y. Требуется найти нечеткое множество A универсального множества X такое, чтобы $B = A \blacklozenge R$. Тогда для определения функции принадлежности нечеткого множества A будем иметь формулу

$$\mu_B(y) = \sup_{x \in X} \min(\mu_A(x);\ \mu_R(x, y)). \tag{16.1}$$

Пример 16.2. Рассмотрим пример 16.1, в котором матрица имеет значения

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Формула (16.1) принимает вид

$$(p_1, p_2) \blacklozenge \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (q_1, q_2, q_3) \Rightarrow p_1 = q_1,\ p_2 = q_2,\ p_2 = q_3.$$

Отсюда видно, что при $q_2 \neq q_3$ невозможно определить числа p_1 и p_2.

Будем рассматривать задачу об определении прообраза A множества B универсального множества Y при нечетком отношении из множества X во множество Y, исходя из включения (13.2).

Определение 16.1. Назовем $\blacklozenge$*-прообразом нечеткого множества B* универсального множества Y при нечетком отношении R из X в Y объединение всех нечетких множеств A универсального множества X, удовлетворяющих включению $(A \times Y) \wedge R \angle A \times B$.

Теорема 16.1. Функция принадлежности $\blacklozenge$-прообраза равняется

$$\mu^{\blacklozenge}(x) = \inf_{y \in Y} (\mu_R(x, y) \blacksquare \mu_B(y)). \quad (16.2)$$

Доказательство. Для функций принадлежности включение $(A \times Y) \wedge R \angle A \times B$ принимает вид неравенства

$$\min(\mu_A(x); \mu_B(y)) \geq \min(\mu_A(x); \mu_R(x, y))$$

для любых $x \in X$ и $y \in Y$.

Применяя лемму 11.5, запишем это неравенство в виде

$$0 \leq \mu_A(x) \leq (\mu_R(x, y) \blacksquare \mu_B(y)) \text{ для любых } x \in X \text{ и } y \in Y.$$

Следовательно,

$$0 \leq \mu_A(x) \leq \inf_{y \in Y} (\mu_R(x, y) \blacksquare \mu_B(y)) \text{ для любых } x \in X.$$

Отсюда и из определения 16.1 получим формулу (16.2).

Рассмотрим теперь случай конечных множеств $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $Y = \{y_1, \ldots, y_m\}$. Пусть нечеткое отношение R из множества X во множество Y задано матрицей $\{r_{ij}\}$, где $i = \overline{1, n}$ и $j = \overline{1, m}$. Тогда формула (16.2) принимает вид

$$(q_1, q_2, \ldots, q_m) \blacktriangleright \begin{pmatrix} r_{11} & r_{21} & \ldots & r_{n1} \\ r_{12} & r_{22} & \ldots & r_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_{1m} & r_{2m} & \ldots & r_{nm} \end{pmatrix} = (p_1^{\blacklozenge}, p_2^{\blacklozenge}, \ldots, p_n^{\blacklozenge}). \quad (16.3)$$

Пример 16.3. Рассмотрим пример 16.2. Формула (16.3) примет следующий вид:

$$(q_1, q_2, q_3) \blacktriangleright \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (p_1^{\blacklozenge}, p_2^{\blacklozenge}) \Rightarrow \min((1 \blacksquare q_1); (0 \blacksquare q_2); (0 \blacksquare q_3)) = p_1^{\blacklozenge},$$

$$\min((0 \blacksquare q_1); (1 \blacksquare q_2); \quad (1 \blacksquare q_3)) = p_2^{\blacklozenge} \Rightarrow \min(q_1; 1; 1) = p_1^{\blacklozenge},$$

$$\min(1; q_2; q_3) = p_2^{\blacklozenge} \Rightarrow p_1^{\blacklozenge} = q_1, p_2^{\blacklozenge} = \min(q_2; q_3).$$

Определение 16.2. Назовем ◄*-прообразом нечеткого множества B* универсального множества Y при нечетком отношении R из X в Y объединение всех нечетких множеств A универсального множества X, удовлетворяющих включению $A \times B \angle R$.

Теорема 16.2. Функция принадлежности ◄-прообраза равняется

$$\mu^{◄}(x) = \inf_{y \in Y} (\mu_B(y) \blacksquare \mu_R(x, y)). \tag{16.4}$$

Доказательство. Для функций принадлежности включение $A \times B \angle R$ принимает вид неравенства

$$\min(\mu_A(x); \mu_B(y)) \leq \mu_R(x, y)$$

для любых $x \in X$ и $y \in Y$.

Применяя операцию срезки (11.1), запишем это неравенство в виде

$$0 \leq \mu_A\,(x) \leq \mu_B(y) \blacksquare \mu_R(x, y) \text{ для любых } x \in X \text{ и } y \in Y.$$

Следовательно,

$$0 \leq \mu_A\,(x) \leq \inf_{y \in Y} (\mu_B(y) \in \mu_R(x, y))$$

для любых $x \in X$.

Отсюда и из определения 16.2 получим формулу (16.4).

Рассмотрим теперь случай конечных множеств $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $Y = \{y_1, \ldots, y_m\}$. Пусть нечеткое отношение R из множества X во множество Y задано матрицей $\{r_{ij}\}$. Тогда формула (16.2) принимает вид

$$(q_1, q_2, \ldots, q_m) ◄ \begin{pmatrix} r_{11} & r_{21} & \cdots & r_{n1} \\ r_{12} & r_{22} & \cdots & r_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{1m} & r_{2m} & \cdots & r_{nm} \end{pmatrix} = (p_1^{◄}, p_2^{◄}, \ldots, p_n^{◄}). \tag{16.5}$$

Пример 16.3. Рассмотрим пример 16.2. Формула (16.5) примет вид

$$(q_1, q_2, q_3) ◄ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (p_1^{◄}, p_2^{◄}) \Rightarrow \min((q_1 \blacksquare 1); (q_2 \blacksquare 0); (q_3 \blacksquare 0)) = p_1^{◄},$$

$$\min((q_1 \blacksquare 0); (q_2 \blacksquare 1); (q_3 \blacksquare 1)) = p_2^{◄} \Rightarrow \min(1; (q_2 \blacksquare 0); (q_3 \blacksquare 0)) = p_1^{◄},$$

$$\min((q_1 \blacksquare 0); 1; 1) = p_2^{◄} \Rightarrow p_1^{◄} = \min(q_2 \blacksquare 0); (q_3 \blacksquare 0)), p_2^{◄} = (q_1 \blacksquare 0).$$

Отсюда получим, что $p_1^{◄} = 1$, если $q_2 = 0$ и $q_3 = 0$; $p_1^{◄} = 0$, если, $q_2 \neq 0$ или $q_3 \neq 0$; $p_2^{◄} = 1$ при $q_1 = 0$ и $p_2^{◄} = 0$ при $q_1 \neq 0$.

Определение 16.3. Назовем ►*-прообразом нечеткого множества B* универсального множества Y при нечетком отношении R из X в Y пересечение всех нечетких множеств A универсального множества X, удовлетворяющих включению $(X \times B) \wedge R \angle A \times Y$.

Теорема 16.3. Функция принадлежности ►-прообраза равняется

$$\mu^{\blacktriangleright}(x) = \sup_{y \in Y} \min(\mu_B(y);\ \mu_R(x, y)). \tag{16.6}$$

Доказательство. Для функций принадлежности включение $(X \times B) \wedge R \angle A \times Y$ принимает вид неравенства

$$\min(\mu_B(y);\ \mu_R(x, y)) \le \mu_A(x)$$

для любых $x \in X, y \in Y$.

Следовательно,

$$\sup_{y \in Y} \min(\mu_B(y);\ \mu_R(x, y)) \le \mu_A(x) \text{ для любых } x \in X.$$

Отсюда и из определения 16.3 получим формулу (16.6).

Рассмотрим теперь случай конечных множеств $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $Y = \{y_1, \ldots, y_m\}$. Пусть нечеткое отношение R из множества X во множество Y задано матрицей $\{r_{ij}\}$. Тогда формула (16.6) принимает вид

$$(q_1, q_2, \ldots, q_m) \blacklozenge \begin{pmatrix} r_{11} & r_{21} & \ldots & r_{n1} \\ r_{12} & r_{22} & \ldots & r_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_{1m} & r_{2m} & \ldots & r_{nm} \end{pmatrix} = (p_1^{\blacktriangleright}, p_2^{\blacktriangleright}, \ldots, p_n^{\blacktriangleright}). \tag{16.7}$$

Пример 16.4. Рассмотрим пример 16.2. Формула (16.7) примет вид

$$(q_1,q_2,q_3) \blacklozenge \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (p_1^{\blacktriangleright}, p_2^{\blacktriangleright}) \Rightarrow \max(\min(q_1;1); \min(q_2;0); \min(q_3;0)) = p_1^{\blacktriangleright},$$

$$\max(\min(q_1;\ 1);\ \min(q_2;\ 0);\ \min(q_3;\ 0)) = p_1^{\blacktriangleright},$$

$$\max(\min(q_1;\ 0);\ \min(q_2;\ 1);\ \min(q_3;\ 1)) = p_2^{\blacktriangleright} \Rightarrow q_1 = p_1^{\blacktriangleright},\ p_2^{\blacktriangleright} = \max(q_2;\ q_3).$$

Пример 16.5. Пусть в упрощенной модели диагностики неисправности автомобиля эксперт-автомеханик причинно-следственные связи между возможными неполадками x_i и наблюдаемыми факторами y_j задал матрицей

$$R = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}6 & 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

Результаты осмотра автомобиля задали нечеткое множество $B = \{(y_1 | 0{,}9),\ (y_2 | 0{,}1),\ (y_3 | 0{,}2)\}$. Требуется восстановить нечеткое множество $A = \{(x_1 | p_1),\ (x_2 | p_2)\}$. Вычислим ♦-прообраз. Из формулы (16.3) получим

$$(0{,}9;\, 0{,}1;\, 0{,}2) \blacktriangleright \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}6 \\ 0{,}1 & 0{,}5 \\ 0{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix} = (p_1^{\blacklozenge}, p_2^{\blacklozenge}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \min((0{,}9 \blacksquare 0{,}9);\, (0{,}1 \blacksquare 0{,}1);\, (0{,}2 \blacksquare 0{,}2)) = p_1^{\blacklozenge},$$
$$\min((0{,}6 \blacksquare 0{,}9);\, (0{,}5 \blacksquare 0{,}1);\, (0{,}5 \blacksquare 0{,}2)) = p_2^{\blacklozenge} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \min(1;\, 1;\, 1) = p_1^{\blacklozenge},\ \min(1;\, 0{,}1;\, 0{,}2) = p_2^{\blacklozenge}.$$

Отсюда получим, что $p_1^{\blacklozenge} = 1$, $p_2^{\blacklozenge} = 0{,}1$.

Вычислим ◄-прообраз. Из формулы (16.5) следует, что

$$(0{,}9;\, 0{,}1;\, 0{,}2) \blacktriangleleft \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}6 \\ 0{,}1 & 0{,}5 \\ 0{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix} = (p_1^{\blacktriangleleft}, p_2^{\blacktriangleleft}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \min((0{,}9 \blacksquare 0{,}9);\, (0{,}1 \blacksquare 0{,}1);\, (0{,}2 \blacksquare 0{,}2)) = p_1^{\blacktriangleleft},$$
$$\min((0{,}9 \blacksquare 0{,}6);\, (0{,}1 \blacksquare 0{,}5);\, (0{,}2 \blacksquare 0{,}5)) = p_2^{\blacktriangleright} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \min(1;\, 1;\, 1) = p_1^{\blacktriangleright},\ \min(0{,}6;\, 1;\, 1) = p_2^{\blacktriangleright}.$$

Отсюда получим, что $p_1^{\blacktriangleleft} = 1$, $p_2^{\blacktriangleleft} = 0{,}6$.

Вычислим ►-прообраз. Из формулы (16.7) получим

$$(0{,}9;\, 0{,}1;\, 0{,}2) \blacklozenge \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}6 \\ 0{,}1 & 0{,}5 \\ 0{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix} = (p_1^{\blacktriangleright}, p_2^{\blacktriangleright}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \max(\min(0{,}9;\, 0{,}9);\, \min(0{,}1;\, 0{,}1);$$
$$\min(0{,}2;\, 0{,}2)) = p_1^{\blacktriangleleft},\ \max(\min(0{,}9;\, 0{,}6);\, \min(0{,}1;\, 0{,}5);\, \min(0{,}2;\, 0{,}5)) = p_2^{\blacktriangleleft}.$$

Отсюда получим, что $p_1^{\blacktriangleright} = 0{,}9$, $p_2^{\blacktriangleright} = 0{,}6$.

Все три решения говорят, что лучше заменить аккумулятор.

§ 17. Задача идентификации нечетких отношений

Рассмотрим задачу *идентификации* нечеткого отношения.

Пример 17.1. Рассмотрим задачу из примера 13.1. Пусть с помощью опроса абитуриентов построили два нечетких множества A = (*престижный признак*) и B = (*престижный вуз*). При оценке каждого j-го вуза абитуриенты исходят из своей информации об этом вузе, которая зависит от его профориентационной работы. В качестве количественных показателей профориентационной работы вуза могут служить элементы r_{ij} нечеткого отношения R из множества X во множество Y. Приходим к задаче *идентификации*, которая заключается в определении чисел r_{ij} .

Сформулируем теперь задачу об идентификации в общем виде. Пусть заданы нечеткое множество A универсального множества X и нечеткое множество B универсального множества Y. Требуется найти нечеткое отношение R из множества X во множество Y такое, чтобы $B = A * R$. Здесь посредством $*$ обозначено правило определения образа нечеткого множества. Например, $* = \blacklozenge$, $* = \blacktriangleleft$, $* = \blacktriangleright$.

Рассмотрим случай, когда $* = \blacklozenge$. Требуется найти нечеткое отношение R из множества X во множество Y такое, чтобы $B = A \blacklozenge R$. Это значит, что

$$\mu_B(y) = \sup_{x \in X} \min(\mu_A(x); \mu_R(x, y)). \tag{17.1}$$

Будем рассматривать задачу об *идентификации*, исходя из включения (13.2). Для заданных нечетких множеств A универсального множества X и B универсального множества Y обозначим через A ® $\blacklozenge$ B объединение всех нечетких отношений R из множества X во множество Y, удовлетворяющих включению $(A \times Y) \wedge R \angle A \times B$.

Теорема 17.1. Функция принадлежности нечеткого отношения A ® $\blacklozenge$ B равняется

$$\mu_{A®\blacklozenge B}(x, y) = \mu_A(x) \blacksquare \mu_B(y). \tag{17.2}$$

Доказательство. Для функций принадлежности включение $(A \times Y) \wedge R \angle A \times B$ принимает вид неравенства

$$\min(\mu(x); \mu_B(y)) \geq \min(\mu(x); \mu_R(x, y))$$

для любых $x \in X$ и $y \in Y$.

Применяя операцию срезки (11.1), получим

$$0 \leq \mu_R(x, y) \leq \mu_A(x) \blacksquare \min(\mu_A(x); \mu_B(y))$$

для любых $x \in X$ и $y \in Y$.

Применяя первое равенство (11.14) в лемме 11.6, будем иметь

$$0 \leq \mu_R(x, y) \leq \mu_A(x) \blacksquare \mu_B(y)$$

для любых $x \in X$ и $y \in Y$.

Отсюда и из определения отношения A ® $\blacklozenge$ B получим формулу (17.2).

Теорема 17.2. Функция $\mu_R(x, y) = \mu_A(x) \blacksquare \mu_B(y)$ удовлетворяет неравенству

$$\mu_B(y) \ge \sup_{x \in X} \min(\mu_A(x); \mu_R(x, y)) \qquad (17.3)$$

для любого $y \in Y$.

Доказательство. Подставим функцию $\mu_R(x, y) = \mu_A(x) \blacksquare \mu_B(y)$ в правую часть доказываемого неравенства (17.3). Тогда, применяя первое равенство (11.13) в лемме 11.6, получим

$$\sup_{x \in X} \min(\mu_A(x); \mu_A(x) \blacksquare \mu_B(y)) = \sup_{x \in X} \min(\mu_A(x); \mu_B(y)).$$

Отсюда и из первого равенства (11.9) в лемме 11.2 следует, что

$$\sup_{x \in X} \min(\mu_A(x); \mu_A(x) \blacksquare \mu_B(y)) = \min(\sup_{x \in X} \mu_A(x); \mu_B(y)) =$$

$$= \min(\mathrm{hgt}\, A; \mu_B(y)). \qquad (17.4)$$

Поскольку $\min(\mathrm{hgt}\, A; \mu_B(y)) \le \mu_B(y)$, то из равенства (17.4) следует требуемое неравенство (17.3).

Теорема 17.3. Если функция μ_R: $X \times Y \to [0, 1]$ удовлетворяет неравенству (17.3), то $\mu_R(x, y) \le \mu_A(x) \blacksquare \mu(y)$ для любых $x \in X$ и $y \in Y$.

Доказательство. Из (17.3) следует, что $\mu_B(y) \ge \min(\mu_A(x); \mu_R(x,y))$ для любых $x \in X$ и $y \in Y$. Отсюда, используя определение срезки (11.1), получим требуемое неравенство.

Оказывается, что при некотором дополнительном условии функция (17.2) удовлетворяет равенству (17.1).

Теорема 17.4. Пусть существует функция μ_R: $X \times Y \to [0, 1]$, которая удовлетворяет равенству (17.1) при любых $y \in Y$. Тогда выполнено неравенство

$$\mathrm{hgt}\, B = \sup_{y \in Y} \mu_B(y) \le \sup_{x \in X} \mu_A(x) = \mathrm{hgt}\, A. \qquad (17.5)$$

Доказательство. Пусть функция μ_R: $X \times Y \to [0, 1]$ удовлетворяет равенству (17.1) при любых $y \in Y$. Тогда для любого $y \in Y$ выполнено неравенство $\mu_B(y) \le \sup_{x \in X} \mu_A(x)$, из которого и следует требуемое неравенство.

Теорема 17.5. Пусть выполнено неравенство (17.5). Тогда функция (17.2) удовлетворяет равенству (17.1).

Доказательство. В рассматриваемом случае $\min(\mathrm{hgt}\, A; \mu_B(y)) = \mu_B(y)$. Отсюда и из формулы (17.4) получим требуемое утверждение.

Замечание 17.1. Для заданных нечетких множеств A универсального множества X и B универсального множества Y обозначим через $A \blacksquare B$ нечеткое отношение из множества X во множество Y, функция принадлежности которого равна $\mu_{A\blacksquare B}(x, y) = \mu_A(x) \blacksquare \mu_B(y)$. Тогда, если выполнено неравенство $\operatorname{hgt} B \le \operatorname{hgt} A$, то $B = A \blacklozenge (A \blacksquare B)$.

Рассмотрим теперь случай, когда $* = \blacktriangleleft$. Требуется найти нечеткое отношение R из множества X во множество Y такое, чтобы $B = A \blacktriangleleft R$. Это значит, что должно выполняться равенство

$$\mu_B(y) = \inf_{x\in X} (\mu_A(x) \blacksquare \mu_R(x, y)). \qquad (17.6)$$

Для заданных нечетких множеств A универсального множества X и B универсального множества Y обозначим через $A \circledR \blacktriangleleft B$ пересечение всех нечетких отношений R из множества X во множество Y, удовлетворяющих включению $A \times B \angle R$.

Теорема 17.6. Функция принадлежности нечеткого отношения $A \circledR \blacktriangleleft B$ равняется

$$\mu_{A\circledR\blacktriangleleft B}(x, y) = \min(\mu_A(x); \mu_B(y)). \qquad (17.7)$$

Доказательство. Для функций принадлежности включение $A \times B \angle R$ принимает вид неравенства

$$\min(\mu_A(x); \mu_B(y)) \le \mu_R(x, y)$$

для любых $x \in X$ и $y \in Y$.

Отсюда и из определения отношения $A \circledR \blacktriangleleft B$ получим равенство (17.7).

Теорема 17.7. Функция $\mu_R(x, y) = \min(\mu_A(x); \mu_B(y))$ удовлетворяет неравенству

$$\mu_B(y) \le \inf_{x\in X} (\mu_A(x) \blacksquare \mu_R(x, y)) \qquad (17.8)$$

для любого $y \in Y$.

Доказательство. Подставим функцию $\mu_R(x, y) = \min(\mu_A(x); \mu_B(y))$ в правую часть формулы (17.6). Тогда, применяя первое равенство (11.14) в лемме 11.6, получим

$$\inf_{x\in X} (\mu_A(x) \blacksquare \min(\mu_A(x); \mu_B(y))) = \inf_{x\in X} (\mu_A(x) \blacksquare \mu_B(y)).$$

Отсюда и из первого равенства (11.8) в лемме 11.2 следует, что

$$\inf_{x\in X} (\mu_A(x) \blacksquare \min(\mu_A(x); \mu_B(y))) = \sup_{x\in X} \mu_A(x) \blacksquare \mu_B(y) =$$

$$= \operatorname{hgt} A \blacksquare \mu_B(y). \qquad (17.9)$$

Из определения срезки (11.1) следует, что hgt A ■ $\mu_B(y) \geq \mu_B(y)$. Отсюда и формулы (17.9) получим неравенство (17.8).

Теорема 17.8. Если функция μ_R: $X \times Y \to [0, 1]$ удовлетворяет неравенству (17.8), то $\mu_R(x, y) \geq \min(\mu_A(x); \mu_B(y))$ для любых $x \in X$ и $y \in Y$.

Доказательство. Из неравенства (17.8) следует, что $\mu_A(x)$ ■ ■ $\mu_R(x, y) \geq \mu_B(y)$ для любых $x \in X$ и $y \in Y$.

Отсюда и из леммы 11.7 получим требуемое неравенство.

Теорема 17.9. Если $\mu_B(y) <$ hgt A для всех $y \in Y$ или hgt A = hgt $B = 1$. Тогда функция (17.7) удовлетворяет равенству (17.6).

Доказательство. При сделанном предположении hgt A ■ $\mu_B(y) =$ $= \mu_B(y)$. Отсюда и из формулы (17.9) следует утверждение теоремы.

Замечание 17.2. Для заданных нечетких множеств A универсального множества X и B универсального множества Y рассмотрим их прямое произведение $A \times B$ в качестве нечеткое отношение из множества X во множество Y. Тогда, если hgt $B <$ hgt A или hgt A = hgt $B = 1$, то выполнено равенство $B = A$ ◄ $(A \times B)$.

Рассмотрим случай, когда $* =$ ►. Требуется найти нечеткое отношение R из множества X во множество Y такое, чтобы $B = A$ ► R. Это значит, что

$$\mu_B(y) = \inf_{x \in X} (\mu_R(x, y) \blacksquare \mu_A(x)). \qquad (17.10)$$

Для заданных нечетких множеств A универсального множества X и B универсального множества Y обозначим через A ® ► B объединение всех нечетких отношений R из множества X во множество Y, удовлетворяющих включению $(X \times B) \wedge R \angle A \times Y$.

Теорема 17.10. Функция принадлежности A®►B-отношения равняется

$$\mu_{A®\blacktriangleright B}(x, y) = \mu_B(y) \blacksquare \mu_A(x). \qquad (17.11)$$

Доказательство. Для функций принадлежности включение $(X \times B) \wedge R \angle A \times Y$ принимает вид неравенства $\min(\mu_B(y); \mu_R(x, y)) \leq$ $\leq \mu_A(x)$ для любых $x \in X$, $y \in Y$.

Применяя операцию свертки (11.1), получим

$$0 \leq \mu_R(x, y)) \leq \mu_B(y) \blacksquare \mu_A(x) \text{ для любых } x \in X, y \in Y.$$

Отсюда и из определения отношения A ® ► B следует формула (17.11).

Теорема 17.11. Функция $\mu_R(x, y) = \mu_B(y) \blacksquare \mu_A(x)$ удовлетворяет неравенству

$$\mu_B(y) \le \inf_{x\in X} (\mu_R(x, y)) \blacksquare \mu_A(x)) \qquad (17.12)$$

для любых $y \in Y$.

Доказательство. Подставим функцию $\mu_R(x, y) = \mu_B(y) \blacksquare \mu_A(x)$ в правую часть доказываемого неравенства (17.12). Тогда, применяя формулу (11.15) в лемме 11.6, получим

$$\inf_{x\in X} ((\mu_B(y) \blacksquare \mu_A(x)) \blacksquare \mu_A(x)) = \inf_{x\in X} (\mu_A(x) \square \mu_B(y)) =$$

$$= \inf_{x\in X} \begin{cases} 1 & \text{при } \mu_A(x) < \mu_B(y), \\ \mu_A(x) & \text{при } \mu_A(x) \ge \mu_B(y). \end{cases} \qquad (17.13)$$

Отсюда видно, что неравенство (17.12) выполнено.

Теорема 17.12. Если функция μ_R: $X \times Y \to [0, 1]$ удовлетворяет неравенству (17.12), то $\mu_R(x, y) \le \mu_B(y) \blacksquare \mu_A(x)$ для любых $x \in X$ и $y \in Y$.

Доказательство. Из неравенства (17.12) получим

$$\mu_B(y) \le \mu_R(x, y) \blacksquare \mu_A(x)$$

для любых $x \in X$ и $y \in Y$.

Отсюда и из леммы 11.8 следует требуемое неравенство.

Теорема 17.13. Пусть для любого $y \in Y$ существует последовательность точек $x_k \in X$ такая, что

$$\mu_B(y) \le \mu_A(x_k),\ \mu_A(x_k) \to \mu_B(y) \qquad (17.14)$$

при $k \to \infty$.

Тогда функция (17.11) удовлетворяет равенству (17.10).

Доказательство. При сделанном предположении

$$\inf_{x\in X} \begin{cases} 1 & \text{при } \mu_A(x) < \mu_B(y), \\ \mu_A(x) & \text{при } \mu_A(x) \ge \mu_B(y) \end{cases} = \mu_B(y).$$

Отсюда и из формулы (17.13) следует утверждение теоремы.

Замечание 17.3. Для заданных нечетких множеств A универсального множества X и B универсального множества Y обозначим через $B \blacksquare A$ нечеткое отношение из множества X во множество Y, функция принадлежности которого равна $\mu_{B\blacksquare A}(x, y)=\mu_B(y) \blacksquare \mu_A(x)$. Тогда, если выполнено сформулированное в теореме 17.13 предположение, то $B = A \blacktriangleright (B \blacksquare A)$.

Рассмотрим два конкретных примера.

Пример 17.1. Пусть $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ и $Y = \{y_1, y_2\}$. Рассмотрим два нечетких множества $A = \{(x_1 | 0{,}8), (x_2 | 0{,}6), (x_3 | 1))\}$, $B = \{(y_1 | 0{,}5), (y_2 | 0{,}9)\}$.

Вычисляя числа $r_{ij} = p_i \blacksquare q_j$, $r_{ij} = \min(p_i; q_j)$ и $r_{ij} = q_j \blacksquare p_i$, запишем отношения $A \blacksquare B$, $A \times B$ и $B \blacksquare A$ в виде матриц

$$A \blacksquare B = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 1 \\ 0{,}5 & 1 \\ 0{,}5 & 0{,}9 \end{pmatrix}, A \times B = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}8 \\ 0{,}5 & 0{,}6 \\ 0{,}5 & 0{,}9 \end{pmatrix}, B \blacksquare A = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}8 \\ 1 & 0{,}6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Имеем hgt $A = 1$ и hgt $B = 0{,}9$. Следовательно, неравенство hgt $A >$ $>$ hgt B выполнено. Из замечаний 17.1 и 17.2 следуют равенства $B = A \blacklozenge (A \blacksquare B)$ и $B = A \blacktriangleleft (A \times B)$.

Вычислим нечеткое множество $A \blacktriangleright (B \blacksquare A)$. Имеем

$$(0{,}8; 0{,}6; 1) \blacktriangleright \begin{pmatrix} 1 & 0{,}8 \\ 1 & 0{,}6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (q_1, q_2).$$

Отсюда получим

$$q_1 = \min((1 \blacksquare 0{,}8); (1 \blacksquare 0{,}6); (1 \blacksquare 1)) = \min(0{,}8; 0{,}6; 1) = 0{,}6,$$

$$q_2 = \min((0{,}8 \blacksquare 0{,}8); (0{,}6 \blacksquare 0{,}6); (1 \blacksquare 1)) = \min(1; 1; 1) = 1.$$

Следовательно, $A \blacktriangleright (B \blacksquare A) = \{(y_1 | 0{,}6), (y_2 | 1)\} \neq B$.

Пример 17.2. Пусть $X = \{x_1, x_2\}$ и $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$. Рассмотрим два нечетких множества $A = \{(x_1 | 0{,}5), (x_2 | 0{,}9)\}$, $B = \{(y_1 | 0{,}8), (y_2 | 0{,}6), (y_3 | 1)\}$.

Тогда hgt $A = 0{,}9$ и hgt $B = 1$. Вычисляя числа $r_{ij} = p_i \blacksquare q_i$, запишем отношение $A \blacksquare B$ в виде матрицы

$$A \blacksquare B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0{,}8 & 0{,}6 & 1 \end{pmatrix} .$$

Вычислим нечеткое множество $A \blacklozenge (A \blacksquare B)$. Имеем

$$(0{,}5; 0{,}9) \blacklozenge \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0{,}8 & 0{,}6 & 1 \end{pmatrix} = (q_1, q_2, q_3).$$

Отсюда получим:

$$q_1 = \max(\min(0{,}5; 1); \min(0{,}9; 0{,}8)) = 0{,}8;$$

$$q_2 = \max(\min(0{,}5; 1); \min(0{,}9; 0{,}6)) = 0{,}6;$$

$$q_3 = \max(\min(0{,}5; 1); \min(0{,}9; 1)) = 0{,}9.$$

Стало быть, $A \blacklozenge (A \blacksquare B) = \{(y_1 | 0{,}8), (y_2 | 0{,}6), (y_3 | 0{,}9)\} \neq B$.

Глава 3

§ 18. Лингвистическая переменная

При анализе гуманистических систем, а также в задачах моделирования сложными технологическими процессами возникают неопределенности нестатистической природы. Такие неопределенности обусловлены наличием неслучайных погрешностей измерения, а также слабой изученностью некоторых физико-химических процессов. Один из подходов к преодолению указанных трудностей состоит в использовании нечетких моделей вывода.

Лингвистические переменные

В нечетких моделях вывода используется *лингвистическая переменная*, значениями которой являются нечеткие множества.

Пример 18.1. Лингвистическая переменная *Возраст* = {детский; молодой; старый}. Каждое из нечетких множеств A = {детский}, B = {молодой}, C = {старый} является нечетким множеством универсального множества неотрицательных чисел с заданными функциями принадлежности:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \textit{при}\ 0 < x \le 14, \\ 8 - 0,5x & \textit{при}\ 14 \le x \le 16, \\ 0 & \textit{при}\ 16 \le x; \end{cases}$$

$$\mu_B(x) = \begin{cases} 0 & \textit{при}\ 0 < x \le 16, \\ 0,5x - 8 & \textit{при}\ 16 \le x \le 18, \\ 1 & \textit{при}\ 18 \le x \le 25, \\ -0,1x + 3,5 & \textit{при}\ 25 \le x \le 35, \\ 0 & \textit{при}\ x > 35; \end{cases}$$

$$\mu_C(x) = \begin{cases} 0 & \textit{при}\ 0 < x \le 55, \\ 0,1x - 5,5 & \textit{при}\ 55 \le x \le 65, \\ 1 & \textit{при}\ 65 \le x. \end{cases}$$

Схематически эта лингвистическая переменная представлена на рис. 18.1.

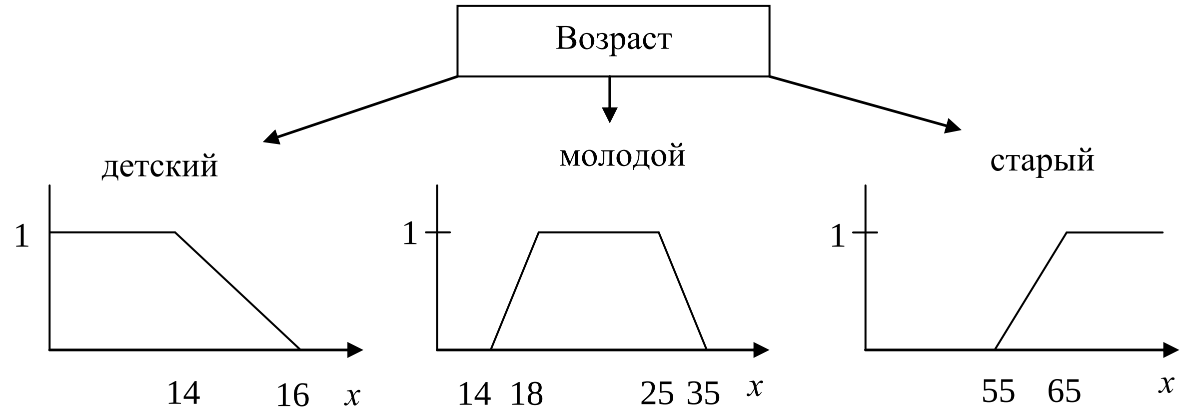

Рис. 18.1

Значения лингвистической переменной называются ее *терм-множествами*. Таким образом, нечеткие множества {молодой}, {среднего возраста}, {старый} являются терм-множествами лингвистической переменной {Возраст}.

Рассмотренные ранее операции с нечеткими множествами служат для определения дополнительных значений лингвистических переменных.

Отрицание «*не*» задается с помощью операции дополнения нечетких множеств, союз «*или*» — с помощью операции объединения нечетких множеств, а союз «*и*» — с помощью операции пересечения нечетких множеств.

Вводят лингвистические неопределенности типа *очень*, *много*, *больше*, *меньше* и т. д., с помощью которых можно увеличивать области значений лингвистической переменной. Каждая такая лингвистическая неопределенность трактуется как оператор, который переводит нечеткое множество A, представляющее собой значение лингвистической переменной, в другое нечеткое множество того же универсального множества. С помощью этих лингвистических неопределенностей можно осуществлять генерацию большего количества значений лингвистической переменной.

Например, лингвистическая неопределенность «*очень*» задается с помощью операции CON и определяется как квадрат от функции принадлежности исходного значения A лингвистической переменной. Она действует как усилитель. Таким образом, $\mu_{CON\,A}(x) = \mu_A^2(x)$.

Пример 18.2. Функция принадлежности нечеткого множества {очень детский возраст людей} имеет следующий вид: $\mu_{CON\,A}(x) = 1$

при $0 < x \le 14$; $\mu_{CON\,A}(x) = (8 - 0{,}5x)^2$ при $14 \le x \le 16$ и $\mu_{CON\,A}(x) = 0$ при $16 < x$. График этой функции представлен на рис. 18.2.

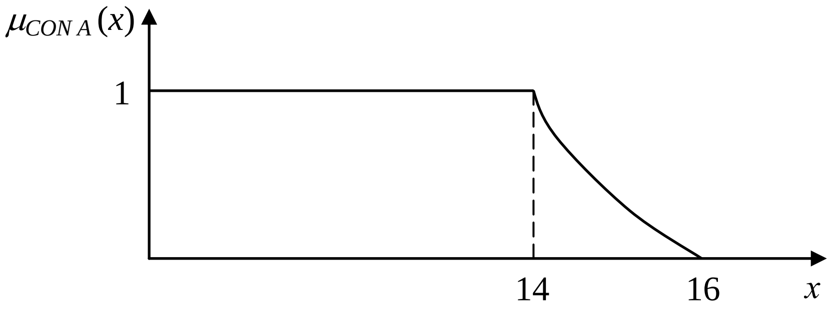

Рис. 18.2

Пример 18.3. Нечеткое множества D = {не очень детский возраст людей} равняется $\overline{CON\,A}$. Поэтому, используя операцию дополнения нечетких множеств, получим формулу для его функции принадлежности:

$$\mu_D(x) = 1 - \mu_{CON\,A}(x).$$

График этой функции изображен на рис. 18.3.

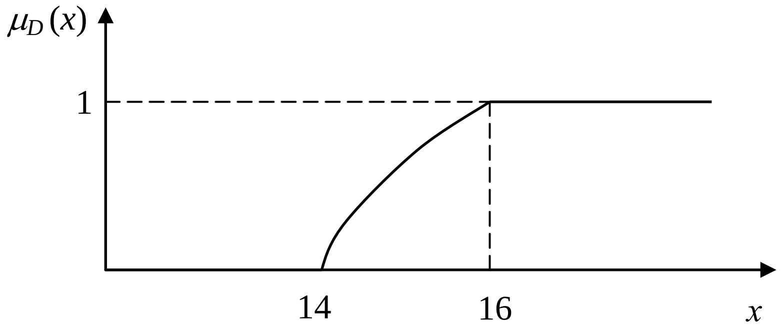

Рис. 18.3

Лингвистическая неопределенность «*слегка*» определяется с помощью операции *DIL* и определяется как корень квадратный от функции принадлежности исходного значения *A* лингвистической переменной. Таким образом, $DIL\,A = \sqrt{\mu_A(x)}$.

Пример 18.4. Нечеткое множество V = {слегка старые люди} равняется *DIL C*. Поэтому ее функция принадлежности равняется $\mu_V(x) = 0$ при $0 < x \le 55$; $\mu_V(x) = \sqrt{0{,}1x - 5{,}5}$ при $55 \le x \le 65$ и $\mu_V(x) = 1$ при $65 < x$.

График этой функции представлен на рис. 18.4.

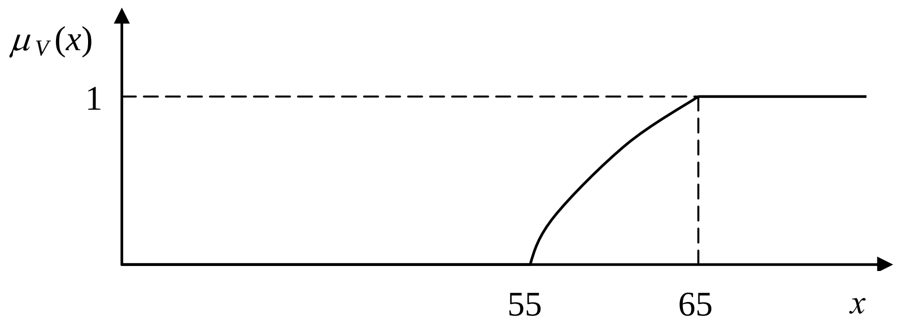

Рис. 18.4

Формализуем изложенные выше понятия.

Нечеткая переменная характеризуется тройкой $< \alpha; X; A >$, где α — наименование переменной; X — универсальное множество; A — нечеткое множество универсального множества X.

Лингвистической переменной называется набор $< \beta; T; X; G; M >$, где β — наименование лингвистической переменной; T — множество ее значений, областью определения каждого из которых является множество X; G — *синтаксическая процедура*, позволяющая оперировать элементами множества T, в частности генерировать новые значения, совокупность которых обозначим через $G(T)$. Объединение $T \cup G(T)$ называется расширенным терм-множеством лингвистической переменной; M — *семантическая процедура*, позволяющая превратить каждое новое значение лингвистической переменной, образуемое процедурой G, в нечеткую переменную, то есть сформировать соответствующее нечеткое множество.

§ 19. Нечеткое правило вывода

В обычной логике правило вывода *modus ponens* можно записать в следующем виде:

Посылка 1: если x есть A, то y есть B.
Посылка 2: x есть A.

Следствие: y есть B.

Здесь x и y — имена объектов; A и B — обозначения понятий областей рассуждений U и V соответственно.

Пример 19.1 правила вывода *modus ponens* в обычной логике.

Посылка 1: если человек молодой, то человек трудоспособный.
Посылка 2: этот человек молодой.

Следствие: этот человек трудоспособный.

Будем сейчас считать, что понятия «молодой» и «трудоспособный» подлежат точному определению. Например, считаем, что характеристика возраста определяется только числом лет x. Обозначим через X множество неотрицательных чисел. Пусть, например, человек является молодым тогда и только тогда, когда число его лет $x \in A =$ $= [18, 30] \subset X$.

Полагаем, что степень трудоспособности человека определяется наличием у него некоторых физических и психических характеристик y_i. Всевозможные такие характеристики обозначим через Y. Задано множество $B \subset Y$. Человек является трудоспособным тогда и только тогда, когда все его характеристики образуют множество B.

