

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
“КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ”

На правах рукописи

Демин Сергей Анатольевич

СТОХАСТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА СЛОЖНЫХ СИСТЕМ  
В КОНЕЧНО-РАЗНОСТНОМ ФОРМАЛИЗМЕ ЦВАНЦИГА-МОРИ  
С МОДЕЛЬНЫМИ ПРЕДСТАВЛЕНИЯМИ  
ФУНКЦИЙ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ПАМЯТИ

01.04.02 – теоретическая физика

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель –  
доктор физико-математических наук,  
доцент А.В. Мокшин

Челябинск – 2019

# Содержание

Введение . . . . .	6
<b>1 Сложные системы. Описание сложных систем</b>	<b>16</b>
§1.1 Вводные замечания . . . . .	16
§1.2 Методы анализа динамики сложных систем . . . . .	17
§1.2.1 Линейные и нелинейные математические модели . . . . .	17
§1.2.2 Динамическая система. Описание динамических систем .	18
§1.2.3 Временные ряды и временная дискретизация . . . . .	22
§1.2.4 Понятие о частоте дискретизации . . . . .	23
§1.2.5 Методы анализа временных рядов . . . . .	24
§1.3 Свойства сложных систем . . . . .	26
§1.3.1 Дискретность регистрируемых параметров . . . . .	26
§1.3.2 Неэквидистантность временных рядов . . . . .	27
§1.3.3 Нестационарность и неустойчивость . . . . .	28
§1.3.4 Динамическая перемежаемость . . . . .	29
§1.3.5 Самоорганизованность (самоорганизация) . . . . .	30
§1.4 Корреляции и эффекты статистической памяти в динамике слож- ных систем . . . . .	31
§1.4.1 Корреляционная функция . . . . .	31
§1.4.2 Эффекты статистической памяти . . . . .	34
§1.4.3 $R/S$ -анализ. Метод нормированного размаха . . . . .	37
§1.4.4 Фликкер-шумовая спектроскопия . . . . .	40

§1.5	Формализм функций памяти Цванцига-Мори . . . . .	42
§1.5.1	Временные корреляционные функции . . . . .	42
§1.5.2	Техника проекционных операторов в формализме Цванцига-Мори . . . . .	43
<b>2</b>	<b>Анализ последовательностей квазипроизводных различных порядков дискретных временных рядов</b>	<b>47</b>
§2.1	Введение . . . . .	47
§2.2	Квазипроизводные дискретного типа . . . . .	49
§2.3	Учет корреляций в последовательностях квазипроизводных разных порядков . . . . .	52
§2.4	Геометрическое описание динамики векторов состояния . . . . .	55
§2.5	Формализм функций памяти для последовательностей квазипроизводных дискретного типа . . . . .	57
§2.6	Учет нестационарности исследуемого процесса . . . . .	59
§2.7	Критерии статистической памяти для последовательностей квазипроизводных разных порядков . . . . .	60
§2.8	Выводы . . . . .	62
<b>3</b>	<b>Обобщение конечно-разностного формализма функций памяти Цванцига-Мори на случай нестационарных процессов</b>	<b>64</b>
§3.1	Использование процедур локализации в анализе динамики сложных систем . . . . .	64
§3.2	Поиск оптимальной длины локального окна . . . . .	66
§3.3	Обобщение формализма функций памяти Цванцига-Мори на случай локальных выборок дискретных временных рядов . . . . .	67
§3.4	Конечно-разностные кинетические уравнения для локальных временных автокорреляционных функций . . . . .	70

§3.5	Конечно-разностные кинетические уравнения для локальных функций памяти . . . . .	75
§3.6	Выводы . . . . .	79
<b>4</b>	<b>Событийные корреляции в динамике сложных систем</b>	<b>81</b>
§4.1	Введение . . . . .	81
§4.2	Обобщение формализма функций памяти на случай неэквидистантных временных рядов . . . . .	82
§4.3	Цепочка конечно-разностных уравнений для событийных функций памяти . . . . .	84
§4.4	Выводы . . . . .	88
<b>5</b>	<b>Статистическая память и корреляции в равноинтервальной и неравноинтервальной динамике сложных систем. Конкретные примеры</b>	<b>90</b>
§5.1	Эффекты памяти и особенности релаксационных процессов в динамике живых негамильтоновых систем . . . . .	90
§5.1.1	Регистрация нейромагнитных откликов коры головного мозга человека . . . . .	91
§5.1.2	Исследование конечно-разностных производных для сигналов магнитоэнцефалограмм человека . . . . .	92
§5.1.3	Выводы. Описание квазипроизводных дискретного типа сигналов, генерируемых сложными системами . . . . .	100
§5.2	Локальные особенности стохастической динамики негамильтоновых живых систем . . . . .	103
§5.2.1	Роль эффектов статистической памяти в эволюции живых систем . . . . .	103
§5.2.2	Оконно-временное построение спектральных характеристик . . . . .	104

§5.2.3	Временные зависимости локальных кинетических и релаксационных параметров . . . . .	108
§5.2.4	Выводы . . . . .	112
§5.3	Эффекты статистической памяти в динамике полного потока рентгеновской активности микроквazarов . . . . .	114
§5.3.1	Экспериментальные данные . . . . .	114
§5.3.2	Классификация рентгеновской активности микроквazarов	115
§5.3.3	Динамические и спектральные особенности рентгеновского излучения микроквazара ХТЕ J1550-564 . . . . .	117
§5.3.4	Выводы . . . . .	123
	Заключение . . . . .	125
	Публикации автора по теме диссертации . . . . .	128
	Список цитируемой литературы . . . . .	137

## Введение

**Актуальность темы.** Изучение эволюции сложных систем является актуальной проблемой современной статистической физики, а также тех областей человеческого знания, которые имеют междисциплинарный характер. С одной стороны, это обусловлено разнообразными практическими приложениями теоретической физики в астрономии, сейсмологии, геологии, медицине, экологии окружающей среды, биологии. С другой стороны, связано с быстрорастущими потребностями науки, техники и производства.

В широком смысле *сложная система* (complex system):

1. Система, которая состоит из значительного числа взаимодействующих элементов (компонентов, подсистем).
2. Составной объект, части которого закономерно объединены в единое целое посредством определенных принципов или связанные заданными отношениями.

“Сложность системы характеризуется уровнем трудности в предсказании ее свойств при известных признаках отдельных частей”, – дополняет определение американский ученый Уоррен Уивер (Warren Weaver). Обобщая представления, вводимые в *науках о сложности* (complexity sciences), можно указать на наличие в сложной системе составных компонентов, совокупности связей, пространств возможных состояний. Вероятность возникновения различных состояний и уровень детализации (масштабирования) будут определять сложность описываемого объекта.

Несмотря на то, что целенаправленное изучение эволюции сложных систем на основе подходов теоретической физики, включающих дискретные и непрерывные отображения, положения нелинейной динамики и теории динамического хаоса началось сравнительно недавно, к настоящему моменту разработаны разнообразные методы статистического анализа динамики слож-

ных систем, которые раскрывают уникальные особенности их структуры и пространственно-временной организации. Термины, которые первоначально использовались для описания математических моделей и физических систем, например: флуктуации и шумы, корреляции, (не)равновесность, (не)линейность, (не)устойчивость, точки бифуркации, впоследствии нашли свое отражение в науках о сложных системах.

В физической интерпретации представляют интерес следующие свойства сложных систем:

1. Значительное число взаимосвязанных степеней свободы (чрезвычайно высокая размерность).
2. Наличие обратных связей, что отражается в динамике переменных.
3. Труднопредсказуемое поведение в условиях внешних воздействий, нарушение обнаруженных функциональных взаимосвязей.
4. Широкая область распределения экспериментально фиксируемых показателей.
5. Чередование плавной эволюции и периодов нестационарности (*стохастический дрейф*).
6. Проявление явлений самоорганизации и самонастройки.
7. Существование степенных распределений и масштабных преобразований.

Изучение особенностей и закономерностей, проявляющихся в сложных системах, требует адаптации подходов статистической физики. Большая часть приведенных результатов была получена в рамках статистического анализа временных последовательностей (временных серий), генерируемых сложными системами.

Для описания дискретной динамики сложных систем, специфики их эволюции, особенностей структурной организации оказывается возможным исследование зависимостей динамических переменных, представленных в виде временных рядов или “пространственно-топографических” карт и экспериментально фиксируемых при наблюдениях природных процессов и структур. Существует необходимость поиска теоретических подходов к извлечению информационно значимых критериев, характеризующих такие системы, их интерпретации и представления в удобном для соответствующей области знаний виде. Основные трудности, которые возникают в теоретическом описании временных серий или пространственно-топографических карт, регистрируемыми в ходе эволюции природных неравновесных систем, связаны с их параметризацией. Для набора экспериментальных данных проблематично построить функции распределения и точно определить вероятностные характеристики, привычные для статистической физики. Представленные в современной литературе теоретические подходы не всегда в достаточной степени раскрывают дискретность параметров, дальнедействующие корреляции – дальний порядок взаимосвязей переменных, эффекты статистической памяти или последствия, динамическую перемежаемость, эффекты нестационарности, неравноинтервальность (неэквидистантность), проявляющиеся в динамике сложных систем. Уточнения требуют процедуры локализации, которые позволяют осуществлять параметризацию отдельных выборок в последовательности экспериментальных данных, и подходы, развиваемые для исследования неравноинтервальных временных рядов.

Таким образом, разработка новых теоретических подходов для параметризации как исходных временных последовательностей, генерируемых сложными системами разнообразной природы, так и их квазипроизводных разных порядков, раскрывающих указанные свойства, представляется на данный момент весьма актуальным.

**Цель работы** состоит в развитии теоретического формализма функций памяти и техники проекционных операторов Цванцига-Мори для анализа динамики негамильтоновых систем и оценки эффектов статистической памяти. При этом методология расчетов апробировалась для разнообразных вариантов временных рядов: экви- и неэквидистантные дискретные временные сигналы, последовательности конечно-разностных производных разных порядков, локальные выборки оптимальной длины.

