

Документ подписан простой электронной подписью  
Информация о владельце:  
ФИО: Таскаев Сергей Валерьевич  
Должность: Ректор  
Дата подписания: 15.06.2026 12:21:19  
Уникальный программный ключ:  
04c19ed8bfb98f3b6cb77a486b9a8788b8322523

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Челябинский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ЧелГУ»)

Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине  
«Функциональный анализ» по направлению подготовки (специальности) 02.03.01  
«Математика и компьютерные науки» направленности (профилю) Математические и  
компьютерные методы в фундаментальных и прикладных исследованиях ФГБОУ ВО  
«ЧелГУ»

стр. 1

**Фонд оценочных средств  
для промежуточной аттестации  
по дисциплине (модулю)  
Функциональный анализ**

02.03.01 – Математика и компьютерные науки

Направленность (профиль)

Математические и компьютерные методы в фундаментальных и  
прикладных исследованиях

Бакалавр

Очная форма обучения

Год набора 2026

Челябинск 2026 г.

МИНОБРНАУКИ РОССИИ Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Челябинский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ЧелГУ»)	
Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине «Функциональный анализ» по направлению подготовки (специальности) 02.03.01 «Математика и компьютерные науки» направленности (профилю) Математические и компьютерные методы в фундаментальных и прикладных исследованиях ФГБОУ ВО «ЧелГУ»	стр. 2

## Содержание

1. Паспорт фонда оценочных средств
2. Перечень формируемых компетенций
  - 2.1. Компетенции, закреплённые за дисциплиной
3. Содержание оценочных средств по дисциплине
  - 3.1. Виды оценочных средств
  - 3.2. Содержание оценочных средств
4. Порядок проведения и критерии оценивания промежуточной аттестации
  - 4.1. Порядок проведения промежуточной аттестации
  - 4.2. Критерии оценивания промежуточной аттестации по видам оценочных средств.
  - 4.3. Результаты промежуточной аттестации и уровни сформированности компетенций

МИНОБРНАУКИ РОССИИ Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Челябинский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ЧелГУ»)	
Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине «Функциональный анализ» по направлению подготовки (специальности) 02.03.01 «Математика и компьютерные науки» направленности (профилю) Математические и компьютерные методы в фундаментальных и прикладных исследованиях ФГБОУ ВО «ЧелГУ»	стр. 3

## 1. ПАСПОРТ ФОНДА ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

Направление подготовки: 02.03.01 «Математика и компьютерные науки»  
 Направленность (профиль): Математические и компьютерные методы в  
 фундаментальных и прикладных исследованиях  
 Дисциплина: Функциональный анализ  
 Семестр (семестры) изучения: № семестров 5,6  
 Форма (формы) промежуточной аттестации: 5 семестр: Зачет,  
 6 семестр: Экзамен.

*Примечание:* для оценивания результатов используется балльно-рейтинговая система.

## 2. ПЕРЕЧЕНЬ ФОРМИРУЕМЫХ КОМПЕТЕНЦИЙ

### 2.1. Компетенции, закреплённые за дисциплиной

Изучение дисциплины Б1.О.21 «Функциональный анализ» направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции согласно ФГОС	Индикаторы достижения компетенций согласно ОПОП ВО	Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине
1	2	3
ОПК-1 Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной	ОПК-1.1. Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук ОПК-1.2. Демонстрирует умения решать типовые задачи, формулируемые в рамках математических и (или) естественных наук ОПК-1.3. Имеет навыки использования основных понятий, теорем, законов математики и (или) естественных наук для	Знать: обладает базовыми знаниями, полученными в области функционального анализа. Уметь: решать используя методы функционального анализа типовые задачи, формулируемые в рамках математических и естественных наук в профессиональной деятельности. Владеть: техникой применения методов функционального анализа для решения задач в профессиональной деятельности.