Рассмотрим высказывания:

r = <<если человек молодой, то человек трудоспособный>>;

a = <<человек молодой>>; b = <<человек трудоспособный>>.

В классической логике высказывание r = <<если a, то b>> называется импликацией и обозначается $r = a \Rightarrow b$. Истинность (*и*) или ложность (*л*) импликации в зависимости от истинности или ложности высказываний a и b определяется таблицей истинности:

Таблица 19.1

a	b	$a \Rightarrow b$
и	*и*	*и*
л	*и*	*и*
и	*л*	*л*
л	*л*	*и*

Из этой таблицы видно, что если высказывание a является истинным, то истинность или ложность высказывания b однозначно решается истинностью или ложностью высказывания r. Если высказывание r является истинным, то истинным является высказывание b. Если высказывание r является ложным, то ложным является высказывание b.

Если высказывание r является истинным, а высказывание a является ложным, то об истинности или ложности высказывания b однозначно сказать ничего нельзя.

Чтобы пояснить причину этого, рассмотрим высказывание

f = <<неверно, что человек молодой и человек не трудоспособный>>.

Если высказывание a = <<человек молодой>> является ложным, тогда высказывание <<человек молодой и человек не трудоспособный>> является ложным. Следовательно, выказывание f, являющееся дополнением к предыдущему выказыванию, является истинным.

Множество $A = [18, 30] \subset X$ является множеством истинности высказывания a = «человек молодой», а множество $B \subset Y$ — множеством истинности высказывания b = «человек трудоспособный». Построим множество $R \subset X \times Y$, являющееся множеством истинности высказывания r = «если человек молодой, то человек трудоспособный».

Если высказывание a является истинным, то, как следует из табл. 29.1, высказывание r является истинным тогда и только тогда, когда истинным является высказывание b. Если высказывание a является ложным, то высказывание r является истинным при любом значении истинности высказывания b.

Следовательно, множество истинности высказывания r имеет вид

$$R = (A \times B) \cup (\overline{A} \times Y). \tag{19.1}$$

Это множество изображено на рис. 19.1.

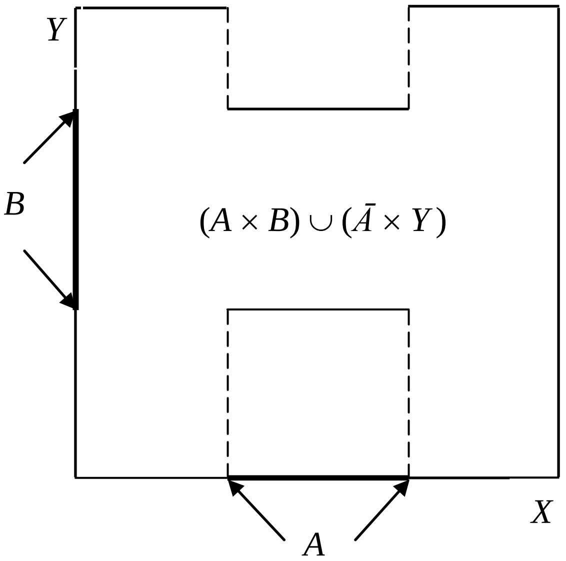

Рис. 19.1

Будем интерпретировать множество $R \subset X \times Y$ как отношение из множества X во множество Y. Его характеристическая функция имеет вид

$$\delta_R(x, y) = \max(\min(\delta_A(x); \delta_B(y)); 1 - \delta_A(x)). \tag{19.2}$$

Зафиксируем произвольную функцию $\psi : [0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1]$, с помощью которой будем определять характеристическую функцию $\delta_{A*R}(y)$ образа $A * R$ множества A при применении к нему отношения (19.1) с помощью формулы

$$\delta_{A*R} = \sup_{x\in X} \psi(\delta_A(x),\ \delta_R(x, y)), \qquad (19.3)$$

Утверждение 19.1. Пусть функция $\psi(a,\ b)$ удовлетворяет условиям

$$\psi(1,\ 1) = 1;\ \psi(0,\ 1) = \psi(1,\ 0) = 0. \qquad (19.4)$$

Тогда $A * R = B$.

Доказательство. Подставим функцию (19.2) в формулу (19.3). Тогда, используя условия (19.4), получим

$$\delta_{A*R}(y) = \sup_{x\in X} \psi(\delta_A(x), \max(\min(\delta_A(x);\ \delta_B(y));\ 1 - \delta_A(x))) =$$

$$= \max_{q=0,1} \psi(q;\ \max(\min(q;\ \delta_B(y));\ 1 - q)) = \max(\psi(0;\ 1),\ \psi(1;\ \delta_B(y))) =$$

$$= \psi(1;\ \delta_B(y)) = \delta_B(y).$$

Следствие 19.1. Функции $\psi(a,\ b) = \min(a,\ b)$, $\psi(a,\ b) = ab$, $\psi(a,\ b) = \max(0;\ a + b - 1)$ удовлетворяют условиям (19.4). Поэтому $B = A \blacklozenge R$, $B = A \bullet R$. Здесь обозначено

$$\delta_{A\bullet R}(y) = \sup_{x\in X} (\delta_A(x)\delta_R(x, y)). \qquad (19.5)$$

Определим теперь характеристическую функцию $\delta_{A*R}(y)$ образа $A*R$ множества A при применении к нему отношения (19.1) с помощью формулы

$$\delta_{A*R}(y) = \inf_{x\in X} \psi(\delta_A(x),\ \delta_R(x, y)). \qquad (19.6)$$

Утверждение 19.2. Пусть функция $\psi\ (a,\ b)$ удовлетворяет условиям

$$\psi(1,\ 1) = \psi(0,\ 1) = 1,\ \psi(1,\ 0) = 0. \qquad (19.7)$$

Тогда $A * R = B$.

Доказательство. Подставим функцию (19.2) в формулу (19.6). Тогда, используя условия (19.7), получим

$$\delta_{A*R}(y) = \inf_{x\in X} \psi(\delta_A(x), \max(\min(\delta_A(x);\ \delta_B(y));\ 1 - \delta_A(x))) =$$

$$= \min_{q=0,1} \psi(q;\ \max(\min(q;\ \delta_B(y));\ 1 - q)) = \min(\psi(0;\ 1),\ \psi(1;\ \delta_B(y))) =$$

$$= \psi(1;\ \delta_B(y)) = \delta_B(y).$$

Следствие 19.2. Функция $\psi(a, b) = a \blacksquare b$ удовлетворяет условиям (19.7). Поэтому $B = A \blacktriangleleft R$.

Замечание 19.1. Покажем, что равенство $B = A \blacktriangleright R$ не выполнено. С этой целью вычислим характеристическую функцию $\delta_{A\blacktriangleright R}(y)$ множества $A \blacktriangleright R$. Из формулы (13.21) имеем

$$\delta_{A\blacktriangleright R}(y) = \inf_{x\in X} (\delta_R(x, y) \blacksquare \delta_A(x)) = \min_{q=0,1} (\delta_R(x, y) \blacksquare q) = \min_{q=0,1} (\max(\min(q;$$

$$\delta_B(y)); 1 - q) \blacksquare q) = \min(1 \blacksquare 0; \delta_B(y) \blacksquare 1) = \min(0; 1) = 0.$$

В нечетких моделях *входные* и *выходные* данные являются нечеткими множествами. Общую схему применения рассмотренного правила вывода *modus ponens* на случай, когда посылки являются нечеткими множествами, предложил Л. Заде. Ее можно записать в следующем виде:

Посылка 1: если x есть A, то y есть B.
Посылка 2: x есть A^+.

Следствие: y есть B^+.

Здесь x и y — имена объектов; A, A^+ и B, B^+ — обозначения понятий областей рассуждений U и V соответственно.

Пример 19.2 правила вывода *modus ponens* в нечеткой логике.

Посылка 1: если человек молодой, то человек трудоспособный.
Посылка 2: этот человек не очень молодой.

Следствие: этот человек не очень трудоспособный.

Будем считать, что множество A = «молодые люди» является нечетким множеством универсального множества неотрицательных чисел X, функция принадлежности которого изображена на рис. 18.1. Множество B = «трудоспособные люди» является нечетким множеством универсального множества Y физических и психических характеристик человека.

Для формализации высказывания <<если A, то B>> Л. Заде ввел понятие *композиционного правила вывода*, которое трактует это высказывание как нечеткое отношение из множества X во множество Y. Это нечеткое отношение называется *импликацией* и обозначается $A \Rightarrow B$.

Возникает вопрос о выборе таких импликаций. Попытаемся использовать для этих целей четкое отношение (19.1).

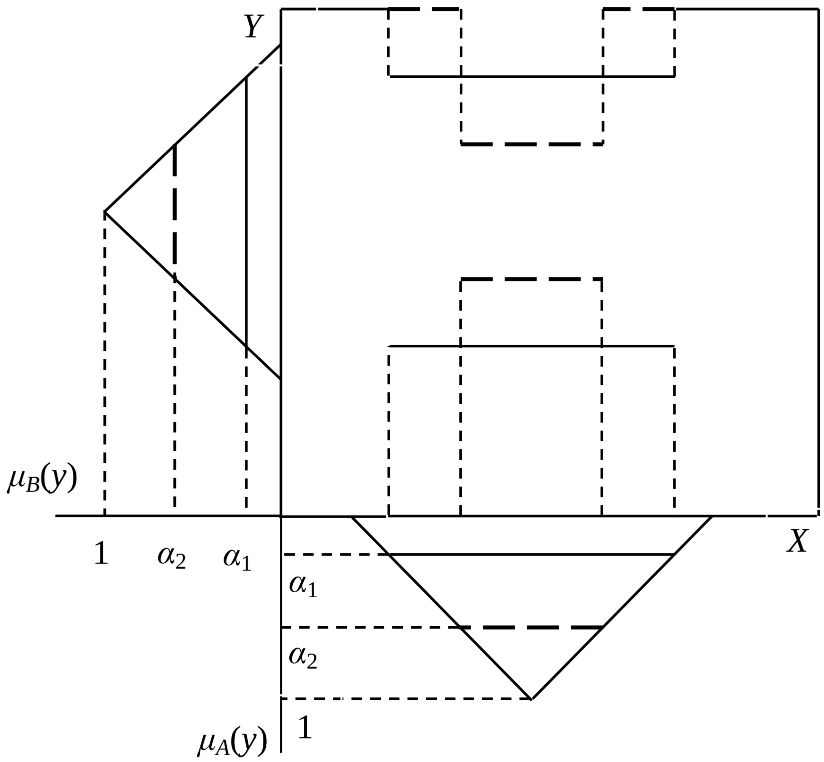

Рис. 19.2

Выясним, как связано нечеткое отношение A ■ B с четким отношением R (19.1). Зафиксируем число $\alpha \in (0, 1]$ и рассмотрим четкое отношение из множества X во множество Y:

$$R_{(\alpha)} = (A(\alpha) \times B(\alpha)) \cup (\overline{A(\alpha)} \times Y). \qquad (19.8)$$

Множества $A(\alpha) \times B(\alpha)$ с ростом значения параметра α не возрастают, а множества $\overline{A(\alpha)} \times Y$ с ростом α не убывают. Поэтому, вообще говоря, множества $R_{(\alpha)}$ не удовлетворяют условию монотонности по α (см. рис. 19.2).

В соответствии с определениями, данными в § 5, вычислим нижнюю и верхнюю точные аппроксимации семейства множеств $R_{(\alpha)}$ (19.8).

Теорема 19.1. Нечеткое отношение A ■ B является точной нижней аппроксимацией семейства множеств $R_{(\alpha)}$ (19.8).

Доказательство. Вначале покажем, что для любого числа $0 < \alpha \le 1$ выполнено равенство

$$(A \blacksquare B)(\alpha) = \bigcap_{0<t\le\alpha} R_{(t)}\,. \qquad (19.9)$$

Возьмем число $0 < \alpha \le 1$ и покажем, что $(A \blacksquare B)(\alpha) \subset R_{(t)}$ при всех $0 < t \le \alpha$.

Пусть точка $(x, y) \in (A \blacksquare B)(\alpha)$. Тогда $\mu_{A\blacksquare B}(x, y) \geq \alpha$ и, следовательно,

$$\mu_{A\blacksquare B}(x, y) \geq t \text{ при всех } 0 < t \leq \alpha. \tag{19.10}$$

Случай 1. Пусть $\mu_A(x) < t$. Тогда $x \notin A(t)$. Следовательно, $x \in \overline{A(t)}$. Поэтому, $(x, y) \in \overline{A(t)} \times Y \subset R_{(t)}$.

Случай 2. Пусть $\mu_B(y) \geq \mu_A(x)$ и $\mu_A(x) \geq t$. Тогда $x \in A(t)$ и $y \in B(t)$. Следовательно, $(x, y) \in A(t) \times B(t) \subset R_{(t)}$.

Случай 3. Пусть $\mu_B(y) < \mu_A(x)$ и $\mu_A(x) \geq t$. Тогда $\mu_{A\blacksquare B}(x, y) = \mu_B(y)$. Отсюда и из неравенства (19.10) получим, что $\mu_B(y) \geq t$. Следовательно, $x \in A(t)$ и $y \in B(t)$. Отсюда получим включение $(x, y) \in A(t) \times B(t) \subset R_{(t)}$.

Докажем обратное включение. Пусть точка $(x, y) \in R_{(t)}$ при всех $0 < t \leq \alpha$. Если $\min(\mu_A(x);\mu_B(y)) \geq \alpha$, то из неравенства $\mu_{A\blacksquare B}(x, y) \geq$ $\geq \min(\mu_A(x); \mu_B(y))$, которое следует из определения срезки (11.1), получим, что $\mu_{A\blacksquare B}(x, y) \geq \alpha$. Следовательно, $(x, y) \in (A \blacksquare B)(\alpha)$.

Если $\mu_B(y)) \geq \mu_A(x)$, то $\mu_{A\blacksquare B}(x, y) = 1 \geq \alpha$. Следовательно, включение $(x, y) \in (A \blacksquare B)(\alpha)$ выполнено.

Покажем теперь, что оставшийся случай

$$\min(\mu_A(x); \mu_B(y)) < \alpha \text{ и } \mu_B(y) < \mu_A(x)$$

невозможен. Допустим, что эти неравенства выполнены. Тогда существует число

$$\mu_B(y)) < t < \min(\mu_A(x); \alpha). \tag{19.11}$$

Поскольку при этом числе выполнено включение $(x, y) \in R_{(t)}$, то должно выполняться одно из включений $(x, y) \in A(t) \times B(t)$ или $(x, y) \in \overline{A(t)} \times Y$. Отсюда получим, что должно выполняться одно из неравенств — $\mu_A(x) < t$ или $\mu_B(y) = \min(\mu_A(x); \mu_B(y)) \geq t$. Согласно (19.11) ни одно из этих неравенств не выполнено.

Из доказанного равенства следует что, $(A \blacksquare B)(\alpha) \subset R_{(\alpha)}$ при всех числах $0 < \alpha \leq 1$. Стало быть, нечеткое отношение $A \blacksquare B$ является нижней аппроксимацией семейства множеств $R_{(\alpha)}$. Покажем, что оно является точной нижней аппроксимацией семейства множеств $R_{(\alpha)}$.

Возьмем нечеткое отношение F из X вY, множества уровня которого удовлетворяют включению $F(\alpha) \subset R_{(\alpha)}$ при всех числах $0 < \alpha \leq 1$. Покажем, что $F \angle A \blacksquare B$. В самом деле, зафиксируем число $0 < \alpha \leq 1$. Тогда, используя условие монотонности множеств уровня, получим, что $F(\alpha) \subset F(t) \subset R_{(t)}$ при всех $0 < t \leq \alpha$. Отсюда и из равенства (19.9) получим требуемое включение $F(\alpha) \subset (A \blacksquare B)(\alpha)$.

Замечание 19.2. Точной верхней аппроксимацией семейства множеств $R_{(\alpha)}$ (19.8) является нечеткое отношение F, функция принадлежности $\mu_F(x, y)$ которого равна нулю при

$$z \notin Z = \bigcup_{0<\alpha\le 1} \Big(\big(A(\alpha)\times B(\alpha)\big) \bigcup \big(\overline{A(\alpha)}\times Y\big) \Big) \tag{19.12}$$

и, если $(x, y) \in Z$, то $\mu_F(x, y) = 1$.

В самом деле, из теоремы 5.4 следует, что функция принадлежности $\mu_F(x, y)$ равна нулю при $(x, y) \notin Z$ и, если $(x, y) \in Z$, то

$$\mu_F(x, y) = \sup\{t \in (0, 1]: (x, y) \in (A(t)\times B(t)) \cup (\overline{A(t)} \times Y)\} =$$

$$= \sup\{t \in (0, 1]: (x, y) \in A(t)\times B(t) \text{ или } (x, y) \in \overline{A(t)} \times Y\} =$$

$$= \sup\{t \in (0, 1]: \min(\mu_A(x); \mu_B(y) \ge t \text{ или } \mu_A(x) < t\} = 1.$$

Приведем функции принадлежности нескольких, наиболее используемых в приложениях импликаций:

$$\mu_{A\Rightarrow B}(x, y) = \mu_A(x) \blacksquare \mu_B(y) \quad (Godel), \tag{19.13}$$

$$\mu_{A\Rightarrow B}(x, y) = \min(\mu_A(x); \mu_B(y)) \quad (Mamdani), \tag{19.14}$$

$$\mu_{A\Rightarrow B}(x, y) = \mu_A(x)\mu_B(y) \quad (Larsen), \tag{19.15}$$

$$\mu_{A\Rightarrow B}(x, y) = \max(0; \mu_A(x) + \mu_B(x) - 1). \tag{19.16}$$

$$\mu_{A\Rightarrow B}(x, y) = \min(1; 1 - \mu_A(x) + \mu_B(y)) \quad (Lukasiewics), \tag{19.17}$$

$$\mu_{A\Rightarrow B}(x, y) = \mu_A(x) \nabla \mu_B(y);\ a \nabla b = \begin{cases} 1, & при\ a \le b, \\ \dfrac{b}{a}, & при\ a > b \end{cases} \quad (Gaines), \tag{19.18}$$

$$\mu_{A\Rightarrow B}(x, y) = \max(1 - \mu_A(x); \mu_B(y)) \quad (Kleene — Dienes), \tag{19.19}$$

$$\mu_{A\Rightarrow B}(x, y) = 1 - \mu_A(x) + \mu_A(x)\mu_B(y)) \quad (Kleene — Dienes — Lu), \tag{19.20}$$

$$\mu_{A\Rightarrow B}(x, y) = \max(\min(\mu_A(x); \mu_B(y)); 1 - \mu_A(x)). \tag{19.21}$$

Замечание 19.3. Операции с множествами, с помощью которых задано четкое отношение (19.1) из множества X во множество Y, имеют свои аналоги и с нечеткими множествами. Можем рассмотреть нечеткое отношение

$$R = (A \times B) \vee (\overline{A} \times Y), \tag{19.22}$$

функция принадлежности которого задается формулой (19.21).

Каждая функция принадлежности импликаций (19.13) — (19.21) определяется формулой

$$\mu_{A\Rightarrow B}(x, y) = \theta(\mu_A(x), \mu_B(y)), \tag{19.23}$$

где θ: $[0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1]$ — конкретная функция. Графики функций

$\theta(a, b) = a \blacksquare b$, $\theta(a, b) = \min(a; b)$,

$\theta(a, b) = ab$, $\theta(a, b) = \max(0; a + b - 1)$,

$\theta(a, b) = \min(1; 1 - a + b)$, $\theta(a, b) = a \nabla b$, $\theta(a, b) = \max(1 - a; b)$,

$\theta(a, b) = 1 - a + ab$, $\theta(a, b) = \max(\min(a; b); 1 - a)$

изображены, соответственно, на рис. 19.3 — 19.10.

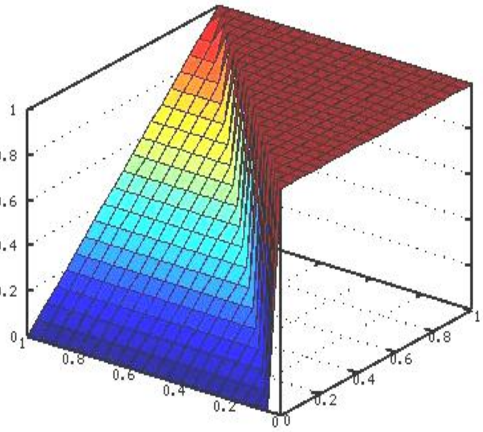

Рис. 19.3. $\theta = a \blacksquare b$

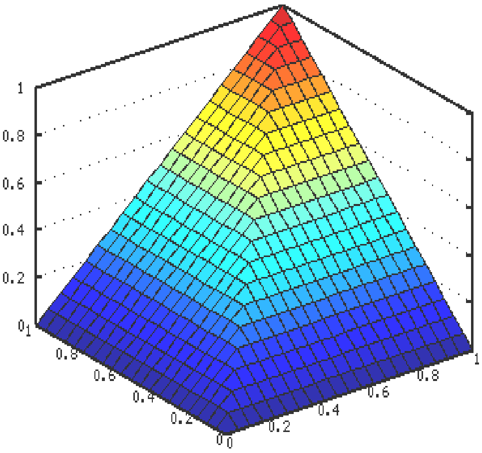

Рис. 19.4. $\theta = \min(a; b)$

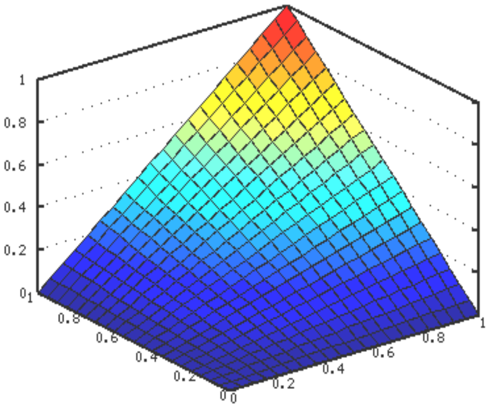

Рис. 19.5. $\theta = ab$

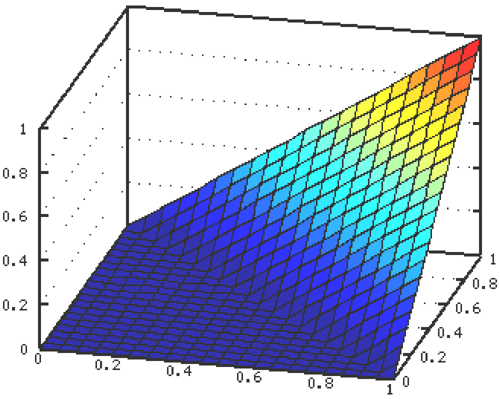

Рис. 19.6. $\theta = \max(0; a + b - 1)$

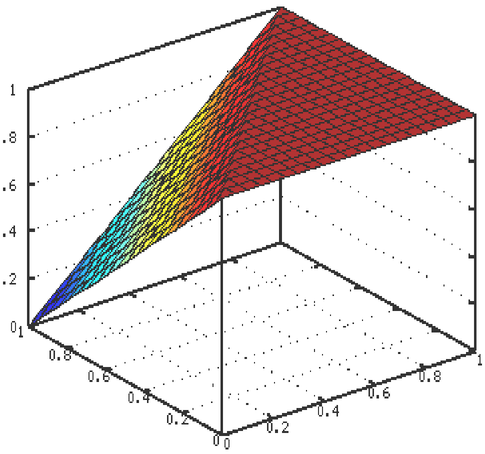

Рис. 19.7. $\theta = \min(1; 1 - a + b)$

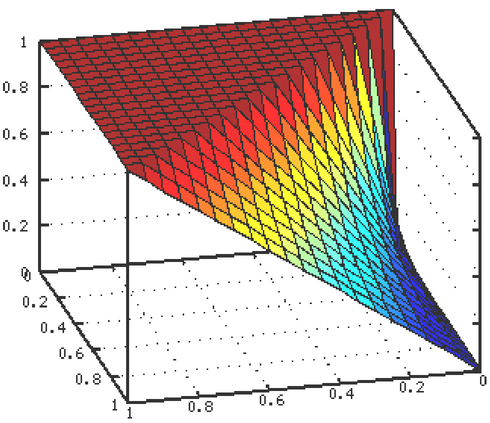

Рис. 19.8. $\theta = a \nabla b$

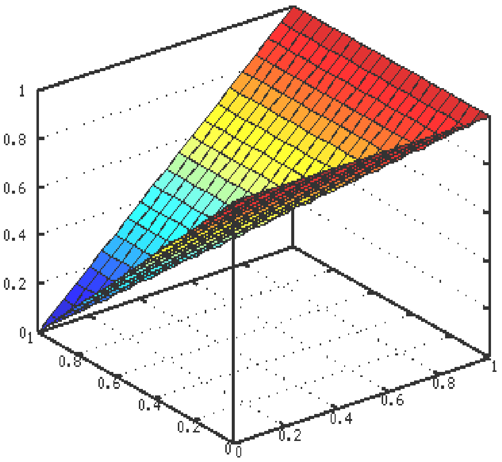

Рис. 19.9. $\theta = \max(1 - a;\, b))$

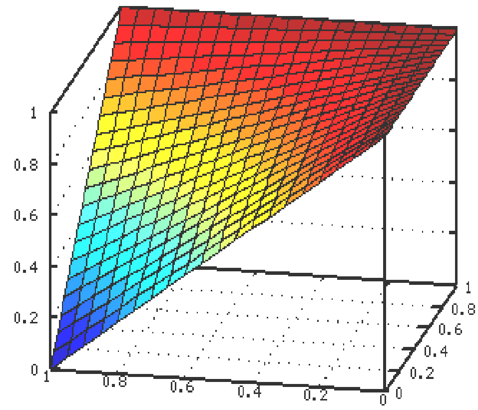

Рис. 19.10. $\theta = 1 - a + ab$

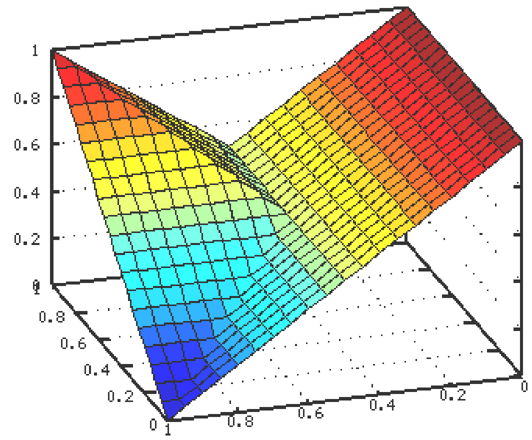

Рис. 19.11. $\theta = \max(\min(a;\, b);\, 1 - a)$

При заданной импликации $A \Rightarrow B$ по каждому входному нечеткому множеству A^+ универсального множества X строится выходное нечеткое множество $B^+ = A^+ * (A \Rightarrow B)$ универсального множества Y. При фиксированной функции ψ: $[0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1]$ можно рассмотреть два подхода к определению множества B^+:

$$\mu_{B+}(y) = \sup_{x \in X} \psi(\mu_{A+}(x), \mu_{A \Rightarrow B}(x, y)) \text{ или } \mu_{B+}(y) =$$
$$= \inf_{x \in X} \psi(\mu_{A+}(x), \mu_{A \Rightarrow B}(x, y)). \qquad (19.24)$$

§ 20. Исследование свойств импликаций

Построенная модель импликации должна быть *устойчивой* относительно исходных данных A и B. Это значит, что $B = A * (A \Rightarrow B)$. Если функция принадлежности нечеткого образа задается первой формулой (19.24), то должно выполняться равенство

$$\mu_B(y) = \sup_{x\in X} \psi(\mu_A(x),\ \mu_{A\Rightarrow B}(x, y)). \qquad (20.1)$$

Рассмотрим случай, когда нечеткий образ определяется первой формулой (19.24) с помощью функции $\psi(a, b) = \min(a; b)$. Тогда

$$\mu_{B+}(y)=\sup_{x\in X}\min(\mu_{A+}(x);\ \mu_{A\Rightarrow B}(x, y)) \text{ или } B^+ = A^+ \blacklozenge (A \Rightarrow B). \quad (20.2)$$

Условие (20.1) *устойчивости* модели (20.2) относительно данных A и B принимают вид

$$\mu_B(y) = \sup_{x\in X}\min(\mu_A(x);\ \mu_{A\Rightarrow B}(x, y)). \qquad (20.3)$$

Из теорем 17.4 и 17.5 следует, что для заданных нечетких множеств A и B уравнение (20.3) разрешимо относительно функции $\mu_{A\Rightarrow B}(x, y)$ тогда и только тогда, когда их высоты удовлетворяют неравенству

$$\mathrm{hgt}\, B \le \mathrm{hgt}\, A. \qquad (20.4)$$

Функция $\mu_{A\Rightarrow B}(x, y) = \mu_A(x) \blacksquare \mu_B(y)$ является одним из решений уравнения (20.3). Из теоремы 17.3 получим, что любое решение $\mu_{A\Rightarrow B}(x, y)$ уравнения (20.3) удовлетворяет неравенству $\mu_{A\Rightarrow B}(x, y) \le$ $\le \mu_A(x) \blacksquare \mu_B(y) = \mu_{A\blacksquare B}(x, y)$.

Исследуем устойчивость модели (20.2) с импликациями (19.13) — (19.21). В этом случае условие устойчивости (20.1) запишем в следующем виде: для любого числа $b \in I_B = \{\mu_B(y): y \in Y\}$ выполнено равенство

$$b = \sup_{a\in I_A}\min(a;\ \theta(a, b));\ I_A = \{\mu_A(x): x \in X\}. \qquad (20.5)$$

Теорема 20.1. Пусть выполнено неравенство (20.4). Тогда в каждой точке $b \in I_B$ и $b \le \mathrm{hgt}\, A$ для функций $\theta(a, b) = a \blacksquare b$, $\theta(a, b) =$ $= \min(a; b)$ выполнено равенство (20.5). Если $\mathrm{hgt}\, A = 1$, то условию (20.5) удовлетворяют функции $\theta(a, b) = ab$ и $\theta(a, b) = \max(0; a + b - 1)$.

Доказательство. Согласно замечанию 17.1, если высоты нечетких множеств A и B связаны неравенством (20.4), то $B = A \blacklozenge (A \blacksquare B)$. Следовательно, если в модели (20.2) взять $\mu_{A\Rightarrow B}(x, y) = \mu_A(x) \blacksquare \mu_B(y)$, то она будет устойчивой.

Для функции $\theta(a, b) = \min(a; b)$, используя утверждение 3.1, получим

$$\sup_{a\in I_A}\min(a;\ \theta(a, b)) = \sup_{a\in I_A}\min(a; \min(a; b)) = \sup_{a\in I_A}\min(a; b) =$$
$$= \min(\sup_{a\in I_A} a;\ b) = \min(\mathrm{hgt}\, A;\ b) = b.$$

Проверим равенство (20.5) для функции $\theta(a, b) = ab$ при условии hgt $A = 1$. Имеем

$$\sup_{a\in I_A} \min(a;\ \theta(a, b)) = \sup_{a\in I_A} \min(a;\ ab) = \sup_{a\in I_A} (ab) = \text{hgt}\ A\cdot b = b.$$

Рассмотрим функцию $\theta(a, b) = \max(0;\ a + b - 1)$. Покажем, что

$$\sup_{a\in I_A} \min(a;\ \max(0;\ a + b - 1)) \le b \text{ для любого числа } 0 \le b \le 1. \qquad (20.6)$$

Возьмем два числа $a \in I_A$ и $b \le 1$. Пусть $a + b \ge 1$. Тогда

$$\min(a;\ \max(0;\ a + b - 1)) = \min(a;\ a + b - 1) = a + b - 1 \le b.$$

Если $a + b < 1$, то $\min(a;\ \max(0;\ a + b - 1)) = \min(a;\ 0) = 0 \le b$. Таким образом, требуемое неравенство (20.6) доказано.

Если hgt $A = 1$, то обратное неравенство

$$\sup_{a\in I_A} \min(a;\ \theta(a, b)) \ge b \qquad (20.7)$$

для любого числа $0 \le b \le 1$ выполнено для любой непрерывной на квадрате $[0, 1] \times [0, 1]$ функции $\theta(a, b)$, удовлетворяющей при любом $0 \le b \le 1$ равенству $\theta(1, b) = b$.

В самом деле, возьмем последовательность чисел $a_n \in I_A$ и $a_n \to 1$. Тогда

$$\sup_{a\in I_A} \min(a;\ \theta(a, b)) \ge \min(a_n;\ \theta(a_n, b)) \to \min(1;\ \theta(1, b)) = b.$$

Оставшиеся импликации рассмотрим для случая, когда $I_A=[0, 1] = I_B$.

Рассмотрим *импликацию Лукасевича*, которая задается функцией $\theta(a, b) = \min(1;\ 1 - a + b)$, и покажем, что равенство (20.5), вообще говоря, не выполнено. В самом деле, для любого числа $0 \le b < 1$ число $a_b = \frac{1+b}{2} \in [0, 1]$. Далее,

$$\min(a_b;\ \min(1;\ 1 - a_b + b)) = \min\left(\frac{1+b}{2};\ \min\left(1;\ 1 - \frac{1+b}{2} + b\right)\right) =$$

$$= \min\left(\frac{1+b}{2};\ \min\left(1;\ 1 - \frac{1+b}{2} + b\right)\right) = \min\left(\frac{1+b}{2};\ \min\left(1; \frac{1+b}{2}\right)\right) =$$

$$= \min\left(\frac{1+b}{2};\ \frac{1+b}{2}\right) = \frac{1+b}{2} > b.$$

Стало быть, $\sup\limits_{a\in I_A} \min(a;\ \min(1;\ 1 - a + b)) > b$.

Рассмотрим *импликацию*, которая задается функцией $\theta = a \nabla b$, и покажем, что равенство (20.5), вообще говоря, не выполнено.

Имеем

$$\sup_{a\in I_A}\min(a;\ \theta(a,b))=\sup_{0\le a\le 1}\min(a;\ \begin{cases}1 & при\ a\le b,\\ \dfrac{b}{a} & при\ a>b\end{cases})=$$

$$=\sup_{0\le a\le 1}\begin{cases}a & при\ 0\le a\le\sqrt{b},\\ \dfrac{b}{a} & при\ \sqrt{b}\le a\le 1\end{cases}=\sqrt{b}\,.$$

Рассмотрим функцию $\theta(a, b) = \max(1 - a; b)$. Тогда при $0 \le b \le 0,5$

$$\sup_{0\le a\le 1}\min(a;\max(1-a;\ b)) = \begin{cases}a & при\ 0\le a\le 0{,}5,\\ 1-a & при\ 0{,}5\le a\le 1-b,\\ b & при\ 1-b\le a\le 1\end{cases} = 0{,}5.$$

Если $0,5 \le b \le 1$, то

$$\sup_{0\le a\le 1}\min(a;\max(1-a;\ b)) = \begin{cases}a & при\ 0\le a\le b,\\ b & при\ b\le a\le 1\end{cases} = b.$$

Пусть $\theta(a, b) = 1 - a + ab$. Тогда при $0 \le b < 1$

$$\sup_{0\le a\le 1}\min(a;\ 1-a+ab) = \sup_{0\le a\le 1}\begin{cases}a & при\ 0\le a\le\dfrac{1}{2-b},\\ 1-a+ab & при\ b\le a\le 1\end{cases} = \frac{1}{2-b} > b.$$

Для функции $\theta(a, b) = \max(\min(a; b); 1 - a)$, которая определяется функцией принадлежности нечеткого отношения (19.22), изучим рассматриваемый вопрос в более общем виде.

Теорема 20.2. Пусть выполнено неравенство (20.4) и число $0,5 \in I_A$. Тогда для функции $\theta(a, b) = \max(\min(a; b); 1 - a)$ в каждой точке $b < \operatorname{hgt} A$ выполнено равенство

$$\sup_{a\in I_A}\min(a;\ \theta(a,b)) = \max(0{,}5;\ \sup_{a\in I_A,\,a\le b} a). \qquad (20.8)$$

Доказательство. Зафиксируем число $b < \operatorname{hgt} A$. Из неравенства (20.4) следует, что множество чисел $a \in I_A$, $a \ge b$ непусто. Для рассматриваемой функции левая часть доказываемого равенства (20.8) равна

$$\sup_{a\in I_A}\min(a;\max(\min(a;\ b);\ 1-a)) = \max(Q_1;\ Q_2).$$

Здесь обозначено

$$Q_1=\sup_{a\in I_A,\,a\le b}\min(a;\max(\min(a;\ b);\ 1-a)) =$$

$$=\sup_{a\in I_A,\,a\le b}\min(a;\max(a;\ 1-a)) = \sup_{a\in I_A,\,a\le b} a;$$

$$Q_2 = \sup_{a\in I_A, a\ge b} \min(a; \max(\min(a; b); 1-a)) = \sup_{a\in I_A, a\ge b} \min(a; \max(b; 1-a)).$$

В случае если множество чисел $a \in I_A$, $a \le b$ пусто, полагаем $Q_1 = 0$.

Пусть $0 \le b \le 0,5$. Тогда

$$Q_2 = \sup_{a\in I_A, a\ge b} \min(a; \max(b; 1-a)) =$$

$$= \sup_{a\in I_A, a\ge b} \min\left(a; \min\left(a; \begin{cases} 1-a & при\ b\le a\le 1-b, a\in I_A, \\ b & при\ 1-b\le a\le 1, a\in I_A \end{cases}\right)\right) =$$

$$= \sup_{a\in I_A, a\ge b} \begin{cases} a & при \quad b\le a\le 0,5, a\in I_A, \\ 1-a & при \quad 0,5\le a\le 1-b, a\in I_A, \\ b & при \quad 1-b\le a\le 1, a\in I_A \end{cases} = 0,5.$$

Пусть $0,5 < b \le 1$. Тогда

$$Q_2 = \sup_{a\in I_A, a\ge b} \min(a; \max(b; 1-a)) = \sup_{a\in I_A, a\ge b} \min(a; b) = b.$$

Таким образом, $Q_2 = 0,5$ при $0 \le b \le 0,5$ и $Q_2 = b$ при $0,5 \le b \le 1$. Поэтому $\max(Q_1; Q_2) = \max(b; 0,5) = 0,5$ при $0 \le b \le 0,5$ и $\max(Q_1; Q_2) = b$ при $0,5\le b \le 1$.

Отсюда следует формула (20.8).

Следствие 20.1. Если выполнено неравенство (20.4), то для импликаций $A \Rightarrow B = A \blacksquare B$ и $A \Rightarrow B = A \times B$ выполнено равенство $B = A \blacklozenge (A \Rightarrow B)$.

Следствие 20.2. Пусть hgt $A = 1$. Тогда для импликаций $A \Rightarrow B = A \circ B$ и $A \Rightarrow B = A \div B$ выполнено равенство $B = A \blacklozenge (A \Rightarrow B)$. Здесь посредством $A \circ B$ и $A \div B$ обозначены нечеткие отношения, функции принадлежности которых имеют вид $\mu_{A\circ B}(x, y) = \mu_A(x)\mu_B(y)$ и $\mu_{A\div B}(x, y) = \max(0; \mu_A(x) + \mu_B(y) - 1)$.

Следствие 20.3. Пусть $\{\mu_A(x)\colon x \in X\} = [0, 1]$. Тогда выполнено равенство $A \blacklozenge ((A \times B) \vee (\overline{A} \times Y)) = B \vee (Y | 0,5)$.

Рассмотрим случай, когда нечеткий образ определяется первой формулой (219.24) с помощью функции $\psi(a, b) = ab$. Тогда

$$\mu_{B^*}(y) = \sup_{x\in X} (\mu_{A^*}(x)\mu_{A\Rightarrow B}(x, y)) \text{ или } B^* = A^* \bullet (A\Rightarrow B). \qquad (20.9)$$

Условие (20.2) *устойчивости* модели (20.9) относительно данных A и B принимает вид

$$\mu_B(y) = \sup_{x\in X} (\mu_A(x)\, \mu_{A\Rightarrow B}(x, y)). \qquad (20.10)$$

Теорема 20.3. Если для заданных нечетких множеств A и B уравнение (20.10) разрешимо относительно функции $\mu_{A\Rightarrow B}(x, y)$, то их высоты удовлетворяют неравенству (20.4).