Достижение указанной цели было связано с решением следующих задач:

1. Развитие статистической теории кинетических процессов в сложных системах с учетом дискретности, долговременных корреляций, эффектов последствия, динамической перемежаемости и нестационарности.
2. Разработка теоретического подхода к параметризации и извлечению информационно значимых характеристик последовательностей экспериментальных фиксируемых показателей сложных систем. Определение динамических, спектральных, кинетических и релаксационных параметров негамильтоновых систем.
3. Разработка численных алгоритмов модельных представлений функций статистической памяти для количественного описания эволюции сложных систем.
4. Установление взаимосвязи между проявлением эффектов статистической памяти и атипичной динамикой сложных систем.

**Научная новизна** работы заключается в следующем:

1. В рамках техники проекционных операторов Цванцига-Мори для временных последовательностей квазипроизводных фиксируемых параметров сложных систем впервые получены системы конечно-разностных уравнений с модельными представлениями функций статистической памяти.

2. Разработан теоретический подход к анализу локальных выборок фиксированной длины, перемещаемых вдоль исходной последовательности экспериментальных наблюдений, с предварительным выбором их оптимального размера.
3. Развита конечно-разностный формализм Цванцига-Мори на случай анализа неэквидистантных временных последовательностей, генерируемых сложными системами.
4. Для извлечения информационно значимых параметров и характеристик на основе развиваемого формализма функций памяти проанализирована динамика следующих процессов:
  - (а) проведено исследование исходных сигналов негамильтоновых живых систем, а также особенностей квазипроизводных дискретного типа;
  - (б) реализованы процедуры построения локальных кинетических и релаксационных характеристик на примере биомедицинских сигналов и последовательностей физиологических показателей человека;
  - (с) выполнен анализ равно- и неравноинтервальной динамики на примере полного потока рентгеновского излучения астрофизических объектов. Проведена классификация рентгеновской активности микроквazarов в зависимости от соотношения временных масштабов релаксации сигнала и существования памяти.
5. На основе количественного описания последовательностей экспериментальных наблюдений в терминах эффектов последействия и временных корреляционных функций впервые обнаружена зависимость между проявлениями статистической памяти и аномальными состояниями живых систем.

**Научная ценность и практическая значимость** состоит в разработке

методологии поиска информационно значимых характеристик исходных временных и квазипроизводных последовательностей стохастической динамики сложных систем в рамках конечно - разностного аналога формализма Цванцига-Мори. Выполняются численные расчеты ортогональных динамических переменных, временных корреляционных функций, экспериментальных и теоретических значений времен релаксации на разных уровнях статистического описания, кинетических и релаксационных параметров, спектральных характеристик информационных мер памяти непосредственно из набора равноинтервально и неравноинтервально фиксируемых экспериментальных данных. Практические приложения связаны с разработкой новых методов анализа, диагностики и прогнозирования динамических состояний сложных систем живой и неживой природы. Полученные результаты позволяют судить о проявлениях статистической памяти, динамике корреляций и флуктуаций в исходных равно- и неравноинтервальных временных последовательностях, особенностях квазипроизводных разных порядков, кинетических и релаксационных закономерностях локальных выборок фиксированной длины экспериментальных данных.

**На защиту выносятся следующие положения.**

1. Формализм Цванцига-Мори в конечно-разностном представлении применим для анализа динамики негамильтоновых систем.
2. Учет нестационарности в динамике сложных систем реализуется на основе введения локальных кинетических и релаксационных параметров.
3. Цепочка конечно-разностных уравнений для событийных функций памяти воспроизводит особенности неравноинтервальной дискретной динамики негамильтоновых систем.
4. Критерии памяти и их частотные обобщения позволяют осуществлять количественную оценку эффектов коррелированности и статистической

памяти, а также выявлять характерные режимы динамики сложных систем.

**Достоверность** результатов, выводов и научных положений диссертационной работы обеспечивается применением фундаментальных идей статистической физики, обоснованностью и последовательностью проводимых математических преобразований и расчетов, используемых для модельных представлений функций статистической памяти, сопоставлением полученных в диссертации результатов с известными наработками. Отдельные результаты диссертации были включены в проект “Разработка информационных технологий живых систем на основе универсальных проявлений хаоса”, (РНП.2.1.1.741) АВЦП “Развитие научного потенциала высшей школы (2006-2008 годы)”, в котором автор был ответственным исполнителем.

**Вклад автора в разработку проблемы.** Настоящая диссертация представляет собой обобщение исследований автора в области анализа стохастической динамики разнообразных сложных систем. Все положения диссертационной работы, выносимые на защиту, получены автором лично. В работах, включенных в диссертацию и выполненных совместно с соавторами, соискатель принимал непосредственное участие в постановке задач, разработке теоретических подходов и проведении математических расчетов, составлении численных алгоритмов и компьютерных программ, изучении и обобщении полученных результатов, их сопоставлении с известными научными данными.

**Апробация результатов диссертационной работы.** Основные результаты диссертационного исследования докладывались на следующих конференциях и семинарах:

1. Научные семинары “Флуктуации и шумы в сложных системах” (г. Казань, КГПУ, ТГГПУ, КГТУ/КАИ им. А.Н. Туполева, 2003, 2005, 2007, 2010).
2. II, III, IV всероссийские конференции “Необратимые процессы в природе и технике” (г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003, 2005, 2007).

3. X и XI международные научно-практические конференции “Современные техника и технологии” (г. Томск, ТПУ, 2004, 2005).
4. Третья международная конференция “Фундаментальные проблемы физики” (г. Казань, КФУ, 2005).
5. Всероссийский конкурс инновационных проектов “Живые системы” (г. Киров, ВятГУ, 2005).
6. Международные научные конференции “Физика и радиоэлектроника в медицине и экологии” (г. Владимир, ВлГУ, 2004, 2006, 2012, 2014).
7. V Уральская научно-практическая конференция “Современные проблемы физики и физико-математического образования” (г. Уфа, БГПУ, 2006).
8. XIV, XX, XXI международные конференции “Ломоносов” (г. Москва, МГУ, 2007, 2013, 2014).
9. Четвертая всероссийская астрономическая конференция “Космические рубежи XXI века” (г. Казань, КГУ, 2007).
10. III Евразийский конгресс “Медицинская физика - 2010” (г. Москва, МГУ, 2010).
11. 5 и 6 Троицкие конференции “Медицинская физика и инновации в медицине” (г. Троицк, ИСАН, 2012, 2014).
12. Всероссийская астрометрическая конференция “Пулково - 2012” (г. Санкт-Петербург, ГАО РАН, 2012).
13. I международная школа-конференция “Биомедицина, материалы и технологии XXI века” (г. Казань, КФУ, 2015).
14. Международная конференция “Пилотируемое освоение космоса” (г. Королев, МАА, 2016).
15. Международные конференции “ФизикА.СПб” (г. Санкт-Петербург, ФТИ им. А.Ф. Иоффе, 2014, 2016, 2017).
16. 17 и 18 международные научные конференции “SGEM” (г. Албена-Варна, Болгария, Конгресс-центр, 2017, 2018),

а также ежегодных итоговых научных конференциях и семинарах кафедр теоретической физики ТГГПУ (КГПУ), ЕГПУ (ЕГПИ), КФУ (КГУ), вычислительной физики и моделирования физических процессов, оптики и нанофотоники КФУ (КГУ).

Работа выполнена при поддержке АВЦП “Развитие научного потенциала высшей школы (2006-2008 годы)”, № РНП.2.1.1.741, Российского фонда фундаментальных исследований (№№ 02-02-16146-а, 03-02-96250-р2003татарстан-а, 05-02-16639-а, 08-02-00123-а, 12-02-97000-р\_поволжье\_а, 12-02-31044-а, 13-02-00792-а, 14-02-31385-а, 15-02-01638, 16-02-00496), Российского гуманитарного научного фонда (№ 03-06-00218а), Министерства образования Российской Федерации (№ А03-2.9-804), Федерального агентства по образованию (№ А04-2.9-4).

**Публикации.** Содержание диссертационного исследования отражено в 58 печатных работах, из них: 21 статья опубликована в изданиях, рекомендованных ВАК РФ для публикации материалов диссертационных работ [А1–А21], 12 статей проиндексированы базой цитирования Web of Science, 15 статей размещены в базе цитирования Scopus; 10 работ представлены в прочих научных изданиях (включая 3 главы в коллективных монографиях) [А22–А31]; 27 тезисов и трудов международных и всероссийских конференций [А32–А58].

### **Содержание работы.**

Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы. В первой главе вводятся понятия *сложность*, *сложная система*, рассматриваются специфические особенности, характеризующие динамику сложных систем, приводится анализ ключевых методов анализа временных серий сложных систем. Во второй главе раскрываются основные положения конечно-разностного аналога формализма Цванцига-Мори с модельными представлениями функций статистической памяти для исходных временных последовательностей, продуцируемых сложными системами,

а также квазипроизводных разных порядков. В третьей главе в рамках техники проекционных операторов Цванцига-Мори проводится обобщение формализма функций статистической памяти на случай нестационарных процессов. В главе четвертой анализ неравноинтервально фиксируемых наблюдений экспериментальных показателей сложных систем осуществляется в рамках формализма функций памяти, представленного в терминах “событий”. В пятой главе демонстрируется применение приведенных подходов к анализу стохастической динамики сложных негамильтоновых систем.

# Глава 1

## Сложные системы. Описание сложных систем

### §1.1 Вводные замечания

Что подразумевается под *сложностью*? Что делает систему *сложной*? Некоторые размышления по этому поводу можно найти в работе нобелевского лауреата Мюррея Гелл-Манна (Murray Gell-Mann) *What is complexity?* [1]. Последовавшее за этим рассмотрение данных терминов в разных областях человеческого знания вносит лишь уточнение в их формулировку нежели приводит к четкому определению. К примеру, в монографии [2] можно обнаружить более тридцати различных определений сложности. В работе Филипа У. Андерсона (Philip W. Anderson) *Physics: The opening to complexity* предпринимается попытка установления границ проявления сложности в различных областях физики [3].

При переходе к научному толкованию понятия *сложность* мы неизбежно сталкиваемся с необходимостью введения соответствующей меры и привязки сложности к конкретному объекту, процессу или явлению. В частности, мерой информационной колмогоровской сложности выступает длина самого короткого сообщения, необходимого для передачи определенной информации. Дополняя размышления, представленные во введении, можно заклю-

читать, что сложная система есть составной объект, состоящий порой из множества элементов, взаимодействие между которыми приводит к возникновению качественно новых эмерджентных свойств, отличных от свойств отдельных компонентов, а также суммы частей, не связанных системообразующими признаками.