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Челябинский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ЧелГУ»)

Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине  
«Функциональный анализ» по направлению подготовки (специальности) 02.03.01  
«Математика и компьютерные науки» направленности (профилю) Математические и  
компьютерные методы в фундаментальных и прикладных исследованиях ФГБОУ ВО  
«ЧелГУ»

стр. 4

математики и  
математической  
логики, теории  
вероятностей,  
математической  
статистики и  
случайных  
процессов,  
численных  
методов,  
теоретической  
механики в  
профессионально  
й деятельности

решения задач  
профессиональной  
деятельности

МИНОБРНАУКИ РОССИИ Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Челябинский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ЧелГУ»)	
Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине «Функциональный анализ» по направлению подготовки (специальности) 02.03.01 «Математика и компьютерные науки» направленности (профилю) Математические и компьютерные методы в фундаментальных и прикладных исследованиях ФГБОУ ВО «ЧелГУ»	стр. 5

### 3. СОДЕРЖАНИЕ ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

#### 3.1 Виды оценочных средств

Код, наименование компетенции согласно ФГОС	Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине	Контролируемые темы/ разделы (номер и название раздела из РПД п.2.2)	Семе стр	Номер задания	Наименование оценочного средства
ОПК-1 Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности	<b>Знать:</b> обладает базовыми знаниями, полученными в области функционального анализа. <b>Уметь:</b> решать используя методы функционального анализа типовые задачи, формулируем ые в рамках математических и естественных наук в профессиональной деятельности. <b>Владеть:</b> техникой применения методов функционального анализа для решения задач в профессиональной деятельности.	Раздел 1. Основные понятия и теоремы о полных метрических пространствах	5	1,2	Контрольная работа
		Раздел 2. Линейные операторы на нормированных пространствах. Гильбертовы пространства	5	3,4	Контрольная работа
		Раздел 3. Основные теоремы функционального анализа	5	5,6	Контрольная работа
		Раздел 4. Дальнейшие свойства гильбертовых пространств	5	7,8	Контрольная работа, Зачет
		Раздел 5. Общие свойства сопряженных пространств	6	9,10	Контрольная работа
		Раздел 6. Спектральные вопросы теории линейных операторов. Альтернатива Фредгольма	6	11,12	Контрольная работа

МИНОБРНАУКИ РОССИИ Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Челябинский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ЧелГУ»)	
Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине «Функциональный анализ» по направлению подготовки (специальности) 02.03.01 «Математика и компьютерные науки» направленности (профилю) Математические и компьютерные методы в фундаментальных и прикладных исследованиях ФГБОУ ВО «ЧелГУ»	стр. 6

	Раздел 7. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве	6	13,14	Контрольная работа
	Раздел 8. Экзамен	6	15	Контрольная работа, Экзаменационная контрольная работа

Типовые задания, критерии и показатели оценивания в рамках текущего контроля представлены в рабочей программе дисциплины. Полные комплекты оценочных средств и контрольно-измерительных материалов хранятся на кафедре.

### 3.2 Содержание оценочных средств

#### Типовые контрольные задания для текущей аттестации

##### Контрольная работа №1

##### 3 балла

На множестве  $X = \{a, b, c\}$  определена табличная функция  $\rho(x, y)$ . Задает ли она метрику на  $X$ ?

	$a$	$b$	$c$
$a$	0	1	2
$b$	1	0	3
$c$	2	3	0

##### 4 балла

Проверить, является ли метрикой на  $X = \{x \in R : -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\}$  функция

$$\rho(x, y) = |\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y|$$

##### 5 баллов

Проверить, является ли метрикой на  $R$  функция

$$\rho(x, y) = \ln(1 + |x - y|)$$

##### Контрольная работа №2

МИНОБРНАУКИ РОССИИ Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Челябинский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ЧелГУ»)	
Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине «Функциональный анализ» по направлению подготовки (специальности) 02.03.01 «Математика и компьютерные науки» направленности (профилю) Математические и компьютерные методы в фундаментальных и прикладных исследованиях ФГБОУ ВО «ЧелГУ»	стр. 7

**3 балла.** Найти норму элемента  $x = (2, 2, 1)$  в пространстве  $l_2^3$ .

**4 балла.** Найти норму элемента  $x(t) = \sin(t)$  в пространстве  $L^1[0, \pi]$ .

**5 баллов.** Задаёт ли матрица  $A$  скалярное произведение в  $R^3$ , если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

### Контрольная работа №3

**3 балла.** Указать внутренние, граничные, изолированные, предельные точки множества  $M \in \mathbb{R}$ , если  $M = \{x \in \mathbb{R} : x \in [0, 2/3) \cup (2/3, 1] \cup \{3/2\}\}$ . Построить замыкание  $\bar{M}$ .