Доказательство. Пусть уравнение (20.10) разрешимо относительно функции $\mu_{A\Rightarrow B}(x, y)$. Зафиксируем точку $y \in Y$. Тогда из (20.10) следует, что для каждого числа $\varepsilon > 0$ существует точка $x_\varepsilon \in X$ такая, что

$$\mu_B(y) \le \mu_A(x_\varepsilon)\mu_{A\Rightarrow B}(x_\varepsilon, y) + \varepsilon \le \mu_A(x_\varepsilon) + \varepsilon \le \operatorname{hgt} A + \varepsilon.$$

Отсюда, учитывая произвольность числа $\varepsilon > 0$ и точки $y \in Y$, получим требуемое неравенство (20.4).

Теорема 20.4. Пусть выполнено неравенство (20.4). Тогда функция $\mu_{A\Rightarrow B}(x, y) = \mu_A(x) \nabla \mu_B(y)$ является одним из решений уравнения (20.10). Для любого другого решения $\mu_{A\Rightarrow B}(x, y)$ уравнения (21.10) выполнено неравенство

$$\mu_{A\Rightarrow B}(x, y) \le \mu_A(x) \nabla \mu_B(y) \tag{20.11}$$

для любых $x \in X$ и $y \in Y$.

Доказательство. Имеем

$$\varphi(x) = \mu_A(x)(\mu_A(x) \nabla \mu_B(y)) = \begin{cases} \mu_A(x) \ \textit{при}\ \mu_A(x) \le \mu_B(y), \\ \mu_B(y) \ \textit{при}\ \mu_A(x) > \mu_B(y). \end{cases} \tag{20.12}$$

Отсюда видно, что $\varphi(x) \le \mu_B(y)$. Следовательно, $\sup\limits_{x\in X} \varphi(x) \le \mu_B(y)$.

Докажем обратное неравенство. С этой целью возьмем последовательность точек $x_n \in X$ такую, что $\mu_A(x_n) \to \operatorname{hgt} A$. Пусть $\mu_B(y) < \operatorname{hgt} A$. Тогда можно считать, что $\mu_B(y) < \mu_A(x_n)$. Из формулы (20.12) следует, что $\varphi(x_n) = \mu_B(y)$. Поэтому $\sup\limits_{x\in X} \varphi(x) \ge \mu_B(y)$. Пусть $\mu_B(y) = \operatorname{hgt} A$. Тогда из формулы (20.12) получим, что $\varphi(x_n) = \mu_A(x_n) \to \operatorname{hgt} A = \mu_B(y)$. Отсюда следует требуемое неравенство $\sup\limits_{x\in X} \varphi(x) \ge \mu_B(y)$.

Пусть функция $\mu_{A\Rightarrow B}(x, y)$ является решением уравнения (20.10). Тогда

$$\mu_B(y) \ge \mu_A(x)\mu_{A\Rightarrow B}(x, y) \tag{20.13}$$

для любых $x \in X$ и $y \in Y$.

Если $\mu_A(x) > \mu_B(y)$, то из (20.13) получим

$$\mu_{A\Rightarrow B}(x, y) \le \frac{\mu_B(y)}{\mu_A(x)} = \mu_A(x) \nabla \mu_B(y).$$

Пусть $\mu_A(x) \le \mu_B(y)$. Тогда $\mu_{A\Rightarrow B}(x, y) \le 1 = \mu_A(x) \nabla \mu_B(y)$.

Замечание 20.1. Обозначим посредством $A \nabla B$ нечеткое отношение, функция принадлежности которого имеет вид $\mu_{A\nabla B}(x,y) = \mu_A(x) \nabla \nabla \mu_B(y)$. Тогда, если выполнено неравенство (20.4), то можем записать $B = A \bullet (A \nabla B)$.

Исследуем устойчивость модели (20.9) с импликациями (19.13) — (19.21). В этом случае условие устойчивости (20.10) принимает следующий вид: для любого числа $b \in I_B = \{\mu_B(x): y \in Y\}$ выполнено равенство

$$b = \sup_{a\in I_A} (a\theta(a, b)); I_A = \{\mu_A(x): x\in X \}. \qquad (20.14)$$

Теорема 20.5. Пусть hgt $A = 1$. Тогда функции $\theta(a, b) = a \blacksquare b$, $\theta(a, b) = ab$, $\theta(a, b) = \min(a; b)$ и $\theta(a, b) = \max(0; a + b - 1)$ удовлетворяют равенству (20.14).

Доказательство. Каждая из перечисленных функций $\theta(a, b)$ удовлетворяет неравенству $a\theta(a, b) \le b$ при $0 \le a \le 1$ и $0 \le b \le 1$. Поэтому, $\sup\limits_{a\in I_A} (a\theta(a, b)) \le b$ при $b \in I_B$.

Покажем обратное неравенство. Из условия hgt $A = 1$ следует, что существует последовательность точек $a_n \in I_A$ и $a_n \to 1$. Пусть $b < 1$. Тогда можно считать, что $b < a_n$. В этом случае

$$a_n(a_n \blacksquare b) = a_nb \to b; a_n(a_n b) = a_n^2 b \to b; a_n \min(a_n; b) = a_n b \to b;$$
$$a_n(\max(0; a_n + b - 1)) = \max(0; a_n^2 + a_n b - a_n 1) \to \max(0; b) = b.$$

Если $b = 1$, то

$$a_n(a_n \blacksquare 1) = a_n \to 1 = b; a_n \min(a_n; 1) = a_n \to 1 = b;$$
$$a_n (a_n1) = a_n^2 \to 1 =b; a_n(\max(0; a_n + 1 - 1)) = a_n^2 \to 1 = b.$$

Отсюда следует, что $\sup\limits_{a\in I_A} (a\theta(a, b)) \ge b$ при $b \in I_B$. Теорема доказана.

Оставшиеся импликации рассмотрим для случая, когда $I_A = [0, 1]$. Имеем

$$\sup_{0\le a\le 1} (a \min(1; 1 - a + b)) = \sup_{0\le a\le 1} \begin{cases} a & при\, a\le b, \\ a-a^2+ab & при\, a>b \end{cases} = \left(\frac{1+b}{2}\right)^2 \ge b;$$

$$\sup_{0\le a\le 1} (a \max(1 - a; b)) = \sup_{0\le a\le 1} (\max(a - a^2; ab)) =$$
$$= \max(\sup_{0\le a\le 1} (a - a^2); \sup_{0\le a\le 1} (ab)) = \max(0{,}25;b);$$

$$\sup_{0\le a\le 1}(a(1-a+ab)) = \sup_{0\le a\le 1}(a-a^2+a^2b) = \begin{cases} \dfrac{1}{4(1-b)} & при\, 0\le b\le 0{,}5, \\ b & при\, 0{,}5\le b\le 1; \end{cases}$$

$$\sup_{0\le a\le 1}(a\max(\min(a;b);1-a)) = \sup_{0\le a\le 1}(\max((a\min(a;b));a-a^2)) =$$

$$= \max(\sup_{0\le a\le 1}(a\min(a;b));\ \sup_{0\le a\le 1}(a-a^2)) = \max(b;0{,}25).$$

Зафиксируем нечеткое отношение R из универсального множества X в универсальное множество и построим его образ $A \bullet R$ по формуле

$$\mu_{A\bullet R}(y)=\sup_{x\in X}(\mu_A(x)\ \mu_R(x,y)),\ y\in Y \qquad (20.15)$$

Теорема 20.6. Нечеткое отображение $A \bullet R$ обладает следующими свойствами:

$$A_1 \angle A_2 \Rightarrow A_1 \bullet R \angle A_2 \bullet R;\quad R_1 \angle R_2 \Rightarrow A \bullet R_1 \angle A \bullet R_2; \qquad (20.16)$$

$$\bigvee_{i=1}^{n}(A\bullet R_i) = A\bullet(\bigvee_{i=1}^{n}R_i),\quad A\bullet(\bigwedge_{i=1}^{n}R_i)\angle \bigwedge_{i=1}^{n}(A\bullet R_i). \qquad (20.17)$$

Доказательство. Включения (20.16) непосредственно следуют из формулы (20.15). Покажем первое равенство (20.17). Обозначим через $\mu_i(x, y)$ функцию принадлежности нечеткого отношения R_i. Меняя местами операции max и sup, получим требуемое равенство

$$\max_{1\le i\le n}\sup_{x\in X}(\mu_A(x)\mu_i(x,y)) = \sup_{x\in X}(\mu_A(x)\max_{1\le i\le n}\mu_i(x,y)).$$

Покажем второе включение (20.17). Имеем

$$\sup_{x\in X}(\mu_A(x)\min_{1\le i\le n}\mu_i(x,y)) = \sup_{x\in X}\min_{1\le i\le n}(\mu_A(x)\mu_i(x,y)) \le \min_{1\le i\le n}\sup_{x\in X}(\mu_A(x)\mu_i(x,y)).$$

Рассмотрим случай, когда нечеткий образ определяется второй формулой (19.24) с помощью функции $\psi(a, b) = a \blacksquare b$. Тогда

$$\mu_{B+}(y)=\inf_{x\in X}(\mu_{A+}(x)\blacksquare\mu_{A\Rightarrow B}(x,y))\ \text{или}\ B^+ = A^+ \blacktriangleleft (A\Rightarrow B). \qquad (20.18)$$

Условие *устойчивости* модели (20.18) относительно данных A и B принимает вид

$$\mu_B(y)=\inf_{x\in X}(\mu_A(x)\blacksquare\mu_{A\Rightarrow B}(x,y))\ \text{или}\ B = A \blacktriangleleft (A\Rightarrow B). \qquad (20.19)$$

Замечание 20.2. Если hgt B < hgt A или hgt B = hgt A = 1, то, согласно замечанию 17.2, импликация $A \Rightarrow B = A \times B$ удовлетворяет равенству (20.19). Из теоремы 17.1 следует, что любое решение $\mu_{A\Rightarrow B}(x, y)$ уравнения (20.19) удовлетворяет неравенству $\mu_{A\Rightarrow B}(x, y) \ge \min(\mu_A(x); \mu_B(y))$.

Исследуем устойчивость модели (20.18) с импликациями (19.13) — (19.21). В этом случае условие устойчивости (20.19) принимает следующий вид: для любого числа $b \in I_B$ выполнено равенство

$$b = \inf_{a\in I_A} (a \blacksquare \theta(a, b)) = \inf_{a\in I_A} \begin{cases} 1 & при\, a \le \theta(a,b), \\ \theta(a,b) & при\, a > \theta(a,b). \end{cases} \qquad (20.20)$$

Теорема 20.7. Пусть hgt $A = 1$. Тогда функции $\theta(a, b) = a \blacksquare b$, $\theta(a, b) = \min(a; b)$, $\theta(a, b) = \min(1; 1 - a + b)$, $\theta(a, b) = a \nabla b$, $\theta(a, b) =$ $= 1 - a + ab$, $\theta(a, b) = \max(\min(a; b); 1 - a)$ удовлетворяют равенству (20.20).

Доказательство. Из второго равенства в (11.5) получим, что $a \blacksquare (a \blacksquare b)) = a \blacksquare b \ge b$. Поэтому $\inf\limits_{a\in I_A} (a \blacksquare (a \blacksquare b)) \ge b$. Покажем обратное неравенство. Из условия hgt $A = 1$ следует, что существует последовательность точек $a_n \in I_A$ и $a_n \to 1$. Пусть $b < 1$. Тогда можно считать, что $b < a_n$. Поэтому $a_n \blacksquare b = b$ и, следовательно, $\inf\limits_{a\in I_A} (a \blacksquare b) = b$. Если $b = 1$, то $a \blacksquare b = a \blacksquare 1 = 1 = b$. Поэтому равенство (20.20) выполнено.

Функция $\theta(a, b) = \min(a; b)$ удовлетворяет равенству (20.20) согласно замечанию 20.3.

Рассмотрим функцию $\theta(a, b) = \min(1; 1 - a + b)$. Тогда

$$a \blacksquare \theta(a, b)) = \begin{cases} 1 & при\, 0 \le a \le b, \\ 1 & при\, b < a \le \dfrac{1+b}{2}, \\ 1-a+b & при\, \dfrac{1+b}{2} < a \le 1 \end{cases} \ge b.$$

С другой стороны, возьмем последовательность точек $a_n \in I_A$ и $a_n \to 1$. Пусть $b < 1$. Тогда можно считать, что $\dfrac{1+b}{2} < a_n$. Поэтому

$$\inf_{a\in I_A} (a \blacksquare \theta(a, b)) \le a_n \blacksquare \theta(a_n, b) = 1 - a_n + b \to b.$$

Если $b = 1$, то $\dfrac{1+b}{2} = 1$. Поэтому $a \blacksquare \theta(a, b) = a \blacksquare \theta(a, 1) = 1 = b$ для всех $a \in I_A$ и, следовательно, $\inf\limits_{a\in I_A} (a \blacksquare b) = b$. Если $b = 1$, то $a \blacksquare b =$ $a \blacksquare 1 = 1 = b$. Поэтому равенство (20.20) выполнено.

Рассмотрим функцию $\theta(a, b) = a \nabla b$. Тогда из табл. 11.7 получим

$$a \blacksquare (a \nabla b) = \begin{cases} 1 & при\, a^2 \le b, \\ b & при\, a^2 > b \end{cases} \ge b.$$

Пусть $b < 1$. Тогда для последовательности $a_n \in I_A$ и $a_n \to 1$ можно считать, что $a_n^2 > b$. Поэтому $\inf\limits_{a \in I_A} (a \blacksquare (a \nabla b)) \le a_n \blacksquare (a_n \nabla b) = b$. Пусть $b = 1$. Тогда $a^2 < b$ для всех $0 \le a < 1$ и, следовательно, $a \blacksquare (a \nabla b) = a \blacksquare (a \nabla 1) = 1 = b$. При $b = 1$ и $a = 1$ имеем $a \blacksquare (a \nabla b) = 1 \blacksquare (1 \nabla 1) = 1 = b$.

Рассмотрим функцию $\theta(a, b) = 1 - a + ab$. Тогда

$$(a \blacksquare \theta(a, b)) = \begin{cases} 1 & при\, a \le 1 - a + ab, \\ 1 - a + ab & при\ a > 1 - a + ab \end{cases} = \begin{cases} 1 & при\, 0 \le a \le \dfrac{1}{2-b}, \\ 1 - a + ab & при\ \dfrac{1}{2-b} < a \le 1 \end{cases} \ge b.$$

Пусть $b < 1$. Тогда для последовательности $a_n \in I_A$ и $a_n \to 1$ можно считать, что $\dfrac{1}{2-b} < a$. Поэтому $\inf\limits_{a \in I_A} (a \blacksquare (1 - a + ab)) \le a_n \blacksquare (1 - a_n + a_n b) = 1 - a_n + a_n b \to b$. Пусть $b = 1$. Тогда $a \blacksquare (1 - a + ab) = a \blacksquare (1 - a + a) = a \blacksquare 1 = 1 = b$ для всех $0 \le a \le 1$.

Пусть $\theta(a, b) = \max(\min(a; b); 1 - a)$. Тогда

$$\inf_{a \in I_A} (a \blacksquare \theta(a, b)) = \inf_{a \in I_A} (a \blacksquare \max(\min(a; b); 1 - a)).$$

Рассмотрим случай $b = 0$. Тогда, учитывая, что hgt $A = 1$, получим равенство

$$\inf_{a \in I_A} (a \blacksquare \theta(a, b)) = \inf_{a \in I_A} (a \blacksquare (1 - a)) = \inf_{a \in I_A} \begin{cases} 1 & при\ 0 \le a \le 0{,}5, \\ 1 - a & при\ 0{,}5 < a \le 1 \end{cases} = 0.$$

При $0 < b \le 1$ имеем

$$\inf_{a \in I_A} (a \blacksquare \theta(a, b)) = \min\Big(\inf_{a < b,\, a \in I_A} (a \blacksquare \max(a; 1 - a));$$

$$\inf_{b \le a,\, a \in I_A} (a \blacksquare \max(b; 1 - a))\Big) = \min\Big(1; \inf_{b \le a,\, a \in I_A} (a \blacksquare \max(b; 1 - a))\Big) =$$

$$= \inf_{b \le a,\, a \in I_A} (a \blacksquare \max(b; 1 - a)). \qquad (20.21)$$

Рассмотрим случай $0 < b < 0{,}5$. При $b \le a \le 1$ имеем

$$a \blacksquare \max(b; 1 - a) = a \blacksquare \begin{cases} 1 - a & при\, b \le a \le 1 - b, \\ b & при\, 1 - b \le a \le 1 \end{cases} = \begin{cases} 1 & при\, b \le a \le 0{,}5, \\ 1 - a & при\ 0{,}5 < a \le 1 - b, \\ b & при\, 1 - b < a \le 1. \end{cases}$$

Поэтому $\inf\limits_{b \le a, a \in I_A} (a \blacksquare \max(b;\ 1 - a)) = b$.

Рассмотрим случай $0{,}5 \le b \le 1$. Из формулы (20.21) следует, что

$$\inf_{a \in I_A} (a \blacksquare \theta(a, b)) = \inf_{b \le a, a \in I_A} (a \blacksquare b) = \min(1;\ b) = b.$$

Теорема доказана.

Оставшиеся импликации рассмотрим для случая, когда $I_A = [0, 1]$. Пусть $\theta(a, b) = ab$. Тогда

$$\inf_{0 \le a \le 1} (a \blacksquare \theta(a, b)) = \inf_{0 \le a \le 1} \begin{cases} 1 & \text{при } a \le ab, \\ ab & \text{при } a > ab. \end{cases}$$

Следовательно, $\inf\limits_{0 \le a \le 1} (a \blacksquare \theta(a, b)) = 0$ при $0 \le b < 1$.

Пусть $\theta(a, b) = \max(0;\ a + b - 1)$. Тогда

$$\inf_{0 \le a \le 1} (a \blacksquare \theta(a, b)) = \inf_{0 \le a \le 1} \begin{cases} 1 & \text{при } a \le \max(0; a + b - 1), \\ \max(0; a + b - 1) & \text{при } a > \max(0; a + b - 1) \end{cases} =$$

$$= \inf_{0 \le a \le 1} \begin{cases} 1 & \text{при } a = 0,\ 0 \le b \le 1 \text{ или } a > 0,\ b = 1, \\ 0 & \text{при } a > 0,\ a + b \le 1, \\ a + b - 1 & \text{при } a > 0,\ a + b > 1,\ b < 1. \end{cases}$$

Отсюда получим, что $\inf\limits_{0 \le a \le 1} (a \blacksquare \theta(a, b)) = 0$ при $0 \le b < 1$.

Пусть $\theta(a, b) = \max(1 - a;\ b)$. Тогда

$$\inf_{0 \le a \le 1} (a \blacksquare \theta(a, b)) = \inf_{0 \le a \le 1} \begin{cases} 1 & \text{при } a \le \max(0; a + b - 1), \\ \max(0; a + b - 1) & \text{при } a > \max(0; a + b - 1) \end{cases} =$$

$$= \inf_{0 \le a \le 1} \begin{cases} 1 & \text{при } a = 0,\ 0 \le b \le 1 \text{ или } a > 0,\ b = 1, \\ 0 & \text{при } a > 0,\ a + b \le 1, \\ a + b - 1 & \text{при } a > 0,\ a + b > 1,\ b < 1. \end{cases}$$

Следовательно, $\inf\limits_{0 \le a \le 1} (a \blacksquare \theta(a, b)) = 0$ при $0 \le b < 1$.

Замечание 20.3. Согласно теореме 14.2. нечеткое отношение (20.18) обладает следующим свойством: $A^{+}_1 \angle A^{+}_2 \Rightarrow A^{+}_2 \blacktriangleleft (A \Rightarrow B) \angle$ $\angle A^{+}_1 \blacktriangleleft (A \Rightarrow B)$.

Другими словами, чем больше входное множество A^{+}, тем меньше выходное множество $A^{+} \blacktriangleleft (A \Rightarrow B)$. Такое свойство может быть полезным при построении медицинских диагностических моделей, поскольку с ростом числа обследований больного должно сокращаться число диагнозов заболеваний.

Исследуем еще на одно свойство функции $\theta(a, b)$. Потребуем, чтобы для обычных множеств A и B импликация $A \Rightarrow B$, определяемая этой функцией $\theta(a, b)$, совпадала с множеством (19.1). Это значит, что должно выполняться равенство $\theta(a, b) = \delta_R(a, b)$ для всех чисел $a = 0, 1$ и $b = 0, 1$. Отсюда и из формулы (19.2) получим, что должны выполнятся равенства

$$\theta(1, 1) = \theta(0, 1) = \theta(0, 0) = 1,\ \theta(1, 0) = 0. \quad (20.22)$$

Этим условиям удовлетворяют функции

$$a \blacksquare b,\ \min(1; 1 - a + b),\ \max(1 - a; b),\ 1 - a + ab,\ \max(\min(a; b); 1 - a).$$

§ 21. Исследование свойств образа при четкой входной информации

Рассмотрим случай, когда на вход поступает *четкая* информация $x = x_0 \in X$. Эту информацию интерпретируем как нечеткое множество с функцией принадлежности

$$\mu(x) = \mu_A(x) = 0 \text{ при } x \neq x_0 \text{ и } \mu(x_0) = \mu_A(x) = 1, \text{ если } x = x_0.$$

Вычислим по формулам (20.2), (20.9) и (20.18) функцию принадлежности $\mu(y) = \mu_B(y)$ выходного множества. Положим в этих формулах

$$\mu_{A\Rightarrow B}(x, y) = \theta(\mu_A(x), \mu_B(y)).$$

Получим

$$\mu(y) = \theta(\mu_A(x_0), \mu_B(y)). \quad (21.1)$$

На рис. 21.1 и 21.2 приведены графики функций $\mu_A(x)$ и $\mu_B(y)$, а также отмечена точка x_0. Представлен случай $0 < c = \mu_A(x_0) < 0{,}5$.

Для функции $\theta(a, b) = a \blacksquare b$ формула (21.1) принимает вид

$$\mu_1(y) = c \blacksquare \mu_B(y) = \mu_B(y) \text{ при } 0 \le \mu_B(y) < c$$
$$\text{и } \mu_1(y) = 1 \text{ при } c \le \mu_B(y) \le 1. \quad (21.2)$$

График функции $\mu(y) = \mu_1(y)$ приведен на рис. 21.3.

Для функции $\theta(a, b) = \min(a; b)$ из формулы (21.1) получим

$$\mu_2(y) = \min(c; \mu_B(y)). \quad (21.3)$$

График этой функции приведен на рис. 21.4.

Для функции $\theta(a, b) = ab$ из формулы (21.1) следует

$$\mu_3(y) = c\mu_B(y). \quad (21.4)$$

График этой функции приведен на рис. 21.5.

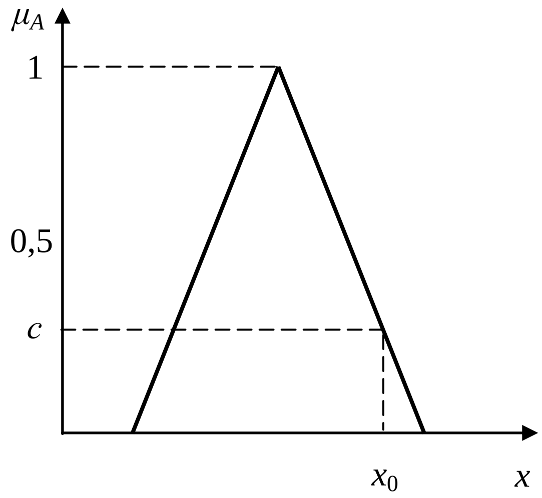

Рис. 21.1

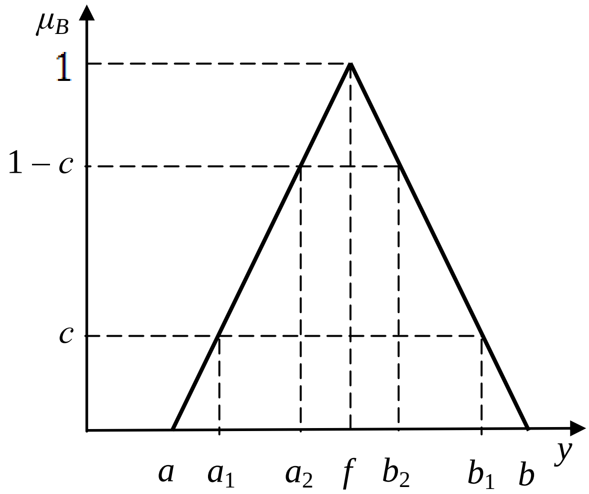

Рис. 21.2

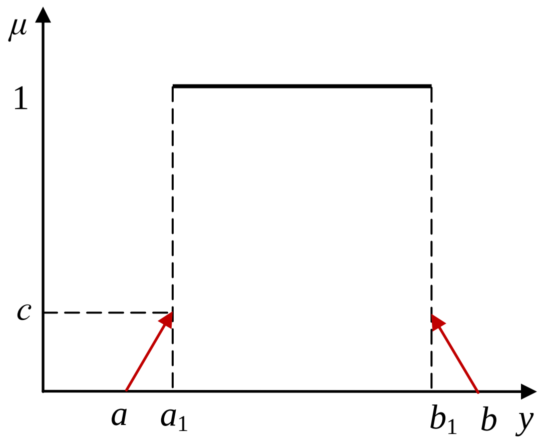

Рис. 21.3. $\theta = a \blacksquare b$

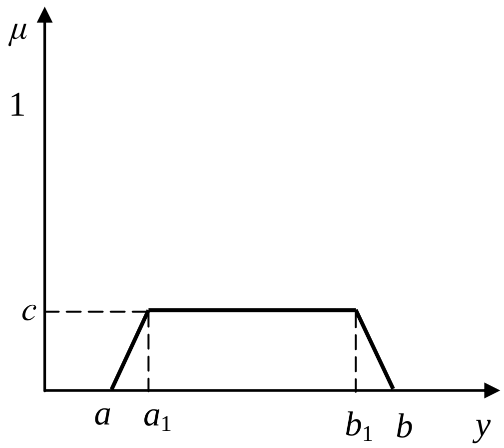

Рис. 21.4. $\theta = \min(a; b)$

Для функции $\theta(a, b) = \max(0; a + b - 1)$ из формулы (21.23) получим

$$\mu_4(y) = 0 \text{ при } 0 \le \mu_B(y) \le 1 - c$$
$$\text{и } \mu_4(y) = \mu_B(y) + c - 1 \text{ при } 1 - c < \mu_B(y) \le 1. \quad (21.5)$$

График функции $\mu_4(y)$ приведен на рис. 21.6.

Для функции $\theta(a, b) = \min(1; 1 - a + b)$ формула (21.1) принимает вид

$$\mu_5(y) = 1 - c + \mu_B(y) \text{ при } 0 \le \mu_B(y) \le c \text{ и } \mu_5(y) = 1 \text{ при } c < \mu_B(y) \le 1. \quad (21.6)$$

График функции $\mu_5(y)$ приведен на рис. 21.7.

Для функции $\theta(a, b) = a \nabla b$ из формулы (21.1) следует

$$\mu_6(y) = \frac{\mu_B(y)}{c} \text{ при } 0 \le \mu_B(y) < c \text{ и } \mu_6(y) = 1 \text{ при } c \le \mu_B(y) \le 1. \quad (21.7)$$

График функции $\mu_6(y)$ приведен на рис. 21.8.

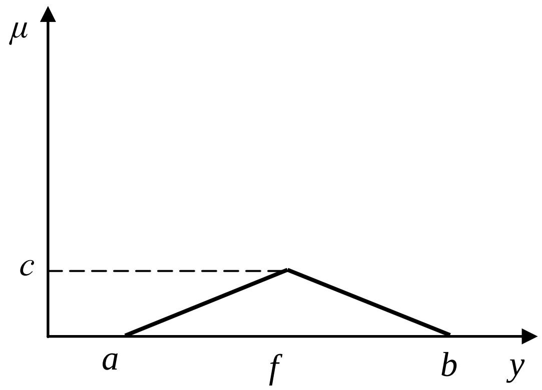

Рис. 21.5. $\theta = ab$

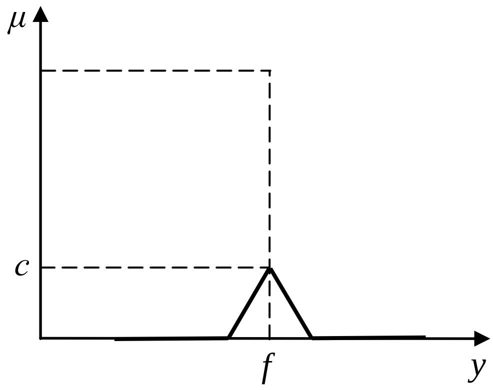

Рис. 21.6. $\theta = \max(0; a + b - 1)$

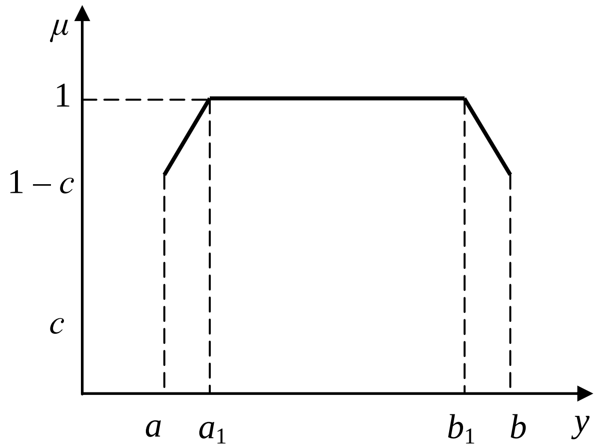

Рис. 21.7. $\theta = \min(1; 1 - a + b)$

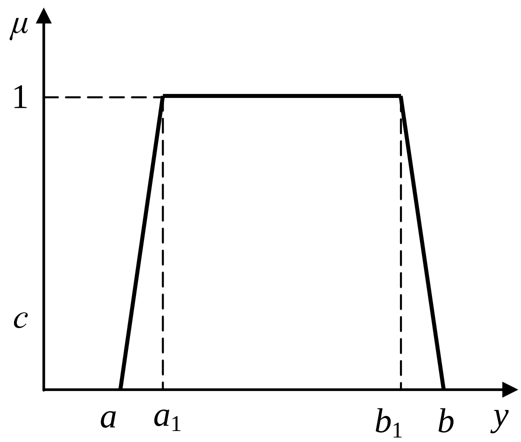

Рис. 21.8. $\theta = a \nabla b$

Для функции $\theta(a, b) = \max(1 - a; b)$ из формулы (21.1) получим

$$\mu_7(y) = 1 - c \text{ при } 0 \le \mu_B(y) \le 1 - c$$
$$\text{и } \mu_7(y) = \mu_B(y) \text{ при } 1 - c < \mu_B(y) \le 1. \quad (21.8)$$

График функции $\mu_7(y)$ приведен на рис. 21.9.

Для функции $\theta(a, b) = 1 - a + ab$ формула (21.1) принимает вид

$$\mu_8(y) = 1 - c(1 - \mu_B(y)). \quad (21.9)$$

График функции $\mu_8(y)$ приведен на рис. 21.10.

Для функции $\theta(a, b) = \max(\min(a; b); 1 - a)$ формула (21.1) примет вид

$$\mu_9(y) = \max(\min(c; \mu_B(y)); 1 - c).$$

В случае $c \le 1 - c$ имеем $\mu(y) = 1 - c$ при $c \le \mu_B(y) \le 1$ и $\mu_9(y) = \max(\mu_B(y); 1 - c) = 1 - c$ при $0 \le \mu_B(y) \le c$. Таким образом,

$$\text{если } 0 \le c \le 0{,}5, \text{ то } \mu_9(y) = 1 - c \text{ при всех } 0 \le y \le 1;$$
$$\text{если } 0{,}5 < c \le 1, \text{ то } \mu_9(y) = 1 - c \text{ при } 0 \le \mu_B(y) \le 1 - c;$$
$$\mu_9(y) = \mu_B(y) \text{ при } 1 - c < \mu_B(y) \le c; \ \mu_9(y) = c \text{ при } c \le \mu_B(y) \le 1. \quad (21.10)$$

График функции $\mu_9(y)$ для случая $1 - c < c$ приведен на рис. 21.11.

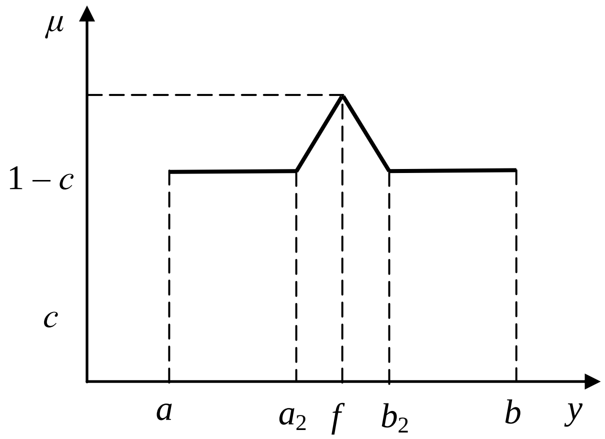

Рис. 21.9. $\theta = \max(1 - a;\, b)$

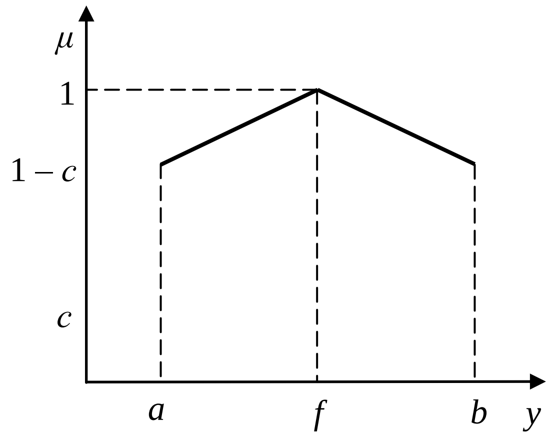

Рис. 21.10. $\theta = 1 - a + ab$

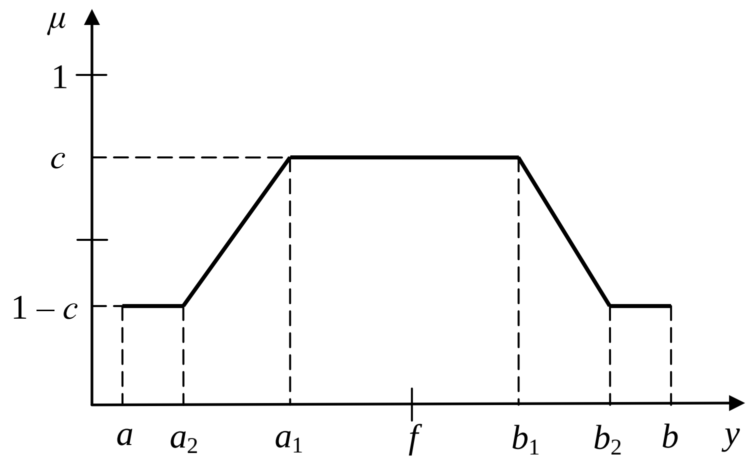

Рис. 21.11. $\theta = \max(\min(a;\, b);\, 1 - a)$

Еще одной характеристикой импликации может служить индекс нечеткости выходного множества, если на вход поступает *четкая* информация $x = x_0 \in X$. Вычислим линейный индекс нечеткости

$$d_i = \frac{2}{b-a}\int_a^b \min(\mu_i(y);1-\mu_i(y))\,dy \qquad (21.11)$$

для нечетких множеств с функциями принадлежности (21.2) — (21.10).

Вначале отметим, что, как следует из рис. 21.2,

$$a_1 = a + c\,(f - a), \quad b_1 = b - c\,(b - f). \qquad (21.12)$$

Рассмотрим функцию $\mu_1(y)$. Пусть $0 \le c = \mu_A(x_0) < 0{,}5$. Из рис. 21.3 следует, что $\min(\mu_1(y);\ 1 - \mu_1(y)) = \mu_1(y)$ при $y \in [a,\ a_1) \cup (b_1,\ b]$

и $\min(\mu_1(y);\ 1-\mu_1(y)) = 0$ при $y \in [a_1, b_1]$. Поэтому линейный индекс нечеткости (21.11) равен $\frac{2}{b-a}\left(c\frac{a_1-a}{2}-c\frac{b-b_1}{2}\right)$. Используя формулы (21.12), получим

$$d_1 = \frac{2}{b-a}\left(c\frac{a_1-a}{2}+c\frac{b-b_1}{2}\right) = \frac{2}{b-a}\left(c\frac{a_1-a}{2}-c\frac{b-b_1}{2}\right) = c^2.$$

Пусть $0{,}5 \le c = \mu_A(x_0) \le 1$. Из рис. 21.12 видно, что графиком функции $\mu_1(y)$ является ломаная $AXUVZK$, а ломаная $NDHLEW$ является графиком функции $1-\mu_1(y)$. Поэтому графиком функции $\min(\mu_1(y);\ 1-\mu_1(y))$ является ломаная $ABDHLEMK$.