## **§1.2 Методы анализа динамики сложных систем**

### **§1.2.1 Линейные и нелинейные математические модели**

В настоящее время линейные математические модели используются в самых разных областях науки. Их популярность, с одной стороны, связана с активным развитием математического аппарата линейных уравнений в течение последних двухсот лет. С другой стороны, линейные уравнения позволяют адекватно описывать некоторые природные явления и процессы [4]. Характерным признаком линейных систем является принцип суперпозиции, который позволяет строить решение сложной задачи из более простых. Кроме того, линейные уравнения эффективны при решении задач, не связанных с существенным отклонением от положения равновесия рассматриваемой системы, то есть в том случае, когда воздействия на изучаемую систему достаточно малы. Это позволяет проводить процедуру линеаризации исходных нелинейных уравнений и в дальнейшем вести работу с линейными моделями.

В действительности же большинство природных явлений и процессов оказываются нелинейными. С начала 20 в. накопилось немало научных проблем, требующих применения нелинейных математических моделей. Прежде всего, это проблемы, связанные с нелинейной механикой. Позднее нелинейные задачи появились в акустике, физике твердого тела, статистической физике, радиотехнике (детектирование и генерирование колебаний). Указанные проблемы первоначально казались совершенно специфическими и не связанными

друг с другом.

Принципиальное отличие нелинейных математических моделей от линейных заключается в следующем. Во многих случаях решение линейных уравнений удастся найти в явном виде с помощью специальных функций. Для большинства нелинейных уравнений не удастся найти решение в аналитическом виде. Их анализ требует объединения аналитических методов с расчетами на ЭВМ, что позволяет осуществлять вычисления с некоторой точностью, а также исследовать сложные нелинейные уравнения [4]. Вместе с тем при решении нелинейных физических задач используется построение иерархии упрощенных моделей. Со временем данный метод оказался полезным в химии, математической экономике, биологии [5].

### §1.2.2 Динамическая система. Описание динамических систем

В случае когда задан набор величин – динамических переменных, при котором их значения в последующий момент времени определяются на основе исходного набора по определенному правилу, мы обращаемся к понятию *динамическая система*. Формально правило определяется оператором эволюции системы. Оператор эволюции может быть задан различными способами: с помощью дифференциальных уравнений, дискретных отображений.

Выделяют консервативные и неконсервативные динамические системы. К исследованию консервативных систем следует отнести задачи небесной механики и поведение плазмы в ускорителях. В случае изменения во времени запаса энергии динамические системы называются неконсервативными. Системы, у которых энергия уменьшается во времени ввиду наличия трения или рассеяния, называют диссипативными. Большинство динамических систем в физике, радиотехнике, биологии, химии являются неконсервативными [4].

### Фазовое пространство

Пусть эволюция динамической системы определяется заданием величин

$x_1(t), \dots, x_N(t)$ . Фиксация величин в момент времени  $t = t_0$  определяет начальное состояние системы. Тогда эволюция динамической системы описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_j}{dt} = \dot{x}_j = f_j(x_1, \dots, x_N), \quad j = 1, \dots, N. \quad (1.2.1)$$

Использование дифференциальных уравнений первого порядка не является ограничением, поскольку уравнение  $N$ -го порядка с помощью соответствующей замены переменных сводится к системе  $N$  вида (1.2.1).

Решение системы (1.2.1)

$$x_1 = \phi_1(t), \dots, x_N = \phi_N(t)$$

соответствует движению точки в  $N$ -мерном пространстве. Каждая из переменных  $x_1, \dots, x_N$  рассматривается как независимая координата. Рассматриваемое пространство называется фазовым. Фазовая плоскость имеет размерность  $N = 2$ . Точка в фазовом пространстве – фазовая точка, определяет состояние динамической системы в определенный момент времени. Фазовая траектория как движение фазовой точки вдоль некоторой линии соответствует изменению состояния системы во времени.

В результате единственности решений дифференциальных уравнений фазовые траектории не будут пересекаться. В том случае, когда динамическая система задана уравнениями (1.2.1), постулируется, что каждому начальному состоянию  $x_j(t_0)$  в  $N$ -мерном фазовом пространстве ставится в соответствие то единственное состояние  $x_j(t)$ , в которое переместится фазовая точка, движущаяся согласно соотношениям (1.2.1), за время  $t - t_0$ .

Среди решений системы уравнений (1.2.1) большее значение имеют те решения, которые описывают стационарное состояние. Для стационарных состояний система уравнений (1.2.1) принимает вид

$$\frac{dx_j}{dt} = f_j(x_1, \dots, x_N) = 0, \quad j = 1, \dots, N. \quad (1.2.2)$$

Решениями уравнений (1.2.2) являются особые (“неподвижные”) точки в фазовом пространстве.

Множество фазовых точек или фазовых траекторий определяют общие особенности поведения системы. Такая совокупность называется фазовым портретом. Также для описания поведения физической или любой другой системы используется понятие *число степеней свободы*. В качестве исторического примера в этом случае используют движение вдоль прямой, которое описывается обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка. Такая система обладает одной степенью свободы [4].

### Характеристические показатели Ляпунова

В математике характеристический показатель Ляпунова определяет степень расхождения бесконечно близких фазовых траекторий друг от друга. Количественно две траектории при начальном отклонении  $\delta\mathbf{Z}_0$  расходятся в фазовом пространстве согласно соотношению

$$|\delta\mathbf{Z}(t)| \approx \exp^{\lambda t} |\delta\mathbf{Z}_0|$$

при условии, что расхождение можно рассматривать в линейном приближении. Здесь  $\lambda$  – показатель Ляпунова. Положительные значения показателя Ляпунова характеризуют в динамической системе хаотическое движение с ограниченными траекториями [6, 7].

Пусть эволюция динамической системы описывается траекторией  $\mathbf{x}(t)$  из начальной точки  $\mathbf{x}_0$  в момент времени  $t_0$ . Выберем другую траекторию  $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ , для которой начальная точка  $\tilde{\mathbf{x}}_0$  близка к точке  $\mathbf{x}_0$ . Обозначим через  $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_N(t))$  фазовую траекторию динамической системы, а через  $\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t)$  близкую к исходной траекторию, которая реализуется при малом изменении в начальном условии  $\mathbf{x}(t)$ . Тогда переменные  $\mathbf{u}(t) = (u_1(t), \dots, u_N(t))$  определяют отклонение двух траекторий друг от друга.

Подставляя выражение  $\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t)$  в уравнение (1.2.1), определяем

$$\frac{dx_j}{dt} + \frac{du_j}{dt} = f_j(\mathbf{x} + \mathbf{u}), \quad j = 1, \dots, N.$$

Откуда разложив правую часть в ряд Тейлора по отклонению  $\mathbf{u}(t)$ , получаем

$$\frac{dx_j}{dt} + \frac{du_j}{dt} = f_j(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^N \left( \frac{df_j}{dx_k} \right)_{\mathbf{x}(t)} u_k + \dots, \quad j = 1, \dots, N.$$

Учитывая соотношение  $\dot{x}_j(t) = f_j(\mathbf{x})$ , и пренебрегая членами второго и более высоких порядков по  $u_k$ , находим, что эволюция малого отклонения  $\mathbf{u}(t)$  определяется системой уравнений:

$$\frac{du_j}{dt} = \sum_{k=1}^N A_{jk} u_k, \quad j = 1, \dots, N, \quad (1.2.3)$$

где коэффициенты  $A_{jk} = A_{jk}(t) = (df_j/dx_k)_{\mathbf{x}(t)}$ ,  $j, k = 1, \dots, N$ .

В векторном представлении система (1.2.3) примет вид

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{u}, \quad (1.2.4)$$

где  $\mathbf{A}(t)$  – матрица из элементов  $A_{jk}(t)$ . Направления локальных потоков  $\mathbf{u}^{(1)}(t), \dots, \mathbf{u}^{(N)}(t)$  и корни характеристического уравнения системы (1.2.4)  $\lambda_1(t), \dots, \lambda_N(t)$  будут меняться с течением времени. В этом случае, возможна ситуация, когда малое отклонение

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^{(1)}(t) + \dots + \mathbf{u}^{(N)}(t)$$

экспоненциально растет в одних и уменьшается в других точках изучаемой траектории  $\mathbf{x}(t)$ .

Задача нахождения корней характеристического уравнения системы (1.2.4) была решена в теореме Ляпунова [7]. Имеется  $N$  линейно независимых решений системы уравнений (1.2.4), которым отвечает  $N$  показателей Ляпунова:  $\Lambda_1 \geq \dots \geq \Lambda_N$ . Набор чисел  $\{\Lambda_1, \dots, \Lambda_N\}$  называют спектром показателей Ляпунова. Показатель  $\Lambda_1$  определяется как старший показатель Ляпунова. Присутствие в спектре показателя  $\Lambda$  соответствует существованию

такого отклонения исходной траектории, которое эволюционирует по времени, как  $\exp(\Lambda t)$ . Данное обстоятельство верно, пока оправдано использование линейного приближения. Неустойчивость фазовой траектории характеризуется наличием в спектре хотя бы одного положительного показателя Ляпунова. Асимптотическая устойчивость траектории сохраняется при условии всех отрицательных значений показателей Ляпунова [4].

### §1.2.3 Временные ряды и временная дискретизация

Временной ряд – наблюдаемая конечная реализация дискретного случайного процесса  $X(t)$  при  $t_1, t_2, \dots, t_N$ . Во временном ряде собирается статистический материал о значениях экспериментально фиксируемого в разные моменты времени параметра (или параметров). Каждое значение параметра называется отсчетом (или измерением). Для каждого отсчета указывается время измерения. Такое представление позволяет учесть взаимосвязи измерений во времени, а не только исследовать статистические закономерности, как это реализуется в случае простой выборки данных. По количеству показателей, для которых определяются уровни в каждый момент времени, различают одномерные или многомерные временные ряды. Переменная  $t$  может иметь смысл пространственной координаты [8]. В этом случае говорят о пространственных или топографических рядах и картах. Примерами временных рядов могут выступать измерения показателей природных, социальных, экономических, технических систем. Часто в качестве некоторого тестового временного ряда для апробации методов статистического анализа выступают показатели солнечной активности (цюрихский ряд чисел Вольфа), погодные данные (температура, сила ветра, влажность) или биржевой курс (котировки валют, ценных бумаг). Примером топологических карт являются “профили шероховатостей” поверхностных структур, исследуемых методами атомно-силовой спектроскопии.