**4 балла.** Попадет ли точка  $x$  в открытый шар  $B(r, y)$ , если  $x(t) = t(1 - t) \in C[0, 1]$ ,  $B(r, y) \subset C[0, 1]$ ,  $y(t) = t$ ,  $r = 1$ .

**5 баллов.** Будет ли замкнутым множество решений уравнения  $x' = at + b$ ,  $x(0) = c$ , в  $C[0, 1]$  с произвольными параметрами  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ?

### Контрольная работа №4

**3 балла.** Показать, что на множестве трехмерных векторов  $x \in \mathbb{R}^3$  евклидова норма  $\|x\|$  эквивалентна норме  $\|x\|_1 = \max\{2|x_1|, |x_2|, 3|x_3|\}$ . Привести примеры констант  $a, b$  в неравенстве  $a\|x\|_1 \leq \|x\| \leq b\|x\|_1$

**4 балла.** Будут ли эквивалентными / сильно эквивалентными метрики  $\rho_1(x, y)$  и  $\rho_2(x, y)$  на пространстве  $X$ , если  $\rho_1(x, y) = |x - y|$ ,  $\rho_2(x, y) = |\arctg x - \arctg y|$ ,  $X = [0, 1]$ ?

**5 баллов.** Сходится ли последовательность  $x_n(t)$  в  $C[0, 1]$ , если  $x_n(t) = \sum_{s=0}^n (-1)^s \frac{t^{2s+1}}{(2s+1)!}$ ?

МИНОБРНАУКИ РОССИИ Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Челябинский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ЧелГУ»)	
Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине «Функциональный анализ» по направлению подготовки (специальности) 02.03.01 «Математика и компьютерные науки» направленности (профилю) Математические и компьютерные методы в фундаментальных и прикладных исследованиях ФГБОУ ВО «ЧелГУ»	стр. 8

### Контрольная работа №5

**3 балла.** Приблизить элемент  $x_0 = (\sqrt{2}, \sqrt{5}, 1)$  метрического пространства  $X = \langle \mathbb{R}^3, \|\cdot\| \rangle$  с нормой  $\|x\| = |x_1| + 3|x_2| + 2|x_3|$  точкой из счетного всюду плотного множества  $Y = \mathbb{Q}^3$  с точностью не хуже  $\varepsilon = 0.1$ .

**4 балла.** Приблизить элемент  $x_0 = \left\{ \frac{\sqrt{5}}{n} \right\}_{n=1}^{\infty}$  метрического пространства  $X = l_2$  точкой из счетного всюду плотного подмножества  $Y \subset X$  конечных последовательностей с рациональными коэффициентами с точностью не хуже  $\varepsilon = 0.5$ .

**5 баллов.** Приблизить элемент  $x_0 = \pi \sin(t)$  метрического пространства  $X = C[0, 1]$  точкой из счетного всюду плотного множества  $Y$  многочленов с рациональными коэффициентами с точностью не хуже  $\varepsilon = 0.1$ .

### Контрольная работа №6

**3 балла.** Является ли множество  $M = \{x \in \mathbb{R} : x \in [0, 2/3) \cup (2/3, 1] \cup \{3/2\}\} \subset \mathbb{R}$  полным метрическим пространством с метрикой  $\rho(x, y) = |x - y|$ ? Если нет, построить его пополнение.

**4 балла.** Будет ли непрерывным оператор  $A : C^1[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ , действующий по правилу  $Ax(t) = x(t)$ ?

**5 баллов.** Пусть  $\alpha = (\alpha_n)$  монотонно возрастающая ограниченная последовательность положительных чисел. Будет ли полным пространство сходящихся последовательностей  $c_\alpha$  с метрикой  $\rho(\xi, \eta) = \sup_n (\alpha_n |\xi_n - \eta_n|)$

МИНОБРНАУКИ РОССИИ Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Челябинский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ЧелГУ»)	
Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине «Функциональный анализ» по направлению подготовки (специальности) 02.03.01 «Математика и компьютерные науки» направленности (профилю) Математические и компьютерные методы в фундаментальных и прикладных исследованиях ФГБОУ ВО «ЧелГУ»	стр. 9