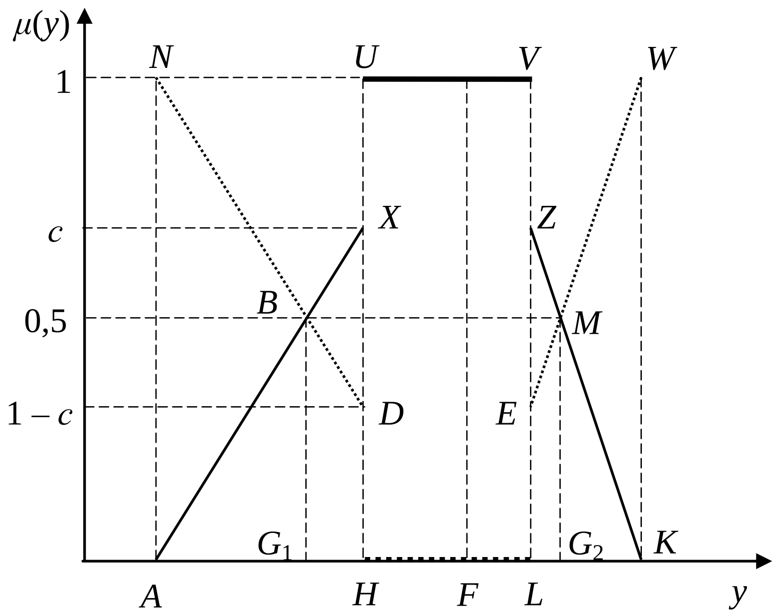

Рис. 21.12

Площадь S фигуры, которую образует эта ломаная с осью y, равна

$$S = 0{,}5\frac{AK+BM}{2} - (0{,}5-(1-c))\cdot\frac{HL+BM}{2} - (1-c)DE =$$

$$= 0{,}25((b-a)+0{,}5(b-a)) - (c-0{,}5)\cdot 0{,}5\cdot((1-c)(b-a)+0{,}5(b-a)) -$$

$$-(1-c)(1-c)(b-a) = 0{,}5(b-a)(0{,}75-(c-0{,}5)(1{,}5-c)-2(1-c)^2) =$$

$$= 0{,}5(b-a)(0{,}5-(1-c)^2).$$

Следовательно, индекс нечеткости равен

$$d_1 = c^2 \text{ при } 0 \le c < 0{,}5 \text{ и } d_1 = 0{,}5-(1-c)^2 \text{ при } 0{,}5 \le c \le 1. \quad (21.13)$$

Рассмотрим функцию $\mu_2(y)$. Пусть $0 \le c = \mu_A(x_0) < 0{,}5$. Из рис. 21.4 следует, что $\min(\mu_2(y);\ 1-\mu_2(y)) = \mu_2(y)$ при $y \in [a, b]$. Отсюда, учитывая формулы (21.12) получим, что линейный индекс нечеткости равен

$$d_2 = \frac{2}{b-a}\left(c\frac{(b-a)+(b_1-a_1)}{2}\right) = c(1-c) = 1-(1-c)^2.$$

Пусть $0{,}5 \le c = \mu_A(x_0) \le 1$. Из рис. 21.13 видно, что графиком функции $\mu_2(y)$ является ломаная $AUVK$, а ломаная $NDEM$ является графиком функции $1 - \mu_2(y)$. Поэтому графиком функции $\min(\mu_1(y);\ 1 - \mu_1(y))$ является ломаная $ABDEPK$. Площадь S фигуры, которую образует эта ломаная с осью y, равна

$$S = 0{,}5\frac{AK+BP}{2} - (0{,}5-(1-c))\cdot\frac{BP+DE}{2} =$$
$$= 0{,}25((b-a)+0{,}5(b-a)) - (c-0{,}5)\cdot 0{,}5\cdot((1-c)(b-a)+0{,}5(b-a))$$
$$= = 0{,}5(b-a)(0{,}75-(c-0{,}5)(1{,}5-c)) = 0{,}5(b-a)(1{,}5-2c+c^2) =$$
$$= 0{,}5(b-a)(0{,}5+(1-c)^2).$$

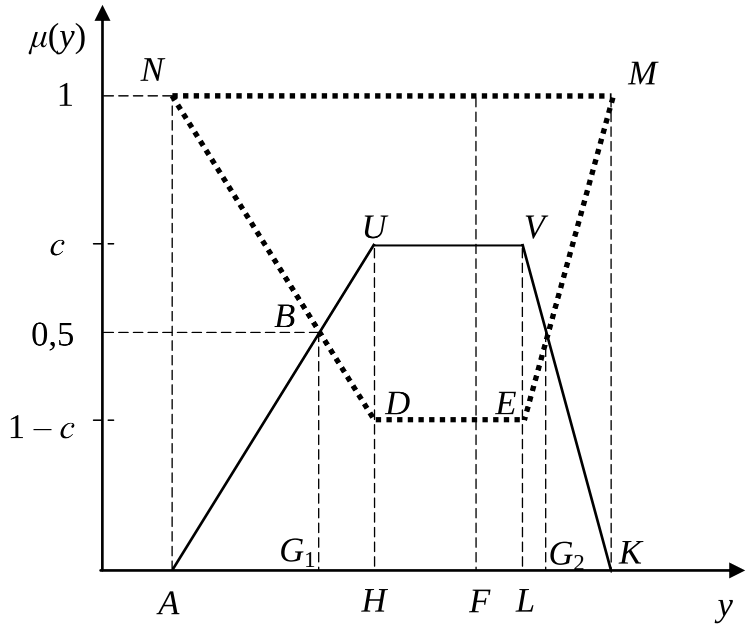

Рис. 21.13

Следовательно, линейный индекс нечеткости равен

$$d_2 = 1-(1-c)^2 \text{ при } 0 \le c < 0{,}5$$
$$\text{и } d_2 = 0{,}5+(1-c)^2 \text{ при } 0{,}5 \le c \le 1. \qquad (21.14)$$

Рассмотрим функцию $\mu_3(y)$. Пусть $0 \le c = \mu_A(x_0) < 0{,}5$. Из рис. 21.5 следует, что $\min(\mu_3(y);\ 1-\mu_3(y)) = \mu_3(y)$ при $y \in [a, b]$. Поэтому линейный индекс нечеткости равен $d_3 = \dfrac{2}{b-a}\left(c\dfrac{b-a}{2}\right) = c$. Пусть

$0{,}5 \le c = \mu_A(x_0) \le 1$. Из рис. 21.14 видно, что графиком функции $\mu_3(y)$ является ломаная AUK, а ломаная NDM является графиком функции $1 - \mu_3(y)$. Поэтому графиком функции $\min(\mu_3(y);\ 1 - \mu_3(y))$ является ломаная $ABDEK$. Площадь S фигуры, которую образует эта ломаная с осью y, равна

$$S = 0{,}5\frac{AK+BE}{2} - (0{,}5 - (1-c))\cdot\frac{BE}{2} = \frac{AK + AK\dfrac{c-0{,}5}{c}}{4} -$$

$$-(c-0{,}5)\cdot\frac{AK(c-0{,}5)}{2c} = \frac{AK}{2}\cdot\left(\frac{2c-0{,}5}{2c} - \frac{(c-0{,}5)^2}{c}\right) = \frac{AK}{2}\cdot\frac{-2c^2+4c-1}{2c}.$$

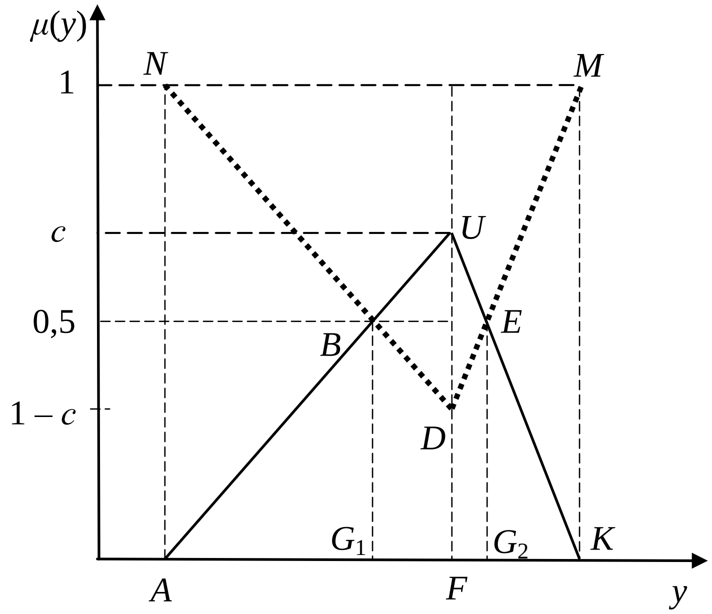

Рис. 21.14

Следовательно, линейный индекс нечеткости равен

$$d_3 = c \text{ при } 0 \le c < 0{,}5 \text{ и } d_3 = -c + 2 - \frac{1}{2c} \text{ при } 0{,}5 \le c \le 1. \quad (21.15)$$

Рассмотрим функцию $\mu_4(y)$. Пусть $0 \le c = \mu_A(x_0) < 0{,}5$. Из рис. 21.6 следует, что $\min(\mu_4(y);\ 1 - \mu_4(y)) = \mu_4(y)$ при $y \in [a, b]$. Поэтому линейный индекс нечеткости $d_4 = \dfrac{2}{b-a}\left(c\dfrac{b_2-a_2}{2}\right)$. Из рис. 21.2 следует, что

$$b_2 - a_2 = c\,(b-a). \quad (21.16)$$

Поэтому $d_4 = c^2$.

Пусть $0{,}5 \le c = \mu_A(x_0) \le 1$. Из рис. 21.15 видно, что графиком функции $\mu_4(y)$ является ломаная QUL, а ломаная NDM является графиком функции $1 - \mu_4(y)$. Поэтому графиком функции $\min(\mu_4(y); 1 - \mu_4(y))$ является ломаная $QBDEL$. Площадь S фигуры, которую образует эта ломаная с осью y, равна

$$S = 0{,}5\frac{QL+BE}{2} - (0{,}5 - (1 - c))\cdot\frac{BE}{2} = \frac{QL + QL\dfrac{c-0{,}5}{c}}{4} -$$

$$-(c - 0{,}5)\cdot\frac{QL(c-0{,}5)}{2c} = \frac{QL}{2}\left(\frac{2c-0{,}5}{2c} - \frac{(c-0{,}5)^2}{c}\right) = \frac{QL}{2}\cdot\frac{-2c^2+4c-1}{2c}.$$

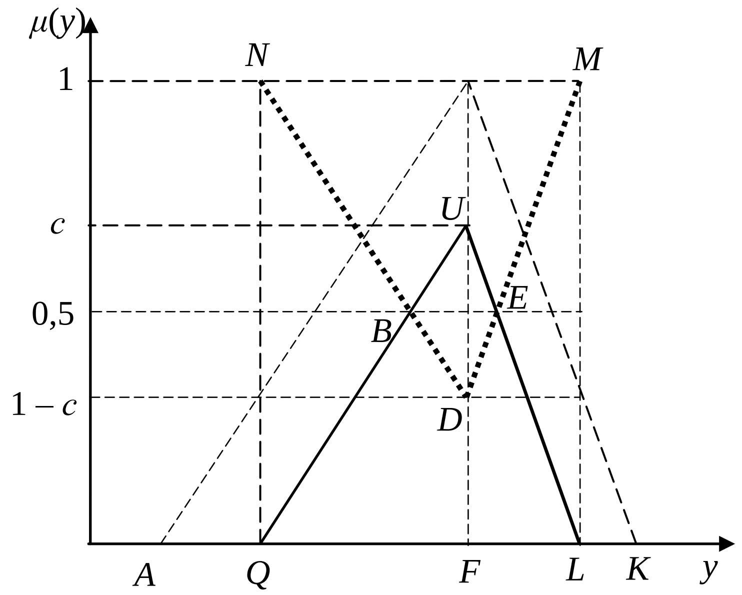

Рис. 21.15

Поскольку $QL = b_2 - a_2$, то, учитывая формулу (21.16), получим

$$S = 0{,}5(b - a)\cdot(-c^2 + 2c - 0{,}5) = 0{,}5(b - a)(0{,}5 - (1 - \text{c})^2).$$

Отсюда и из формулы (21.13) получим равенство $d_4 = d_1$.

Рассмотрим функцию $\mu_5(y)$. Ее график приведен на рис. 21.7.

Пусть $0 \le c = \mu_A(x_0) < 0{,}5$. Из рис. 21.16 видно, что графиком функции $\mu_5(y)$ является ломаная $FUVQ$, а графиком функции $1 - \mu_5(y)$ — ломаная $MBKN$. Поэтому графиком функции $\min(\mu_5(y); 1 - \mu_5(y))$ является ломаная $MBKN$. Площадь, которую образует эта ломаная с осью y, равна

$$0{,}5c(AB + KL) = 0{,}5c(a_1 - a + b - b_1).$$

Отсюда и из формулы (21.12) следует, что $0{,}5c^2(b - a)$. Стало быть, линейный индекс нечеткости $d_5 = c^2$.

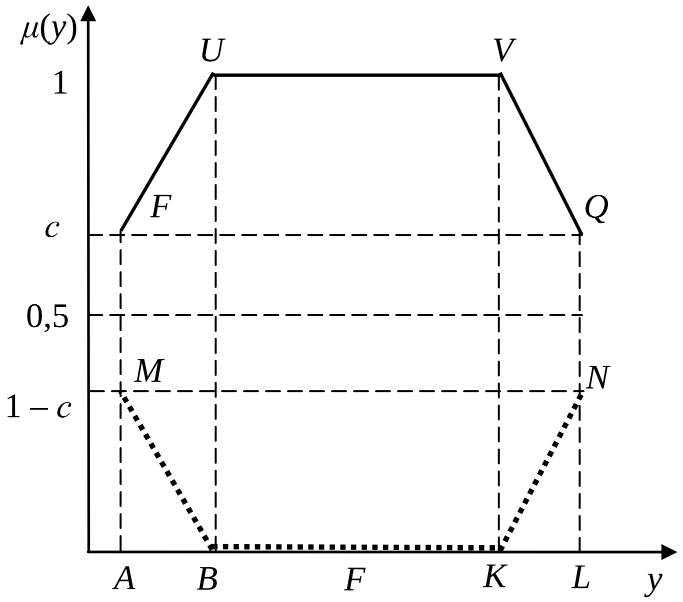

Рис. 21.16

Пусть $0{,}5 \le c = \mu_A(x_0) \le 1$. Из рис. 21.17 видно, что графиком функции $\mu_5(y)$ является ломаная *FUVQ*, а ломаная *MBKN* является графиком функции $1 - \mu_5(y)$. Поэтому графиком функции $\min(\mu_5(y); 1 - \mu_5(y))$ является ломаная *FRBKEQ*. Найдем координату y_R точки *R*. Из условия $\mu_5(y_R) = 0{,}5$ и из формулы (21.6) получим, что $\mu_5(y_R) = c - 0{,}5$. Отсюда и из рис. 21.2 следует, что $y_R = a + (c - 0{,}5)(f - a)$. Аналогично, координата точки *E* равна $y_E = b - (c - 0{,}5)(b - f)$. Площадь *S* фигуры, которую образует ломаная *FRBKEQ* с осью *y*, равна

$$S = 0{,}5(1 - c + 0{,}5)(y_R - a) + 0{,}5(a_1 - y_R)\cdot 0{,}5 +$$
$$+ 0{,}5(1 - c + 0{,}5)(b - y_E) + 0{,}5(y_E - b_1)\cdot 0{,}5.$$

Подставляя сюда найденные значения y_R и y_E, а также формулы (21.12), получим, что $S = 0{,}5(b - a)(0{,}5 - (1 - c)^2)$. Отсюда и из формулы (21.13) получим равенство $d_5 = d_1$.

Рассмотрим функцию $\mu_6(y)$. Ее график приведен на рис. 21.8, из которого видно, что графиком функции $\min(\mu_6(y); 1 - \mu_6(y))$ является ломаная *ARBKEL*. Площадь *S* фигуры, которую образует эта ломаная, равна

$$S = 0{,}25AB + 0{,}25KL = 0{,}25(a_1 - a) + 0{,}25(b - b_1).$$

Отсюда, используя формулы (21.12), получим, что $S = 0{,}25(b - a)c$. Поэтому линейный индекс нечеткости равен

$$d_6 = 0{,}5c. \qquad (21.17)$$

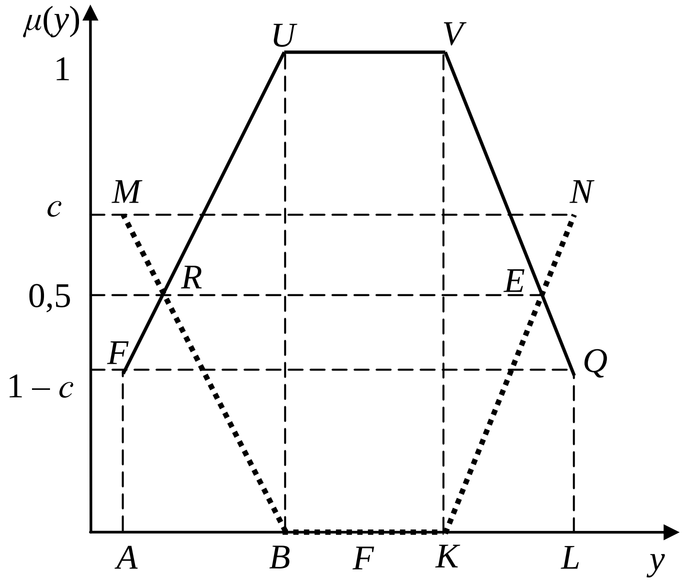

Рис. 21.17

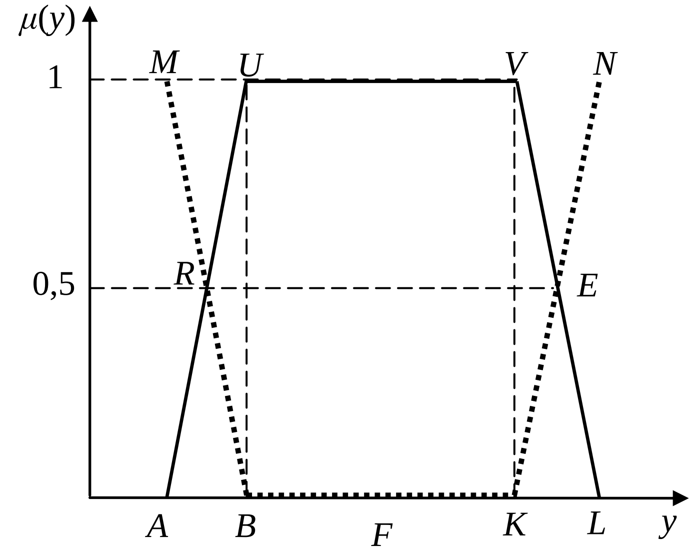

Рис. 21.18

Рассмотрим функцию $\mu_9(y)$. Пусть $0 < c = \mu_A(x_0) \le 0{,}5$. Тогда $\mu_9(y)=$ $= 1 - c$ при всех $y \in [a, b]$. Следовательно, $\min(\mu_9(y);\ 1 - \mu_9(y)) = c$ при $y \in [a, b]$. Поэтому линейный индекс нечеткости $d(\mu_9) = 2c$.

Пусть $0{,}5 \le c \le 1$. Из рис. 21.19 видно, что графиком функции $\mu_9(y)$ является ломаная $DBUVTQ$, а ломаная $DBRKPETQ$ является графиком функции $\min(\mu_9(y);\ 1 - \mu_9(y))$. Площадь S фигуры, которую образует эта ломаная с осью y, равна

$$S = (1 - c)(b - a) + (0{,}5 - (1 - c))((a_1 - a_2) + (b_2 - b_1)) =$$
$$= (1 - c)(b - a) + (c - 0{,}5)((b_1 - a_1) + (b_2 - a_2)) =$$
$$= (b - a)((1 - c) + (c - 0{,}5)((1 - c) + c)) = 0{,}5(b - a).$$

Таким образом, линейный индекс нечеткости равен

$$d_9 = 2\,c \text{ при } 0 \le c \le 0{,}5 \text{ и } d_9 = 1 \text{ при } 0{,}5 \le c \le 1. \qquad (21.18)$$

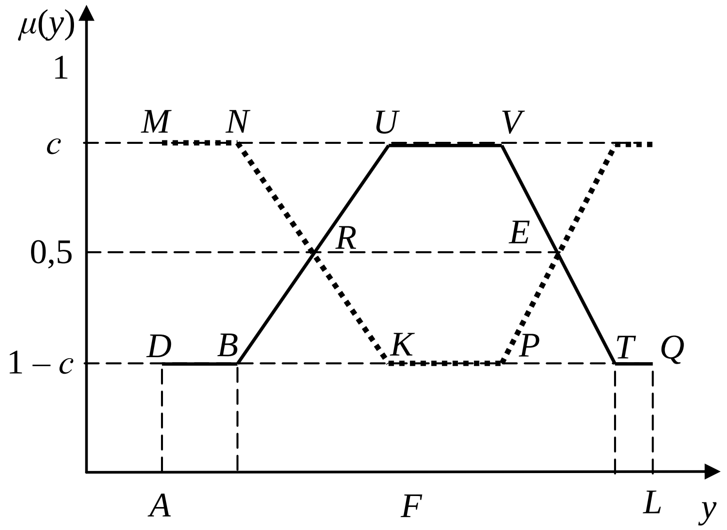

Рис. 21.19

Замечание 21.1. Максимальное значение линейных индексов нечеткости $d_1 = d_4 = d_5$ равно 0,5 и достигается при $c = 1$. Максимальное значение линейного индекса нечеткости d_2 равно $\frac{3}{4}$ и достигается при $c = 0{,}5$. Максимальное значение линейного индекса нечеткости d_3 достигается при $c = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и равно $2 - \sqrt{2}$. Максимальное значение линейного индекса нечеткости d_6 равно 0,5 и достигается при $c = 1$. Максимальное значение линейного индекса нечеткости d_9 равно 1 и достигается при $0{,}5 \le c \le 1$.

§ 22. Нечеткие модели вывода

Рассмотрим теперь случай, когда нечеткая модель задана n нечеткими высказываниями

$$\text{<<если } A_i, \text{ то } B_i\text{>>}, \quad i = \overline{1,n}. \qquad (22.1)$$

Здесь все A_i и B_i являются нечеткими множествами универсальных множеств X и Y соответственно. На основании этих высказываний с помощью выбранной функции θ: $[0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1]$ построим импликации $A_i \Rightarrow B_i$, $i = \overline{1,n}$. Их функции принадлежности равны

$$\mu_{A_i \Rightarrow B_i}(x,y) = \theta(\mu_{A_i}(x), \mu_{B_i}(y)). \qquad (22.2)$$

С помощью выбранной функции ψ: $[0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1]$ по одному из правил (19.24) построим локальный вывод:

$$B_i^{+} = A^{+} * (A_i \Rightarrow B_i), \quad i = \overline{1, n}. \qquad (22.3)$$

Вводится операция *агрегирования*, с помощью которой из n локальных выводов B_i^{+}, определяемых формулой (22.3), строится общий вывод B^{+}. Существует несколько подходов к конструированию операции агрегирования.

Первый подход состоит в том, что общий вывод B^{+} конструируется из локальных выводов B_i^{+}. Например,

$$B_{(1)}^{+} = \bigwedge_{i=1}^{n} B_i^{+}; \quad B_{(2)}^{+} = \bigvee_{i=1}^{n} B_i^{+}. \qquad (22.4)$$

Второй подход состоит в том, что на основании импликаций $A_i \Rightarrow B_i$, $i = \overline{1, n}$ строится общее правило вывода R, с помощью которого определяется общий вывод $B^{+} = A^{+} * R$. Например,

$$R^{(1)} = \bigwedge_{i=1}^{n} (A_i \Rightarrow B_i); \quad R^{(2)} = \bigvee_{i=1}^{n} (A_i \Rightarrow B_i). \qquad (22.5)$$

Пример 22.1. Рассмотрим задачу управления фирмой, когда возможными управленческими действиями являются:

x_1 — сдерживание заработной платы рабочих;

x_2 — вложение в оборудование;

x_3 — введение автоматизированных механизмов;

x_4 — усиление активности по рекламе продукции фирмы;

x_5 — вложение в исследования и разработки.

Результатами этих действий являются следующие выходные параметры:

y_1 — увеличение продажи;

y_2 — увеличение прибыли;

y_3 — увеличение производительности;

y_4 — увеличение темпов.

Возможные управленческие действия и возможные результаты оценивают две группы экспертов. В результате их опроса построены две связки <<если A_i, то B_i>>, $i = 1, 2$. Здесь все A_i и B_i являются нечеткими множествами универсальных множеств $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ и $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ соответственно. Допустим, что

$$A_1 = \{(x_1 | 1); (x_2 | 0{,}8); (x_3 | 0{,}4); (x_4 | 0); (x_5 | 0)\};$$

$$B_1 = \{(y_1 | 0); (y_2 | 0{,}4); (y_3 | 0{,}8); (y_4 | 1)\};$$

$$A_2 = \{(x_1 | 0); (x_2 | 0{,}1); (x_3 | 0{,}6); (x_4 | 0{,}8); (x_5 | 1)\};$$

$$B_2 = \{(y_1 | 1); (y_2 | 0{,}6); (y_3 | 0{,}1); (y_4 | 0)\}.$$

Построим импликации (22.2) с помощью функции $\theta(a,b) = a^{\blacksquare}b$. Запишем импликации $A_i \Rightarrow B_i = A_i{}^{\blacksquare}B_i$ в виде матриц. Имеем

$$A_1{}^{\blacksquare}B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}4 & 0{,}8 & 1 \\ 0 & 0{,}4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad A_2{}^{\blacksquare}B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0{,}1 & 0 \\ 1 & 0{,}6 & 0{,}1 & 0 \\ 1 & 0{,}6 & 0{,}1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Возьмем правило вывода $* = \blacklozenge$. Пусть управленческое решение заключается во вложении в оборудование и во введении автоматизированных механизмов. Причем введение автоматизированных механизмов предпочтительнее. Зададим сформулированное управленческое решение входным нечетким множеством

$$A^{+} = \{(x_1 \,|\, 0);\ (x_2 \,|\, 0{,}6);\ (x_3 \,|\, 1);\ (x_4 \,|\, 0);\ (x_5 \,|\, 0)\}.$$

Применим первый подход и вычислим по формулам (22.4) нечеткие множества $B_{(1)}{}^{+}$ и $B_{(2)}{}^{+}$, которые задают результат действия принятого управленческого решения. Имеем

$$(0;\ 0{,}6;\ 1;\ 0;\ 0) \blacklozenge \begin{pmatrix} 0 & 0{,}4 & 0{,}8 & 1 \\ 0 & 0{,}4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (0;\ 1;\ 1;\ 1),$$

$$(0;\ 0{,}6;\ 1;\ 0;\ 0) \blacklozenge \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0{,}1 & 0 \\ 1 & 0{,}6 & 0{,}1 & 0 \\ 1 & 0{,}6 & 0{,}1 & 0 \end{pmatrix} = (1;\ 1;\ 0{,}6;\ 0).$$

Таким образом, $B_{(1)}{}^{+} = \{(y_1 \,|\, 0);\ (y_2 \,|\, 1);\ (y_3 \,|\, 0{,}6);\ (y_4 \,|\, 0)\}$ и $B_{(2)}{}^{+} =$ $= \{(y_1 \,|\, 1);\ (y_2 \,|\, 1);\ (y_3 \,|\, 1);\ (y_4 \,|\, 1)\}$.

Построим с помощью формул (22.5) общее правило вывода. Имеем

$$R^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}4 & 0{,}8 & 1 \\ 0 & 0{,}4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0{,}1 & 0 \\ 1 & 0{,}6 & 0{,}1 & 0 \\ 1 & 0{,}6 & 0{,}1 & 0 \end{pmatrix}; \quad R^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$(0;\ 0{,}6;\ 1;\ 0;\ 0) \blacklozenge \begin{pmatrix} 0 & 0{,}4 & 0{,}8 & 1 \\ 0 & 0{,}4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0{,}1 & 0 \\ 1 & 0{,}6 & 0{,}1 & 0 \\ 1 & 0{,}6 & 0{,}1 & 0 \end{pmatrix} = (0;\ 1;\ 0{,}6;\ 0),$$

$$(0;\ 0{,}6;\ 1;\ 0;\ 0) \blacklozenge \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (1;\ 1;\ 1;\ 1).$$

Следовательно, нечеткие множества $B^{(1)+} = A^{+} \blacklozenge R^{(1)}$ и $B^{(2)+} = A^{+} \blacklozenge R^{(2)}$ равны

$$B^{(1)+} = \{(y_1 \mid 0);\ (y_2 \mid 1);\ (y_3 \mid 0{,}6);\ (y_4 \mid 0)\}$$

$$\text{и } B^{(2)+} = \{(y_1 \mid 1);\ (y_2 \mid 1);\ (y_3 \mid 1);\ (y_4 \mid 1)\}.$$

В рассматриваемом примере выполнены равенства ${B_{(1)}}^{+} = B^{(1)+}$ и ${B_{(2)}}^{+} = B^{(2)+}$. Отметим, что согласно формулам (13.12) и (20.17), если $* = \blacklozenge$ или $* = \bullet$, то

$${B_{(2)}}^{+} = A^{+} * R^{(2)} = B^{(2)+}. \qquad (22.6)$$

Равенства (22.6) верны и в более общем случае. Пусть правило вывода (22.3) определяется формулой

$$\mu_{B_i^+}(y) = \sup_{x \in X} \psi(\mu_{A^+}(x), \mu_{A_i \Rightarrow B_i}(x, y)). \qquad (22.7)$$

Теорема 22.1. Пусть функция ψ: $[0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1]$ удовлетворяет условию

$$\max_{0 \le i \le 1} \psi(a, b_i) = \psi(a, \max_{0 \le i \le 1} b_i). \qquad (22.8)$$

Тогда выполнено равенство (22.6).

Доказательство. Имеем

$$\mu_{B_{(2)}^+}(y) = \max_{0 \le i \le 1} \sup_{x \in X} \psi(\mu_{A^+}(x), \mu_{A_i \Rightarrow B_i}(x, y)).$$

Меняя местами операции max и sup и используя условие (22.8), получим требуемое равенство (22.6).

Построенный на основании локальных правил $A_i \Rightarrow B_i$, $i = \overline{1, n}$ общий вывод B^{+} должен на заданных множествах A_i принимать заданные значения B_i. Если выполнены эти условия, то построенная нечеткая модель называется *устойчивой относительно данных* A_i, B_i, $i = \overline{1, n}$.

Теорема 22.2. Пусть каждое локальное правило вывода $A_i \Rightarrow B_i$ в заданной системе n локальных правил вывода удовлетворяет условию устойчивости

$$A_i * (A_i \Rightarrow B_i) = B_i, \quad i = \overline{1,n}, \tag{22.9}$$

а каждая пара локальных правил $A_i \Rightarrow B_i$ и $A_j \Rightarrow B_j$ при $i \neq j$ в заданной системе n локальных правил удовлетворяет условиям

$$A_i * (A_j \Rightarrow B_j) = Y. \tag{22.10}$$

Тогда нечеткая модель, в которой общий вывод определяется первой формулой (22.4), является *устойчивой относительно данных* A_i, B_i, $i = 1, \ldots, n$.

Доказательство. Возьмем, например, $A^+ = A_1$. Тогда

$$B_1^{\ +} = A^+ * (A_i \Rightarrow B_i) = A_1 * (A_i \Rightarrow B_i) = B_1,\ B_i^{\ +} = A^+ * (A_i \Rightarrow B_i) = Y.$$

Следовательно, $B_{(1)}^{\ +} = \bigwedge_{i=1}^{n} B_i^{\ +} = B_1$.

Замечание 22.1. Отметим, что, если $\operatorname{hgt} A_i = 1$ для всех $i = \overline{1,n}$, то, согласно теореме 20.1, локальные правила вывода, определяемые формулами $A_i \Rightarrow B_i = A_i{}^{\blacksquare}B_i$; $A_i \Rightarrow B_i = A_i \times B_i$ и $A_i \Rightarrow B_i = A_i{}^{\circ}B_i$ (алгебраическое произведение) с операцией $* = \blacklozenge$, удовлетворяют условию устойчивости (22.9). В рассматриваемом случае условия (22.10) принимают вид

$$A_i \blacklozenge (A_j{}^{\blacksquare}B_j) = Y; \quad A_i \blacklozenge (A_j \times B_j) = Y; \quad A_i \blacklozenge (A_j{}^{\circ}B_j) = Y, \quad i \neq j. \tag{22.11}$$

Следствие 22.1. Пусть $\operatorname{hgt} A_i = 1$ для всех $i = \overline{1,n}$ и выполнены условия (22.11). Тогда нечеткие модели вывода $B^+ = A^+ \blacklozenge R$, в которых

$$R = \bigwedge_{i=1}^{n} (A_i{}^{\blacksquare}B_i); \quad R = \bigwedge_{i=1}^{n} (A_i \times B_i); \quad R = \bigwedge_{i=1}^{n} (A_i{}^{\circ}B_i),$$

являются устойчивыми относительно нечетких данных A_i, B_i, $i = \overline{1,n}$.

Пример 22.2. Рассмотрим задачу управления фирмой из примера 22.1. Равенства $\operatorname{hgt} A_i = 1$ при $i = 1, 2$ выполнены. Покажем, что выполнены первые условия (22.11). Равенство $A_2 \blacklozenge (A_1{}^{\blacksquare}B_1) = Y$ в матричной форме принимает вид

$$(0;\ 0{,}1;\ 0{,}6;\ 0{,}8;\ 1) \blacklozenge \begin{pmatrix} 0 & 0{,}4 & 0{,}8 & 1 \\ 0 & 0{,}4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (1;\ 1;\ 1;\ 1),$$

Аналогично, равенство $A_1 \blacklozenge (A_2 \times B_2) = Y$ имеет вид

$$(1;\ 0{,}8;\ 0{,}4;\ 0;\ 0) \blacklozenge \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0{,}1 & 0 \\ 1 & 0{,}6 & 0{,}1 & 0 \\ 1 & 0{,}6 & 0{,}1 & 0 \end{pmatrix} = (1;\ 1;\ 1;\ 1).$$

Поэтому, согласно следствию 22.1, нечеткая модель

$$R = (A_1{}^{\blacksquare}B_1) \wedge (A_2{}^{\blacksquare}B_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}4 & 0{,}8 & 1 \\ 0 & 0{,}4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0{,}1 & 0 \\ 1 & 0{,}6 & 0{,}1 & 0 \\ 1 & 0{,}6 & 0{,}1 & 0 \end{pmatrix}$$

является устойчивой относительно данных A_1, B_1 и A_2, B_2.

Эти условия устойчивости можно получить непосредственно произведя вычисления

$$(1;\ 0{,}8;\ 0{,}4;\ 0;\ 0) \blacklozenge \begin{pmatrix} 0 & 0{,}4 & 0{,}8 & 1 \\ 0 & 0{,}4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0{,}1 & 0 \\ 1 & 0{,}6 & 0{,}1 & 0 \\ 1 & 0{,}6 & 0{,}1 & 0 \end{pmatrix} = (0;\ 0{,}4;\ 0{,}8;\ 1),$$

$$(0;\ 0{,}1;\ 0{,}6;\ 0{,}8;\ 1) \blacklozenge \begin{pmatrix} 0 & 0{,}4 & 0{,}8 & 1 \\ 0 & 0{,}4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0{,}1 & 0 \\ 1 & 0{,}6 & 0{,}1 & 0 \\ 1 & 0{,}6 & 0{,}1 & 0 \end{pmatrix} = (1;\ 0{,}6;\ 0{,}1;\ 0).$$

Допустим, что стоит задача о принятии таких управленческих решений, чтобы произошло увеличение прибыли и увеличение производительности. Причем увеличение прибыли предпочтительней увеличения производительности. Зададим сформулированную цель в виде нечеткого множества $B = \{(y_1 | 0);\ (y_2 | 1);\ (y_3 | 0{,}6);\ (y_4 | 0)\}$. Ищем входное нечеткое множество $A = \{(x_1 | a_1);\ (x_2 | a_2);\ (x_3 | a_3);\ (x_4 | a_4);\ (x_5 | a_5)\}$ как прообраз отображения R. Имеем уравнения

$$(a_1;\ a_2;\ a_3;\ a_4;\ a_5) \blacklozenge \begin{pmatrix} 0 & 0{,}4 & 0{,}8 & 1 \\ 0 & 0{,}4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0{,}1 & 0 \\ 1 & 0{,}6 & 0{,}1 & 0 \\ 1 & 0{,}6 & 0{,}1 & 0 \end{pmatrix} = (0;\ 1;\ 0{,}6;\ 0).$$

Для вычисления $\blacklozenge$-прообраза воспользуемся формулами (16.3). Имеем

$$(a_1^{\blacklozenge};\ a_2^{\blacklozenge};\ a_3^{\blacklozenge};\ a_4^{\blacklozenge};\ a_5^{\blacklozenge}) = (0;\ 1;\ 0{,}6;\ 0) \blacktriangleright \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0{,}4 & 0{,}4 & 1 & 0{,}6 & 0{,}6 \\ 0{,}8 & 1 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда и из (15.4) получим:

$a_1^{\blacklozenge} = \min((0^{\blacksquare}0);\ (0{,}4^{\blacksquare}1);\ (0{,}8^{\blacksquare}0{,}6);\ (1^{\blacksquare}0)) = \min(1;\ 1;\ 0{,}6;\ 0) = 0;$

$a_2^{\blacklozenge} = \min((0^{\blacksquare}0);\ (0{,}4^{\blacksquare}1);\ (1^{\blacksquare}0{,}6);\ (0^{\blacksquare}0)) = \min(1;\ 1;\ 0{,}6;\ 1) = 0{,}6;$

$a_3^{\blacklozenge} = \min((0^{\blacksquare}0);\ (1^{\blacksquare}1);\ (0{,}1^{\blacksquare}0{,}6);\ (0^{\blacksquare}0)) = \min(1;\ 1;\ 1;\ 1) = 1;$

$a_4^{\blacklozenge} = a_5^{\blacklozenge} = \min((1^{\blacksquare}0);\ (0{,}6^{\blacksquare}1);\ (0{,}1^{\blacksquare}0{,}6);\ (0^{\blacksquare}0)) = \min(0;\ 1;\ 1;\ 1) = 0.$

Таким образом, $\blacklozenge$-прообраз равен $A^{\blacklozenge} = \{(x_1|0);\ (x_2|0{,}6);\ (x_3|1);\ (x_4|0);\ (x_5|0)\}$. Следовательно, нужно *прежде всего вводить автоматизированные механизмы, а затем производить вложение в оборудование.*

Вычислим $\blacktriangleleft$-прообраз. Из формулы (16.5) следует

$$(a_1^{\blacklozenge};\ a_2^{\blacklozenge};\ a_3^{\blacklozenge};\ a_4^{\blacklozenge};\ a_5^{\blacklozenge}) = (0;\ 1;\ 0{,}6;\ 0) \blacktriangleleft \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0{,}4 & 0{,}4 & 1 & 0{,}6 & 0{,}6 \\ 0{,}8 & 1 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда и из (14.4) получим:

$a_1^{\blacktriangleleft} = \min((0^{\blacksquare}0);\ (1^{\blacksquare}0);\ (0{,}6^{\blacksquare}0{,}8);\ (0^{\blacksquare}1)) = \min(1;\ 0;\ 1;\ 1) = 0;$

$a_2^{\blacktriangleleft} = \min((0^{\blacksquare}0);\ (0{,}6^{\blacksquare}0{,}4);\ (0{,}6^{\blacksquare}1);\ (0^{\blacksquare}0)) = \min(1;\ 0{,}4;\ 1;\ 1) = 0{,}4;$

$a_3^{\blacktriangleleft} = \min((0^{\blacksquare}0);\ (1^{\blacksquare}1);\ (0{,}6^{\blacksquare}0{,}1);\ (0^{\blacksquare}0)) = \min(1;\ 1;\ 0{,}1;\ 1) = 0{,}1;$

$a_4^{\blacktriangleleft} = a_5^{\blacktriangleleft} = \min((0^{\blacksquare}1);\ (1^{\blacksquare}0{,}6);\ (1^{\blacksquare}0{,}1);\ (0^{\blacksquare}0)) = \min(1;\ 0{,}6;\ 0{,}1;\ 1) = 0{,}1.$

Следовательно, $\blacktriangleleft$-прообраз равен $A^{\blacktriangleleft} = \{(x_1|0);\ (x_2|0{,}4);\ (x_3|0{,}1);\ (x_4|0{,}1);\ (x_5|0{,}1)\}$. Таким образом, если принимать решение на основании $\blacktriangleleft$-прообраза, то нужно *прежде всего производить вложение в оборудование.*

Вычислим $\blacktriangleright$-прообраз. Из формулы (16.7) получим

$$(a_1^{\blacktriangleright};\ a_2^{\blacktriangleright};\ a_3^{\blacktriangleright};\ a_4^{\blacktriangleright};\ a_5^{\blacktriangleright}) = (0;\ 1;\ 0{,}6;\ 0) \blacklozenge \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0{,}4 & 0{,}4 & 1 & 0{,}6 & 0{,}6 \\ 0{,}8 & 1 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда и из формул (14.10) имеем:

$a_1^{\blacktriangleright} = \max(\min(0;\ 0);\ \min(1;\ 0);\ \min(0{,}6;\ 0{,}8);\ \min(0;1)) = 0{,}6;$

$a_2^{\blacktriangleright}$ = max(min(0; 0); min(0,6; 0,4); min(0,6; 1); min(0; 0)) = 0,6;
$a_3^{\blacktriangleright}$ = max(min(0; 0); min(1; 1); min(0,6; 0,1); min(0; 0)) = 1;
$a_4^{\blacktriangleright} = a_5^{\blacktriangleright}$ = max(min(0; 1); min(1; 0,6); min(1; 0,1); min(0; 0)) = 0,6.

Следовательно, ►-прообраз равен $A^{\blacktriangleright} = \{(x_1 | 0{,}6); (x_2 | 0{,}6); (x_3 | 1); (x_4 | 0{,}6); (x_5 | 0{,}6)\}$. Стало быть, если принимать решение на основании ►-прообраза, то нужно *прежде всего вводить автоматизированные механизмы.*

Таким образом, все три рассмотренных подхода указывают на то, что наиболее важными из возможных управленческих действий являются *введение автоматизированных механизмов и вложение в оборудование.*

Если принимать решение, учитывая одновременно все три подхода, то можно, например, взять пересечение

$$A = A^{\blacklozenge} \wedge A^{\blacktriangleleft} \wedge A^{\blacktriangleright} = \{(x_1 | 0); (x_2 | 0{,}4); (x_3 | 0{,}1); (x_4 | 0); (x_5 | 0)\}.$$

Отсюда видно, что управленческое решение о *введении автоматизированных механизмов* является доминирующим.

Приведем достаточные условия, при которых выполнено первое равенство в (22.11).

Условие 22.1. Нечеткие входные множества $A_1, A_2, \ldots, A_n$ таковы, что для любого номера $i = \overline{1,n}$ существует точка $x_i \in X$ такая, что $\mu_{A_i}(x_i)=1$ и $\mu_{A_j}(x_i) = 0$ при любом $j \neq i$.