Временная дискретизация – “квантование” во времени, – замена непрерывного процесса  $X(t)$ , являющегося объектом анализа, последовательностью отсчетов  $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$  в дискретные моменты времени  $t_i$ . Обратная операция – воспроизведение исходной функции  $X(t)$  по ее отсчетам – называется восстановлением. При постоянном шаге дискретизации  $\Delta t = \tau = t_{i+1} - t_i = \text{const}$  временные ряды называются равноотстоящими или равноинтервальными. При экспериментальных наблюдениях параметра с переменным шагом дискретизации говорят о неравноотстоящих или неравноинтервальных рядах [9].

Выбор частоты отсчетов остается ключевой проблемой временной дискретизации. Для процессов с ограниченным спектром фундаментальное значение имеет теорема Котельникова-Шеннона, указывающая на возможность точного восстановления функции  $X(t)$  по ее дискретным отсчетам с шагом  $\tau = 1/2f_m$ , где  $f_m$  – максимальная частота спектра функции  $X(t)$ .

#### §1.2.4 Понятие о частоте дискретизации

Как правило, первичные данные о динамике сложных систем обычно извлекаются из дискретных временных рядов  $\{x_i\}$ , получаемых с некоторой конечной частотой дискретизации  $f_d$ , где  $t_i$  – моменты времени, отделенные друг от друга фиксированными временными интервалами  $\tau = f_d^{-1}$ . В этом случае возникает естественный вопрос: насколько полна и достоверна информация, содержащаяся в сигналах, измеряемых с конечной частотой дискретизации, имея в виду, что реальные системы генерируют сигналы с много большими частотами? Согласно теореме Котельникова [10], для получения достоверной информации, к примеру, о резонансных (регулярных, стационарных) составляющих сигнала с частотой  $f_r$ , должно выполняться неравенство  $f_d \geq 2f_r$ .

При анализе сложного сигнала с частотой дискретизации  $f_d$  можно говорить о нахождении совокупности параметров, определяющих особенности,

свойственные сигналу. Поэтому выбираемая частота дискретизации должна рассматриваться как параметр при алгоритмическом представлении различных процедур параметризации. Изменение частоты или шага дискретизации может привести к изменению рассчитываемых параметров и искажению извлекаемой информации. В связи с этим при проведении подобного анализа, по мере возможности, необходимо установить диапазон частот дискретизации регистрации сигнала, в котором искомые параметры сохраняют свои значения. Одна из возможностей установления такого диапазона связана с регистрацией экспериментально фиксируемого параметра сложной системы при различных частотах дискретизации  $f_d$ . Другая возможность связана с первоначальной регистрацией временного ряда при максимально высокой частоте дискретизации  $f_d$  и получением набора “новых” временных рядов с шагом дискретизации большим первоначальному в кратное число раз. Анализ поведения искомых параметров для временных рядов с разной частотой дискретизации позволит установить диапазон частот, в котором параметры сохраняют свою “устойчивость” [11].

### **§1.2.5 Методы анализа временных рядов**

Выделим ключевые методы статистического анализа экспериментально фиксируемых показателей сложных систем:

1. Методы корреляционного и регрессионного анализа используются для исследования корреляций между случайными величинами (показателями, признаками) и вывода аналитических уравнений связи [12, 13].
2. В рамках дисперсионного факторного и ковариационного методов исследуется статистическая значимость различия между независимыми наблюдениями с помощью дисперсий или постоянных и переменных ковариантов [12, 13, 14].

3. Самоподобные особенности или закономерности, определяющие порядок в структуре сложных систем, изучаются методами фрактального и мультифрактального анализа [12, 13, 15]. Все большую популярность здесь приобретают скейлинговые методы.
4. Методы, развиваемые в рамках теории хаоса и нелинейной динамики [4, 5, 6, 7, 12, 13, 16]. Некоторые особенности указанных методов были раскрыты ранее.
5. Методы фурье- и вейвлет-анализа [12, 13, 17, 18]. Достоинства и недостатки данной группы методов связаны с представлением временного сигнала в виде набора базисных функций для изучения общих или локальных возмущений.
6. В рамках фликкер-шумовой спектроскопии [11, 12, 13] исследуются составляющие хаотических сигналов в разных диапазонах частот.
7. Для описания случайных величин и функций в математической статистике используется теория выборок, проводится оценка доверительных интервалов, реализуется проверка статистических гипотез, выполняется аппроксимация экспериментальных данных [12, 13, 19].

Другая классификация методов статистического анализа временных серий включает две группы. Первая группа связана с изучением временных корреляций (построение временных корреляционных функций, расчет коэффициентов корреляции). Сюда включены методы анализа во временной области. Для исследования частотных особенностей дискретной динамики используются спектральная, асимптотическая, функциональная техники, которые во многих ситуациях привязаны к физической сущности изучаемых явлений, но при этом обладают прекрасной наглядностью. Методы спектрального анализа:

1. Многомерный спектральный анализ временных рядов [20].
2. Методы непараметрической оценки спектральной плотности, полученной осреднением по сдвигу во времени [20].
3. Алгоритмы, реализующие статистические процедуры параметрического спектрального анализа временных рядов [21].
4. Анализ неравноинтервальных временных рядов.

## **§1.3 Свойства сложных систем**

### **§1.3.1 Дискретность регистрируемых параметров**

Значительное развитие измерительной техники способствует постоянному совершенствованию методов регистрации, благодаря которым экспериментаторы проводят все более точные измерения параметров. Статистический анализ экспериментальных параметров, генерируемых сложными системами, эффективно используется в исследованиях их эволюции, а также с целью осуществления прогнозов дальнейшей динамики. Измерение параметров осуществляется, как правило, с определенным шагом дискретизации  $(\tau, \Delta t)$ , в результате чего набор величин, входящих в состав временного ряда, является дискретным. Дискретность измеряемого параметра накладывает существенные ограничения в теоретическом описании сложных систем на основе использования интегро - дифференциального математического аппарата. В связи с этим возникает необходимость разработки новых методов анализа и в переходе к временной дискретизации [22].

Например, операции дифференцирования и интегрирования примут сле-

дующий вид:

$$\frac{dx}{dt} \rightarrow \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t + \tau) - x(t)}{\tau},$$

$$\int_a^b x(t) dt = \sum_{j=0}^{n-1} x(T_a + j\tau) \Delta t = \tau \sum_{j=0}^{n-1} x(T_a + j\tau) = n\tau \langle X \rangle,$$

где  $\tau = \Delta t$ ,  $c = b - a = n\tau$ ,  $T$  – время регистрации наблюдения.

О дискретности можно говорить, уточняя составной характер сложной системы: включает большое (порой весьма значительное) число взаимодействующих элементов. Наличие коррелированности, возникающей в результате взаимодействия или перераспределения определенных связей между частями составного объекта, выступает важнейшим фактором эволюции сложных систем. Во многих случаях без учета коллективных явлений оказывается невозможным проведение качественного анализа функционирования связанных систем.

### §1.3.2 Неэквидистантность временных рядов

Неэквидистантность или неравноинтервальность во времени в дискретной динамике сложных систем возникает в силу разных причин. Для ухода от неравноинтервальности данных пропущенные значения экспериментального параметра заполняются искусственно рассчитанными значениями, например, средними от двух соседних значений. Примеры анализа неэквидистантных серий можно встретить в следующих работах: сейсмическая активность локализованных участков земной коры [23, 24], интенсивность рентгеновского излучения астрофизических объектов, физиологические параметры живых систем [25, 26], экономические и экологические показатели социальных систем, а также параметры модельных систем [27].

К неэквидистантности сигнала с шагом дискретизации  $\tau$  приводит переход к рассмотрению отдельных *событий* – временных вариаций параметров

или *времен возникновения событий*. Одна из возможностей указанного перехода заключается в накоплении статистики экстремальных событий, когда вместо всей временной последовательности используется выборка, состоящая из максимальных и/или минимальных значений регистрируемого параметра. Статистика экстремальных событий используется для прогнозирования внезапных катастрофических явлений: сильного землетрясения, эпилептического приступа, внезапной остановки сердца и т.д. Вместе с тем следует отметить, что проведение долгосрочного прогноза на основе предвестников (предикторов), полученных из статистики экстремальных событий, оказывается весьма затруднительным. Примеры анализа статистики экстремальных событий: оценка надежности технических систем в инженерии и гидрологии [28], анализ рисков на финансовых рынках [29], изучение и прогноз катастрофических климатических явлений [30]. Статистика экстремальных событий нашла широкое применение в физике: физика атмосферы, изучение спиновых стекол, анализ флуктуаций на границе раздела двух сред, исследование плотности уровней квантового идеального газа [31].

Событийный анализ (*event-by-event analysis*) уже несколько десятилетий эффективно используется при обработке результатов ядерных экспериментов, где каждое столкновение частиц рассматривается как событие.

### **§1.3.3 Нестационарность и неустойчивость**

Простейшие классификации позволяют выделить детерминированные и случайные, а также стационарные и нестационарные временные ряды. В первой классификации временные ряды состоят из значений некоторой неслучайной функции или выступают как результат реализации некоторой случайной величины. Стационарность временного ряда определяется наличием определенной тенденции в изменениях значений параметра. Нестационарность и неустойчивость – специфические особенности стохастических процессов в

природе. Большинство сигналов, продуцируемых физическими и биологическими системами, являются неоднородными. Эффекты нестационарности оказывают существенное влияние на корреляционные особенности сигналов. В этом случае средние значения, стандартные отклонения или дисперсии, корреляционные функции становятся неинвариантными относительно временных преобразований [32, 33], что приводит к трудностям в использовании традиционных теоретических подходов [34, 35].

Существующие теории нестационарных процессов преимущественно основываются на спектральных разложениях процессов и их корреляционных функций или же на введении спектральных характеристик этих процессов подобных спектральным мерам и плотностям стационарных процессов. Описание нестационарных процессов, допускающих спектральные разложения, осуществляется при помощи стохастических интегралов или рядов по специальным системам функций со случайными коэффициентами [8].