### Контрольная работа №7

**3 балла.** Выполнено ли для системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 = 0, 32x_1 - 0, 18x_2 + 0, 02x_3 + 0, 21x_4 + 1, 83 \\ x_2 = 0, 16x_1 + 0, 12x_2 - 0, 14x_3 + 0, 27x_4 - 0, 65 \\ x_3 = 0, 37x_1 + 0, 27x_2 - 0, 02x_3 - 0, 24x_4 + 2, 23 \\ x_4 = 0, 12x_1 + 0, 21x_2 - 0, 18x_3 + 0, 25x_4 - 1, 13 \end{cases}$$

достаточное условие сходимости итерационного метода поиска решения? Оценить число итераций для получения приближенного решения с точностью  $\epsilon = 0.001$

**4 балла.** Методом Ньютона построить итерационную схему для решения уравнения

$$f(x) = x^3 - 1.5x^2 + 0.5x = 0.$$

Оценить число итераций, которое потребуется для определения корня уравнения при  $x > 0.9$  с точностью  $\epsilon = 0.01$ , если известно, что при данных значениях  $x$  отношение  $\frac{ff''}{(f')^2} > -0.2$  и монотонно возрастает.

**5 баллов.** Обосновать применимость метода сжимающих отображений для поиска решения уравнения

$$x(t) = \frac{1}{10} \int_0^1 e^{t-s} x(s) ds + e^t$$

в пространстве  $C[0, 1]$ . Найти решение этого уравнения.

### Контрольная работа №8

**3 балла.** Построить  $\epsilon$ -сеть для множества  $M \subset C[0, 1]$ , если  $\epsilon = 0.1$ ,

$$M = \{x(t) \in C[0, 1] : x(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2, a_i \in [0, 1]\}$$

**4 балла.** Является ли предкомпактным в  $C[0, 1]$  множество  $M$ , состоящее из элементов  $M = \{x_\alpha(t) \in C[0, 1], x_\alpha(t) = \sin(\alpha t), \alpha \in \mathbb{R}\}$ ?

**5 баллов.** Является ли предкомпактным в  $C[0, 1]$  множество решений уравнения  $\dot{x}(t) + x(t) = at, x(0) = 0$ , если  $a \in [1, 2]$ ?

МИНОБРНАУКИ РОССИИ Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Челябинский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ЧелГУ»)	
Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине «Функциональный анализ» по направлению подготовки (специальности) 02.03.01 «Математика и компьютерные науки» направленности (профилю) Математические и компьютерные методы в фундаментальных и прикладных исследованиях ФГБОУ ВО «ЧелГУ»	стр. 10

### Контрольная работа №9

**3 балла.** Найти норму матричного оператора  $A : \mathbb{R}_1^3 \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ , если

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

**4 балла.** Найти норму оператора  $A : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ , если

$$(Ax)(t) = \int_0^1 (t + e^\tau)^2 x(\tau) d\tau$$

**5 баллов.** Найти норму оператора  $A : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ , если

$$(Ax)(t) = \int_0^1 (1-t)t \sin(2\pi\tau) x(\tau) d\tau$$

### Контрольная работа №10

**3 балла.** Найти норму функционала  $f : C[-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  для  $f(x) = \int_{-1}^1 tx(t)dt$

**4 балла.** Для пары последовательностей операторов  $A_n : l_2 \rightarrow l_2$ ,  $B_n : l_2 \rightarrow l_2$  установить характер сходимости, если

$$A_n = \left( x_1, \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n}{n+1}} x_2, \dots, \left(\frac{m}{m+1}\right)^{\frac{n}{n+1}} x_m, \dots \right)$$

$$B_n = \left( x_1, \frac{2}{3}x_2, \dots, \frac{n}{n+1}x_n, 0, \dots \right)$$

**5 баллов.** Для пары последовательностей операторов  $A_n : D \subset C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ ,  $B_n : D \subset C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$  с областью определения  $D = \{x(t) \in C[0, 1] : x(0) = 0\}$  установить характер сходимости, если  $(B_n x)(t) = T_n^0(t)x(t)$ ,  $A_n = tB_n$

$$T_n^0 = \begin{cases} nt, & t \in [0, \frac{1}{n}] \\ -nt + 2, & t \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}] \\ 0, & t > \frac{2}{n} \end{cases}$$

МИНОБРНАУКИ РОССИИ Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Челябинский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ЧелГУ»)	
Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине «Функциональный анализ» по направлению подготовки (специальности) 02.03.01 «Математика и компьютерные науки» направленности (профилю) Математические и компьютерные методы в фундаментальных и прикладных исследованиях ФГБОУ ВО «ЧелГУ»	стр. 11