Пример 22.3. Рассмотрим нечеткие множества A_k, функции принадлежности которых имеют следующий вид:

$$\mu_k(x) = 0 \text{ при } x \notin (a_k, c_k);\ \mu_k(x) = (x - a_k)/(b_k - a_k) \text{ при } a_k \le x \le b_k;$$
$$\mu_k(x) = (c_k - x)/(c_k - b_k) \text{ при } b_k \le x \le c_k.$$

Условие 22.1 в этом случае будет выполнено, если точка $x_i = b_i \notin (a_j, c_j)$ для любого $j \neq i$ (см. рис. 22.1).

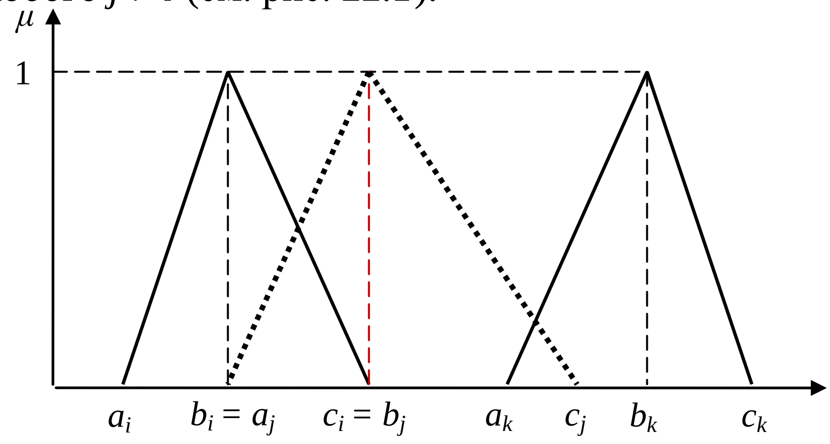

Рис. 22.1

Теорема 22.3. Пусть выполнено условие 22.1. Тогда выполнено первое равенство в (22.11).

Доказательство. Функция принадлежности $\mu(y)$ нечеткого множества A_i ♦ $(A_j{}^{\blacksquare}B_j)$ равна

$$\mu(y) = \sup_{x\in X} \min(\mu_{A_i}(x);\ \mu_{A_j}(x)^{\blacksquare}\ \mu_{B_j}(y)) =$$

$$= \sup_{x\in \operatorname{supp} A_i} \min(\mu_{A_i}(x);\ \mu_{A_j}(x)^{\blacksquare}\ \mu_{B_j}(y)) =$$

$$= \sup_{x\in \operatorname{supp} A_i} \min(\mu_{A_i}(x); \begin{cases} 1 & при\ \mu_{A_j}(x)\le \mu_{B_j}(y), \\ \mu_{B_j}(y)\ при & \mu_{A_j}(x) > \mu_{B_j}(y). \end{cases}$$

Из условия 22.1 следует, что $\mu_{A_i}(x_i)=1$, $\mu_{A_j}(x_i)=0$, $\mu_{B_j}(x_i)\ge 0$. Поэтому $\mu(y) = 1$. Аналогично, функция принадлежности $\mu(y)$ нечеткого множества A_j ♦ $(A_i{}^{\blacksquare}B_i)$ тождественно равна единице.

Следствие 22.2. Пусть hgt A_i = 1 для всех $i = \overline{1,n}$ и выполнено условие (22.11). Тогда нечеткая модель вывода $B^{+}= A^{+}$ ♦ $(\bigwedge_{i=1}^{n}(A_i{}^{\blacksquare}B_i))$ является устойчивой относительно нечетких данных A_i, B_i, $i = \overline{1,n}$.

Теорема 22.4. Пусть каждое локальное правило вывода $A_i \Rightarrow B_i$ в заданной системе n локальных правил вывода удовлетворяет условию устойчивости (22.9), а каждая пара локальных правил $A_i \Rightarrow B_i$ и $A_j \Rightarrow B_j$ при $i \ne j$ в заданной системе n локальных правил удовлетворяет условиям

$$A_i * (A_j \Rightarrow B_j) = \varnothing. \tag{22.12}$$

Тогда нечеткая модель, в которой общий вывод определяется второй формулой (22.4), является *устойчивой относительно данных* A_i, B_i, $i = \overline{1,n}$.

Доказательство. Возьмем, например, $A^{*} = A_1$. Тогда при $i \ne 1$ имеем

$$B_i^{+} = A_1 * (A_i \Rightarrow B_i) = \varnothing.$$

Далее,

$$B_1^{+} = A^{+} * (A_1 \Rightarrow B_1) = A_1 * (A_1 \Rightarrow B_1) = B_1.$$

Следовательно,

$$B_{(1)}{}^{+} = \bigvee_{i=1}^{n} B_i^{+} = B_1.$$

Возьмем локальные правила вывода $A_i \Rightarrow B_i$ в виде прямого произведения $A_i \times B_i$. Тогда его функция принадлежности определяется с помощью функции Мамдани и равняется

$$\mu_{A_i \Rightarrow B_i}(x,y) = \min(\mu_{A_i}(x);\ \mu_{B_i}(y)) .$$

Из замечания 20.3 следует, что

$$\text{если } \operatorname{hgt} B_i < \operatorname{hgt} A_i \text{ или } \operatorname{hgt} B_i = \operatorname{hgt} A_i = 1, \text{ то } B_i = A_i \blacktriangleleft (A_i \times B_i). \quad (22.13)$$

Возьмем правило вывода $* = \blacktriangleleft$. Возьмем нечеткое множество A^+ и по каждому правилу $A_i \Rightarrow B_i = A_i \times B_i$ построим локальный вывод $B_i^+ = A^+ \blacktriangleleft (A_i \times B_i)$, функция принадлежности которого имеет вид

$$\mu_{B_i^+}(y) = \inf_{x \in X}(\mu_{A^+}(x) \blacksquare \min(\mu_{A_i}(x); \mu_{B_i}(y)) . \qquad (22.14)$$

Из этих локальных выводов сконструируем общее правило вывода по второй формуле (22.4)

$$B_{(2)}{}^+ = \bigvee_{i=1}^{n} B_i^+ = \bigvee_{i=1}^{n}(A^+ \blacktriangleleft (A_i \times B_i)). \qquad (22.15)$$

Вопрос об *устойчивости правила вывода относительно данных* $A_i, B_i, i = \overline{1,n}$ решается с помощью теоремы 22.4.

Пример 22.4. Пусть $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ — признаки, по которым оцениваются места работы $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$. Две группы людей, которые ищут работу, опрашиваются на предмет престижности признаков x_i и мест работы y_j. По этой информации построим нечеткие множества A_i = {*престижный признак*} и B_i = {*престижное место работы*}, $i = 1, 2$. Допустим, что

$A_1 = \{(x_1 | 1); (x_2 | 0{,}8); (x_3 | 0{,}2); (x_4 | 0); (x_5 | 0)\}$;
$B_1 = \{(y_1 | 0{,}4); (y_2 | 0{,}2); (y_3 | 0{,}3); (y_4 | 1)\}$;
$A_2 = \{(x_1 | 0); (x_2 | 0); (x_3 | 0{,}5); (x_4 | 1); (x_5 | 0{,}2)\}$;
$B_2 = \{(y_1 | 0{,}5); (y_2 | 1); (y_3 | 0{,}1); (y_4 | 0)\}$.

Запишем нечеткое отображение $A_i \times B_i$ с помощью матрицы, в которой элементы $r_{ij} = \mu_R(x_i, y_j) = \min(\mu_A(x_i); \mu_B(y_j))$. Имеем

$$A_1 \times B_1 = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}3 & 1 \\ 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}8 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad A_2 \times B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}5 & 1 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Покажем, что выполнены условия (22.12). Равенство $A_2 \blacktriangleleft (A_1 \times B_1) = \varnothing$ в матричной форме принимает вид

$$(0;\,0;\,0{,}5;\,1;\,0{,}2) \blacktriangleleft \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}3 & 1 \\ 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}8 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (0;\,0;\,0;\,0).$$

Аналогично, равенство $A_1 \blacktriangleleft (A_2 \times B_2) = \varnothing$ имеет вид

$$(1;\,0{,}8;\,0{,}2;\,0;\,0) \blacktriangleleft \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}5 & 1 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0 \end{pmatrix} = (0;\,0;\,0;\,0).$$

Пусть человек, который ищет себе работу, выдает свои пожелания в виде нечеткого множества $A^* = \{(x_1 | 0); (x_2 | 0{,}5); (x_3 | 1); (x_4 | 0); (x_5 | 0)\}$. Требуется предложить ему места работы. Вычислим нечеткие множества

$$B_1^+ = A^+ \blacktriangleleft (A_1 \times B_1) = (0;0{,}5;\,1;0;\,0) \blacktriangleleft \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}3 & 1 \\ 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}8 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (0{,}2;\,0{,}2;\,0{,}2;\,0{,}2),$$

$$B_2^+ = A^+ \blacktriangleleft (A_2 \times B_2) = (0;\,0{,}5;\,1;\,0;\,0) \blacktriangleleft \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}5 & 1 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0 \end{pmatrix} = (0;\,0;\,0;\,0).$$

Поэтому общий вывод:

$$B_{(2)}^+ = B_1^+ \vee B_2^+ = B_1^+ = (0{,}2;\,0{,}2;\,0{,}2;\,0{,}2).$$

Рассмотрим правило вывода, которое определяется второй формулой (22.5):

$$R^{(2)} = \bigvee_{i=1}^{n} (A_i \times B_i). \qquad (22.16)$$

Теорема 22.5. Пусть выполнены условия 22.1. Тогда общее правило вывода, определяемое формулой (22.16) будет устойчивым относительно данных A_i, B_i, $i = \overline{1,n}$.

Доказательство. Обозначим через $\mu_i(x)$ и $\nu_i(y)$ функции принадлежности нечетких множеств A_i и B_i соответственно. Положим

$$L = (A_2 \times B_2) \vee \ldots \vee (A_n \times B_n).$$

Тогда

$$\mu_L(x, y) = \max_{2 \le i \le n} \min(\mu_i(x);\ \nu_i(y)). \qquad (22.17)$$

Нужно показать, что $B_1 = A_1 ◀ ((A_1 \times B_1) \vee L)$. Из условия 22.1 следует, что $\operatorname{hgt} A_i = 1$ для всех $i = \overline{1,n}$. Из формул (22.13) имеем $B_1 = A_1 ◀ (A_1 \times B_1)$. Поскольку $A_1 \times B_1 \angle ((A_1 \times B_1) \vee L)$, то из теоремы 15.2 получим включение

$$B_1 \angle A_1 ◀ ((A_1 \times B_1) \vee L).$$

Покажем обратное включение. Обозначим $\nu(x, y) = \min(\mu_1(x);\ \nu_1(y))$. Эта функция является функцией принадлежности нечеткого отображения $A_1 \times B_1$. Далее, пусть $\nu(y)$ — функция принадлежности нечеткого множества $A_1 ◀ ((A_1 \times B_1) \vee L)$. Покажем, что $\nu_1(y) \ge \nu(y)$ при любом $y \in Y$. Зафиксируем точку $y \in Y$. При $\nu_1(y) = 1$ доказываемое неравенство очевидно. Рассмотрим теперь случай $\nu_1(y) < 1$. Из условия 22.1 следует, что существует точка $x_1 \in X$ такая, что $\mu_1(x_1) = 1$, $\mu_i(x_1) = 0$ при любом $i \ne 1$. Отсюда и из формулы (22.17) получим, что $\mu_L(x_1, y) = 0$. Далее, $\nu(x_1, y) = \nu_1(y)$. Поэтому, $\max(\nu(x_1, y);\ \mu_L(x_1, y)) =$ $= \nu_1(y) < 1 = \mu_1(x_1)$. Отсюда и из формулы (22.14) следует, что $\nu(y) =$ $= \inf_{x \in X} (\mu_1(x) ■ \max(\nu(x, y);\ \mu_L(x, y))) \le \mu_1(x_1) ■ \max(\nu(x_1, y);\ \mu_L(x_1, y)) =$ $= 1 ■ \nu_1(y) = \nu_1(y)$.

Пример 22.5. Рассмотрим задачу из примера 22.4. Тогда

$$(A_1 \times B_1) \vee (A_2 \times B_2) = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}3 & 1 \\ 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}8 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}5 & 1 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$(1;\ 0{,}8;\ 0{,}2;\ 0;\ 0) ◀ ((A_1 \times B_1) \vee (A_2 \times B_2)) = (0{,}4;\ 0{,}2;\ 0{,}3;\ 1) = B_1;$$

$$(0;\ 0;\ 0{,}5;\ 1;\ 0{,}2) ◀ ((A_1 \times B_1) \vee (A_2 \times B_2)) = (0{,}5;\ 1;\ 0{,}1;\ 0) = B_2.$$

Возьмем множество $A^+ = \{(x_1 | 0);\ (x_2 | 0{,}5);\ (x_3 | 1);\ (x_4 | 0);\ (x_5 | 0)\}$. Тогда

$$(0;\ 0{,}5;\ 1;\ 0;\ 0) ◀ \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}3 & 1 \\ 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}8 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}5 & 1 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0 \end{pmatrix} = (0{,}4;\ 0{,}2;\ 0{,}2;\ 0{,}2).$$

Как видно, полученное выходное множество отличается от множества, которое было получено в примере 22.4.

§ 23. Нечеткие регуляторы и теорема об аппроксимации непрерывной функции

Нечеткие регуляторы — наиболее важное приложение теории нечетких множеств. При их построении используются знания экспертов. Эти знания могут быть выражены естественным образом с помощью *лингвистических переменных*.

В качестве примера приведем модель стабилизации перевернутого маятника. Задача состоит в балансировке вертикальной мачты, закрепленной с помощью шарнира нижним концом на тележке, которая может двигаться только в двух направлениях — влево или вправо (см. рис. 23.1).

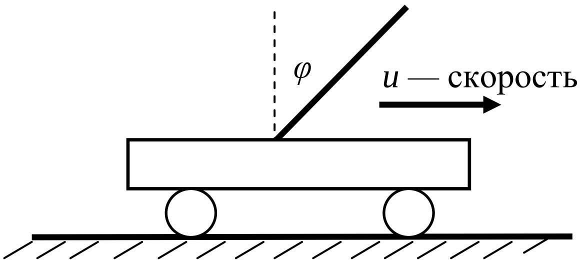

Рис. 23.1

Входными лингвистическими переменными являются Φ = {угол между мачтой и вертикальной прямой}, Ω = {угловая скорость изменения угла}.

Выходной лингвистической переменной является U = {скорость тележки}.

Нужно построить регулятор, который для конкретных входных данных φ и ω должен строить значение выходной переменной $u = u(\varphi, \omega)$.

Рис. 23.2

Значениями этих лингвистических переменных являются следующие терм-множества: *ОБ* = {*отрицательно большая*}; *ОМ* = {*отрицательно малая*}; *Н* = {*нулевая*}; *ПМ* = {*положительно малая*}; *ПБ* = {*положительно большая*}. Их функции принадлежности изображены на рис. 23.3.

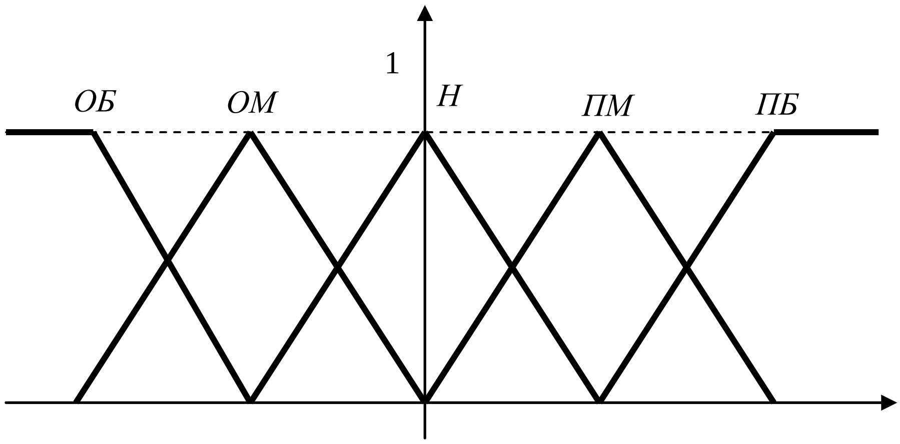

Рис. 23.3

Приведем некоторые правила, которые определяют управление тележкой в зависимости от реализовавшихся угла и угловой скорости.

Предположим, например, что мачта находится справа (угол равен нулю) и не двигается (угловая скорость равна нулю). Это состояние является желаемым, и предпринимать ничего не надо (скорость тележки равна нулю).

Пусть теперь мачта находится справа, но движется с малой угловой скоростью в положительном направлении. Необходимо компенсировать движение мачты, передвигая тележку в положительном направлении с малой скоростью. Получаем два следующих правила:

– если {*угол равен нулю*} и {*угловая скорость равна нулю*}, то {*скорость тележки равна нулю*};

– если {*угол равен нулю*} и {*угловая скорость положительно малая*}, то {*скорость тележки положительно малая*}.

Аналогично составляются экспертом и другие возможные правила. Эти правила записываются в виде таблицы (см. табл. 23.1).

В этой таблице на пересечении соответствующих значений лингвистических переменных Φ и Ω стоит значение лингвистической переменной U.

Таблица 23.1

$\Omega \backslash \Phi$	*ОБ*	*ОМ*	*Н*	*ПМ*	*ПБ*
ОБ			*ОБ*		
ОМ			*ОМ*	*Н*	
Н	*ОБ*	*ОМ*	*Н*	*ПМ*	*ПБ*
ПМ		*Н*	*ПМ*		
ПБ			*ПБ*		

Пусть реализовавшиеся значения φ и ω указаны на рис. 23.4. Это значит, что реализовавшееся значение угла φ принадлежит нечеткому множеству *Н* со степенью 0,8, а нечеткому множеству *ПМ* — со степенью 0,15. Реализовавшееся значение угловой скорости ω принадлежит нечеткому множеству *Н* со степенью 0,2, а нечеткому множеству *ОМ* — со степенью 0,7.

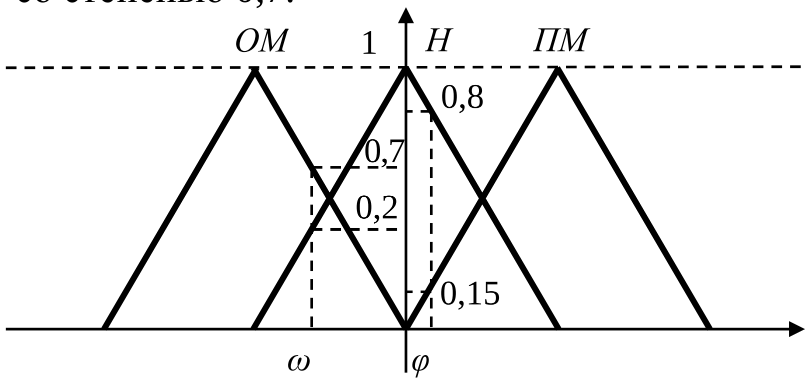

Рис. 23.4

Рассмотрим рис. 23.5. Реальное значение угла φ принадлежит нечеткому множеству *Н* со степенью 0,8. Реальное значение угловой скорости ω принадлежит нечеткому множеству *Н* со степенью 0,2. Далее, согласно таблице правил, если $\Phi = H$ и $\Omega = H$, то $U = H$. Так как обе части этого условия объединяются союзом *и*, то вычисляем $\min(0{,}8;\ 0{,}2) = 0{,}2$ и уменьшаем значения функции принадлежности нечеткого множества *Н* для переменной *U* до этого уровня.

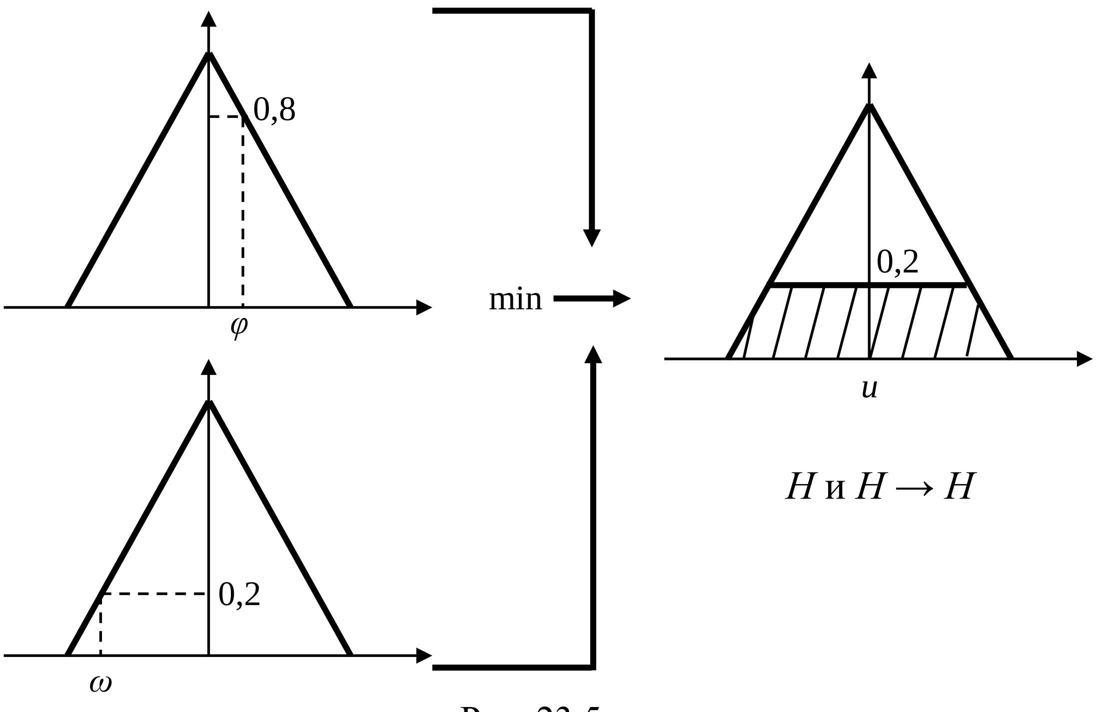

Рис. 23.5

Аналогично для реальных значений угла φ и угловой скорости ω применение таблицы правил дает оставшиеся три случая, изображенные на рис. 23.6 — 23.8.

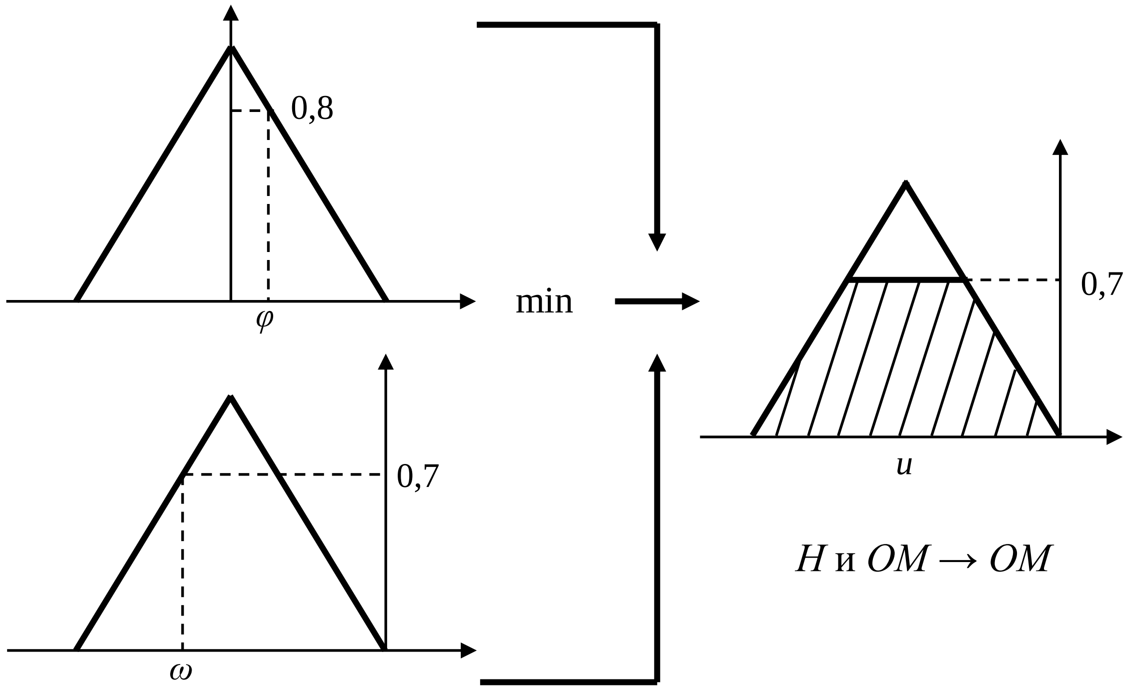

Рис. 23.6

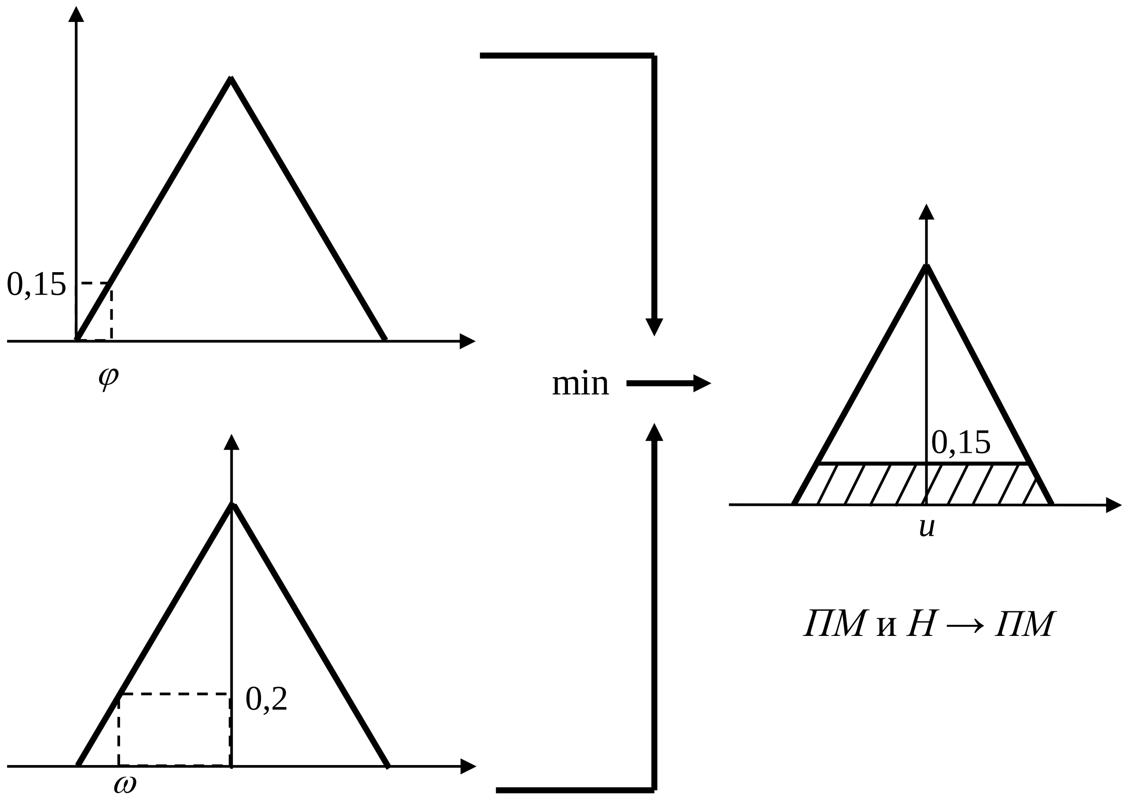

Рис. 23.7

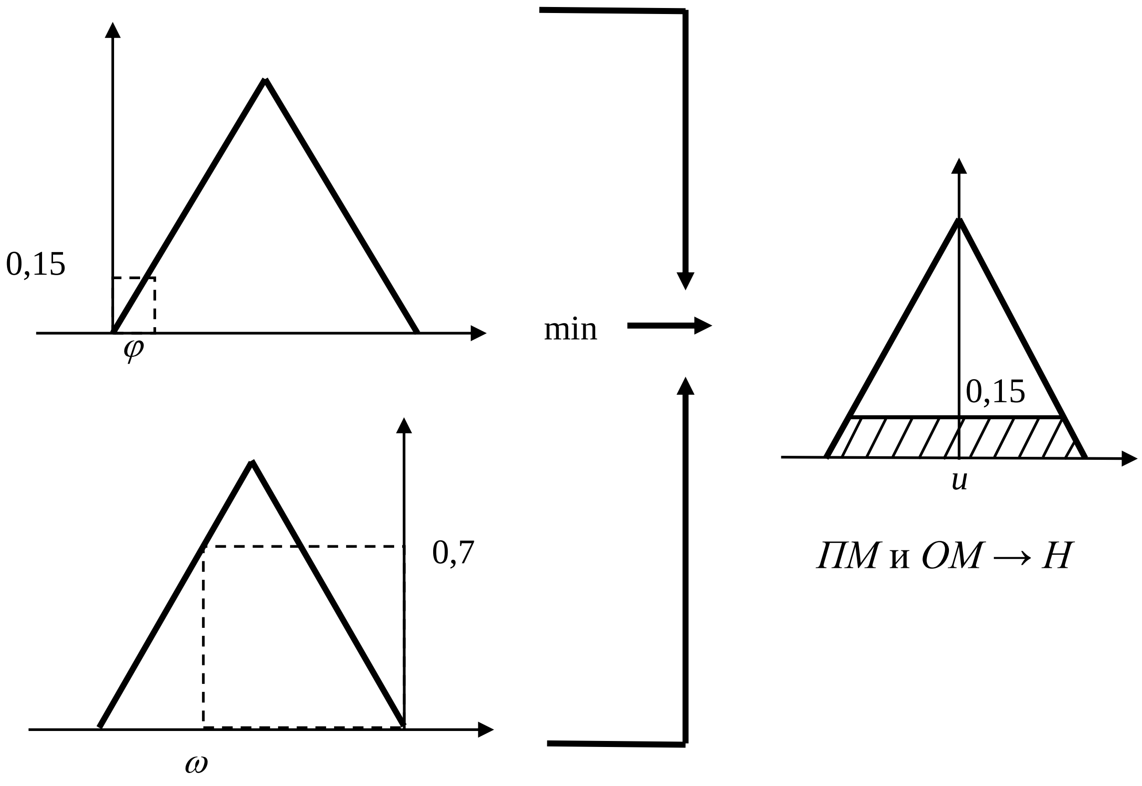

Рис. 23.8

Объединение этих четырех результатов дает общее решение, изображенное на рис. 23.9.

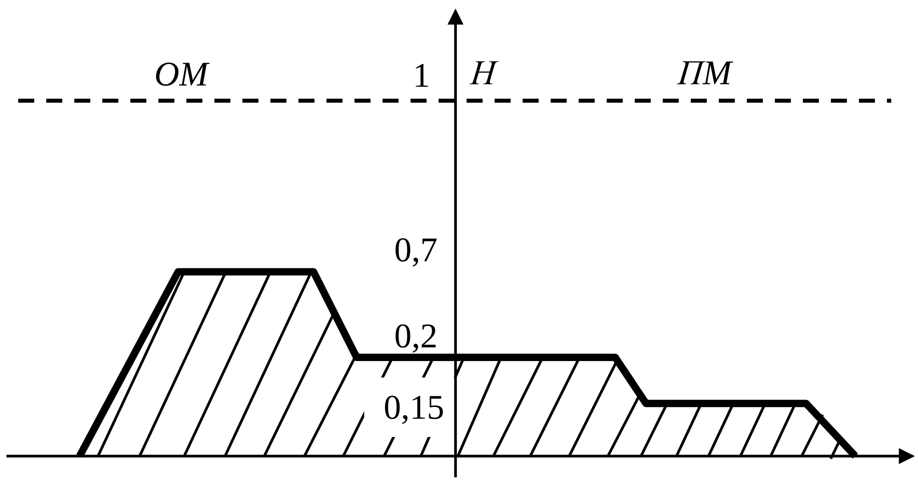

Рис. 23.9

Таким образом, решением регулятора нечеткой логики является нечеткое множество (для скорости тележки). Далее необходимо выбрать конкретное значение для представления конечного выходного значения $u = u(\varphi, \omega)$. Для этого может быть использован один из методов *дефазификации*, рассмотренных в § 10.

Формализуем изложенный алгоритм построения нечеткого регулятора на языке нечетких моделей вывода. Заданы терм-множества Φ_i лингвистической переменной {*угол между мачтой и вертикальной прямой*}, которые являются нечеткими множествами универсального множества R с функциями принадлежности $\mu_{\Phi_i}(\varphi)$, $i = \overline{1,n}$. Аналогично, заданы терм-множества Ω_j лингвистической переменной {*угловая скорость изменения угла*}, которые являются нечеткими множествами универсального множества R с функциями принадлежности $\mu_{\Omega_j}(\omega)$, $j = \overline{1,m}$. Имеются терм-множества U_k лингвистической переменной {*скорость тележки*}, которые являются нечеткими множествами универсального множества R с функциями принадлежности $\mu_{U_k}(u)$, $k = \overline{1,q}$.

Терм-множествами высказываний <<Φ_i и Ω_j>> являются прямые произведения $\Phi_i \times \Omega_j$ нечетких множеств Φ_i и Ω_j с функциями принадлежности $\mu_{\Phi_i \times \Omega_j}(\varphi,\omega) = \min(\mu_{\Phi_i}(\varphi); \mu_{\Omega_j}(\omega))$. Согласно таблице правил, каждой паре чисел (i, j) поставлено в соответствие число $k = k(i, j)$, при котором определена импликация $(\Phi_i \times \Omega_j) \Rightarrow U_{k(i,j)}$.

Локальный вывод построим по одному из следующих правил:

$$B^+_{ij} = A^+ \blacklozenge ((\Phi_i \times \Omega_j) \Rightarrow U_{k(i,j)}); \quad B^+_{ij} = A^+ \bullet ((\Phi_i \times \Omega_j) \Rightarrow U_{k(i,j)});$$

$$B^+_{ij} = A^+ \blacktriangleleft ((\Phi_i \times \Omega_j) \Rightarrow U_{k(i,j)}).$$

Тогда для случая, когда на вход поступает четкая информация φ и ω, функция принадлежности определяется формулой (21.1).

Зададим импликацию с помощью функции $\theta = \min(a, b)$. Тогда из формулы (21.1) следует, что

$$\mu_{B^+_{ij}}(u) = \min\big(\min(\mu_{\Phi_i}(\varphi), \mu_{\Omega_j}(\omega)); \mu_{U_{\delta(i,j)}}(u)\big).$$

Общий вывод B^* конструируется на основании второй формулы (22.4). Следовательно, функция принадлежности общего вывода равна

$$\mu_{B+}(u) = \max_{i,j} \mu_{B^+_{ij}}(u).$$

Ее график изображен на рис. 23.9.

Возможность использования нечетких моделей в задачах управления, аппроксимации, оптимизации и в других вопросах принятия решений базируется на следующем факте: *любая непрерывная на компакте функциональная зависимость может быть аппроксимирована с заданной точностью нечеткой моделью* [30, 36].

Теорема 23.1. Для каждой непрерывной функции $f(\overline{x})$, определенной на прямоугольнике $X = \{\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n\colon a_i \le x_i \le b_i,\ i = \overline{1,n}\}$, и для произвольного числа $\varepsilon > 0$ можно построить нечеткую модель, формирующую для каждого набора четких входных данных $\overline{x}^+ \in X$ выходную функцию $y(\overline{x}^+)$ такую, что $|f(\overline{x}^+) - y(\overline{x}^+)| < \varepsilon$ для любого $\overline{x}^+ \in X$.

Доказательство. Непрерывная на прямоугольнике X функция $f(\overline{x})$ является равномерно непрерывной на этом прямоугольнике. Зафиксируем число $\varepsilon > 0$. Из равномерной непрерывности функции $f(\overline{x})$ на прямоугольнике X следует, что существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$|f(\overline{x}^+) - f(\overline{c})| < \varepsilon/2 \text{ для } \forall\, \overline{x}^+ \in X,\ \forall\, \overline{c} \in X,$$
$$\text{у которых } \max_{1 \le i \le n} |x_i^+ - c_i| < \delta. \tag{23.1}$$

Зафиксируем разбиения

$$c_i^0 < a_i < c_i^1 < \ldots < c_i^s < c_i^{s+1} < \ldots < c_i^{q_i} = b_i,\quad i = \overline{1,n}, \tag{23.2}$$

у которых

$$0 < c_i^s - c_i^{s-1} < \delta,\quad s = \overline{1,q_i},\quad i = \overline{1,n}. \tag{23.3}$$

Возьмем произвольные нечеткие множества Φ_i^s, $s = \overline{1,q_i}$, $i = \overline{1,n}$, универсальными множествами которых является числовая ось R, а функции принадлежности $\mu_i^s\colon R \to [0, 1]$, удовлетворяют следующему условию:

$$\operatorname{supp} \Phi_i^s = (c_i^{s-1}, c_i^s]. \tag{23.4}$$

Для любого набора $\overline{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ чисел $s_i = \overline{1,q_i}$ построим прямое произведение $\Phi^{\overline{s}} = \Phi_1^{s_1} \times \Phi_2^{s_2} \times \ldots \times \Phi_n^{s_n}$, функция принадлежности которого равна

$$\mu_{\Phi^{\overline{s}}}(\overline{x}) = \min(\mu_1^{s_1}(x_1), \mu_2^{s_2}(x_2), \ldots, \mu_n^{s_n}(x_n)). \tag{23.5}$$

Обозначим через f_{min} и f_{max} минимальное и максимальное значение функции $f(\overline{x})$ на прямоугольнике X. Возьмем разбиение

$$F_0 < f_{min} < F_1 < \ldots < F_{r-1} < F_r < F_{r+1} < \ldots < F_m = f_{max}, \tag{23.6}$$

у которого

$$0 < F_r - F_{r-1} < \varepsilon/2. \tag{23.7}$$

Введем в рассмотрение произвольные нечеткие множества U_r, $r = \overline{1,m}$, универсальным множеством каждого из которых является числовая ось R, с функциями принадлежности $\nu_r\colon R \to [0, 1]$, удовлетворяющими следующему условию:

$$\operatorname{supp} U_r = (F_{r-1}, F_r]. \qquad (23.8)$$

Для каждого набора $\bar{s}$ = (s_1, s_2, …, s_n) чисел $s_i = \overline{1, q_i}$ определим число $k(\bar{s})$, исходя из условия

$$f(c_1^{s_1}, c_2^{s_2}, ..., c_n^{s_n}) \in \left(F_{k(\bar{s})-1}, F_{k(\bar{s})}\right]. \qquad (23.9)$$

Возьмем произвольную функцию θ: [0, 1] × [0, 1] → [0, 1], которая удовлетворяет условию

$$\theta(a, b) = 0 \Leftrightarrow \min(a, b) = 0. \qquad (23.10)$$

Построим импликации $\Phi^{\bar{s}} \Rightarrow U_{k(\bar{s})}$, функции принадлежности которых равны:

$$\mu_{\Phi^{\bar{s}} \Rightarrow U_{k(\bar{s})}}(\bar{x}, y) = \theta(\min(\mu_1^{s_1}(x_1), \mu_2^{s_2}(x_2), ..., \mu_n^{s_n}(x_n)), \nu_{k(\bar{s})}(y)). \qquad (23.11)$$

Локальные правила вывода зададим одной из формул

$$U_+^{\bar{s}} = \Phi_+ \blacklozenge (\Phi^{\bar{s}} \Rightarrow U_{k(\bar{s})}); \quad U_+^{\bar{s}} = \Phi_+ \bullet (\Phi^{\bar{s}} \Rightarrow U_{k(\bar{s})});$$

$$U_+^{\bar{s}} = \Phi_+ \blacktriangleleft (\Phi^{\bar{s}} \Rightarrow U_{k(\bar{s})}).$$

Общий вывод U_+ конструируем на основании второй формулы (22.4). Тогда функция принадлежности общего вывода равна

$$\mu_{U_+}(y) = \max_{\bar{s}} \mu_{U_+^{\bar{s}}}(y).$$

Пусть на вход поступает четкая информация $x_i = x_i^+$, $i = \overline{1, n}$. Тогда, согласно формуле (21.23), функция принадлежности локального вывода равна

$$\mu_{U_+^{\bar{s}}}(y) = \theta(\min(\mu_1^{s_1}(x_1^+), \mu_2^{s_2}(x_2^+), ..., \mu_n^{s_n}(x_n^+)), \nu_{k(\bar{s})}(y)).$$

Функция принадлежности общего вывода

$$\mu_{U_+}(y) = \max_{\bar{s}} \theta(\min(\mu_1^{s_1}(x_1^+), \mu_2^{s_2}(x_2^+), ..., \mu_n^{s_n}(x_n^+)), \nu_{k(\bar{s})}(y)). \qquad (23.12)$$

Выясним, как устроено множество supp U_+. Каждое из чисел $x_i^+ \in \left(c_i^{s_i^+ - 1}, c_i^{s_i^+}\right]$, при некоторых $s_i^+ = \overline{1, q_i}$, $i = \overline{1, n}$. Отсюда и из (23.4) следует, что $\min(\mu_1^{s_1^+}(x_1^+), \mu_2^{s_2^+}(x_2^+), ..., \mu_n^{s_n^+}(x_n^+)) > 0$. Далее, если хотя бы одно из чисел $s_i \neq s_i^+$, то $\min(\mu_1^{s_1}(x_1^+), \mu_2^{s_2}(x_2^+), ..., \mu_n^{s_n}(x_n^+)) = 0$.