Отметим, что проявление нестационарности и динамической перемежаемости при исследовании эволюции сложных систем живой и неживой природы часто считается явлением нежелательным. В связи с этим разрабатываются способы ухода от нестационарности [36]. Однако наиболее детальную информацию позволяют получить методы, в которых учитываются указанные эффекты.

#### §1.3.4 Динамическая перемежаемость

В нелинейной динамике под *перемежаемостью* понимается чередование, сменяемость фаз регулярной и хаотической динамики [37]. Термин *динамическая перемежаемость* появился при изучении поля скорости в турбулентной среде [38]. Явление динамической перемежаемости изучалось для гидродинамической турбулентности [39], а также в теории распространения волн в средах с крупномасштабными случайными неоднородностями [40]. Другим при-

мером служит эффект локализации в квантовой теории неупорядоченных сред, всесторонне изученный И.М. Лифшицем и его учениками [41]. Позднее перемежаемость обнаружена в вычислительных экспериментах в магнитной гидродинамике [42] и обсуждалась в теории образования галактик, подтвержденной астрономическими наблюдениями структуры Вселенной [43].

Применительно к последовательностям экспериментально фиксируемых показателей сложных систем перемежаемым является такой вид временного ряда, в котором случайным образом чередуются долговременные регулярные (или ламинарные) фазы и кратковременные нерегулярные всплески. Резкие (порой, пиковые) изменения параметров могут быть вызваны внутренними взаимодействиями между компонентами или возникать в результате внешних воздействий. При увеличении внешних параметров число подобных всплесков возрастает, что представляет собой переход от регулярной динамики к хаотичной. Динамическая перемежаемость присуща биологической эволюции, социальным и рыночным системам, процессам сейсмической активности.

### **§1.3.5 Самоорганизованность (самоорганизация)**

Исследование кооперативных (коллективных, когерентных, согласованных) явлений в открытых системах (физических, химических, биологических, экономических, социальных), приводящих к образованию пространственных, временных и пространственно-временных упорядоченных диссипативных структур, остается актуальным и по сей день [12, 13]. Прежде всего, это связано с интересом ученых к самому явлению *возникновения порядка из хаоса*, а также тем, что некоторые нелинейные механизмы наиболее ярко проявляются при образовании диссипативных структур, представляющих собой самоорганизующиеся системы с меньшей пространственной симметрией, чем исходные [44].

Примеры физических и химических самоорганизующихся систем известны

давно. Это неустойчивость Рэля-Бенара в жидкости [45], процесс лазерной генерации, эффект Ганна в полупроводниках [46], автоколебательные химические реакции [47]. В дальнейшем нелинейные эффекты, возникающие в открытых системах, находящихся вдали от термодинамического равновесия, стали эффективно использоваться на практике.

Общей особенностью процессов упорядочивания или самоорганизации структур является необходимость выполнения следующих условий: открытая система (активно обменивающаяся с окружающей средой веществом и энергией) находится в неравновесном состоянии (вдали от термодинамического равновесия) и обладает нелинейной внутренней динамикой; управляющие параметры имеют закритические значения и микроскопические процессы проявляются в коллективных, кооперативных явлениях. Таким образом, вынужденные переходы в самоорганизующихся системах описывают изменение состояний от беспорядка к порядку.

## **§1.4 Корреляции и эффекты статистической памяти в динамике сложных систем**

### **§1.4.1 Корреляционная функция**

Корреляции характеризуют зависимость между двумя или несколькими случайными переменными в отсутствии прямой функциональной связи между ними. Обычно они описываются методами теории вероятностей. В широком смысле для описания корреляций используются функциональные зависимости – корреляционные функции, коэффициенты или показатели, которые определяются в качестве количественных мер корреляций в соответствии с природой исходных данных. При изучении динамических свойств физических систем с помощью корреляционных функций (КФ) удобно описывать корреляции микроскопических переменных.

В статистической физике КФ для стационарного случайного процесса  $X(t)$  с дискретным или непрерывным временем  $t$  по наблюдаемым значениям  $x(t)$ , где  $0 \leq t \leq T$ , имеет вид [8]:

$$B(\tau) = \mathbb{E}[X(t + \tau)X(t)] \quad (1.4.1)$$

или

$$b(\tau) = \mathbb{E}[(X(t + \tau) - \mathbb{E}X(t + \tau))(X(t) - \mathbb{E}X(t))]. \quad (1.4.2)$$

Здесь  $\mathbb{E}$  – математическое ожидание. Если  $F(x)$  – функция распределения  $X$ , то

$$\mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x)$$

или если  $X$  имеет абсолютно непрерывное распределение с плотностью вероятности  $p(x)$ , то

$$\mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x) dx.$$

В частных случаях, если  $X$  имеет дискретное распределение с возможными значениями  $x_k, k = 1, 2, \dots$ , и соответствующими вероятностями  $p_k = P\{\omega : X(\omega) = x_k\}$ , то

$$\mathbb{E}X = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k.$$

В случае дискретного  $t$  и одной реализации процесса  $X(t)$  соотношение (1.4.1) примет вид [8]:

$$B_T^*(\tau) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-|\tau|} x(t + |\tau|)x(t) \quad (1.4.3)$$

и соотношение (1.4.2):

$$b_T^*(\tau) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-|\tau|} [x(t + |\tau|) - \bar{x}][x(t) - \bar{x}], \quad (1.4.4)$$

где

$$\bar{x} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T x(t), \quad |\tau| = 0, 1, \dots, T - 1.$$

В соотношениях (1.4.3), (1.4.4) при  $|\tau| \geq T$  удобно принимать, что  $B_T^*(\tau) = b_T^*(\tau) = 0$ . В случае непрерывного  $t$  в уравнениях (1.4.3), (1.4.4) выполняется замена сумм интегралами.

Одной из задач, связанных с вычислением КФ, является определение нормированной КФ вида [8]:

$$R(\tau) = \frac{E[(X(t+\tau) - EX(t+\tau))(X(t) - EX(t))]}{E[(X(t) - EX(t))^2]}. \quad (1.4.5)$$

Другой актуальной задачей оказывается описание взаимных корреляций двух стационарных связанных случайных процессов  $X(t)$ ,  $Y(t)$  по одновременно наблюдаемым значениям  $x(t)$ ,  $y(t)$ . В этом случае вводится коэффициент корреляции как числовая характеристика совместного распределения этих величин [8, 48]:

$$\rho(X, Y) = \frac{E[\delta X \delta Y]}{\sigma_x \sigma_y}. \quad (1.4.6)$$

Здесь  $\rho(X, Y)$  – коэффициент корреляции,  $\delta X = X - EX$ ,  $\delta Y = Y - EY$ ,  $\sigma_X^2 = E[\delta X^2] = E[X^2] - (EX)^2$ ,  $\sigma_Y^2 = E[\delta Y^2] = E[Y^2] - (EY)^2$ . Используя свойства математического ожидания, записывается коэффициент корреляции в виде:

$$\rho(X, Y) = \frac{E[XY] - EX EY}{(E[X^2] - (EX)^2)^{\frac{1}{2}}(E[Y^2] - (EY)^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Отметим, что коэффициент корреляции вследствие неравенства Коши-Шварца не может превышать значение 1. Кроме того, он обладает следующими свойствами: 1) если величины  $X$  и  $Y$  независимы, то  $\rho(X, Y) = 0$ ; 2)  $|\rho(X, Y)| = 1$  в том случае, когда величины  $X$  и  $Y$  связаны линейной функциональной зависимостью.

Под корреляционной зависимостью понимают связь между случайными величинами, не имеющими строго функционального характера, но являющаяся наилучшим приближением случайной величины  $Y$  – величиной вида  $f(X_1, \dots, X_n)$ .

### §1.4.2 Эффекты статистической памяти

При описании процессов возникновения и затухания корреляций возникает представление об эффектах статистической памяти. Они порождаются внутренними взаимодействиями в исследуемых системах и статистическими эффектами последействия. В случае статистических систем эффекты памяти возникают при сокращенном описании эволюции динамических переменных. Для количественного сопоставления временных масштабов релаксации и эффектов памяти, а также описания взаимосвязи между ними вводятся критерии или меры статистической памяти, характеризующие коррелированность случайных переменных на разных релаксационных уровнях.

Особое внимание к анализу эффектов статистической памяти в системах разнообразной природы было привлечено после выхода в 1906 году работы А.А. Маркова [49]. В своей статье русский математик А.А. Марков впервые сформулировал определяющее свойство марковского процесса – условной независимости будущего и прошлого при фиксированном настоящем. Данная работа имела историческое значение для становления математической теории случайных процессов. Например, в работе Л. Башелье (L. Bachelier) [50] была дана нестрогая попытка трактовки броуновского движения как марковского процесса, что нашло обоснование в работе Н. Винера (N. Wiener) [51]. Основные положения теории марковских процессов с непрерывным временем были сформулированы в 1931 году А.Н. Колмогоровым [52]. Изучение марковских процессов в 50-х гг. способствовало появлению самостоятельных научных направлений – теорий диффузионных и ветвящихся процессов. На развитие теории марковских процессов в 60-70 гг. оказали значительное влияние работы Дж. Дуба (J. Doob) [53].

Марковские процессы – один из важнейших классов случайных процессов. Их широкое практическое приложение связано, во-первых, с тем фактом, что марковские процессы адекватно описывают многие реальные процессы; слу-

чайные процессы, не являющиеся марковскими, нередко сводятся к марковским. Во-вторых, для марковских процессов имеется развитый математический аппарат, позволяющий находить необходимые характеристики процесса и решать многие задачи, возникающие на практике.

Марковский процесс – случайный процесс, эволюция которого после любого фиксированного момента времени  $t$  (в “будущем”) и до момента  $t$  (в “прошлом”) является условно независимой при известном положении процесса в момент времени  $t$  (в “настоящем”); “будущее” процесса не зависит от “прошлого” при известном “настоящем”. Марковский процесс в широком смысле – случайный процесс  $X(t)$ , обладающий тем свойством, что  $E[|X(t)|^2] < \infty$  при всех  $t$  и

$$\widehat{E}\{X(t_n)|X(t_1), \dots, X(t_{n-1})\} = \widehat{E}\{X(t_n)|X(t_{n-1})\}$$

при любых  $t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n$ , где

$$\widehat{E}\{X(t)|X(t_1), \dots, X(t_k)\} = \sum_{i=1}^k a_i X(t_i)$$

– линейная комбинация случайных чисел  $X(t_1), \dots, X(t_k)$ , для которой  $E[|X(t) - \sum_{i=1}^k a_i X(t_i)|^2]$  принимает наименьшее значение. Данное определение принадлежит Дж. Дубу [53].