### Контрольная работа №11

**3 балла.** Найти норму оператора  $A : l_2 \rightarrow l_2 : Ax = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots)$ , если

$$\lambda_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+2)}$$

**4 балла.** Найти норму оператора  $A : L_2[0, 2\pi] \rightarrow L_2[0, 2\pi]$ , если

$$(Ax)(t) = \int_0^{2\pi} \sin(2t) \sin(\tau) x(\tau) d\tau$$

**5 баллов.** Оператор  $A : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$  действует по правилу

$$(Ax)(t) = t(1-t)x(t)$$

Сходится ли ряд  $\tilde{A} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} A^n}{n}$  в норме  $\mathcal{L}(C[0, 1])$

### Контрольная работа №12

**3 балла.** Является ли множество, задаваемое неравенством

$$p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x_n + \left( \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 \right)^{1/2} \leq 1$$

выпуклым телом в вещественном пространстве суммируемых с квадратом последовательностей  $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty$ .

**4 балла.** В пространстве  $\mathbb{R}_2^2$  на подпространстве  $L = \{x \in \mathbb{R}_2^2 : 3x_1 - 2x_2 = 0\}$  задан линейный функционал  $f_0(x) = 2x_1$ . Найти продолжение  $f(x)$  функционала  $f_0(x)$  на все пространство с сохранением нормы. Однозначно ли такое продолжение?

**5 баллов.** На линейном комплексном пространстве  $X = \mathbb{C}^2 = \{(z_1, z_2) : z_{1,2} \in \mathbb{C}\}$  задана полунорма  $p(z) = 3|z_1| + 2|z_2|$ . На подпространстве  $L = \{z \in X : z = (z_1, 0)\}$  определен функционал  $f_0(z_1) = (1-i)z_1$ . Построить одно из возможных продолжений  $f(z)$  функционала  $f_0(z_1)$  на все пространство с сохранением неравенства  $|f(z)| \leq p(z)$ .

МИНОБРНАУКИ РОССИИ Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Челябинский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ЧелГУ»)	
Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине «Функциональный анализ» по направлению подготовки (специальности) 02.03.01 «Математика и компьютерные науки» направленности (профилю) Математические и компьютерные методы в фундаментальных и прикладных исследованиях ФГБОУ ВО «ЧелГУ»	стр. 12

### Контрольная работа №13

**3 балла.** Проверить, существует ли непрерывный обратный оператор к оператору  $A : l_2 \rightarrow l_2$

$$Ax = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_1, x_4, x_5, \dots).$$

**4 балла.** Пусть  $L$  - полное пространство непрерывно дифференцируемых на отрезке  $[0, 1]$  функций, таких что  $x(0) = 0$ , с нормой  $\|x\| = \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t)| + \max_{0 \leq t \leq 1} |x'(t)|$ . Доказать, что оператор  $A$  непрерывно обратим и найти  $A^{-1}$ , если  $(Ax)(t) = x'(t) - 2tx(t)$ .

**5 баллов.** Доказать, что оператор  $A : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$  непрерывно обратим, если  $(Ax)(t) = x(t) - 2 \sin(\pi t) \int_0^t sx(s)ds$ . Найти обратный оператор  $A^{-1}$ .

### Контрольная работа №14

**3 балла.** Найти угол между элементами  $x(t) = \sin(t)$  и  $y(t) = t$  в пространстве  $L_2[0, 1]$ .

**4 балла.** Найти элемент в  $L \subset L_2[-1, 1]$  ближайший к  $x(t) = e^t$ , если  $L$  — это линейная оболочка, натянутая на элементы  $\{1, 3t^2 - 1\} \in L_2[-1, 1]$ .

**5 баллов.** Используя теорему Банаха-Штейнхауза показать, что последовательность функционалов  $f_n : L_2[-1, 1] \rightarrow R$  поточечно сходится к нулевому функционалу, если  $f_n(x) = \int_{-1}^1 x(t) \cos(\pi nt) dt$ .