Из (23.9) следует, что

$$f(c_1^{s_1^+}, c_2^{s_2^+}, ..., c_n^{s_n^+}) \in \left(F_{k(\bar{s}^+)-1}, F_{k(\bar{s}^+)}\right]. \qquad (23.13)$$

Отсюда и из формулы (23.8) следует, что $\nu_{k(\bar{s}^+)}(y) > 0$ при $y \in \left(F_{k(\bar{s}^+)-1}, F_{k(\bar{s}^+)}\right]$. Если же число $y \notin \left(F_{k(\bar{s}^+)-1}, F_{k(\bar{s}^+)}\right]$, то $\nu_{k(\bar{s}^+)}(y) = 0$.

Таким образом, supp $U_{+}^{\bar{s}^{+}}$ = $\left(F_{k(\bar{s}^{+})-1}, F_{k(\bar{s}^{+})}\right]$ и, если хотя бы одно из чисел $s_i \neq s_i^{+}$, то supp $U_{+}^{\bar{s}} = \varnothing$. Отсюда следует, что

$$\text{supp } U_{+} = \left(F_{k(\bar{s}^{+})-1}, F_{k(\bar{s}^{+})}\right].$$

Применяя один из методов дефазификации, выделим точку

$$y(\bar{x}^{+}) \in \text{supp } U_{+} = \left(F_{k(\bar{s}^{+})-1}, F_{k(\bar{s}^{+})}\right]. \qquad (23.14)$$

Имеем

$$|f(\bar{x}^{+}) - y(\bar{x}^{+})| \leq |f(\bar{x}^{+}) - f(c_1^{s_1^{+}}, c_2^{s_2^{+}}, \ldots, c_n^{s_n^{+}})| + |f(c_1^{s_1^{+}}, c_2^{s_2^{+}}, \ldots, c_n^{s_n^{+}}) - y(\bar{x}^{+})|.$$

Поскольку $\left|x_i^{+} - c_i^{s_i^{+}}\right| \leq \left|c_i^{s_i^{+}-1} - c_i^{s_i^{+}}\right| < \delta$ для всех $i = \overline{1,n}$, то из (23.1) следует, что

$$|f(\bar{x}^{+}) - f(c_1^{s_1^{+}}, c_2^{s_2^{+}}, \ldots, c_n^{s_n^{+}})| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Согласно включениям (23.13), (23.14) и неравенству (23.7),

$$|f(c_1^{s_1^{+}}, c_2^{s_2^{+}}, \ldots, c_n^{s_n^{+}}) - y(\bar{x}^{+})| < F_{k(\bar{s}^{+})} - F_{k(\bar{s}^{+})-1} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому $|f(\bar{x}^{+}) - y(\bar{x}^{+})| < \varepsilon$.

Глава 4

§ 24. Нечеткие отношения на множестве

Пример 24.1. Имеется конечное множество объектов $X = (x_1, \ldots, x_n)$, которые сравниваются на схожесть по некоторому признаку Π. Привлекается группа из N экспертов, каждый из которых имеет число голосов n^2, равное числу пар объектов x_i. Каждый эксперт, оценивая схожесть по признаку Π пары объектов x_i и x_j, может отдать этой паре голос, а может и не отдать. Причем один эксперт может отдать по одному голосу сразу нескольким парам. Учитывается только общее число голосов, набранное каждой парой, без учета того, какие эксперты отдали эти голоса.

Пусть пара (x_i, x_j) набрала N_{ij} голосов. Тогда в качестве количественной оценки схожести по признаку Π объектов x_i и x_j можно принять величину

$$r_{ij} = N_{ij} / N; \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Таким образом, на прямом произведении $X \times X$ введено нечеткое множество R с функцией принадлежности $\mu_R(x_i, x_j) = r_{ij}$. Рассмотрим общий случай.

Определение 24.1. Нечеткое множество R прямого произведения $X \times X$ называется *нечетким отношением* R на множестве X.

Его функцию принадлежности обозначим $\mu_R(x, y)$. Согласно определению 13.1, нечеткое отношение R на множестве X можно рассматривать и как нечеткое отношение из множества X во множество $X = Y$.

Вернемся к примеру 24.1. Допустим, что принято соглашение, по которому считается, что объект x_i схож с объектом x_j по признаку Π, если число голосов N_{ij}, набранных парой (x_i, x_j), не меньше заданного числа K. Запишем предыдущее условие в виде неравенства $r_{ij} \geq \alpha$, где $\alpha = K / N$. Таким образом, на множестве X возникает бинарное отношение

$$R(\alpha) = \{(x, y) \in X \times X: \mu_R(x, y) \geq \alpha\}. \tag{24.1}$$

Множество уровня $R(\alpha)$ нечеткого отношения R назовем *отношением уровня.* Существует процедура разбиения множества X на классы эквивалентности с помощью бинарного отношения $R(\alpha)$. Однако это отношение должно быть отношением *эквивалентности*. Это значит, что оно должно быть рефлексивным, симметричным и транзитивным.

Условие рефлексивности означает, что $(x, x) \in R(\alpha)$ для любого $x \in X$. Используя обозначение (24.1), перепишем это включение в виде неравенства

$$\mu_R(x, x) \geq \alpha \text{ для любого } x \in X. \qquad (24.2)$$

Условие симметричности означает, что если $(x, y) \in R(\alpha)$, то $(y, x) \in R(\alpha)$ для любых x и y из множества X. Из (24.1) следует:

$$\text{если } \mu_R(x, y) \geq \alpha, \text{ то } \mu_R(y, x) \geq \alpha \text{ для любых } x \in X \text{ и } y \in X. \qquad (24.3)$$

Условие транзитивности означает, что, если $(x, z) \in R(\alpha)$, $(z, y) \in$ $\in R(\alpha)$, то $(y, x) \in R(\alpha)$ для любых x, y и z из множества X. Из (24.1) следует:

$$\text{если } \min(\mu_R(x, z); \mu_R(z, y)) \geq \alpha, \text{ то } \mu_R(x, y) \geq \alpha \qquad (24.4)$$

для любых x, y и z из X.

Приведем процедуру разбиения множества X на непересекающиеся классы эквивалентности. Для этого по любому элементу $x \in X$ строим множество

$$K_\alpha(x) = \{y \in X\colon (x, y) \in R(\alpha)\}. \qquad (24.5)$$

Из условия рефлективности $R(\alpha)$ следует, что $x \in K_\alpha(x)$, и, следовательно, $\bigcup\limits_{x \in X} K_\alpha(x) = X$.

Допустим, что $K_\alpha(x) \bigcap K_\alpha(y) \neq \emptyset$ для некоторых точек $x \in X$ и $y \in X$. Покажем, что $K(x) = K(y)$. В самом деле, существует точка $z \in X$ такая, что $z \in K_\alpha(x)$ и $z \in K_\alpha(y)$. Следовательно, $(x, z) \in R(\alpha)$ и $(y, z) \in R(\alpha)$. Отсюда и из условия симметричности отношения $R(\alpha)$ следует, что $(z, y) \in R(\alpha)$. Стало быть, используя транзитивность отношения $R(\alpha)$, получим, что $(x, y) \in R(\alpha)$. Возьмем точку $t \in K_\alpha(y)$. Тогда из (24.5) получим, что $(y, t) \in R(\alpha)$. Отсюда и из включения $(x, y) \in R(\alpha)$, применяя условия транзитивности отношения $R(\alpha)$, получим, что $(x, t) \in R(\alpha)$. Таким образом, точка $t \in K_\alpha(x)$. Аналогично доказывается обратное включение.

Таким образом, отношение эквивалентности разбивает множество X по формуле (24.5) на пересекающиеся классы эквивалентности, объединение которых дает все множество X. Совокупность классов эквивалентности называется фактор-множеством и обозначается $X \mid R(\alpha)$.

В случае конечного множества X отношение $R(\alpha)$ задано матрицей $R(\alpha) = \{r_{ij}{}^{(\alpha)}\}$, в которой каждый элемент $r_{ij}{}^{(\alpha)}$ равен нулю или единице. В этом случае процедура построения классов эквивалентности (24.5) $K^i_\alpha = K_\alpha(x_i)$ принимает следующий вид. Первый класс эквивалентности составляют те точки x_i, для которых $r_{1i} = 1$. Обозначим через $i_1 > 1$ ближайший к единице номер, для которого $r^{(\alpha)}_{1i_1} = 0$. Второй класс эквивалентности составляют те точки x_i, для которых $r^{(\alpha)}_{i_1 i} = 1$ и т. д.

Вернемся к нечеткому отношению R на множестве X. Назовем его рефлексивным, симметричным, транзитивным, если соответственно для любого числа $\alpha \in (0, 1]$ рефлексивным, симметричным, транзитивным является его отношение уровня $R(\alpha)$. Из формул (24.2) — (24.4) получим условие рефлексивности

$$\mu_R(x, x) = 1 \text{ для любого } x \in X, \tag{24.6}$$

условие симметричности

$$\mu_R(x, y) = \mu_R(y, x) \text{ для любых } x \in X \text{ и } y \in X, \tag{24.7}$$

условие транзитивности

$$\sup_{z \in X} \min(\mu_R(x, z);\ \mu_R(z, y)) \le \mu_R(x, y) \text{ для любых } x \in X \text{ и } y \in X. \tag{24.8}$$

Докажем условие (24.8). Зафиксируем точки $x \in X$ и $y \in X$, для которых выполнено неравенство (24.8). Пусть $z \in X$ и $\alpha \in (0, 1]$ удовлетворяют первому неравенству в (24.4). Тогда число, стоящее в левой части неравенства (24.8), не меньше α. Стало быть, $\mu_R(x, y) \ge \alpha$.

Пусть для любых чисел $\alpha \in (0, 1]$ выполнено (24.4). Допустим, что неравенство (24.8) не выполнено. Тогда найдутся $z \in X$ и $\alpha \in (0, 1]$ такие, что

$$\min(\mu_R(x, z);\quad \mu_F(z, y)) \ge \alpha > \mu_R(x, y).$$

Получили противоречие с (24.4).

Пример 24.2. Пусть $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, а нечеткое отношение задано матрицей $R = \{r_{ij}\}$, $i, j = \overline{1,n}$. Запишем условия (24.6) — (24.8):

$$r_{ii} = 1,\quad i = \overline{1,n};\quad r_{ij} = r_{ji},\quad i, j = \overline{1,n};$$

$$\max_{0 \le i \le n} \min(r_{ik}; r_{kj}) \le r_{ij},\quad i, j = \overline{1,n}. \tag{24.9}$$

Для записи условия транзитивности (24.8) можно использовать операцию композиции (13.15) нечетких отношений:

$$R \blacklozenge R \angle R. \tag{24.10}$$

Пусть множество X состоит из четырех элементов, а матрица нечеткого отношения равна

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0,4 & 0,6 & 0,7 \\ 0,4 & 1 & 0,4 & 0,4 \\ 0,6 & 0,4 & 1 & 0,6 \\ 0,7 & 0,4 & 0,6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Это отношение рефлексивно, симметрично. Производя умножение по формулам (13.16), получим равенство $R \blacklozenge R = R$. Таким образом, отношение R является транзитивным и, следовательно, отношением эквивалентности. Возьмем число $\alpha = 0{,}6$. Классы эквивалентности $X \,|\, R(0{,}6) = \{(x_1, x_4, x_3); (x_2)\}$.

При построении с помощью группы экспертов нечеткого отношения, нетрудно добиться, чтобы оно было рефлексивным и симметричным. Однако условие транзитивности получить, как правило, не удается. Поэтому возникает вопрос о построении приемлемого отношения эквивалентности по исходному нечеткому отношению.

Определение 24.2. Транзитивным замыканием $\tilde{R}$ нечеткого отношения R на множестве X называется пересечение всех транзитивных отношений на X, содержащих отношение R.

Отметим, что существует транзитивное отношение, которое содержит отношение R. Таким отношением является отношение $X \times X$ с функцией принадлежности тождественно равной единице.

Теорема 24.1. Транзитивное замыкание $\tilde{R}$ является транзитивным отношением на X.

Доказательство. Обозначим множество транзитивных отношений, содержащих отношение R, через M. Из определения 24.2 следует, что

$$\mu_{\tilde{R}}(x,y) = \inf_{F \in M} \mu_F(x,y).$$

Здесь каждая из этих функций μ_F: $X \times X \to [0, 1]$ удовлетворяет условию транзитивности (24.8) и неравенству $\mu_R(x, y) \le \mu_F(x, y)$.

Из неравенства (24.8) следует, что $\min(\mu_F(x, z); \mu_F(z, y)) \le \mu_F(x, y)$ для любых x, y и z из множества X. Поскольку

$$\inf_{F \in M} \min\left(\mu_F(x,z); \mu_F(z,y)\right) = \min\left(\mu_{\tilde{R}}(x,y); \mu_{\tilde{R}}(x,y)\right),$$

то для любого $F \in M$ выполнено $\min\left(\mu_{\tilde{R}}(x,z); \mu_{\tilde{R}}(z,y)\right) \le \mu_F(x,y)$ для любых x, y и z из множества X. Отсюда следует условие транзитивности (24.8) для отношения $\tilde{R}$.

Из теоремы 13.3 следует, что для любых нечетких отношений R, L и F на множестве X выполнен ассоциативный закон умножения

$$R \blacklozenge (L \blacklozenge F) = (R \blacklozenge L) \blacklozenge F.$$

Теорема 24.2. Пусть на множестве X задано n нечетких отношений R_i с функциями принадлежности $\mu_i(x)$. Тогда функция принадлежности нечеткого отношения $R = R_1 \blacklozenge R_2 \blacklozenge \ldots \blacklozenge R_n$ равна

$$\mu_R(x, y) = \sup_{y_i \in X} \min(\mu_1(x, y_1); \ldots; \mu_n(y_{n-1}, y)). \qquad (24.11)$$

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по числу отношений R_i. Для произвольных двух отношений равенство (24.11) следует из определения операции $\blacklozenge$.

Пусть для произвольных отношений R_i, число которых равняется n, выполнено равенство (24.11). Рассмотрим композицию $n + 1$ отношений $F = R \blacklozenge R_{n+1}$, где $R = R_1 \blacklozenge R_2 \blacklozenge \ldots \blacklozenge R_n$. Тогда, согласно формуле (24.11),

$$\mu_F(x, y) = \sup_{y_n \in X} \min(\mu_R(x, y_n); \mu_{n+1}(y_n, y)). \qquad (24.12)$$

Зафиксируем произвольные точки $y_i \in X$, $i = \overline{1, n}$. Тогда из формул (24.11) и (24.12) получим

$$\mu_F(x, y) \geq \sup_{y_i \in X} \min(\mu_1(x, y_1); \ldots; \mu_n(y_{n-1}, y_n); \mu_{n+1}(y_n, y)). \qquad (24.13)$$

Докажем теперь неравенство, обратное к неравенству (24.13). Из (24.12) следует, что для любого числа $\varepsilon > 0$ существует точка $y_n \in X$, для которой $\mu_R(x, y_k) \geq \mu_F(x, y) - \varepsilon$, $\mu_{n+1}(y_n, y) \geq \mu_F(x, y) - \varepsilon$. Отсюда и из формулы (24.11) получим, что $\min(\mu_1(x, y_1); \ldots; \mu_{n+1}(y_n, y)) \geq$ $\geq \mu_F(x, y) - 2\varepsilon$ для некоторых точек $y_i \in X$. Учитывая произвольность числа $\varepsilon > 0$, получим требуемое неравенство.

Введем в рассмотрение степень $R^n = R \blacklozenge R \blacklozenge \ldots \blacklozenge R$ нечеткого отношения R на множестве X.

Теорема 24.3. Для любого транзитивного отношения F, содержащего отношение R, выполнено включение

$$R^n \angle F \text{ для любого } n = 1, 2\ldots \qquad (24.14)$$

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по числу n. При $n = 1$ включение (24.14) выполнено. Пусть оно выполнено при некотором номере n. Покажем, что оно выполнено при $n + 1$. Обозначим через $\mu_n(x, y)$ функцию принадлежности отношения R^n, а через

$\mu_F(x, y)$ — функцию принадлежности отношения F. Тогда $\mu_1(x, y) \leq$ $\leq \mu_F(x, y)$, $\mu_k(x, y) \leq \mu_F(x, y)$ для любых $x \in X$, $y \in X$.

Из формулы (24.11) имеем, что $\mu_{n+1}(x, y) = \sup\limits_{z \in X} \min(\mu_n(x, z); \mu_1(z, y))$. Отсюда и из предыдущих неравенств получим, что $\mu_{n+1}(x, y) \leq$ $\leq \sup\limits_{z \in X} \min(\mu_F(x, z); \mu_F(z, y))$.

Из этого неравенства и из условия транзитивности (24.8) для отношения F следует требуемое неравенство $\mu_{n+1}(x, y) \leq \mu_F(x, y)$.

Следствие 24.1. Для любого нечеткого отношения R выполнено включение

$$\mathop{\vee}_{k=1}^{\infty} R^k \angle \tilde{R}. \tag{24.15}$$

Доказательство. Согласно теореме 24.1, отношение $\tilde{R}$ является транзитивным, содержащим отношение R. Отсюда и из включения (24.14) следует включение (24.15).

Теорема 24.4 (*о структуре транзитивного замыкания*). Верно равенство

$$\tilde{R} = \mathop{\vee}_{k=1}^{\infty} R^k. \tag{24.16}$$

Доказательство. Согласно следствию 24.1 достаточно показать, что

$$\tilde{R} \angle F = \mathop{\vee}_{k=1}^{\infty} R^k. \tag{24.17}$$

Если покажем, что отношение F является транзитивным, то включение (24.17) будет следовать из определения транзитивного замыкания и из включения $R \angle F$. Покажем, что отношение F удовлетворяет неравенству (24.8).

Возьмем произвольные точки x, y, z из множества X и положим

$$\min(\mu_F(x, z); \mu_F(z, y)) = \alpha. \tag{24.18}$$

Обозначим через $\mu_k(x, y)$ функцию принадлежности отношения R^k. Тогда из (24.17) получим

$$\mu_F(x, y) = \sup_{k \geq 1} \mu_k(x, y). \tag{24.19}$$

Стало быть, как следует из (24.18), для любого числа $\alpha_1 < \alpha$ найдутся номера k и i такие, что $\mu_i(x, z) \geq \alpha_1$, $\mu_k(z, y) \geq \alpha_1$. Следовательно, для любого числа $\alpha_1 < \alpha$ выполнено неравенство $\sup\limits_{z \in X} \min(\mu_i(x, z);$ $\mu_k(z, y)) \geq \alpha_1$. Отсюда, используя определение операции ♦ и равенство

$R^k \blacklozenge R^i = R^{k+i}$, получим, что $\mu_{k+i}(x, y) \geq \alpha_1$ для любого числа $\alpha_1 < \alpha$. Стало быть, учитывая обозначение (24.18), получим, что для любой точки $z \in X$ выполнено неравенство $\mu_{k+i}(x, y) \geq \min(\mu_F(x, z); \mu_F(z, y))$. Отсюда и из (24.19) получим требуемое включение (24.17).

Теорема 24.5. Если отношение R является рефлексивным и симметричным, то его транзитивное замыкание $\tilde{R}$ является также рефлексивным и симметричным отношением.

Доказательство. Из формулы (24.11) следует, что функция принадлежности $\mu_k(x, y)$ нечеткого отношения R^k равна

$$\mu_k(x, y) = \sup_{y_i \in X} \min(\mu_R(x, y_1); \mu_R(y_1, y_2); \ldots; \mu_R(y_{k-1}, y)).$$

Полагая в этой формуле $y_i = y = x$ и учитывая условие рефлексивности $\mu_R(x, x) = 1$ отношения R, получим неравенство $\mu_k(x, x) \geq 1$. Стало быть, $\mu_k(x, x) = 1$. Таким образом, отношение R^k является рефлексивным. Далее, из условия симметричности $\mu_R(x, y) = \mu_R(y, x)$ отношения R получим равенство $\mu_k(x, y) = \mu_k(y, x)$. Отсюда и из формулы (24.19) следует, что отношение $\tilde{R}$ является симметричным.

Теорема 24.6. Если отношение R является рефлексивным, то выполнено включение

$$R^k \angle R^{k+1} \text{ при } k \geq 1. \tag{24.20}$$

Доказательство. Для функции принадлежности $\mu_k(x, y)$ отношения R^k имеем $\mu_{k+1}(x, y) = \sup\limits_{z \in X} \min(\mu_k(x, z); \mu_R(z, y)) \geq \min(\mu_k(x, y); \mu_R(y, y)) =$
$= \mu_k(x, y)$. Это неравенство и доказывает включение (24.20).

Следствие 24.2. Пусть R является рефлексивным отношением и при некотором числе k выполнено равенство $R^{k+1} = R^k$. Тогда $R^k = \tilde{R}$.

Рассмотрим случай, когда универсальное множество X состоит из n элементов $x_1, \ldots, x_n$. Пусть нечеткое отношение задается матрицей $\{r_{ij}\}$. Обозначим $r_{ij}^{(k)} = \mu_k(x_i, x_j)$, причем $r_{ij}^{(1)} = r_{ij}$.

Теорема 24.7. Пусть универсальное множество X состоит из n элементов, а R является рефлексивным на нем отношением. Тогда $R^{n+1} = R^n$.

Доказательство. Из теоремы 24.2 имеем

$$r_{ij}^{(n+1)} = \max_{l_s = 1, \ldots, n} \min\left(r_{i l_1};\ r_{l_1 l_2};\ \ldots;\ r_{l_{n-2} l_{n-1}};\ r_{l_{n-1} j}\right). \tag{24.21}$$

Пусть максимальное значение в (24.21) достигается на числах l_1^*, l_2^*, …, l^*_{n-1}.

Поскольку количество чисел $i, j, l_1^*, l_2^*, \ldots, l^*_{n-1}$ равно $n + 1$ и они принимают значения из множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, то среди них имеются одинаковые.

Пусть $i = l_s^*$ при некотором $s = 1, \ldots, n - 1$.Тогда

$$r_{ij}^{(n+1)} = \min(\min(r_{il_1^*}; \ldots; r_{l_{s-1}^* i}); \min(r_{il_{s+1}^*}; \ldots; r_{l_{n-1}^* j})) \le$$
$$\le \min(r_{il_{s+1}^*}; \ldots; r_{l_{n-1}^* j}) \le r_{ij}^{(n-s-1)} \le r_{ij}^{(n)} \Rightarrow r_{ij}^{(n+1)} = r_{ij}^{(n)}.$$

Пусть $j = l_s^*$ при некотором $s = 1, \ldots, n - 1$.Тогда

$$r_{ij}^{(n+1)} = \min(\min(r_{il_1^*}; \ldots; r_{l_{s-1}^* j}); \min(r_{jl_{s+1}^*}; \ldots; r_{l_{n-1}^* j})) \le$$
$$\le \min(r_{il_1^*}; \ldots; r_{l_{s-1}^* j}) \le r_{ij}^{(s)} \le r_{ij}^{(n)} \Rightarrow r_{ij}^{(n+1)} = r_{ij}^{(n)}.$$

Пусть $l_s^* = l_{s+k}^*$ при некоторых $s = 1, \ldots, n - 1$ и $0 \le k \le n - s - 1$. Тогда

$$r_{ij}^{(n+1)} = \min(\min(r_{il_1^*}; \ldots; r_{l_{s-1}^* l_s^*}); \min(r_{l_s^* l_{s+1}^*}; \ldots; r_{l_{s+k-1}^* l_s^*}); \min(r_{l_s^* l_{s+k+1}^*}; \ldots; r_{l_{n-1}^* j})) \le$$
$$\le \min(\min(r_{il_1^*}; \ldots; r_{l_{s-1}^* l_s^*}); \min(r_{l_s^* l_{s+k+1}^*}; \ldots; r_{l_{n-1}^* j})) =$$
$$= \min(r_{il_1^*}; \ldots; r_{l_{s-1}^* l_s^*};\ r_{l_s^* l_{s+k+1}^*}; \ldots; r_{l_{n-1}^* j}) \le r_{ij}^{(n-k-1)} \le r_{ij}^{(n)} \Rightarrow r_{ij}^{(n+1)} = r_{ij}^{(n)}.$$

Следствие 24.3. Пусть универсальное множество X состоит из n элементов, а R рефлексивное на нем отношение. Тогда $\tilde{R} = R^n$.

Согласно этому следствию, если множество X состоит из n элементов, то транзитивное замыкание рефлексивного отношения R вычисляется с помощью не более чем n итераций.

Исследуем вопрос о связи транзитивного замыкания исходного отношения R с транзитивными замыканиями его множеств уровня $R(\alpha)$.

Теорема 24.8. Пусть нечеткие отношения F и R на множестве X таковы, что для любых точек $x \in X, y \in X$ в формуле, определяющей функцию принадлежности их композиции, достигается максимум, то есть

$$\mu_{R\blacklozenge F}(x, y) = \max_{z\in X} \min(\mu_R(x, z); \mu_F(z, y)). \tag{24.22}$$

Тогда для любого числа $\alpha \in (0,1]$ выполнено равенство $(R \blacklozenge F)(\alpha) = R(\alpha) \blacklozenge F(\alpha)$.

Доказательство. Возьмем число $\alpha \in (0, 1]$. Тогда из равенства (25.16) следует, что точка $(x, y) \in (R \blacklozenge F)(\alpha)$ тогда и только тогда, когда существует точка $z \in X$ такая, что точки (x, z) и (z, y) принадлежат множеству $F(\alpha)$. Следовательно, точка $(x, y) \in (R \blacklozenge F)(\alpha)$ тогда и только тогда, когда

$$\mu_{(R\blacklozenge F)(\alpha)}(x, y) = \max_{z\in X} \min(\mu_{R(\alpha)}(x, z); \mu_{F(\alpha)}(z, y)) = 1.$$

Последнее равенство равносильно включению $(x, y) \in R(\alpha) \blacklozenge F(\alpha)$.

Пример 24.3. Пусть множество X состоит из n элементов, а нечеткие отношения R и F заданы матрицами $\{r_{ij}\}$ и $\{f_{ij}\}$. Тогда матрица $R \blacklozenge F = \{g_{ij}\}$ композиции этих отношений равна $g_{ij} = \max\limits_{1\le k\le n} \min(r_{ik}; f_{kj})$. Следовательно, условие (24.22) выполнено.

Следствие 24.4. Пусть множество X состоит из n элементов, а R рефлексивное на нем отношение. Тогда для любого числа $\alpha \in (0, 1]$ множество уровня $\left(\tilde{R}\right)(\alpha)$ его транзитивного замыкания $\tilde{R}$ совпадает с транзитивным замыканием $\tilde{R}(\alpha)$ его множества уровня, то есть $\left(\tilde{R}\right)(\alpha)=\tilde{R}(\alpha)$.

Доказательство. Из следствия 24.3 и из теоремы 24.8 вытекает, что

$$\left(\tilde{R}\right)(\alpha)=R^n(\alpha)=\left(R(\alpha)\right)^n=\tilde{R}(\alpha).$$

Из доказанного следствия получим, что необходимо вначале построить транзитивное замыкание $\tilde{R}$ отношения R. Затем по заданному числу α строится бинарное отношение уровня $\tilde{R}(\alpha)$, с помощью которого осуществляется разбиение исходного множества объектов на классы эквивалентности.

Исследование структуры социальной группы на основе матрицы контактов

Исследование структуры социальной группы имеет важное значение в оценке статических, социально-экономических и других показателей населения. Требуется разбить исследуемый контингент на подгруппы по заданному признаку.

Рассмотрим некоторую группу объектов при условии, что между ними существуют взаимоотношения. Если известна степень этих отношений, то можно сказать, что имеется социальная группа определенной структуры. Нашей задачей является выделение подгрупп с более сильной степенью отношения внутри группы. В итоге мы получим представление группы в виде вложенного дерева подгрупп.

Работа по исследованию структуры социальной группы состоит из пяти этапов.

1. Анкетирование членов группы или других экспертов, знающих данную группу.
2. Построение нечеткого отношения контактов между членами группы (на основе данных анкет).
3. Построение транзитивного замыкания этого нечеткого отношения контактов.
4. Разбиение группы на классы эквивалентности для любой степени контакта.
5. Построение дерева вложений подгрупп в группу.

Требуется построить симметричное и рефлексивное отношение $R = \{r_{ij}\}$ контактов в группе, где числа $r_{ij} \in [0, 1]$ характеризуют степень контакта между i-м и j-м членами группы. Нечеткое отношение R может быть построено экспертным путем, а именно, посредством анкетирования самих членов группы, либо с помощью других, хорошо знающих группу людей. Анкетирование может быть анонимным и гласным.

При *анонимном анкетировании* экспертами могут быть как члены группы, так и другие, хорошо знающие группу люди. При этом отсутствие нескольких членов группы большого значения не имеет. Эксперты оценивают наличие контакта между всеми парами членов группы. Единицу выставляют, если находят контакт в данной паре и ноль — в противном случае. Поскольку матрица отношений должна быть рефлексивна и симметрична, то при заполнении матрицы каждый эксперт заполняет лишь треугольник над главной диагональю. Диагональ заполняется единицами, и полагается, что $r_{ji} = r_{ij}$. После этого матрицы, заполненные всеми экспертами, складываются, и находится матрица R, являющаяся их среднеарифметическим. Это и будет искомая матрица нечеткого отношения.

При *гласном анкетировании* экспертами должны быть члены группы. Присутствие всех членов группы здесь уже важно. Теперь i-й эксперт оценивает только свои отношения с остальными. Эксперты могут пользоваться, например, следующей шкалой:

$r_{ij} = 0$, если x_i безусловно не контактирует с x_i;
$r_{ij} = 0{,}25$, если x_i слегка контактирует с x_i;
$r_{ij} = 0{,}5$, если x_i вроде как контактирует с x_i;

$r_{ij} = 0{,}75$, если x_i достаточно заметно контактирует с x_i;

$r_{ij} = 1$, если x_i безусловно контактирует с x_i.

Каждый эксперт заполняет лишь треугольник над главной диагональю. Диагональ заполняется единицами, и полагается, что $r_{ji} = r_{ij}$. Как и выше, матрицы, заполненные всеми экспертами, складываются, и находится матрица R, являющаяся их среднеарифметическим. Это и будет искомая матрица нечеткого отношения.

Разбиение группы на подгруппы по принципу общения между ее членами производится на основе транзитивного замыкания $\tilde{R}$ построенной матрицы R. Для любого уровня $\alpha \in [0, 1]$ можно получить подгруппы, характеризующиеся степенью контакта α. Таким образом, структура группы представляется в виде дерева, ребра которого соответствуют вложенности подгрупп.

Пример 24.4. Рассмотрим конкретный пример. Пусть для анализа группы из шести человек привлечено десять экспертов. Результаты их опроса приведены в табл. 24.1.

Таблица 24.1

10	5	4	3	5	6
5	10	7	2	4	8
4	7	10	4	6	7
3	2	4	10	4	5
5	4	6	4	10	6
6	8	7	5	6	1

По этим данным строим матрицу нечеткого отношения R

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0,4 & 0,3 & 0,5 & 0,6 \\ 0,5 & 1 & 0,7 & 0,2 & 0,4 & 0,8 \\ 0,4 & 0,7 & 1 & 0,4 & 0,6 & 0,7 \\ 0,3 & 0,2 & 0,4 & 1 & 0,4 & 0,5 \\ 0,5 & 0,4 & 0,6 & 0,4 & 1 & 0,6 \\ 0,6 & 0,8 & 0,7 & 0,5 & 0,6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычисляя степени этой матрицы, получим

$$R^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0,6 & 0,6 & 0,5 & 0,6 & 0,6 \\ 0,6 & 1 & 0,7 & 0,5 & 0,6 & 0,8 \\ 0,6 & 0,7 & 1 & 0,5 & 0,6 & 0,7 \\ 0,5 & 0,5 & 0,5 & 1 & 0,5 & 0,5 \\ 0,6 & 0,6 & 0,6 & 0,5 & 1 & 0,6 \\ 0,6 & 0,8 & 0,7 & 0,5 & 0,6 & 1 \end{pmatrix}; \; R^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0,6 & 0,6 & 0,5 & 0,6 & 0,6 \\ 0,6 & 1 & 0,7 & 0,5 & 0,6 & 0,8 \\ 0,6 & 0,7 & 1 & 0,5 & 0,6 & 0,7 \\ 0,5 & 0,5 & 0,5 & 1 & 0,5 & 0,5 \\ 0,6 & 0,6 & 0,6 & 0,5 & 1 & 0,6 \\ 0,6 & 0,8 & 0,7 & 0,5 & 0,6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $R^2 = R^3$. Поэтому матрица транзитивного замыкания $\tilde{R} = R^2$.

Построим отношения уровня $\tilde{R}(\alpha)$ и соответствующие классы эквивалентности. Имеем

$$0 < \alpha \le 0{,}5 \Rightarrow \tilde{R}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{один класс } \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\};$$

$$0{,}5 < \alpha \le 0{,}6 \Rightarrow \tilde{R}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{два класса } \{x_1, x_2, x_3, x_5, x_6\}; \{x_4\};$$

$$0{,}6 < \alpha \le 0{,}7 \Rightarrow \tilde{R}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{классы } \{x_1\}; \{x_2, x_3, x_6\}; \{x_5\}; \{x_4\};$$

$$0{,}7 < \alpha \le 0{,}8 \Rightarrow \tilde{R}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{классы } \{x_1\}; \{x_2, x_6\}; \{x_3\}; \{x_5\}; \{x_4\};$$

$$0{,}8 < \alpha \le 1 \Rightarrow \tilde{R}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{классы } \{x_1\}; \{x_2\}; \{x_6\}; \{x_6\}; \{x_5\}; \{x_4\}.$$

Структура группы представляется в виде следующего дерева:

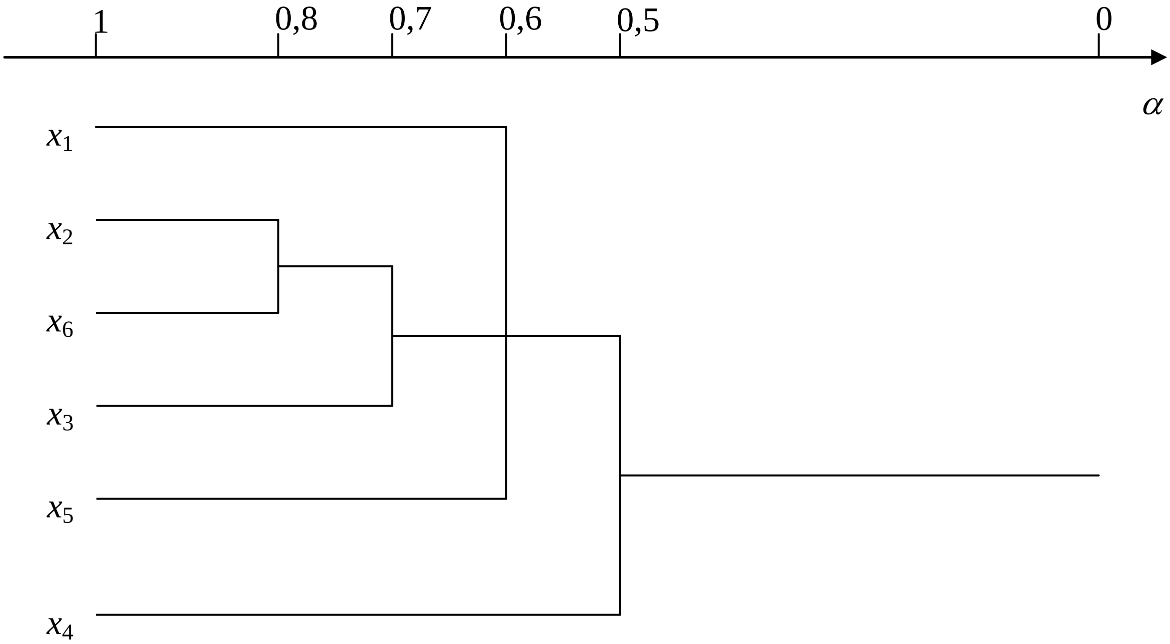

Рис. 24.1

§ 25. Основные понятия теории принятия решений в условиях неопределенности и при многих критериях

25.1. Критерии принятия решений при наличии воздействия со стороны неконтролируемой помехи

В большинстве случаев задача принятия решений математически может быть описана множеством допустимых стратегий (альтернатив) и заданным на этом множестве отношением предпочтения. Отношение предпочтения может быть задано по-разному: в виде подмножества декартова произведения множества альтернатив самого на себя или в виде функции полезности, которая отображает множества альтернатив в числовую ось, причем лучшей альтернативе приписывается большее число.

Задачи, в которых отношение предпочтения задано в виде функции полезности, называются *задачами математического программирования*. Рациональным решением в таких задачах является альтернатива, на которой функция полезности принимает по возможности большее значение. Особый класс задач принятия решений составляют задачи, в которых результат определяется не только действиями *ЛПР* (*лица, принимающего решения*), но и результатом воздействия сторонних сил. В качестве таких сил могут, например, выступать другие лица или факторы — природные, экономические и др. Роль *ЛПР* может выполнять, например, руководитель предприятия, фирмы, банка, менеджер, продавец. Существуют разные подходы к проблеме принятия решения *ЛПР* в таких задачах. Кратко изложим основные принципы принятия решений в таких задачах.

Рассматривается однокритериальная задача принятия решений при неопределенности, в которой выбор решения x из множества X находится в распоряжении *ЛПР*. Существуют еще неконтролируемые факторы (*ошибки, помехи или другие неопределенности*) y, о которых известно, что они содержатся в заданном множестве Y. Задана функция f: $X \times Y \to R$. *Цель ЛПР* заключается в том, чтобы путем выбора $x \in X$ сделать значение критерия $f(x, y)$ как можно больше. Возникает вопрос о правиле выбора решения x.

Будем предполагать, что множества X и Y являются замкнутыми и ограниченными в конечномерных пространствах, а функция f является непрерывной по совокупности переменных на множестве $X \times Y$.

Критерий Вальда (*принцип наилучшего гарантированного результата, или принцип максимина*). Предполагается, что для каждого выбора $x \in X$, сделанного *ЛПР*, реализуется наиболее плохой для *ЛПР* неконтролируемый фактор $y \in Y$. Тогда при конкретном выборе $x \in X$ реализуется следующее значение критерия:

$$F_1(x) = \min_{y \in Y} f(x, y). \tag{25.1}$$

Согласно критерию Вальда решение x_1 выбирается из условия

$$F_1(x_1) = \max_{x \in X} F_1(x). \tag{25.2}$$

Такая оценка выбранного решения называется *оценкой крайнего пессимизма*, она ориентирует *ЛПР* на реализацию самой плохой для него неопределенности. Это решение полностью исключает риск. Это значит, что *ЛПР* не может столкнуться с результатом, который хуже того, на что он ориентируется.