Для определения марковского процесса с дискретным временем, заданном в измеренном пространстве, часто используют термин “цепь Маркова”. Основы теории марковских цепей заложил А.А. Марков [8, 49]. Путь к рассмотрению цепей в пространствах событий более сложной природы был открыт в 1931-37 гг., прежде всего, в работах А.Н. Колмогорова [52, 54] и В. Деблина (W. Doeblin) [55]. Приложения марковских цепей к различным задачам были развиты в работах [53, 56].

В случае дискретного времени, для определения марковского процесса удобно воспользоваться условной вероятностью – вероятностью одного события при условии, что другое событие уже произошло. Пусть условная вероят-

ность того, что в момент времени  $t_2$  величина  $x$  будет находиться в интервале  $(x_2, x_2 + dx_2)$  при условии, что в момент времени  $t_1$  она имела значение  $x_1$  определяется в виде:  $K_1(x_1, t_1 | x_2, t_2)$ . Тогда марковское свойство примет вид:

$$K_{n-1}(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_{n-1}, t_{n-1} | x_n, t_n) = K_1(x_{n-1}, t_{n-1} | x_n, t_n).$$

Наряду с марковскими случайными процессами в физике, технике и природе существует большое число явлений, связанных с немарковскими процессами и статистическими эффектами памяти [57, 58, 59, 60]. К примеру, процесс движения броуновской частицы в вязкой среде становится процессом с памятью, что приводит к существенным погрешностям при использовании модели марковского случайного процесса в описании флуктуаций импульса броуновской частицы [61]. Отклики физических, технических, биологических и социальных систем на случайное возмущение носят немарковский характер. Радиотехнические сигналы при их амплитудной и фазовой модуляции [62], фликкер-шум [63] характеризуются немарковскими особенностями.

Немарковский процесс – случайный процесс, эволюция которого после любого заданного значения времени  $t$  зависит от эволюции, предшествовавшей этому моменту времени. Другими словами, “настоящее” немарковского процесса зависит от его “прошлого”. Описание немарковских процессов выполняется при помощи стохастических дифференциальных уравнений, например, уравнения Фоккера-Планка. Это обусловлено тем, что обыкновенные дифференциальные уравнения связывают величины в данный момент времени, но не могут учесть память немарковского процесса. Для описания статистических эффектов памяти к настоящему времени разработаны разнообразные подходы: формализм функций памяти Цванцига-Мори [60, 64], метод рекуррентных соотношений Ли [65], методы, основанные на использовании обобщенного уравнения Ланжевена [66, 67], так называемые мастер-уравнения с соответствующими численными показателями [68, 69].

### §1.4.3 *R/S*-анализ. Метод нормированного размаха

Описание корреляций и статистической памяти в терминах самоподобия сложных систем осуществляется в рамках фрактального и мультифрактального анализа [15, 70]. Метод нормированного размаха, предложенный еще в 1951 г. Г. Херстом (H.E. Hurst), широко используется и в настоящее время [71]. В ходе наблюдений за колебаниями уровня воды в резервуаре Асуанской плотины в Каире, а также изучения архивных сведений о разливах Нила, Г. Херсту удалось установить эмпирическую закономерность в накоплении водных запасов с течением времени. Впоследствии он доказал, что большинство природных явлений, включая речные стоки, изменения температуры, осадков, роста колец деревьев, количества солнечных пятен характеризуются трендом с шумом или “смещенным случайным блужданием”. Сила тренда может быть оценена временным изменением нормированного размаха. В дальнейшем развитии *R/S* анализа значительную роль сыграли работы Б. Мандельброта, Е. Фёдера и др.

Показатель Херста позволяет проводить дифференциацию временных сигналов при наличии минимальной информации об исследуемой системе в зависимости от характера проявления корреляций.

Выделяют три различных типа значений показателя Херста:

1.  $0 \leq H < 0.5$  – данные значения соответствуют реверсивной (спад-подъем) динамике и антиперсистентным корреляциям. В этом случае проявляется “возврат к среднему”, то есть, если в исследуемой динамике наблюдался рост регистрируемого параметра, то, скорее всего, в следующий период времени произойдет его убывание, и наоборот. Устойчивость реверсивного поведения зависит от того, насколько близок показатель Херста к нулю (частые реверсы спада-подъема, “розовый шум”).
2.  $H = 0.5$  – события некоррелированы между собой, настоящее не влияет

на будущее (случайное блуждание, “белый шум”).

3.  $0.5 < H \leq 1$  – персистентный характер корреляций, высокая трендоустойчивость сигналов, наличие долговременных корреляций между событиями настоящими и последующими (смещенное случайное блуждание, “черный шум”). В долговременном масштабе статистика Херста определяется как результат длинного потока взаимосвязанных событий. Чем ближе показатель Херста к единице, тем более явный характер носит стабильность исходного временного сигнала.

Показатель Херста рассчитывается на основе “быстрого” и “медленного” алгоритмов с последующей линейной аппроксимацией [72, 73]. При использовании медленного алгоритма полученная зависимость принимает более сглаженный вид [A13], что оказывается удобным в случае неоднородных временных рядов.

### **Быстрый алгоритм вычисления показателя Херста**

Для вычисления показателя Херста применяют соотношение:

$$\frac{R}{S} = (a \cdot N)^H, \quad (1.4.7)$$

где  $a$  – постоянная величина,  $N$  – число наблюдений,  $H$  – показатель Херста ( $0 \leq H \leq 1$ ),  $S$  – стандартное отклонение,  $R$  – размах отклонения.

Представим динамику экспериментально регистрируемого параметра сложной системы в виде дискретной временной серии  $x_j$  некоторой переменной  $X$ :

$$X = \{x(T), x(T + \tau), \dots, x(T + (K - 1)\tau)\},$$

$$x_j = x(T + j\tau).$$

Здесь  $T$  – начальный момент времени,  $(K - 1)\tau$  – полное время регистрации сигнала,  $\tau$  – временной шаг дискретизации.

В исходной временной серии берут интервал длиной  $N\tau$ , где  $N$  будет пробегать все значения от 1 до  $K - 1$ . Для выбранного интервала вычисляется среднее значение:

$$\bar{x}_N = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^N x_j. \quad (1.4.8)$$

Для  $N$  измерений определяют отклонения от среднего значения:

$$\delta x_j = \delta x(T + j\tau) = x(T + j\tau) - \bar{x}_N. \quad (1.4.9)$$

Далее находят разность – размах между максимальным и минимальным значениями из массива накопившихся отклонений:

$$R = \underbrace{MAX(\delta x_j)}_{j=0\dots N} - \underbrace{MIN(\delta x_j)}_{j=0\dots N}. \quad (1.4.10)$$

Для калибровки временных сигналов Херст разделил получившийся размах на стандартное отклонение из  $N$  наблюдений. Стандартное отклонение рассчитывается по формуле:

$$S = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{j=0}^N (x_j - \bar{x}_N)^2}. \quad (1.4.11)$$

Прологарифмировав соотношение (1.4.7), получаем:

$$\log \left( \frac{R}{S} \right) = H(\log N + \log a).$$

Длина временного интервала увеличивается на один шаг дискретизации и вся последовательность действий повторяется. Итак, до конца временной серии. Оценкой показателя Херста будет тангенс угла наклона функции  $R/S$  от  $N$ , представленной в двойных логарифмических координатах. Тангенс угла наклона определяется путем линейной аппроксимации.

### Алгоритм с усреднением по выбранному периоду

В случае, когда получившаяся зависимость  $\log(R/S)$  от  $\log(N)$  имеет вид изломанной линии, что приводит к затруднению проведения линейной аппроксимации, можно воспользоваться алгоритмом с усреднением по выбранному временному периоду  $N\tau$ .

Временной интервал  $N\tau$  сдвигается до конца временной серии на один шаг дискретизации вправо. Соответственно для каждого окна длиной  $N\tau$ , “пробегающего” всю временную серию, получаем набор выборок:

$$\begin{aligned} y_0 &= \{x(T), x(T + \tau), \dots, x(T + (N - 1)\tau)\}, \\ y_1 &= \{x(T + \tau), x(T + 2\tau), \dots, x(T + N\tau)\}, \\ &\dots \end{aligned} \tag{1.4.12}$$

$$y_{K-N} = \{x(T + (K - N - 1)\tau), x(T + (K - N)\tau), \dots, x(T + (K - 1)\tau)\}.$$

Согласно представленным выше формулам (1.4.8)-(1.4.10) определяем средние значения  $\bar{y}_0, \dots, \bar{y}_{K-N}$ , отклонения от среднего значения – флуктуации значений элементов, значения размаха  $R_{y_0}, \dots, R_{y_{K-N}}$  выборок. Далее выполняем нормировку получившихся значений размаха на соответствующие стандартные отклонения  $S_{y_0}, \dots, S_{y_{K-N}}$  (см. соотношение (1.4.11)). В завершение строится график зависимости усредненного значения отношений  $R/S$  от  $N$  в двойных логарифмических шкалах. Временной интервал увеличивается на один шаг дискретизации. Алгоритм действий повторяется. Окончательно линейная аппроксимация выполняется для более сглаженной зависимостью.

#### §1.4.4 Фликкер-шумовая спектроскопия

Метод фликкер-шумовой спектроскопии (ФШС) позволяет установить взаимосвязи, проявляющиеся для низкочастотных “резонансных” и высокочастотных (всплесках и скачках) составляющих хаотических сигналов, на разных уровнях пространственно-временной иерархии [11, 74]. Кроме того, ФШС-

параметры описывают составляющие исследуемых сигналов в разных диапазонах частот. Для извлечения информации сформулированы соответствующие процедуры и алгоритмы. Их реализация подразумевает сопоставление выражений для разностных моментов и спектров мощности с эмпирическими зависимостями, построенными на основе измеряемых сигналов. Важными параметрами здесь являются среднеквадратичное отклонение значений динамической переменной от низкочастотного профиля сигнала – мера “нерегулярностей-скачков” и параметр, представляющий собой меру “нерегулярностей-всплесков” сигнала в высокочастотной части спектра мощности. Остальные параметры характеризуют длительность корреляционной связанности (“времен корреляции”) измеряемых динамических переменных по вводимым типам нерегулярностей, а также отражают характер ослабления корреляций в последовательностях нерегулярностей исследуемых сигналов.