### Контрольная работа №15

**3 балла.** Представить элемент  $x(t)$  комплексного пространства  $L_2[-1, 1]$  в виде суммы  $x = u + v$ , в которой  $u$  — проекция  $x$  на одномерное линейное подпространство  $L \subset L_2[-1, 1]$ , а  $v$  — элемент из ортогонального дополнения  $v \in L^\perp$ , если  $x(t) = 1 + e^{i\pi t}$ , а  $L$  — линейная оболочка, натянутая на  $x_0(t) = t + i$ .

**4 балла.** Провести ортогонализацию элементов  $x_1(t) = 1$ ,  $x_2(t) = t$  и  $x_3(t) = t^2$  в пространстве  $L_2[-1, 1]$ .

**5 баллов.** Пусть  $H_p[0, 1]$  — гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(x, y) = \int_0^1 x(t)y(t)p(t)dt$$

где «весовая функция» равна  $p(t) = 1 + t$ . Найти наилучшее приближение функции  $x(t) = t$  элементами подпространства  $L$ , натянутого на элементы  $u_1(t) = 1$ ,  $u_2 = e^t$ .

МИНОБРНАУКИ РОССИИ Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Челябинский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ЧелГУ»)	
Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине «Функциональный анализ» по направлению подготовки (специальности) 02.03.01 «Математика и компьютерные науки» направленности (профилю) Математические и компьютерные методы в фундаментальных и прикладных исследованиях ФГБОУ ВО «ЧелГУ»	стр. 13

### Контрольные вопросы к зачету

1. Метрические и нормированные пространства
2. Примеры нормированных пространств. Пространства со скалярным произведением.
3. Топология метрического пространства
4. Предел последовательности в метрических пространствах. Критерии сходимости в различных пространствах
5. Предел функции и непрерывность. Сепарабельные метрические пространства.
6. Пополнение метрических пространств.
7. Теоремы о полных метрических пространствах
8. Компактные метрические пространства.
9. Критерии предкомпактности в конкретных пространствах. Свойства компактных пространств.
10. Линейные ограниченные операторы в нормированных пространствах. Вычисление норм линейных ограниченных операторов и функционалов. Пространства линейных ограниченных операторов.
11. Общий вид линейных ограниченных функционалов в конкретных пространствах.
12. Основные принципы линейного функционального анализа. Теорема Хана-Банаха (о продолжении линейного функционала).
13. Обратный оператор. Теорема Банаха об обратном операторе
14. Теорема Банаха-Штейнгауза
15. Гильбертовы пространства. Ряды Фурье в гильбертовых пространствах.

### Пример билета для экзаменационной контрольной работы

1. Теорема Хана-Банаха для нормированного пространства и следствия из нее
2. Доказать в бесконечномерном нормированном пространстве компактное множество нигде не плотное.
3. Может ли линейный компактный оператор в бесконечномерном ЛНП быть непрерывно обратимым?
4. Привести пример линейного плотно определенного оператора в ЛНП с пустым резольвентным множеством.

### Вопросы к экзамену

1. ЛНП всех непрерывных линейных функционалов. Следствие из теоремы о полноте пространства  $L(X, Y)$ , когда  $Y$  – банахово.
2. Процедура поиска норм линейного ограниченного оператора. Примеры.
3. Теорема Хана-Банаха, алгебраический вариант. Случай ЛНП.
4. Теорема Банаха-Штейнгауза.
5. Теорема Бэра.
6. Лемма Банаха о почти ограниченности линейного оператора на банаховом пространстве.
7. Теорема о линейной непрерывной биекции  $A: X \rightarrow Y$  банаховых пространств. Теорема о замкнутом графике.
8. Определение гильбертова пространства. Примеры.
9. Определение ортонормальной системы (ОНС). Ряд Фурье элемента  $x$  по данной ОНС. Примеры.
10. Теорема о минимальном свойстве сумм Фурье. Неравенство Бесселя.
11. Определение полной ОНС. Пример. Дальнейшие следствия теоремы из п. 12.