Критерий Вальда может применяться тогда, когда ситуация, в которой принимается решение, характеризуется следующими обстоятельствами:

1) о вероятности появления неопределенности y ничего не известно;

2) с появлением неопределенности y необходимо считаться;

3) реализуется лишь малое количество принятия решения;
4) всякий риск исключается.

Обычно такая неопределенность маловероятна. Поэтому *Сэвидж* предложил в качестве усовершенствования максиминного критерия принцип минимаксного риска.

Критерий Сэвиджа (*принцип минимаксного риска, или принцип минимаксного сожаления*). Для каждой неопределенности $y \in Y$ *ЛПР* определяет наибольшее значение критерия, а именно вычисляет $\max\limits_{z \in X} f(z, y)$. Разность

$$\varphi(x, y) = \max_{z \in X} f(z, y) - f(x, y) \tag{25.3}$$

выражает «сожаление» *ЛПР* о том, что для неопределенного фактора $y \in Y$ он использует x, а не решение x_*, для которого $f(x_*, y) = \max\limits_{z \in X} f(z, y)$.

Затем *ЛПР* стремиться выбрать такое решение $x \in X$, при котором максимально возможное сожаление будет наименьшим. Для этого составляется функция

$$F_2(x) = \max_{y \in Y} \varphi(x, y). \tag{25.4}$$

Согласно критерию Сэвиджа, решение x_2 выбирается из условия

$$F_2(x_2) = \min_{x \in X} F_2(x). \tag{25.5}$$

Замечание 25.1. Функция (25.3) характеризует *риск ЛПР*. Риск возникает в связи с тем, что *ЛПР* не знает точно, какая неопределенность будет реализована. Функция (25.3) называется *функцией риска ЛПР*.

Критерий Лапласа. Этот критерий основан на следующем *принципе недостаточного обоснования*: поскольку распределение вероятности на неопределенных факторах заранее не известно, то принимаем, что *распределение является равномерным*. Иначе бы мы имели какую-нибудь информацию о неравномерном законе распределения.

По критерию Лапласа решение $x \in X$ оценивается числом

$$F_3(x) = \int_Y f(x, y) p(y) dy, \tag{25.6}$$

где $p(y)$ — плотность равномерного распределения на множестве Y. Решение x_3 выбирается из условия

$$F_3(x_3) = \max_{x \in X} F_3(x). \tag{25.7}$$

Критерий «крайнего оптимизма». Предполагается, что для каждого выбора $x \in X$, сделанного *ЛПР*, реализуется наиболее хороший для *ЛПР* неконтролируемый фактор $y \in Y$. Тогда при конкретном выборе $x \in X$ реализуется следующее значение критерия:

$$F_4(x) = \max_{y \in Y} f(x, y). \qquad (25.8)$$

Решение x_4 выбирается из условия

$$F_4(x_4) = \max_{x \in X} F_4(x). \qquad (25.9)$$

При выборе *ЛПР* конкретного решения $x \in X$ возможное значение критерия $f(x, y)$ в зависимости от реализовавшейся помехи $y \in Y$ находится в промежутке $[F_1(x); F_4(x)]$. Приходим к задаче сравнения отрезков.

Согласно определению 9.1 можно рекомендовать *ЛПР* делать выбор, исходя из решения следующей задачи:

$$0{,}5F_1(x) + 0{,}5F_4(x) \to \max, \quad x \in X.$$

Этот подход обобщается в следующем критерии.

Критерий Гурвица. Выбирается число $0 \le \lambda \le 1$ и строится функция

$$F_5(x) = \lambda F_4(x) + (1-\lambda)F_1(x). \qquad (25.10)$$

Решение x_5 выбирается из условия

$$F_5(x_5) = \max_{x \in X} F_5(x). \qquad (25.11)$$

Параметр λ называется *показателем оптимизма.* При $\lambda = 1$ получаем критерий крайнего оптимизма, а при $\lambda = 0$ — критерий крайнего пессимизма. Поскольку в практических приложениях трудно выбрать численные значения показателя оптимизма, чаще всего берут $\lambda = 0{,}5$.

Критерий Гурвица предъявляет к ситуации, в которой принимается решение, следующие требования:

1) о вероятности появления неопределенности y ничего не известно;
2) с появлением неопределенности y необходимо считаться;
3) реализуется лишь малое количество принятия решения;
4) допускается некоторый риск.

Критерий Ходжа — Лемана. Выбирается число $0 \le \lambda \le 1$ и строится функция

$$F_6(x) = \lambda F_3(x) + (1-\lambda)F_1(x). \qquad (25.12)$$

Решение x_6 выбирается из условия

$$F_6(x_6) = \max_{x \in X} F_6(x). \qquad (25.13)$$

При $\lambda = 1$ получаем критерий Лапласа, а при $\lambda = 0$ — критерий крайнего пессимизма.

Критерий Ходжа — Лемана предъявляет к ситуации, в которой принимается решение, следующие требования:

1) о вероятности появления неопределенности y ничего не известно, но предположение о равномерном распределении имеется;

2) принятое решение теоретически допускает бесконечно большое количество реализаций;

3) допускается некоторый риск при малых числах реализаций.

Пусть множества X и Y состоят из конечного числа элементов, а именно $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$, $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$. Обозначим $a_{ij} = f(x_i, y_j)$. Введем матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mj} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Можно считать, что *ЛПР* выбирает строчку у этой матрицы, а неконтролируемый фактор — столбец. Запишем рассмотренные выше критерии в этом случае. При применении критерия Лапласа берется функция

$$F_3(i) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,; \; F_3\,(i_3) = \max_{1 \le i \le m} F_3(i).$$

Выпишем разобранные выше критерии принятия решения для случая, когда *ЛПР минимизирует значение* $f(x, y)$.

Критерий Вальда. Решение x_1 выбирается из условия

$$F_1(x_1) = \min_{x \in X} F_1(x), \text{ где } F_1(x) = \max_{y \in Y} f(x, y).$$

Критерий Сэвиджа. Функция сожаления имеет следующий вид:

$$\varphi(x, y) = f(x, y) - \min_{z \in X} f(z, y).$$

Решение x_2 выбирается из условия

$$F_2(x_2) = \min_{x \in X} F_2(x), \text{ где } F_2(x) = \max_{y \in Y} \varphi\,(x, y).$$

Критерий Лапласа. Решение x_3 выбирается из условия

$$F_3(x_3) = \min_{x \in X} F_3(x), \text{ где } F_3(x) = \int_Y f(x, y) p(y) dy.$$

Здесь $p(y)$ — плотность равномерного распределения на множестве Y.

Критерий «крайнего оптимизма». Решение x_4 выбирается из условия

$$F_4(x_4) = \min_{x \in X} F_4(x), \text{ где } F_4(x) = \min_{y \in Y} f(x, y).$$

Критерий Гурвица. Выбирается число $\lambda \in [0, 1]$. Решение x_5 выбирается из условия

$$F_5(x_5) = \min_{x \in X} F_5(x), \text{ где } F_5(x) = \lambda F_4(x) + (1 - \lambda) F_1(x).$$

Критерий Ходжа — Лемана. Выбирается число $\lambda \in [0, 1]$. Решение x_6 выбирается из условия

$$F_6(x_6) = \min_{x \in X} F_6(x), \text{ где } F_6(x) = \lambda F_3(x) + (1 - \lambda) F_1(x).$$

Пример 25.1. Представитель малого бизнеса берет в банке кредит на сумму x денежных единиц и отправляется за товаром в другую страну, где он может приобрести товар на сумму $y \in [a, b]$ денежных единиц. Считаем, что числа $0 \le a \le b$ известны. Возвращаясь назад, он реализует на рынке весь купленный товар по более высоким ценам.

При этом у коммерсанта всегда присутствует риск. Если он возьмет в банке сумму с излишком, то может приобрести товара не на всю взятую сумму денег и, следовательно, выплатит проценты банку за неиспользуемые взятые деньги. Если же он возьмет меньшую сумму денег, чем ту, на которую бы он смог приобрести товар, то риск определяется неиспользованной возможностью. В качестве функции «штрафа» возьмем

$$f(x, y) = \begin{cases} c_1(x - y) & \text{при } 0 \le y \le x, \\ c_2(y - x) & \text{при } y \ge x \ge 0. \end{cases} \tag{25.14}$$

Здесь $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ — некоторые коэффициенты, определяемые процентной кредитной ставкой банка и разницей цен на приобретаемые товары в различных странах.

Решаем задачу по изложенным выше критериям. Пусть применяется *критерий Вальда*. Тогда функция

$$F_1(x) = \max_{a \le y \le b} \begin{cases} c_1(x-y) & при\ 0 \le y \le x, \\ c_2(y-x) & при\ \ y \ge x \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} c_2(b-x) & при\ 0 \le x \le a, \\ \max\ (c_1(x-a);\ c_2(b-x)) & при\ a \le x \le b, \\ c_1(x-a) & при\ b \le x. \end{cases}$$

Из равенства $c_2\ (b-x) = c_1(x-a)$ найдем точку

$$x^* = \frac{c_1}{c_1+c_2}a + \frac{c_2}{c_1+c_2}b. \tag{25.15}$$

Из формулы для функции $F_1(x)$, видно, что $F_1(x) = c_2(b-x)$ при $0 \le x \le x^*$ и $F_1(x) = c_1(x-a)$ при $x^* \le x$. Следовательно, она убывает при $0 \le x \le x^*$, а при $x^* \le x$ она возрастает. Стало быть,

$$x_1 = x^*,\quad F_1(x_1) = \frac{c_1c_2}{c_1+c_2}(b-a). \tag{25.16}$$

Пусть для получения решения используется *критерий Сэвиджа*. Тогда

$$\min_{x \ge 0} \begin{cases} c_1(x-y) & при\ 0 \le y \le x, \\ c_2(y-x) & при\ \ y \ge x \end{cases} = 0.$$

Поэтому функция сожаления

$$\varphi(x, y) = f(x, y) - \min_{z \in X} f(z, y)$$

совпадает с функцией $f(x, y)$. Следовательно, критерий Сэвиджа в данном примере переходит в критерий Вальда и

$$x_2 = x^* \text{ и } F_2(x_2) = \frac{c_1c_2}{c_1+c_2}(b-a). \tag{25.17}$$

Рассмотрим *критерий Лапласа*. Плотность равномерного распределения на отрезке $[a, b]$ задается формулой $p(y) = (b-a)^{-1}$ при $y \in [a, b]$ и $p(y) = 0$ в противном случае. Поэтому

$$F_3(x) = (b-a)^{-1}\int_a^b f(x, y)dy.$$

Рассмотрим три случая. Пусть $x \in [0, a)$. Тогда

$$F_3(x) = \frac{1}{b-a}\int_a^b c_2\ (y-x)dy = \frac{1}{2}c_2(a+b-2x).$$

Пусть $x \in [a, b]$. Тогда

$$F_3(x) = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^x c_1(x-y)dy + \frac{1}{b-a}\int\limits_x^b c_2(y-x)dy =$$

$$= \frac{c_1(x-a)^2}{2(b-a)} + \frac{c_2(b-x)^2}{2(b-a)}.$$

Пусть $x > b$. Тогда $F_3(x) = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b c_1(x-y)dy = \frac{1}{2}c_1(2x-a-b)$.

При $x \in [a, b]$ графиком функции $F_3(x)$ является парабола, ветви которой направлены вверх. Найдем координаты ее вершины. Производная $F_3'(x) = \frac{c_1(x-a)-c_2(b-x)}{(b-a)}$ обращается в нуль в точке x^*. График полученной функции $F_3(x)$ изображен на рис. 25.1. Таким образом,

$$x_3 = x^* \text{ и } F_3(x_3) = \frac{1}{2}\frac{c_1 c_2}{c_1+c_2}(b-a). \tag{25.18}$$

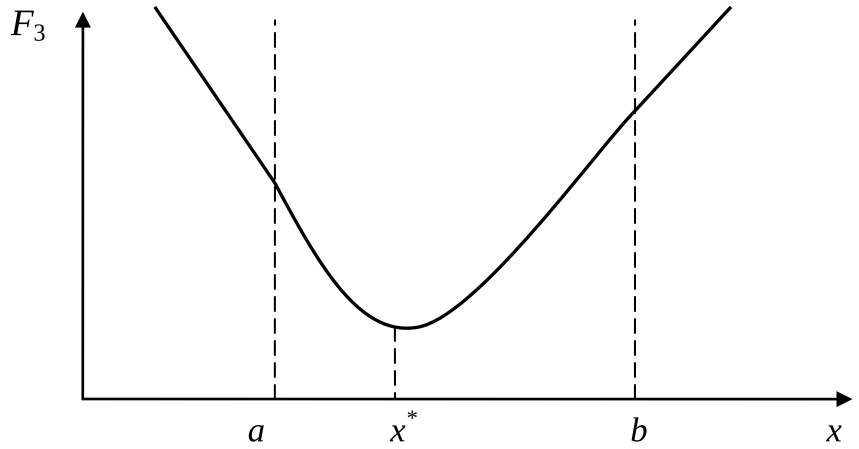

Рис. 25.1

При применении критерия *крайнего оптимизма* функция

$$F_4(x) = \min_{a\le y\le b}\begin{cases} c_1(x-y) & \text{при } 0\le y\le x,\\ c_2(y-x) & \text{при } y\ge x\end{cases} = \begin{cases} c_1(x-b) & \text{при } b\le x,\\ c_2(a-x) & \text{при } x\le a,\\ 0 & \text{при } a\le x\le b.\end{cases}$$

Поэтому $\min\limits_{x\ge 0} F_4(x) = 0$. Следовательно,

$$\forall\, x_3 \in [a, b] \text{ и } F_4(x_4) = 0. \tag{25.19}$$

Рассмотрим *критерий Гурвица*. Зафиксируем число $0 < \lambda < 1$.

Тогда

$$F_5(x) = \lambda F_4(x) + (1-\lambda)F_1(x) = \lambda\begin{cases} c_1(x-b) & при\ b \le x, \\ c_2(a-x) & при\ 0 \le x \le a, \\ 0 & при\ a \le x \le b \end{cases} +$$

$$+\ (1-\lambda)\begin{cases} c_2(b-x) & при\ 0 \le x \le a, \\ \max\ (c_1(x-a);\ c_2(b-x)) & при\ a \le x \le b, \\ c_1(x-a) & при\ b \le x. \end{cases}$$

Следовательно,

$$F_5(x) = \begin{cases} c_2(\lambda a + (1-\lambda)b - x) & при\ 0 \le x \le a, \\ (1-\lambda)\max\ (c_1(x-a);\ c_2(b-x)) & при\ a \le x \le b, \\ c_1(x-(1-\lambda)a - \lambda b) & при\ b \le x. \end{cases}$$

График этой функции изображен на рис. 25.2. Таким образом, минимальное значение функции $F_5(x)$ достигается в точке x^*.

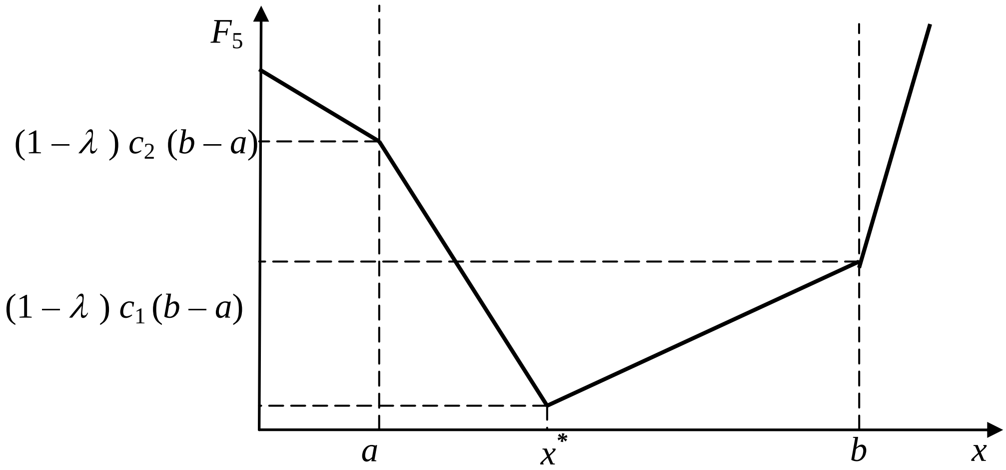

Рис. 25.2

Следовательно,

$$x_5 = x^*,\quad F_5(x_5) = (1-\lambda)\frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}(b-a)\ . \qquad (25.20)$$

Рассмотрим *критерий Ходжа — Лемана*. Зафиксируем число $0 < \lambda < 1$. Тогда $F_6(x) = \lambda F_3(x) + (1-\lambda)F_1(x)$. Поскольку функции $F_3(x)$ и $F_1(x)$ достигают минимального значения в точке x^*, то в этой точке достигает минимального значения и функция $F_6(x)$. Таким образом,

$$x_6 = x^*,\quad F_6(x_6) = (1-\frac{\lambda}{2})\frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}(b-a)\ . \qquad (25.21)$$

25.2. Принципы выбора стратегий в многокритериальных задачах при отсутствии неопределенности

Рассмотрим многокритериальную задачу принятия решений, в которой выбор решения x из множества X находится в распоряжении *ЛПР*. Заданы функции f_i: $X \to R$, $i = \overline{1,n}$. *Цель ЛПР* заключается в том, чтобы путем выбора $x \in X$ сделать значение каждого критерия $f_i(x)$ как можно больше. Возникает вопрос о правиле выбора решения x в задаче

$$f_1(x) \to \max, \ldots, f_n(x) \to \max, \quad x \in X. \tag{25.22}$$

Будем предполагать, что множество X является замкнутым и ограниченным в конечномерном пространстве, а функции f_i являются непрерывными на множестве X.

Посмотрим на эту многокритериальную задачу с точки зрения выбора стратегии в условиях неопределенных пассивных помех, которыми будем считать индекс $i = \overline{1,n}$.

В соответствии с критерием Вальда нужно рассмотреть задачу

$$F_1(x) = \min_{1 \le i \le n} f_i(x) \to \max, \quad x \in X. \tag{25.23}$$

В случае критерия Сэвиджа оптимизационная задача принимает следующий вид:

$$F_2(x) = \max_{1 \le i \le n} \left(\max_{z \in X} f_i(z) - f_i(x) \right) \to \min, \quad x \in X. \tag{25.24}$$

Критерий Лапласа рассмотрим в более общем виде. Зафиксируем числа $\lambda_i \ge 0$, $i = \overline{1,n}$, $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$ и рассмотрим задачу

$$F_3(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x) \to \max, \quad x \in X. \tag{25.25}$$

По критерию крайнего оптимизма получим следующую оптимизационную задачу:

$$F_4(x) = \max_{1 \le i \le n} f_i(x) \to \max, \quad x \in X. \tag{25.26}$$

Зафиксируем число $\lambda \in (0, 1)$. Тогда по критерию Гурвица

$$F_5(x) = \lambda F_4(x) + (1 - \lambda)F_1(x)) \to \max, \quad x \in X, \tag{25.27}$$

по критерию Ходжа — Лемана

$$F_6(x) = \lambda F_3(x) + (1 - \lambda)F_1(x)) \to \max, \quad x \in X. \tag{25.28}$$

Теорема 25.1. Пусть точка $x_S \in X$ является решением одной из задач (25.23) — (25.27). Тогда для любой точки $x \in X$ система неравенств

$$f_1(x_S) < f_1(x),\ \ldots,\ f_n(x_S) < f_n(x) \tag{25.29}$$

является несовместной.

Доказательство. Предположим, что существует точка $x \in X$, для которой система неравенств (25.29) выполнена. Покажем, что $F_i(x_S) < F_i(x)$ при всех $i = 1, 3, 4, 5, 6$ и $F_2(x_S) > F_2(x)$.

Из (25.29) следует, что $F_1(x_S) = \min\limits_{1\le i\le n} f_i(x_S) \le f_j(x_S) < f_j(x)$ для любых номеров $j = \overline{1,n}$. Следовательно, $F_1(x_S) < \min\limits_{1\le j\le n} f_j(x) = F_1(x)$.

Умножим каждое неравенство (25.29) на ненулевой набор неотрицательных чисел λ_i и сложим их. Получим $F_3(x_S) < F_3(x)$.

Далее, $F_4(x) = \max\limits_{1\le i\le n} f_i(x) \ge f_j(x) > f_j(x_S)$ для любого номера $j \in \overline{1,n}$. Поэтому $F_4(x) > \max\limits_{1\le j\le n} f_j(x_S) = F_4(x_S)$.

Зафиксируем произвольное число $0 < \lambda < 1$. Тогда

$F_5(x_S) = \lambda F_4(x_S) + (1-\lambda)F_1(x_S) < \lambda F_4(x) + (1-\lambda)F_1(x) = F_5(x)$.

$F_6(x_S) = \lambda F_3(x_S) + (1-\lambda)F_1(x_S) < \lambda F_3(x) + (1-\lambda)F_1(x) = F_6(x)$.

Рассмотрим теперь функцию $F_2(x)$. Из (25.24) следует, что

$$\max_{z\in X} f_i(z) - f_i(x_S) > \max_{z\in X} f_i(z) - f_i(x)$$

для любого $i \in \overline{1,n}$. Поэтому

$$F_2(x_S) = \max_{1\le i\le n}\,(\max_{z\in X} f_i(z) - f_j\,(x_S)) > \max_{z\in X} f_j(z) - f_j(x)$$

для любого $j \in \overline{1,n}$.

Следовательно,

$$F_2(x_S) > \max_{1\le j\le n}\,(\max_{z\in X} f_j(z) - f_j(x)) = F_2(x).$$

Определение 25.2. Точка $x_S \in X$ называется *максимальной по Слейтеру*, если для любого $x \in X$ система неравенств (25.29) является несовместной.

Замечание 25.2. Такое определение означает, что не существует другой стратегии $x \in X$, выбрав которую, *ЛПР* улучшило бы значение всех критериев.

Теорема 25.2. Пусть множество $X \subset R^m$ является замкнутым и ограниченным, а каждая из функций f_i: $X \to R$, $i = \overline{1,n}$ является непрерывной. Тогда множество $X_S \subset X$ точек максимальных по Слейтеру является непустым, замкнутым и ограниченным.

Доказательство. Функция $F_3(x)$ является непрерывной. По теореме Вейерштрасса решение в задаче (25.25) существует. Оно будет максимальной точкой по Слейтеру.

Пусть последовательность точек $x^{(k)}{}_S \in X$ сходится к точке x_0. Покажем, что $x_0 \in X_S$. Допустим противное. Тогда существует точка $x \in X$, для которой система неравенств $f_1(x_0) < f_1(x)$, …, $f_n(x_0) < f_n(x)$ будет совместной. Поскольку все функции являются непрерывными, то эти неравенства будут выполняться при достаточно больших номерах k при замене x_0 на $x^{(k)}{}_S$.

Существуют и другие способы выбора стратегии в задаче (25.22), среди которых отметим *лексикографический*. Считается, что все критерии упорядочены по важности. Самым важным является первый критерий, задаваемый функцией $f_1(x)$. Следующим по важности является второй критерий с функцией $f_2(x)$ и т. д.

Вначале решается задача $f_1(x) \to \max$, $x \in X$. Обозначим через X_1 множество решений этой задачи. Если множество X_1 состоит из одной точки, то оно принимается за решение задачи (25.22). В противном случае рассматривается задача $f_2(x) \to \max$, $x \in X_1$, множество решений которой обозначим через X_2. Если множество X_2 состоит из одной точки, то оно принимается за решение задачи (25.22). В противном случае рассматривается задача $f_3(x) \to \max$, $x \in X_2$ и т. д. В результате определяется множество точек $X_Л \subset X$, которые являются максимальными в лексикографическом смысле решениями задачи (25.22). Нетрудно видеть, что каждая точка $x_Л \in X_Л$ является максимальной по Слейтеру.

Максимальная по Слейтеру точка не позволяет строго улучшить значения сразу всех критериев. Существуют другие определения максимальных точек в задаче (25.22). Одним из них является определение, данное Парето.

Определение 25.3. Точка $x_P \in X$ называется *максимальной по Парето* в задаче (25.22), если для любой точки $x \in X$ система неравенств

$$f_1(x_P) \le f_1(x),\ \ldots,\ f_n(x_P) \le f_n(x), \tag{25.30}$$

из которых по крайней мере одно неравенство строгое, является несовместной.

Следствие 25.1. Если точка $x_P \in X$ является *максимальной по Парето* в задаче (25.22), то она является и максимальной по Слейтеру для той же задачи.

Теорема 25.3. Пусть множество $X \subset R^m$ является замкнутым и ограниченным, а каждая из функций f_i: $X \to R$, $i = \overline{1,n}$ является непрерывной. Тогда множество $X_P \subset X$ точек максимальных по Парето является непустым.

Доказательство. Возьмем числа $\lambda_i > 0$, $i = \overline{1,n}$ и рассмотрим задачу (25.25). Ее решение не будет удовлетворять для любой точки $x \in X$ неравенствам (25.30), из которых по крайней мере одно неравенство строгое. Следовательно, оно будет максимальной точкой по Парето.

Приведем геометрическую интерпретацию данных определений решений. Введем в рассмотрение в пространстве R^n выпуклые конусы:

$$K_S = \{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in R^n\colon \varepsilon_i > 0 \text{ для } i \in \overline{1,n}\},$$

$$K_P = \{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in R^n\colon \varepsilon_i \geq 0 \text{ для } i \in \overline{1,n},\ \ \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i > 0\}.$$

Тогда определение максимальной по Слейтеру точки x_S и максимальной по Парето точки x_P можно записать (см. рис. 28.1) в следующем виде:

$$\bar{f}(x) \notin \bar{f}(x_S) + K_S \text{ для любого } x \in X;$$

$$\bar{f}(x) \notin \bar{f}(x_P) + K_P \text{ для любого } x \in X.$$

Здесь обозначено $\bar{f}(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$. Отметим, что $K_S \subset K_p$. Отсюда, в частности, следует, что $X_P \subset X_S$.

Пример 25.2. Пусть $x = (x_1, x_2)$. Рассмотрим задачу

$f_1(x_1, x_2) = x_1 \to \max$, $f_2(x_1, x_2) = -x_1 + x_2 \to \max$, $(x_1, x_2) \in X$.

В качестве множества X возьмем квадрат $0 \leq x_1 \leq 1$, $0 \leq x_2 \leq 1$.

На плоскости (f_1, f_2) нарисуем множество F тех точек, координаты которых равны $f_1 = f_1(x_1, x_2)$, $f_2 = f_2(x_1, x_2)$, $(x_1, x_2) \in X$ (на рис. 25.3 это параллелограмм $ABCD$). Максимальными по Слейтеру являются все точки верхней и правой сторон квадрата (точки ломаной abc на рис. 25.3). Их образами являются точки ломаной ABC. Точка $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ является максимальной в лексикографическом смысле. Оптимальными по Парето являются точки отрезка ab. Их образами являются точки отрезка AB.

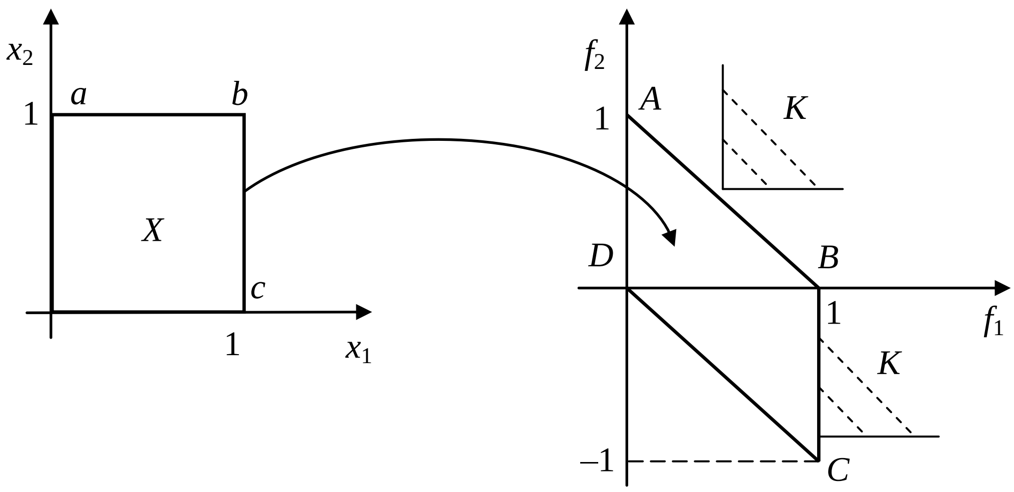

Рис. 25.3

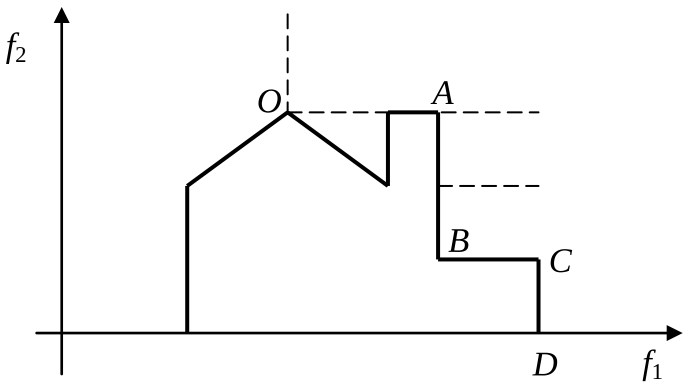

Рис. 25.4

Задача 25.1. Для множества $F = \{(f_1, f_2) \in R^n\colon f_1 = f_1(x_1, x_2), f_2 = f_2(x_1, x_2), (x_1, x_2) \in X\}$, изображенного на рис. 25.4, указать точки, максимальные по Слейтеру и по Парето.

§ 26. Задача о достижении цели при нечетких ограничениях

Нечеткость в задаче математического программирования может содержаться как в описании множества альтернатив, так и в описании целевой функции.

Пример 26.1. Рассмотрим вначале следующий пример. Пусть заданы универсальное множество $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ и его нечеткие множества: $A_0 = \{$*x должен быть близким к пяти*$\}$, $A_1 = \{$*x должен* *быть близким к четырем*}, A_2 = {*x должен быть близким к шести*} — следующим образом:

Таблица 26.1

x	1	2	3	4	5	6	7	8
A_0	0	0,1	0,4	0,8	1	0,7	0,4	0,2
A_1	0,3	0,6	0,9	1	0,8	0,7	0,5	0,3
A_2	0,2	0,4	0,6	0,7	0,9	1	0,8	0,6

Нечеткое множество A_0 задает нечеткую цель при выборе значения $x \in X$, а нечеткие множества A_1 и A_2 задают нечеткие ограничения. Возникает проблема в разумном определении решения этой задачи. Если бы была только одна нечеткая цель в виде нечеткого множества A_0, то естественно выбрать значение x, степень принадлежности которого нечеткому множеству A_0 была бы максимальна. Таким элементом в рассматриваемом примере является $x = 5$.

При наличии нечетких ограничений A_1 и A_2 попытка выбрать значение x, степени принадлежности которого каждому нечеткому множеству A_0, A_1, A_2 были бы максимальными, не увенчается успехом. Так, для нечеткого множества A_1 элемент $x = 4$ обладает наибольшей степенью принадлежности, а для нечеткого множества A_2 таким свойством обладает $x = 6$.

Подход Беллмана — Заде

В качестве одного из приложений теорем, доказанных в § 5, рассмотрим задачу о достижении нечеткой цели при нечетких ограничениях. Допустим, множества A_i, $i = 0, 1, \ldots, k$, которые задают нечеткую цель A_0 и нечеткие ограничения A_i, имеют простейший вид $A_i = (B_i|\alpha)$, $B_i \subset X$, $0 < \alpha \leq 1$.

Тогда естественно выбирать элемент $x \in \bigcap_{i=0}^{k} B_i$.

Зафиксируем теперь число $0 \leq \alpha \leq 1$ и рассмотрим множества уровня $A_i(\alpha)$ нечетких множеств A_i. Если мы хотим, чтобы элемент x принадлежал всем нечетким множествам A_i со степенью принадлежности не меньше выбранного числа α, то нужно брать $x \in \bigcap_{i=0}^{k} A_i(\alpha)$. Для каждого элемента $x \in X$ выберем максимальное число $\alpha = \alpha(x)$, для которого выполнено предыдущее включение. Таким образом,

$$\alpha(x) = \sup\left\{\alpha : 0 < \alpha \le 1,\ x \in \bigcap_{i=0}^{k} A_i(\alpha)\right\}. \qquad (26.1)$$

В качестве оптимального элемента x_* можно взять решение следующей задачи: $\alpha(x_*) = \max\limits_{x \in X} \alpha(x)$.

Выведем явный вид функции $\alpha(x)$. Для этого используем свойства множеств уровня. Обозначим через $\mu_i(x)$ функцию принадлежности нечеткого множества A_i. Поскольку $\bigcap\limits_{i=0}^{k} A_i(\alpha) = (A_0 \wedge A_1 \wedge \ldots \wedge A_{k-1} \wedge \wedge A_k)(\alpha)$, то из формулы (26.1) получим

$$\alpha(x) = \sup\{\alpha \in [0, 1]: \mu_i(x) \ge \alpha \text{ для всех } i = \overline{0,k}\} = \min_{0 \le i \le k} \mu_i(x).$$

Обозначим $A = A_0 \wedge A_1 \wedge \ldots \wedge A_{k-1} \wedge A_k$. Тогда

$$\mu_A(x) = \min_{0 \le i \le k} \mu_i(x). \qquad (26.2)$$

Таким образом, функция $\alpha(x) = \mu_A(x)$ является функцией принадлежности пересечения нечеткой цели и нечетких ограничений, а оптимальный элемент $x_* \in X$ выбирается из условия

$$\mu_A(x_*) = \max_{x \in X} \mu_A(x). \qquad (26.3)$$

В этом заключается подход Беллмана — Заде при определении решения в задаче *нечеткого математического программирования*.

Приведем еще одну интерпретацию подхода Беллмана — Заде. Рассмотрим задачу нечеткого программирования как многокритериальную задачу

$$\mu_0(x) \to \max,\ \mu_1(x) \to \max,\ \ldots,\ \mu_k(x) \to \max,\ x \in X, \qquad (26.4)$$

подходы к определению решения в которой были приведены в § 25.

Отметим, что при таком рассмотрении задачи нечеткого программирования подход Беллмана — Заде дает то же решение, что и применение критерия Вальда в многокритериальных задачах [см. формулу (25.23)].

Вернемся к примеру 26.1. Имеем

$$A = A_0 \wedge A_1 \wedge A_2 =$$
$$=\{(1|0),\ (2|0{,}1),(3|0{,}4),\ (4|0{,}7),(5|0{,}8),(6|0{,}7),(7|0{,}4),\ (8|0{,}2)\}.$$

Наибольшая степень принадлежности этому нечеткому множеству у элемента $x_* = 5$.

Применим этот подход выбора решения в задаче нечеткого математического программирования к решению некоторых задач.

Пример 26.2. *Задача распределения рабочих по работам*. Пусть имеется m рабочих мест и m рабочих. Требуется распределить рабочих по рабочим местам таким образом, чтобы итоговая эффективность была как можно больше. При решении этой задачи исходной информацией должна служить эффективность работы i-го рабочего на j-м месте. Однако оценки эффективности во многих случаях нельзя произвести точно. Они строятся на основе опроса экспертов и носят часто больше качественный, чем количественный характер.

Рассмотрим случай, когда эффективности работы являются нечеткими множествами универсального множества X оценок. Пусть, например, $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, где x_1 = (*эффективность отличная*), x_2 = (*эффективность очень хорошая*), x_3 = (*эффективность довольно хорошая*), x_4 = (*эффективность довольно плохая*), x_5 = (*эффективность очень плохая*).

В результате опроса экспертов построены нечеткие множества A_{ij} универсального множества X, характеризующие эффективность i-го рабочего на j-м месте, с функцией принадлежности μ_{ij}. Число $\mu_{ij}(x_k)$ характеризует степень достоверности того факта, что эффективность i-го рабочего на j-м месте равна x_k.

Требуется распределить рабочих по местам. Это значит, что нужно указать перестановку $J = (j_1, j_2, ..., j_m)$, которая означает, что i-й рабочий распределен на j_i-ю работу. Цель получения рабочего коллектива с определенной эффективностью задается в виде нечеткого множества A_0 универсального множества X с функцией принадлежности μ_0: $X \to [0, 1]$.

При выбранной перестановке J имеем задачу с нечеткой целью A_0 и нечеткими ограничениями A_{ij_i}, $i = 1, \ldots, m$. Строим нечеткое множество $A(J) = A_0 \wedge A_{1j_1} \wedge \ldots \wedge A_{m\,j_m}$, функция принадлежности которого равна

$$\mu_J(x) = \min_{1 \le i \le m} \min(\mu_0(x); \mu_{i\,j_i}(x)). \tag{26.5}$$

При выбранном правиле распределения J рабочих по рабочим местам наибольшая величина функции принадлежности (26.5) равна

$$p(J) = \max_{x \in X} \mu_J(x). \tag{26.6}$$

Искомое правило распределения J_* следует искать из условия

$$p(J_*) = \max_J p(J). \tag{26.7}$$

Рассмотрим конкретный пример трех рабочих, значения функций принадлежности в котором приведены в табл. 26.2. В рассматриваемом случае перестановка J принимает шесть значений (1, 2, 3), (1, 3, 2), (3, 1, 2), (3, 2, 1), (2, 3, 1), (2, 1, 3). Значения функций $\mu_J(x)$ приведены в табл. 26.3.

Таблица 26.2

Функция	Значения функции				
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
μ_{11}	0,1	0,3	0,5	0,6	0,7
μ_{12}	0,4	0,6	0,8	1,0	0,9
μ_{13}	0,3	0,4	0,4	0,5	0,6
μ_{21}	0,5	0,6	0,7	0,8	1,0
μ_{22}	1,0	0,9	0,8	0,7	0,7
μ_{23}	0,4	0,4	0,5	0,7	0,8
μ_{31}	0,8	0,9	1,0	0,9	0,8
μ_{32}	0,3	0,3	0,5	0,5	0,4
μ_{33}	0,2	0,3	0,5	0,7	0,8
μ_0	0,3	0,3	0,5	0,4	0,1

Таблица 26.3

Функция	Значения функции				
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
μ_{123}	0,1	0,3	0,5	0,4	0,1
μ_{132}	0,1	0,3	0,5	0,4	0,1
μ_{312}	0,3	0,3	0,4	0,4	0,1
μ_{321}	0,3	0,3	0,4	0,4	0,1
μ_{231}	0,3	0,3	0,5	0,4	0,1
μ_{213}	0,2	0,3	0,5	0,4	0,1

Значения функции (26.6) приведены в табл. 26.4.

Таблица 26.4

J	1, 2, 3	1, 3, 2	3, 1, 2	3, 2, 1	2, 3, 1	2, 1, 3
p	0,5	0,5	0,4	0,4	0,5	0,5

Стало быть, решением задачи (26.7) в рассматриваемом примере являются перестановки (1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 3, 1) и (2, 1, 3). При любом таком распределении рабочих по рабочим местам наибольшую степень принадлежности имеет значение x_3 = (*эффективность довольно хорошая*). Таким образом, неприемлемыми являются распределения (3, 1, 2) и (3, 2, 1).

Пример 26.3. *Задача о выборе места работы*. Допустим, нужно выбрать одно из m мест работы x_1, x_2, …, x_m. Имеется k признаков A_1, A_2, …, A_k, по каждому из которых оценивается каждое место работы. Группа из N экспертов по каждому признаку A_i оценивает каждое место работы. Получим нечеткие множества универсального множества $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$ с функциями принадлежности μ_i: $X \to [0, 1]$. Отсутствие других побуждений в выборе места работы, кроме как по указанной группе признаков, приводит к тому, что нечеткую цель задаем в виде нечеткого множества $A_0 = X$ с функцией принадлежности, тождественно равной единице.