ФШС-метод используется для решения следующих задач:

1. Выполнение параметризации (количественного описания) хаотической динамики или структурных особенностей сложных систем. Особое значение здесь имеет выделение низкочастотных составляющих (в контексте перемежаемости – ламинарных фаз, – длительных промежутков, в течение которых экспериментальные параметры совершают незначительные колебания около средних значений) и высокочастотных “шумовых” (стохастических, хаотических) нерегулярностей в динамике анализируемого процесса.
2. Выявление предвестников атипичной динамики сложных систем. Описание выполняется при изучении поведения параметра нестационарности, рассчитываемого при смещении пробного интервала вдоль временного ряда экспериментально наблюдаемого показателя. Данная задача оказалась актуальной для составления прогнозов резких (порой, катастрофических) структурных перестроек в исследуемой системе (активные

геологические процессы, патологические состояния живых систем, изменения котировок валют и др.).

3. Обнаружение кросс-корреляционных взаимосвязей между динамическими переменными, характеризующими эволюцию исследуемой сложной системы [A12, A18, A19]. Особую актуальность данная задача приобрела в исследованиях эффектов частотно-фазовой синхронизации, возникающей как результат процесса установления и поддержания общего режима периодической динамики двух или более связанных компонентов исследуемой системы, при котором частоты дискретных динамик этих компонентов близки друг к другу. Такой режим может быть взаимным, при котором установившаяся частота отличается от собственных периодических закономерностей динамики элементов, или принудительным, при котором сохраняются периодические особенности динамики одного из элементов, а эволюция экспериментально фиксируемого параметра другого элемента подстраивается под нее.

## §1.5 Формализм функций памяти Цванцига-Мори

### §1.5.1 Временные корреляционные функции

Временная корреляционная функция (ВКФ) используется для анализа статистического поведения величины  $A(t)$ , измерения которой происходит в течение большого промежутка времени. Находится ее среднее значение

$$\langle A \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} dt A(t)$$

и отклонение

$$\delta A(t) = A(t) - \langle A \rangle.$$

Тогда среднее от произведения двух флуктуаций при двух различных моментах времени

$$a(t) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \delta A(s) \delta A(t+s) ds$$

– называется временной корреляционной функцией. Если система эргодична, то среднее по времени равно среднему по ансамблю. В равновесной системе  $a(t)$  зависит только от промежутка времени  $t$ . Очевидно, что ВКФ  $a(t)$  зависит от траектории, которую описывает переменная  $A(t)$ .

При исследовании динамических свойств физических систем, например, конденсированных сред, часто используется спектральная плотность ВКФ:

$$\tilde{a}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega t} a(t). \quad (1.5.1)$$

С помощью обратного преобразования Фурье можно получить временную зависимость ВКФ:

$$a(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega t} \tilde{a}(\omega). \quad (1.5.2)$$

### §1.5.2 Техника проекционных операторов в формализме Цванцига-Мори

Метод проекционных операторов связан, прежде всего, с работами Цванцига (R. Zwanzig) [60] и Мори (H. Mori) [64]. Дальнейшее своё развитие этот метод получил в работах Кавасаки (K. Kawasaki) [75], Робертсона (B. Robertson) [76].

Используя технику проекционных операторов, для нормированных ВКФ и функций памяти

$$a(t) = \frac{\langle \delta A^*(0) \delta A(t) \rangle}{\langle |\delta A(0)|^2 \rangle},$$

где  $\delta A(t)$  флуктуация динамической переменной  $A(t)$  строится цепочка формально точных кинетических интегро-дифференциальных уравнений немар-

ковского типа [77]. Здесь  $\langle \dots \rangle$  – операция статистического усреднения в равновесном ансамбле Гиббса.

Переменные  $\delta A(t)$  подчиняются уравнению движения

$$\frac{d}{dt}\delta A(t) = i\widehat{\mathcal{L}}\delta A(t), \quad \widehat{\mathcal{L}} = -i\widehat{L}, \quad (1.5.3)$$

где  $\widehat{L}$  – обычный самосопряженный оператор Лиувилля.

В соответствии с видом ВКФ  $a(t)$  вводятся проекционные операторы  $\Pi$  и  $P$ , имеющие следующий вид:

$$\Pi = \frac{\delta A(0)\langle\delta A^*(0)\rangle}{\langle|\delta A(0)|^2\rangle}, \quad P = 1 - \Pi.$$

Назначение проекционного оператора  $\Pi$  заключается в выделении искомой переменной

$$\begin{aligned} \Pi\delta A(t) &= \frac{\delta A(0)\langle\delta A^*(0)\rangle}{\langle|\delta A(0)|^2\rangle}\delta A(t) = \delta A(0)\frac{\langle\delta A^*(0)\delta A(t)\rangle}{\langle|\delta A(0)|^2\rangle} = \delta A(0)a(t), \\ \Pi\delta A(t) &= \delta A(0)a(t). \end{aligned}$$

Кроме того, проекторы обладают следующими свойствами:

$$\Pi + P = 1, \quad \Pi^k = \Pi, \quad P^k = P, \quad (k > 1).$$

Действуя поочередно проекторами  $\Pi$  и  $P$  на уравнение движения (1.5.3) можно получить систему из двух уравнений:

$$\Pi\frac{d}{dt}\delta A(t) = \Pi i\widehat{\mathcal{L}}\delta A(t),$$

$$\delta A(t) = (\Pi + P)\delta A(t) = \Pi\delta A(t) + P\delta A(t),$$

$$\frac{d}{dt}\Pi\delta A(t) = i\Pi\widehat{\mathcal{L}}\Pi\delta A(t) + i\Pi\widehat{\mathcal{L}}P\delta A(t), \quad (1.5.4a)$$

$$\frac{d}{dt}P\delta A(t) = iP\widehat{\mathcal{L}}\Pi\delta A(t) + iP\widehat{\mathcal{L}}P\delta A(t). \quad (1.5.4b)$$

Далее вводятся приводимые и неприводимые части системы уравнений (1.5.4a)-(1.5.4b):

$$\delta A'(t) = \Pi\delta A(t), \quad \delta A''(t) = P\delta A(t).$$

Оператор Лиувилля удобно представить в виде матрицы:

$$\widehat{\mathcal{L}} = \begin{pmatrix} \widehat{\mathcal{L}}_{11} & \widehat{\mathcal{L}}_{12} \\ \widehat{\mathcal{L}}_{21} & \widehat{\mathcal{L}}_{22} \end{pmatrix},$$

с матричными элементами:

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{L}}_{11} &= \Pi \widehat{\mathcal{L}} \Pi, \quad \widehat{\mathcal{L}}_{12} = \Pi \widehat{\mathcal{L}} P, \quad \widehat{\mathcal{L}}_{21} = P \widehat{\mathcal{L}} \Pi, \quad \widehat{\mathcal{L}}_{22} = P \widehat{\mathcal{L}} P, \\ \widehat{\mathcal{L}} &= \widehat{\mathcal{L}}_{11} + \widehat{\mathcal{L}}_{12} + \widehat{\mathcal{L}}_{21} + \widehat{\mathcal{L}}_{22}. \end{aligned}$$

Тогда уравнения (1.5.4a) и (1.5.4b) принимают вид:

$$\frac{d}{dt} \delta A'(t) = i \widehat{\mathcal{L}}_{11} \delta A'(t) + i \widehat{\mathcal{L}}_{12} \delta A''(t), \quad (1.5.5a)$$

$$\frac{d}{dt} \delta A''(t) = i \widehat{\mathcal{L}}_{21} \delta A'(t) + i \widehat{\mathcal{L}}_{22} \delta A''(t). \quad (1.5.5b)$$

Здесь решение уравнения (1.5.5b) записывается в виде:

$$\delta A''(t) = e^{i \widehat{\mathcal{L}}_{22} t} \delta A''(0) + i \int_0^t d\tau e^{i \widehat{\mathcal{L}}_{22} \tau} \widehat{\mathcal{L}}_{21} \delta A'(t - \tau). \quad (1.5.6)$$

Подставляя решение (1.5.6) в уравнение (1.5.5a) и дополняя описание вспомогательными операторами  $R$  и  $S$ :

$$\Pi = RS, \quad R = \delta A(0), \quad S = \frac{\langle \delta A^*(0) \rangle}{\langle |\delta A(0)|^2 \rangle}$$

получают первое формально точное кинетическое уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} a(t) &= -\Omega_1^2 \int_0^t d\tau M_1(\tau) a(t - \tau), \\ M_1(\tau) &= \frac{\langle \delta B^*(0) e^{i \widehat{\mathcal{L}}_{22} \tau} \delta B(0) \rangle}{\langle |\delta B(0)|^2 \rangle}, \\ \Omega_1^2 &= \frac{\langle |\delta B(0)|^2 \rangle}{\langle |\delta A(0)|^2 \rangle}, \quad \delta B = \widehat{\mathcal{L}} \delta A. \end{aligned} \quad (1.5.7)$$

Здесь  $\Omega_1^2$  – первый частотный релаксационный параметр, имеющий размерность квадрата частоты. Он связан с чётным частотным моментом спектральной плотности ВКФ  $a(t)$  следующим образом:  $\Omega_1^2 = \omega^{(2)}$ .  $M_1(t)$  – нормированная функция памяти первого порядка.