МИНОБРНАУКИ РОССИИ Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Челябинский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ЧелГУ»)	
Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине «Функциональный анализ» по направлению подготовки (специальности) 02.03.01 «Математика и компьютерные науки» направленности (профилю) Математические и компьютерные методы в фундаментальных и прикладных исследованиях ФГБОУ ВО «ЧелГУ»	стр. 14

12. Отображение, относящее каждому элементу пространства последовательность его коэффициентов Фурье.
13. Доказать теорему об изоморфизме сепарабельных гильбертовых пространств.
14. Доказать теорему о проекции элемента на выпуклое замкнутое множество в гильбертовом пространстве.
15. Теорема о разложении гильбертова пространства в прямую сумму замкнутых линейных подпространств.
16. Описание сопряженного пространства к  $H$ . Теорема Рисса. Отождествление гильбертова пространства с его сопряженным.
17. Теорема о вложении  $X$  в своё второе сопряженное.
18. Определение слабой сходимости. Примеры.
19. Критерий слабой сходимости в пространстве непрерывных на отрезке функций с чебышевской нормой.
20. Общий вид линейных непрерывных функционалов на  $l_p$ . Признак слабой сходимости.
21. Лемма Рисса. Критерии компактности шара в нормированном пространстве.
22. Определение компактного линейного оператора. Примеры.
23. Определение сопряженного оператора. Примеры. Норма и непрерывность сопряженного оператора.
24. Линейные операторные уравнения. Необходимое условие разрешимости операторного уравнения с линейным ограниченным оператором и следствие из нее.
25. Теорема об условии разрешимости сопряжённого уравнения с компактным оператором.
26. Альтернатива Фредгольма.
27. Теорема о возмущении единичного оператора.
28. Определение регулярного значения и спектра замкнутого линейного оператора. Свойства резольвентного множества замкнутого линейного оператора. Классификация точек спектра.
29. Теорема о спектре компактного оператора. Примеры.
30. Самосопряженный ограниченный линейный оператор в гильбертовом пространстве. Примеры, простейшие свойства.
31. Теорема о свойстве спектра самосопряженного оператора на гильбертовом пространстве.
32. Теорема Гильберта-Шмидта, следствия из неё.

## **4. ПОРЯДОК ПРОВЕДЕНИЯ И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ**

### **4.1. Порядок проведения промежуточной аттестации**

На зачете студенту выдается теоретическая контрольная работа по изученному в 5 семестре материалу. Время, отводимое на выполнение теоретической контрольной работы 120 минут.

Итоговый экзамен проводится в присутствии преподавателя и предполагает решение задач и развернутый, полный ответ на теоретические вопросы. Вопросы составляются с учётом материала, пройденного на практических занятиях и вынесенного на самостоятельную работу. Время, отводимое на выполнение итоговой работы, 120 минут.

МИНОБРНАУКИ РОССИИ Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Челябинский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ЧелГУ»)	
Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине «Функциональный анализ» по направлению подготовки (специальности) 02.03.01 «Математика и компьютерные науки» направленности (профилю) Математические и компьютерные методы в фундаментальных и прикладных исследованиях ФГБОУ ВО «ЧелГУ»	стр. 15

## **4.2. Критерии оценивания промежуточной аттестации по видам оценочных средств.**

Балльно-рейтинговая система оценки знаний студента по дисциплине в 5 семестре

Оценка студента в 5 семестре определяется количеством и уровнем выполненных работ, а также числом посещенных лекционных и семинарских занятий.

Балл, выставляемый за посещение лекционных занятий, пропорционален отношению числа фактически посещенных занятий к их полному числу. Максимальный балл за посещаемость лекционных занятий равен 10. Аналогичная система действует для оценивания посещаемости семинарских занятий.

Оставшиеся 80 баллов учащийся набирает в результате выполнения еженедельных контрольных работ. Работы выполняются на семинарских занятиях очно. Число работ в семестре равно 16.

Каждая контрольная работа содержит три задания различного уровня сложности, оцениваемые в 3, 4 и 5 баллов соответственно. Учащийся имеет возможность выбрать для решения одно из заданий. Таким образом, полное число баллов за успешное выполнение всех заданий в семестре может варьироваться от 48-ми до 80 баллов, а полное число баллов с учетом посещаемости - от 68-ми до 100 баллов.

Оценка “зачет” в пятом семестре выставляется если учащийся набирает 50 и более баллов.

Балльно-рейтинговая система оценки знаний студента по дисциплине в 6 семестре

Оценка студента в 6 семестре определяется количеством и уровнем выполненных работ, числом посещенных лекционных занятий и результатом выполнения экзаменационной работы.

Балл, выставляемый за посещение лекционных занятий, пропорционален отношению числа фактически посещенных занятий к их полному числу. Максимальный балл за посещаемость лекционных занятий равен 10. Баллы за посещение семинарских занятий не начисляются.