Строим функцию (26.2), которая с учетом равенства $\mu_0(x) = 1$ принимает следующий вид:

$$\mu_A(x) = \min_{1 \le i \le 1} \mu_i(x). \tag{26.8}$$

Конкретное место работы x_* выбирается из условия

$$\mu_A(x_*) = \max_{x \in X} \mu_A(x).$$

Рассмотрим конкретный пример о выборе одного из четырех мест работы — x_1, x_2, x_3, x_4. Каждое место работы оценивается по следующим признакам: A_1 = (*возможность научной работы*), A_2 = (*возможность карьерного роста*), A_3 = (*материальные выгоды*), A_4 = (*местонахождение*), A_5 = (*коллектив*), A_6 = (*репутация места работы*). Результаты опроса экспертов приведены в табл. 26.5. Последняя строчка в этой таблице задает значение функции (26.8). Максимальное значение эта функция достигает на x_3. Стало быть, рекомендуется выбирать это место работы.

Таблица 26.5

Функция	Значения функции			
	x_1	x_2	x_3	x_4
μ_1	0,1	0,4	0,3	0,5
μ_2	0,8	0,7	0,2	0,4
μ_3	0,3	0,1	0,8	0
μ_4	0	0,6	0,5	0,4
μ_5	0,2	0,9	0,4	0,8
μ_6	0,2	0,4	0,6	0,1
μ	0	0,1	0,2	0

Покажем, как можно задачу об отыскании элемента, который максимизирует функцию вида (26.2), свести к задаче о нахождении максимума с ограничениями типа неравенств.

Теорема 26.1. Для того чтобы точка $x_* \in X$ являлась абсолютным максимумом функции (26.2) на множестве X, необходимо и достаточно, чтобы точка x_*, $y_* = \mu(x_*)$ доставляла абсолютный максимум в следующей задаче на условный максимум:

$$y \to \max,\ y - \mu_0(x) \le 0,\ y - \mu_1(x) \le 0,\ \ldots,\ y - \mu_k(x) \le 0,\ x \in X. \quad (26.9)$$

Доказательство. Пусть точка $x_* \in X$ является абсолютным максимумом функции (26.2) на множестве X. Обозначим $y_* = \mu(x_*)$. Тогда $y_* \le \mu_i(x_*)$ для всех $i = \overline{0,k}$ и, стало быть, точка (x_*, y_*) удовлетворяет связям в задаче (26.9). Для любой другой точки (x, y), удовлетворяющей связям в задаче (26.9), имеем $y \le \min\limits_{0 \le i \le 1} \mu_i(x) = \mu(x) \le \mu(x_*) = y_*$.

Пусть теперь точка (x_*, y_*) является решением задачи (26.9). Покажем, что $y_* = \min\limits_{0 \le i \le k} \mu_i(x) = \mu(x_*)$. Из условий связей в задаче (26.9) следует, что $y_* \le \mu(x_*)$. Пусть выполнено строгое неравенство $y_* <$ $< \mu(x_*) = y_1$. Тогда точка (x_*, y_*) не является решением задачи (26.9), поскольку точка (x_*, y_1) также удовлетворяет связям в этой задаче. Возьмем любую точку $x \in X$. Положим $y = \min\limits_{0 \le i \le k} \mu_i(x) = \mu(x)$. Тогда точка (x, y) удовлетворяет связям в задаче (26.9). Стало быть, $y \le y_*$. Отсюда следует требуемое неравенство $\mu(x) \le \mu(x_*)$.

Часто подход Беллмана — Заде используют с учетом заданных коэффициентов весов $\gamma_i > 0$, $i = \overline{0,k}$ нечеткой цели A_0 и нечетких ограничений A_i, $i = \overline{1,k}$. В этом случае задача (26.2) принимает следующий вид:

$$\min(\mu_0^{\gamma_0}(x); \mu_1^{\gamma_1}(x); \ldots; \mu_k^{\gamma_k}(x)) \to \max,\ x \in X. \quad (26.10)$$

В этом случае подход Беллмана — Заде можно применять совместно с методом иерархий Саати. С помощью метода иерархий строится матрица парных сравнений коэффициентов весов γ_i, из которой определяются требуемые коэффициенты весов.

Рассмотрим вопрос о принятии решения в задаче нечеткого математического программирования (26.4), основываясь на *критерии Сэвиджа*. Согласно формулам (25.3) — (25.5) нужно решить следующую задачу:

$$F(x) = \max_{0 \le i \le k} (\max_{z \in X} \mu_i(z) - \mu_i(x)) \to \min,\ x \in X. \quad (26.11)$$

Обозначим через A_i^+ нечеткие множества с функциями принадлежности $\mu_i^+(x) = \operatorname{hgt} A_i - \mu_i(x)$. Из формулы (26.11) получим

$$F(x_*) = \min_{x \in X} \max_{0 \le i \le k} \mu_i^+(x). \quad (26.12)$$

Пример 26.4. Рассмотрим задачу о выборе места работы. Из табл. 26.5 получим значения функций $\mu_i^+(x)$, которые приведены в табл. 26.6.

Таблица 26.6

Функция	Значения функции			
	x_1	x_2	x_3	x_4
μ_1^+	0,4	0,1	0,2	0
μ_2^+	0	0,1	0,6	0,4
μ_3^+	0,5	0,7	0	0,8
μ_4^+	0,6	0	0,1	0,2
μ_5^+	0,7	0	0,5	0,1
μ_6^+	0,4	0,2	0	0,5
F	0,7	0,7	0,6	0,8

Отсюда видно, что минимальное значение функции F достигается на x_3. Стало быть, как и при подходе Беллмана — Заде, рекомендуется выбирать это место работы. Рассмотрим случай, когда высоты всех нечетких множеств равны между собой и равны h. Тогда $\mu_i^+(x) = h - \mu_i(x)$, а $F(x) = h - \min\limits_{0 \le i \le k} \mu_i(x)$.

Следовательно, задача (26.12) принимает вид

$$\min_{0 \le i \le k} \mu_i(x) \to \max,\ x \in X.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае оптимальный элемент выбирается так же, как и при подходе Беллмана — Заде.

Используя формулу для функции принадлежности $\bar{\mu}_i(x) = 1 - \mu_i(x)$ дополнения $\bar{A}_i$, получим $F(x) = (h - 1) + \max\limits_{0 \le i \le k} \bar{\mu}_i(x)$. Отсюда и из (29.12) получим

$$F(x_*) = \min_{x \in X} \mu_{\bar{A}}(x),$$

где $\mu_{\bar{A}}(x) = \max\limits_{0 \le i \le k} \bar{\mu}_i(x)$.

Функция $\mu_{\bar{A}}(x)$ является функцией принадлежности объединения нечетких дополнений $\bar{A}_i$, $i = \overline{0,k}$.

Задача о достижении четкой цели при нечетких ограничениях

Рассмотрим задачу принятия решений, когда цель задается четкой функцией $f\colon X \to R$, а ограничения заданы нечеткими множествами

A_i, $i = \overline{1,k}$, с функциями принадлежности μ_i: $X \to [0;\ 1]$. Требуется найти такую точку $x \in X$, которая с наибольшей степенью удовлетворяла бы ограничениям, в то же время значение целевой функции на ней было бы как можно большим. Будем считать, что функция $f(x)$ достигает на множестве X своих максимального f_{max} и минимального $f_{\min}$ значений. Это выполняется всегда, если, например, универсальное множество состоит из конечного числа элементов.

Зафиксируем число $\alpha \in (0,\ 1]$ и рассмотрим те точки $x \in X$, которые удовлетворяют неравенствам $f(x) \geq \alpha f_{\max} + (1-\alpha)f_{\min}$, $\mu_A(x) \geq \alpha$. Здесь посредством $\mu_A(x)$ обозначена функция принадлежности пересечения нечетких ограничений, то есть $\mu_A(x) = \min\limits_{1 \leq i \leq k} \mu_i(x)$.

Нетрудно видеть, что чем ближе число α к единице, тем ближе значение функции $f(x)$ к максимальному значению $f_{\max}$. Поэтому для отыскания решения $x_* \in X$ рассмотрим следующую задачу:

$$\alpha \to \max,\ \alpha \in (0,\ 1],\ f(x) \geq \alpha f_{\max} + (1 - \alpha)f_{\min},\ \mu_A(x) \geq \alpha,\quad x \in X. \tag{26.13}$$

Введем в рассмотрение функцию

$$\mu_0(x) = \frac{f(x) - f_{\min}}{f_{\max} - f_{\min}}, \tag{26.14}$$

которая принимает значения из отрезка [0, 1]. Тогда задачу (26.13) можно записать в следующем виде:

$$\alpha \to \max,\ \alpha \in (0,\ 1],\quad \mu_0(x) \geq \alpha,\quad \mu_A(x) \geq \alpha,\quad x \in X.$$

Согласно теореме 26.1 искомое решение $x_* \in X$ является решением задачи

$$\min(\mu_0(x);\ \mu_A(x)) \to \max,\quad x \in X. \tag{26.15}$$

Используя формулу (26.14), можем записать

$$\min(\mu_0(x);\ \mu_A(x)) = \min\Big(\frac{f(x) - f_{\min}}{f_{\max} - f_{\min}};$$

$$\mu_A(x)\Big) = \frac{1}{f_{\max} - f_{\min}} \min(f(x) - f_{\min};\ \mu_A(x)(f_{\max} - f_{\min})) =$$

$$= \frac{1}{f_{\max} - f_{\min}} \min(f(x);\ \mu_A(x)\, f_{\max} + (1 - \mu_A(x))f_{\min}) - \frac{f_{\min}}{f_{\max} - f_{\min}}.$$

Поэтому задачу (26.15) можно записать так:

$$\min(f(x);\ \mu_A(x)f_{\max} + (1 - \mu_A(x))f_{\min}) \to \max,\quad x \in X. \tag{26.16}$$

Пусть универсальное множество X состоит из конечного числа элементов x_i, $i = \overline{1,n}$. Обозначим $f_i = f(x_i)$. Пусть нечеткое ограничение задается нечетким множеством $A = \{(x_1|p_1), (x_2|p_2), \ldots, (x_n|p_n)\}$. Тогда $f_{\max} = \max\limits_{1\le i\le n} f_i$, $f_{\min} = \min\limits_{1\le i\le n} f_i$, а задача (26.16) примет вид

$$g_i \to \max, \quad i = \overline{1,n}, \text{ где } g_i = \min(f_i;\ p_i f_{\max} + (1 - p_i) f_{\min}). \qquad (26.17)$$

Пример 26.5. Студент может сдать экзамен на одну из следующих оценок: x_1 = (неудовлетворительно), x_2 = (удовлетворительно), x_3 = (хорошо), x_4 = (отлично). Он может по-разному готовиться к экзамену, заранее рассчитывая на определенную оценку x_i. Однако его не будут одинаково устраивать все оценки. Оценка x_1 его совсем не устраивает, оценка x_2 устраивает наполовину, оценка x_3 — полностью и x_4 — чуть больше, чем на половину, поскольку требует большей подготовки. Запишем это в виде нечеткого множества $A = \{(x_1|0), (x_2|0{,}5), (x_3|1), (x_4|p)\}$, которое задает нечеткое ограничение. Здесь число $0{,}5 < p \le 1$. Целевая функция задает балл оценки $f_1 = f(x_1) = 2$, $f_2 = f(x_2) = 3$, $f_3 = f(x_3) = 4$, $f_4 = f(x_4) = 5$.

Имеем $f_{\min} = 2$; $f_{\max} = 5$. Поэтому функция g_i (26.17) равна

$g_1 = \min(f_1;\ p_1{\cdot}5 + (1 - p_1){\cdot}2) = \min(2;\ 0 \times 5 + (1 - 0) \times 2) = 2;$

$g_2 = \min(f_2;\ p_2{\cdot}5 + (1 - p_2){\cdot}2) = \min(3;\ 0{,}5 \times 5 + (1 - 0{,}5) \times 2) = 1{,}25;$

$g_3 = \min(f_3;\ p_3{\cdot}5 + (1 - p_3){\cdot}2) = \min(4;\ 1 \times 5 + (1 - 1) \times 2) = 4;$

$g_4 = \min(f_4;\ p_4{\cdot}5 + (1 - p_4){\cdot}2) = \min(5;\ p \times 5 + (1 - p) \times 2) = 3p + 2.$

Следовательно, $\max(g_1;\ g_2;\ g_3;\ g_4) = \max(g_3;\ g_4) = \max(4;\ 3p + 2)$. Отсюда видно, что $x_* = x_3$ = (хорошо), если $0 \le p \le {}^2/_3$ и $x_* = x_4$ = (отлично) при ${}^2/_3 \le p \le 1$.

Для задачи о достижении четкой цели при нечетких ограничениях можно дать определение решения в виде нечеткого множества. Для этого перейдем от нечетких множеств, задающих ограничения, к их множествам уровня. Пусть, как и ранее, цель задается четкой функцией $f\colon X \to R$, а ограничения заданы нечеткими множествами A_i, $i = \overline{1,k}$, с функциями принадлежности $\mu_i\colon X \to [0;\ 1]$. Посредством $\mu_A(x)$ обозначим функцию принадлежности их пересечения A.

Для каждого числа $0 < \alpha \le 1$ рассмотрим задачу

$$f(x) \to \max,\ x \in A(\alpha). \qquad (26.18)$$

Здесь $A(\alpha)$ — множество уровня нечеткого множества A.

Будем предполагать, что задача (28.18) имеет решение. Множество ее решений обозначим $X_{(\alpha)}$. Тогда в качестве решения задачи о достижении четкой цели при нечетких ограничениях можно взять точную верхнюю аппроксимацию семейства множеств $X_{(\alpha)}$.

Пример 26.6. Рассмотрим предыдущий пример. Множества уровня $A(\alpha)$ и решение $X_{(\alpha)}$ задачи (26.18) приведены в табл. 26.7.

Таблица 26.7

α	$A\ (\alpha)$	$X_{(\alpha)}$
$0 < \alpha \le 0{,}5$	(x_1, x_2, x_3, x_4)	(x_4)
$0{,}5 < \alpha \le p$	$(x_1, x_3, x_4$	(x_4)
$p < \alpha \le 1$	(x_3)	(x_3)

По формуле (5.9) найдем точную верхнюю аппроксимацию

$$B = (x_4 | 0{,}5) \vee (x_4 | p) \vee (x_3 | 1)$$

семейства множеств $X_{(\alpha)}$. Таким образом, нечеткое решение равно $\{(x_1 | 0); (x_2 | 0); (x_3 | 1); (x_4 | p)\}$. Это решение ориентирует студента на оценку x_3 = (хорошо).

§ 27. Задача о достижении цели в условиях воздействия со стороны нечеткой помехи

Рассмотрим задачу принятия решений в условиях, когда результат выбора *ЛПР* зависит еще от реализации некоторой помехи. Будем рассматривать случай, когда помеха задана нечетко, а множество альтернатив и целевая функция — четкие. Эту задачу формализуем следующим образом: заданы два множества X и Y произвольной структуры и функция f: $X \times Y \to R$. Лицо, принимающее решение, выбирая точку $x \in X$, стремится сделать значение функции $f(x; y)$ как можно больше (меньше). Выбор точки $y \in Y$ находится в распоряжении помехи. Считаем, что на множестве Y задано нечеткое множество G с функцией принадлежности μ_G: $Y \to [0, 1]$. Для каждой точки $y \in Y$ число $\mu_G(y)$ задает меру достоверности того, что реализуется это значение y помехи. Считаем, что множества уровня $G(\alpha) \neq \varnothing$ при всех $0 < \alpha \le 1$.

Рассмотрим несколько подходов к решению данной задачи. Зафиксируем число $0 < \alpha \le 1$. Пусть *ЛПР* игнорирует возможность появления тех значений помехи $y \in Y$, для которых $\mu_G(y) < \alpha$. Тогда он принимает в рассмотрение только возможные значения помехи $y \in G(\alpha)$. Решаем задачу принятия решения в условиях неопределенности $y \in G(\alpha)$ по одному из критериев χ = {1 = Вальд, 2 = Сэвидж, 3 = Лаплас, 4 = «крайний оптимизм», 5 = Гурвиц, 6 = Ходжа — Леман}, рассмотренных в § 25. Находим решение $X^{\chi}_{(\alpha)}$, которое может состоять из одной точки или иметь несколько точек.

В качестве решения задачи о достижении цели в условиях нечеткой информации о помехе по критерию χ можно взять нечеткое множество универсального множества X, которое является точной верхней аппроксимацией (5.9) семейства множеств $X^{\chi}_{(\alpha)}$.

Пример 27.1. Рассмотрим пример 25.1. Как и там, в качестве функции «штрафа» возьмем

$$f(x,y)=\begin{cases} c_1(x-y) & \text{\textit{при} } 0\le y\le x,\\ c_2(y-x) & \text{\textit{при} } y\ge x\ge 0. \end{cases} \tag{27.1}$$

Будем считать, что величина y, на которую можно приобрести нужный товар, оценена с помощью эксперта, и она является нечетким числом. Ее функция принадлежности изображена на рис. 27.1.

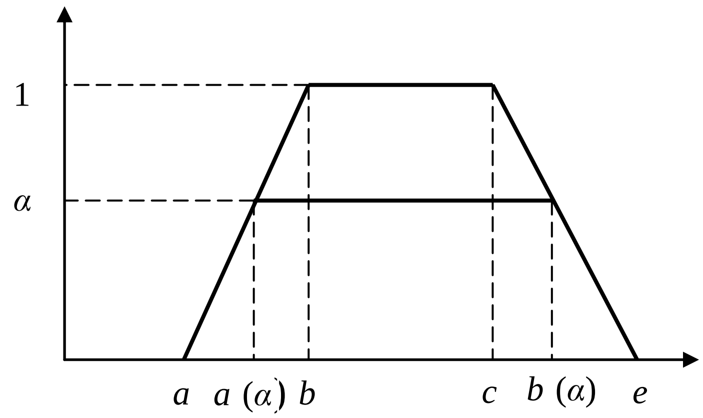

Рис. 27.1

Множествами уровня являются отрезки $[a(\alpha), b(\alpha)]$, где

$$a(\alpha) = a + \alpha(b - a),\ b(\alpha) = e - \alpha(e - c). \tag{27.2}$$

Как следует из решения примера 25.1,

$X^{\chi}_{(\alpha)}= \dfrac{c_1}{c_1+c_2}a(\alpha)+\dfrac{c_2}{c_1+c_2}b(\alpha)$, при χ=1, 2, 3, 5, 6 и $X^{4}_{(\alpha)}= [a(\alpha), b(\alpha)]$.

Подставим сюда формулы (27.2), получим

$X^{\chi}_{(\alpha)}= \delta+ \alpha(\varepsilon - \delta)$ при χ = 1, 2, 3, 5, 6 и $X^{4}_{(\alpha)}$ = $[a(\alpha), b(\alpha)]$. (27.3)

Здесь обозначено

$$\delta=\frac{c_1}{c_1+c_2}a+\frac{c_2}{c_1+c_2}e,\ \varepsilon=\frac{c_1}{c_1+c_2}b+\frac{c_2}{c_1+c_2}c\,. \tag{27.4}$$

Для случая $\chi \neq 4$ вычислим функцию принадлежности точной верхней аппроксимации *B* семейства множеств $X^{\chi}_{(\alpha)}$. Имеем

$$\bigcup_{0<\alpha\le 1} X^{\chi}_{(\alpha)} = \begin{cases} (\delta,\varepsilon] & при\, \delta < \varepsilon, \\ [\varepsilon,\delta) & при\, \delta > \varepsilon, \\ \delta & при\, \delta = \varepsilon. \end{cases} \qquad (27.5)$$

Тогда из формул (5.10) и (27.3) следует, что

$\mu_B(x) = \sup \alpha, \quad \alpha \in (0, 1], \quad x = \delta + \alpha(\varepsilon - \delta)$ при $x \in \bigcup_{0<\alpha\le 1} X^{\chi}_{(\alpha)}$.

Отсюда и из (25.5) получим, что при $\delta < \varepsilon$

$$\mu_B(x) = \frac{x-\delta}{\varepsilon-\delta} \text{ при } x \in (\delta, \varepsilon] \text{ и } \mu_B(x) = 0 \text{ при } x \notin (\delta, \varepsilon].$$

Если $\delta > \varepsilon$, то

$$\mu_B(x) = \frac{\delta-x}{\delta-\varepsilon} \text{ при } x \in (\delta, \varepsilon] \text{ и } \mu_B(x) = 0 \text{ при } x \notin [\varepsilon, \delta).$$

При $\delta = \varepsilon$

$$\mu_B(x) = 1 \text{ при } x = \delta \text{ и } \mu_B(x) = 0 \text{ при } x \neq \delta.$$

Графики полученных функций принадлежности приведены на рис. 27.2 и 27.3.

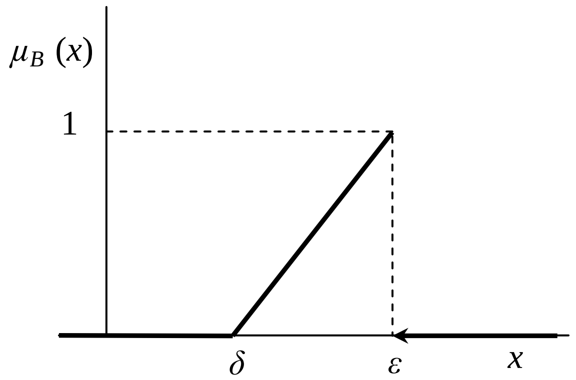

Рис. 27.2

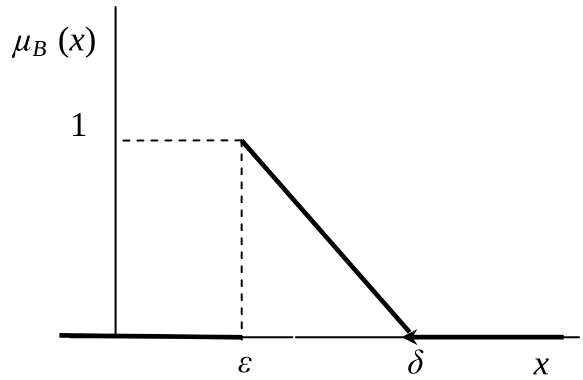

Рис. 27.3

Рассмотрим случай $\chi = 4$. Тогда, как следует из формул (27.2) и (27.3),

$$\bigcup_{0<\alpha\le 1} X^{\chi}_{(\alpha)} = [a, e].$$

Далее, из формул (5.10) и (25.3) получим, что $\mu_B(x) = 0$ при $x \notin [a, e]$. Если же число $x \in [a, e]$, то

$$\mu_B(x) = \sup \alpha, \quad \alpha \in (0, 1], \quad a + \alpha(b - a) \le x \le b(\alpha) = e - \alpha(e - c).$$

Следовательно,

$$\mu_B(x) = \frac{x-a}{b-a} \text{ при } a \le x < b; \quad \mu_B(x) = 1 \text{ при } b \le x < e;$$

$$\mu_B(x) = \frac{e-x}{e-c} \text{ при } c \le x \le e.$$

Таким образом, график функции $\mu_B(x)$ совпадает с графиком функции принадлежности помехи (см. рис. 27.1).

Рассмотрим вопрос о выборе конкретного значения $x \in X$. Можно, конечно, имея функцию принадлежности $\mu_B(x)$, выделить конкретное значение x с помощью одного из методов дефазификации.

Применим в предыдущем примере метод максимума. Из рис. 25.2 и 25.3 видно, что максимальное значение функции $\mu_B(x)$ достигается при $x = \varepsilon$. Отсюда, используя формулы (25.15) и (27.4), получим, что коммерсант должен выбирать число x^*, как если бы помеха $b \le y \le c$.

Рассмотрим другой подход. Для этого выясним смысл числа $\mu_B(x)$ для конкретной точки $x \in X$. Будем считать, что при определении числа $\mu_B(x)$ верхняя грань в формуле (5.10) достигается. Это значит, что точка $x \in X^{\chi}_{(\alpha)}$ при $\alpha = \mu_B(x)$ и $x \notin X^{\chi}_{(\alpha)}$ при всех $\alpha < \mu_B(x)$. Следовательно, точка x является решением задачи принятия решения по критерию χ с ограничениями на помеху $y \in G(\alpha)$ при $\alpha = \mu_B(x)$. При любом числе $\alpha < \mu_B(x)$ она не является решением соответствующей задачи.

Обозначим значение целевой функции на оптимальном решении по критерию χ с ограничениями на помеху $y \in G\ (\alpha)$ через $F^{\chi}(\alpha)$. Тогда можно искать точку $x \in X$ как решение двухкритериальной задачи

$$\mu_B(x) \to \max, \quad F^{\chi}(\mu_B(x)) \to \max, \quad x \in X. \qquad (27.6)$$

Пример 27.2. Рассмотрим примеры 27.1. Из формул (27.2) и (25.16) — (25.21) следует, что $F^{\chi}(\alpha) = (e-a)g_{\chi} - \alpha(e + a - c - b)g_{\chi}$. Здесь обозначено

$$g_1 = g_2 = g, \quad g_3 = \frac{g}{2}, \quad g_4 = 0, \quad g_5 = (1-\lambda)g,$$

$$g_6 = (1 - \frac{\lambda}{2})g; \quad g = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}.$$

Задача (27.6) принимает вид

$$\mu_B(x) \to \max, \quad \mu_B(x)(e + a - c - b)g_{\chi} \to \max, \quad x \in X.$$

Ее решением является число x^*.

Пример 27.3. Пусть фермер имеет поле площадью S. Пусть у него имеется только возможность засеять все поле одной из трех культур — x_1, x_2, x_3. Год может быть засушливым, нормальным или дождливым. Информация об урожайности и цена приведены в табл. 27.1.

Таблица 27.1

Показатель	Урожайность, ц/га		
	x_1	x_2	x_3
Сухая погода	20	7,5	0
Нормальная погода	5	12,5	7,5
Дождливая погода	15	5	10
Цена за один центнер в рублях	20	40	80

В этом случае *ЛПР* является фермер, и он выбирает x_i, $i = 1, 2, 3$. Неопределенным фактором (помехой) является погода, следовательно, y_1 = {*сухая погода*}, y_2 = {*нормальная погода*}, y_3 = {*дождливая погода*}.

В табл. 27.2 указана возможная выручка от продажи урожая в зависимости от принятого решения и от того, каким будет лето.

Таблица 27.2

Погода	Выручка		
	x_1	x_2	x_3
Сухая	$400S$	$300S$	0
Нормальная	$100S$	$500S$	$600S$
Дождливая	$300S$	$200S$	$800S$

Тогда, разделив выручку на $100S$, запишем матрицу

$$\{f(x_i, y_j)\} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \\ 0 & 6 & 8 \end{pmatrix},$$

задающую критерий выбора фермером. Фермер выбирает строку этой матрицы, а помеха — столбец. Допустим, что эксперт дал прогноз погоды в виде нечеткого множества $G = \{(y_1 | 0{,}5);\ (y_2 | 0{,}3);\ (y_3 | 0{,}4)\}$. Тогда, решая задачу по критерию Вальда ($\chi = 1$) и Лапласа ($\chi = 3$), получим следующее (см. табл. 27.3).

При применении критерия Лапласа берем одинаковые весовые коэффициенты.

Таким образом, нечеткое множество $B_1 = \{(x_1 | 0{,}5); (x_2 | 0{,}3); (x_3 | 0)\}$. Следовательно,

$$\mu_{B_1}(x_1) = 0{,}5,\ F^1(\mu_{B_1}(x_1)) = 4;\ \mu_{B_1}(x_2) = 0{,}3,\ F^1(\mu_{B_1}(x_2)) = 2\,.$$

Таблица 27.3

α	$G(\alpha)$	$X^1_{(\alpha)}$	$F^1(\alpha)$	$X^3_{(\alpha)}$	$F^3(\alpha)$
$0 < \alpha \le 0{,}3$	(y_1, y_2, y_3)	x_2	2	x_3	14
$0{,}3 < \alpha \le 0{,}4$	(y_1, y_3)	x_1	3	x_3	8
$0{,}4 < \alpha \le 0{,}5$	y_1	x_1	4	x_1	4
$0{,}5 < \alpha \le 1$	Ø	—	—	—	—

Решением задачи (27.6) при $\chi = 1$ является точка x_1.

Множество $B_3 = \{(x_1 \,|\, 0{,}5);\ (x_2 \,|\, 0);\ (x_3 \,|\, 0{,}4)\}$. Следовательно,

$$\mu_{B_3}(x_1) = 0{,}5,\ F^3(\mu_{B_3}(x_1)) = 4;\ \mu_{B_3}(x_3) = 0{,}4,\ F^1(\mu_{B_3}(x_3)) = 8.$$

Решением задачи (27.6) при $\chi = 3$ являются точки x_1 и x_3.

Следующий подход к принятию решения в условиях нечеткой информации о помехе состоит в следующем. При каждом $x \in X$ функция $f\ (x, y)$ задает отображение f_x: $Y \to R$. При заданном нечетком множестве G универсального множества Y, которое характеризует нечеткую помеху, можно построить образ этого нечеткого множества по одному из ранее рассмотренных правил. Получим нечеткое число A с функцией принадлежности $\mu_A(f)$, $f \in R$. Его функция принадлежности зависит от параметра $x \in X$. С помощью выбранного метода сравнения нечетких чисел выбираем наилучшее.

Пример 27.4. Рассмотрим случай, когда

$$f(x, y) = \varphi(x) + y\psi(x). \tag{27.7}$$

Здесь $\varphi\ (x)$ и $\psi\ (x)$ — заданные функции, а y — нечеткое число. Считаем, что $\psi\ (x) \ge 0$. *ЛПР* стремится максимизировать значение функции (27.7).

Если $\psi(x) = 0$, то значение функции (27.7) не зависит от y. Имеем задачу

$$\varphi(x) \to \max,\ \psi(x) = 0. \tag{27.8}$$

Пусть $\psi(x) > 0$. Тогда $y = \dfrac{f - \varphi(x)}{\psi(x)}$. Следовательно,

$$\mu_A(f) = \mu_G\left(\frac{f - \varphi(x)}{\psi(x)}\right). \tag{27.9}$$

Пусть график функции $\mu_G(y)$ изображен на рис. 27.1. Тогда, как следует из формулы (27.9), функция $\mu_A(f)$ имеет трапецеидальный вид с характеристиками

$$a(x) = \varphi(x) + a\psi(x),\quad b(x) = \varphi(x) + b\psi(x),$$
$$c(x) = \varphi(x) + c\psi(x),\quad e(x) = \varphi(x) + e\psi(x). \tag{27.10}$$

В соответствии с результатами, полученными в § 9, при сравнении нечетких чисел с трапецеидальным функциями принадлежности нужно найти оптимальное в лексикографическом смысле решение двухкритериальной задачи

$$b(x) + c(x) \to \max, \quad a(x) + e(x) \to \max, \quad x \in X.$$

Подставляя формулы (27.10), получим задачу

$$\varphi(x) + \frac{b+c}{2}\psi(x) \to \max, \quad \varphi(x) + \frac{a+e}{2}\psi(x) \to \max, \quad x \in X. \qquad (27.11)$$

Пример 27.5 (*задача о диверсификации вклада по двум депозитам*). Пусть вкладчик, имея сумму денег в N рублей, делит ее на две части — xN рублей и $(1 - x)N$ рублей. Здесь $0 \le x \le 1$. Первую сумму он кладет в банк на рублевый вклад под $r100$ % годовых, вторую сумму кладет в банк на валютный вклад под $d100$ % годовых. Пусть K_0 — курс доллара в начале года, K_1 — курс доллара в конце года. Через год на рублевом вкладе окажется сумма, равная $(1 + r)xN$ рублей. На долларовом счету окажется сумма, равная $(1 + d)(1 - x)(N/K_0)$ долларов. Переведя эту сумму денег по курсу K_1 в рубли, он будет иметь в рулях общую сумму, равную $N((1 + r)x + (1 + d)(1 - x)y)$. Здесь $y = K_1/K_0$. Положим $R = 1 + r$, $D = 1 + d$ и $f(x, y) = Rx + D(1 - x)y$.

Будущий курс валюты K_1 и, следовательно, число y заранее не известны. Будем считать, что эксперт дал нечеткую оценку числа y в виде трапецеидального числа (см. рис. 27.1).

Вкладчик, выбирая число $x \in [0, 1]$, стремится максимизировать значение функции $f(x, y)$. Имеем $\psi(x) = D(1 - x)$, $\varphi(x) = Rx$. Поэтому решением задачи (27.8) является число $x = 1$. Тогда $f(1, y) = R$ при любом y.

Запишем задачу (27.11). Имеем

$$\left(R - \frac{b+c}{2}D\right)x + \frac{b+c}{2}D \to \max,$$

$$\left(R - \frac{a+e}{2}D\right)x + \frac{a+e}{2}D \to \max, \quad x \in [0, 1]. \qquad (27.12)$$

Отсюда получим, что оптимальное решение

$$x = 1 \text{ при } R > \frac{b+c}{2}D; \quad x = 0 \text{ при } R < \frac{b+c}{2}D.$$

Пусть $R = \dfrac{b+c}{2}D$. Тогда любое число $x \in [0, 1]$ доставляет максимум первой функции в (27.12). Вторая функция в (27.12) в рассматриваемом случае достигает максимального значения при $x = 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алтунин, А. Е.* Модели и алгоритмы принятия решений в нечетких условиях : монография / А. Е. Алтунин, М. В. Семухин. Тюмень : Изд-во Тюмен. гос. ун-та, 2002. 265 с.

2. *Беллман, Р.* Математические методы в медицине / Р. Беллман. М. : Мир. 1987. 200 с.

3. *Беллман, Р.* Принятие решений в расплывчатых условиях / Р. Беллман, Л. А. Заде // Вопросы анализа и процедуры принятия решений. М. : Мир, 1976. С. 172—215.

4. *Блишун, А. Ф.* Сравнительный анализ измерения нечеткости / А. Ф. Блишун // Техн. кибернетика. 1988. № 5. С. 152—175.

5. *Борисов, В. В.* Нечеткие модели и сети / В. В. Борисов, В. В. Круглов, А. С. Федулов. М. : Горячая линия — Телеком, 2007. 283 с.

6. *Дубов, Ю. А.* Многокритериальные модели формирования и выбора вариантов систем / Ю. А. Дубов, С. И. Травкин, В. Н. Якимец. М. : Наука, 1986. 294 с.

7. *Гантмахер, Ф. Р.* Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. М. : Наука, 1988. 552 с.

8. *Заде, Л. А.* Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений / Л. А. Заде. М. : Мир, 1976. 165 с.

9. *Киквидзе, З. А.* Об одном способе взвешивания элементов нечеткого множества / З. А. Киквидзе, Н. Т. Ткемаладзе // Сообщ. АН ГССР. 1979. Т. 93. № 2. С. 107—110.

10. *Кофман, А.* Введение в теорию нечетких множеств / А. Кофман. М. : Радио и связь, 1982. 432 с.

11. *Кудинов, Ю. И.* Нечеткие модели вывода в экспертных системах / Ю. И. Кудинов // Техн. кибернетика. 1997. № 5. С. 75—83.

12. *Кузьмин, В. Б.* Построение групповых решений в пространствах четких и нечетких бинарных отношений / В. Б. Кузьмин. М. : Наука, 1982. 168 с.

13. *Левин, В. И.* Новое обобщение операций над нечеткими множествами / В. И. Левин // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2001. № 1. С. 143—146.

14. *Негойце, К.* Применение теории систем к проблемам управления / К. Негойце. М. : Мир, 1981. 179 с.

15. Нечеткие множества и теория возможностей : [пер. с англ.] / под ред. Р. Р. Ягера, С. И. Травкина. М. : Радио и связь, 1986. 405 с.

16. *Орловский, С. А*. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации / С. А. Орловский. М. : Наука. 1981. 208 с.

17. Прикладные нечеткие системы / под ред. Т. Тэрано, К. Асаи, М. Сугэно. М. : Мир, 1993. 368 с.

18. *Райфа, Г.* Анализ решений. Введение в проблему выбора в условиях неопределенности : [пер. с англ.] / Г. Райфа; [под ред. С. В. Емельянова]. М. : Наука, 1977. 406 с.

19. *Ротштейн, А. П*. Нечеткий многокритериальный выбор альтернатив: метод наихудшего случая / А. П. Ротштейн // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2009. № 3. С. 51—55.

20. *Рыжов, А. П*. Элементы теории нечетких множеств и измерения нечеткости / А. П. Рыжов. М. : Диалог-МГУ, 1998. 116 с.

21. *Саати, Т.* Принятие решений. Метод анализа иерархий / Т. Саати. М. : Радио и связь, 1993. 278 с.

22. *Танака, Х.* Модель нечеткой системы, основанной на логической структуре / Х. Танака, Г. Цукияма, К. Асаи // Нечеткие множества и теория возможностей. Последние достижения : [пер. с англ.] / под ред. Р. Р. Ягера. М. : Радио и связь, 1986. С. 186—199.

23. *Тэрано, Т.* Прикладные нечеткие системы / Т. Тэрано. М. : Мир, 1993. 368 с.

24. *Ухоботов, В. И*. Введение в теорию нечетких множеств и ее приложения : учеб. пособие / В. И. Ухоботов. Челябинск: УрСЭИ АТ и СО, 2005. 133 с.

25. *Шикин, Е. В*. Математические методы и модели в управлении / Е. В. Шикин, А. Г. Чхартишвили. М. : Дело, 2000. 440 с.

26. *Carlsson, C*. Multiple Criteria Decision Making : The Case for Interdependence / C. Carlsson, R. Fuller // Computers & Operations Research. 1995. № 22, № 3. P. 251—260.

27. *Castro, J. L*. Fuzzy logic controllers are universal approximators / J. L. Castro // IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics. Part B: Cybernetics. 1995. Vol. 25. P. 629—635.

28. *Chanas, S*. Assignment problem with fuzzy estimates of effectiveness / S. Chanas, M. Kokalanov // The zastosowania matematyki applicationes mathematical. 1980. Vol. XVII, № 1. P. 87—97.

29. *Chen, S. J*. Fuzzy multiple attribute decision making: methods and applications / S. J. Chen, C. L. Hwang. N. Y. ; Berlin : Springer-Verlag. 1992. 540 p.

30. *Kosko, B.* Fuzzy Systems as Universal Approximators / B. Kosko // In Proc. of the IEEE Int. Conf. on Fuzzy Systems. San Diego, 1992. P. 1153—1162.

31. *Kosko, B.* Fuzzy Systems as Universal Apprroximators / B. Kosko // IEEE Transactions on Computers. 1994. Vol. 43, № 11. P. 1329—1333.

32. *Mamdani, E. H.* Application of fuzzy logic to approximate reasoning using linguistic systems / E. H. Mamdani // IEEE Transactions on Computing. 1977. Vol. 26. P. 1182—1191.

33. *Mukaidono, M.* Fuzzy Logic for Beginners / M. Mukaidon // World Scientific. 2004. 105 p.

34. *Peeva, K.* Fuzzy Relational Calculus. Theory, Applications and Calculus / K. Peeva, Y. Kyosev // World Scientific. 2004. 291 p.

35. *Tanaka, H.* Fuzzy linear programming problems with fuzzy numbers / H. Tanaka, K. Asai // Fuzzy Sets and Systems. 1984. Vol. 13, № 1. P. 1—10.

36. *Wang, L. X.* Fuzzy systems are universal approximators / L. X. Wang // In Proc. of the IEEE Int. Conf. on Fuzzy Systems. San Diego, 1992. P. 1163—1169.

37. *Yager, R. R.* On ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decision making / R. R. Yager // IEEE Trans. Systems Man and Cybern. 1988. Vol. 18. № 1. P. 183—190.

38. *Zadeh, L. A.* Fuzzy Sets / L. A. Zadeh // Information and Control. 1965. Vol. 8, № 3. P. 338—353.

Оглавление

Учебное издание

УХОБОТОВ Виктор Иванович

ИЗБРАННЫЕ ГЛАВЫ ТЕОРИИ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ

Учебное пособие

Редактор И. А. Козырева

Компьютерная верстка, макет и дизайн обложки Т. В. Ростуновой

Подписано в печать 10.08.11.
Формат 60 × 84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 14,3. Уч-изд. л. 14,5.
Тираж 120 экз. Заказ 35.
Цена договорная

ФГБОУ ВПО «Челябинский государственный университет»
454001 Челябинск, ул. Братьев Кашириных, 129

Издательство Челябинского государственного университета
454021 Челябинск, ул. Молодогвардейцев, 57 б