50 баллов учащийся набирает в результате выполнения контрольных работ. Работы выполняются на семинарских занятиях очно. Число работ в семестре равно 10. Система начисления баллов за контрольные работы такая же, как в пятом семестре.

Экзаменационная работа состоит из четырех заданий: двух теоретических вопросов и двух задач. По теоретическим вопросам проводится собеседование. Задачи, предлагаемые на экзамене аналогичны задачам контрольных работ на 5 баллов, предлагавшимся в течение семестра. Каждое из заданий в экзаменационной работе оценивается в 10 баллов. На экзамене возможно повысить итоговый рейтинг на 5 баллов, решив одну дополнительную задачу.

Соответствие между оценкой по предмету в семестре и количеством набранных баллов следующее:

МИНОБРНАУКИ РОССИИ Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Челябинский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ЧелГУ»)	
Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине «Функциональный анализ» по направлению подготовки (специальности) 02.03.01 «Математика и компьютерные науки» направленности (профилю) Математические и компьютерные методы в фундаментальных и прикладных исследованиях ФГБОУ ВО «ЧелГУ»	стр. 16

0-40 - неудовлетворительно

41-60 - удовлетворительно

61-80 - хорошо

81-100 отлично

#### 4.2.3 Критерии оценивания экзаменационной контрольной работы

Максимальный балл за экзаменационную контрольную работу — 20 баллов. Этот балл складывается из баллов, полученных за каждый вопрос в билете. В билете – 2 теоретических вопроса и 2 задачи.

##### Критерии оценивания теоретического вопроса с доказательством

Максимальный балл — 10

10 баллов	8 баллов	6 баллов	4 балла
Высокий уровень освоения проверяемых компетенций	Средний уровень освоения проверяемых компетенций	Базовый уровень освоения проверяемых компетенций	Недостаточный уровень освоения проверяемых компетенций
Дано полное обоснованное решение задачи.	В представленном решении имеются мелкие недочеты или арифметические ошибки	Дано решение задачи с неполным обоснованием.	Задача не решена или ее решение не обосновано.

##### Критерии оценивания задачи

Максимальный балл — 10

10 баллов	8 баллов	6 баллов	4 балла
Высокий уровень освоения проверяемых компетенций	Средний уровень освоения проверяемых компетенций	Базовый уровень освоения проверяемых компетенций	Недостаточный уровень освоения проверяемых компетенций
Дано полное обоснованное решение задачи.	В представленном решении имеются мелкие недочеты или арифметические ошибки	Дано решение задачи с неполным обоснованием.	Задача не решена или ее решение не обосновано.

МИНОБРНАУКИ РОССИИ Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Челябинский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ЧелГУ»)	
Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине «Функциональный анализ» по направлению подготовки (специальности) 02.03.01 «Математика и компьютерные науки» направленности (профилю) Математические и компьютерные методы в фундаментальных и прикладных исследованиях ФГБОУ ВО «ЧелГУ»	стр. 17

### **4.3. Результаты промежуточной аттестации и уровни сформированности компетенций**

Уровни сформированности компетенций определяется следующим образом:

1. Высокий уровень сформированности компетенций соответствует оценке отлично:
  - предполагает формирование компетенций на высоком уровне, готовность к самостоятельной профессиональной деятельности.
  - студент способен аргументировать собственную точку зрения по дискуссионным вопросам дисциплины, решать ситуационные задачи, критически оценивать информацию, формулировать собственные выводы.
2. Средний уровень соответствует оценке хорошо:
  - предполагает формирование компетенций на среднем уровне: формируется комплексное знание особенностей решения прикладных задач, умение сбора, анализа и обработки данных, необходимых для решения прикладных задач.
  - студент способен давать развернутые ответы на теоретические вопросы дисциплины на уровне не ниже оценки «удовлетворительно».
3. Базовый уровень соответствует оценке удовлетворительно:
  - предполагает формирование компетенций на начальном уровне, студент освоил основные понятия и положения изучаемой дисциплины.
4. Низкий уровень соответствует оценке неудовлетворительно.
  - фрагментарные знания;
  - отказ от ответа;
  - знание отдельных рекомендованных источников;
  - неумение использовать научную терминологию;
  - наличие грубых ошибок;
  - низкий уровень сформированности заявленных компетенций.