Набор новых ортогональных динамических переменных получают, используя операцию ортогонализации Грама-Шмидта [78]:

$$\langle W_n^*, W_m \rangle = \delta_{n,m} |W_n|^2. \quad (1.5.8)$$

Здесь угловые скобки означают операцию усреднения по каноническому ансамблю Гиббса,  $\delta_{n,m}$  – символ Кронекера.

$$\begin{aligned} W_0 &= \delta A, \quad W_1 = \delta B = \widehat{\mathcal{L}}W_0, \dots, \\ W_n &= \widehat{\mathcal{L}}W_{n-1} - \Omega_{n-1}^2 W_{n-2}. \end{aligned} \quad (1.5.9)$$

Окончательно для набора ортогональных динамических переменных строится цепочка связанных интегро-дифференциальных кинетических уравнений немарковского типа:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{da(t)}{dt} &= -\Omega_1^2 \int_0^t d\tau M_1(t-\tau)a(\tau), \\ \frac{dM_1(t)}{dt} &= -\Omega_2^2 \int_0^t d\tau M_2(t-\tau)M_1(\tau), \\ &\dots \\ \frac{dM_i(t)}{dt} &= -\Omega_{i+1}^2 \int_0^t d\tau M_{i+1}(t-\tau)M_i(\tau), \quad i = 1, 2, \dots \end{aligned} \right. \quad (1.5.10)$$

Для замыкания цепочки уравнений (1.5.10) используется переход к марковскому пределу [60], метод модельных функций памяти [79], метод взаимодействующих мод [80], метод, развитый на идее о выравнивании временных масштабов взаимосвязанных релаксационных процессов [81]. В основу последнего метода заложены представления Боголюбова о сокращенном описании статистических систем и иерархии времен релаксации [82].

## Глава 2

# Анализ последовательностей квазипроизводных различных порядков дискретных временных рядов

### §2.1 Введение

Для исследования эффектов статистической памяти в физических системах разработаны разнообразные теоретические подходы [65, 66, 67, 69]. Например, проекционный формализм Цванцига-Мори позволяет получить формально точные уравнения движения для динамических переменных [60, 64]. Динамика остальных степеней свободы скрыта в так называемых ядрах памяти, статистически связанных с быстрыми флуктуирующими остаточными силами.

В работах Р.М. Юльметьева и др. [73, 83] развиваются идеи исследования корреляций в дискретной динамике сложных систем живой и неживой природы. Представим основные положения статистической теории дискретных немарковских процессов.

Случайный дискретный процесс описывается временной серией  $\{x_j\}$  некоторой величины  $X = \{x(T), x(T+\tau), \dots, x(T+(N-1)\tau)\}$ . Здесь  $T$  – начальный момент регистрации сигнала,  $(N-1)\tau$  – время регистрации сигнала,  $\tau$  – шаг

дискретизации,  $x_j = x(T + j\tau)$  – значение величины  $X$  на  $j$ -м шаге и флуктуация величины  $X$  на  $j$ -м шаге определяется как  $\delta x_j = x_j - \langle X \rangle$ .

Нормированная временная корреляционная функция (ВКФ)  $a(t)$  записывается в виде скалярного произведения векторов состояния

$$a(t) = \frac{\langle \mathbf{A}_k^0(0) \mathbf{A}_{m+k}^m(t) \rangle}{\langle |\mathbf{A}_k^0(0)|^2 \rangle},$$

где вектор начального состояния имеет вид:

$$\mathbf{A}_k^0(0) = \{\delta x_0, \delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_{k-1}\} = \{\delta x(T), \delta x(T + \tau), \dots, \delta x(T + (k-1)\tau)\},$$

вектор текущего состояния в момент времени  $t$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{m+k}^m(t) &= \{\delta x_m, \delta x_{m+1}, \delta x_{m+2}, \dots, \delta x_{m+k-1}\} = \\ &= \{\delta x(T + m\tau), \delta x(T + (m+1)\tau), \dots, \delta x(T + (m+k-1)\tau)\}. \end{aligned}$$

Исходная ВКФ  $a(t) = M_0(t)$  связана с функциями памяти более высокого порядка  $M_n(t)$ , где  $n = 1, 2, \dots$ , посредством дискретных уравнений следующего вида:

$$\frac{\Delta M_{n-1}(t)}{\Delta t} = \lambda_n M_{n-1}(t) - \tau \Lambda_n \sum_{j=0}^{m-1} M_n(j\tau) M_{n-1}(t - j\tau).$$

Полный набор функций памяти и соответствующих кинетических  $\lambda_n$  и релаксационных  $\Lambda_n$  параметров определяет многообразие эффектов статистической памяти во временной эволюции сложных систем. Функции и меры статистической памяти, частотные релаксационные параметры рассчитываются напрямую из временных последовательностей экспериментально фиксируемых параметров.

Проекционный формализм в теории Цванцига-Мори, а также представленный выше его конечно-разностный аналог позволяют получить уравнения для соответствующей переменной. Однако конечно-разностный формализм функций памяти (ФФП) используется только для анализа исходных

временных серий  $\{x_j\}$ . Представленные далее соотношения позволят применять теоретико-функциональную технику проекционных операторов в анализе последовательностей квазипроизводных временных серий  $\{v_j, a_j, e_j, q_j\}$  [A11].

## §2.2 Квазипроизводные дискретного типа

Представим динамику экспериментально регистрируемого параметра сложной системы в виде дискретной временной серии  $\{x_j\}$  переменной  $x$ :

$$\begin{aligned} x &= \{x(T), x(T + \tau), x(T + 2\tau), \dots, x(T + (N - 1)\tau)\}, \\ x_j &= x(T + j\tau). \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

Здесь  $T$  – начальный момент времени,  $(N - 1)\tau$  – полное время регистрации сигнала,  $\tau$  – временной шаг дискретизации.

Для наглядности анализ конечно-разностных квазипроизводных разных порядков исходной временной последовательности можно свести к следующей аналогии. Последовательность наблюдений  $x_j$ , зафиксированных в моменты времени  $t = T + j\tau$ , можно рассматривать как “координаты” *квази-частицы* с “эффективной массой”  $m^*$  (в дальнейшем частица с единичной массой), перемещающейся в одномерном пространстве.

В начале 20 в. на основе теории Л. Башелье (L. Bachelier), А. Эйнштейна (A. Einstein), М. Смолуховского (M. Smoluchowski), модель *броуновского движения* приобретает в физике сложных систем важное значение [8]. К примеру, в своей книге *The Fractal Geometry of Nature* Бенуа Мандельброт (Benoit Mandelbrot) [70] для моделирования фрактальных распределений галактик во Вселенной использовал модель блужданий с асимптотически степенной переходной плотностью и получил согласие с экспериментальными наблюдениями. В монографии [84] схема марковских блужданий используется для дальнейшего развития количественной теории *фрактальной космологии*. В статье

[85] рассматривается фрактальное блуждание и блуждание на фрактале частицы, совершающей мгновенные скачки между случайно распределенными атомами среды, в которых она пребывает случайное время. Под атомами среды подразумеваются материальные точки – простейший физический объект в механике [84]. В работе [86] предлагается универсальный подход к изучению сложных систем на основе микро-, мезо- и макроскопического метода описания стохастических процессов. В рамках данного подхода развивается концепция одномерной динамики квазиброуновской частицы: приводятся обобщенное уравнение Ланжевена с дискретным временем, аналог соотношения Кубо-Грина для коэффициента диффузии для дискретных временных серий. Анализируются возможности использования данной концепции для опознания слабых, сильных землетрясений и техногенных взрывов, а также прогнозирования указанных сейсмических явлений.

В работе [87] изучаются энергия и информация дискретных динамических процессов. Первоначально определяется средняя энергия в момент времени  $\Delta$  дискретной нелинейной динамической системы в виде:

$$E_{\Delta} = \frac{m}{2} \int_X \left( \frac{\tau_{\Delta}^{k+1}(x) - \tau_{\Delta}^k(x)}{\Delta} \right)^2 d\mu(x), \quad \mu(x) = f(x) dx.$$

Здесь  $\tau_{\Delta}$  – нелинейное дискретное преобразование  $X \rightarrow X$  физической величины на временном масштабе  $\Delta$ ,  $m$  – масса движущейся частицы. В случае когда  $\Delta$  сколь угодно мал соотношение сводится к классическому определению средней энергии для механической системы, представленному в виде дифференциального уравнения. Далее используя энергию  $E_{\Delta}$  и информацию  $I_{\Delta}$  на временном масштабе  $\Delta$ , авторы приходят к соотношению:  $E_{\Delta} = KI_{\Delta}^2$ , где  $K$  – константа. Информация, связанная с  $\tau_{\Delta}$ , определяется в виде:  $I_{\Delta} = I(\tau_{\Delta}) = 1/H(\tau_{\Delta})$ , где  $H(\tau_{\Delta})$  – энтропия Колмогорова-Синяя.

Последовательности квазипроизводных дискретного типа будем отождествлять с набором величин, характеризующих движение частицы: “скоростью”  $v_j$ , “ускорением”  $a_j$ , “кинетической энергией”  $e_j$ , “поток энергии”  $q_j$ . Для

этого воспользуемся методом конечных разностей.

1) Последовательность наблюдений координаты  $\{x_j\}$ :

$$x = \{x_j\} = \{x(T), x(T + \tau), x(T + 2\tau), \dots, x(T + (N - 1)\tau)\}, \quad (2.2.2)$$

где  $x_j = x(T + j\tau)$ .

2) Для скорости  $\{v_j\}$ :

$$v = \{v(T), v(T + \tau), v(T + 2\tau), \dots, v(T + (N - 2)\tau)\}, \quad (2.2.3)$$

где  $v_j = v(T + j\tau), v_j = \frac{x_{j+1} - x_j}{\tau}$ .

Например,

$$v(T) = \frac{x(T + \tau) - x(T)}{\tau}, \dots,$$

$$v(T + (N - 2)\tau) = \frac{x(T + (N - 1)\tau) - x(T + (N - 2)\tau)}{\tau}.$$

3) Изменение во времени ускорения  $\{a_j\}$ :

$$a = \{a(T), a(T + \tau), a(T + 2\tau), \dots, a(T + (N - 3)\tau)\}, \quad (2.2.4)$$

где  $a_j = a(T + j\tau), a_j = \frac{v_{j+1} - v_j}{\tau} = \frac{x_{j+2} - 2x_{j+1} + x_j}{\tau^2}$ .

Например,

$$a(T) = \frac{x(T + 2\tau) - 2x(T + \tau) + x(T)}{\tau^2}, \dots,$$

$$a(T + (N - 3)\tau) = \frac{x(T + (N - 1)\tau) - 2x(T + (N - 2)\tau) + x(T + (N - 3)\tau)}{\tau^2}.$$

4) Последовательность наблюдений кинетической энергии  $\{e_j\}$ :

$$e = \{e(T), e(T + \tau), e(T + 2\tau), \dots, e(T + (N - 2)\tau)\}, \quad (2.2.5)$$

где  $e_j = e(T + j\tau), e_j = \frac{m^* v_j^2}{2} = \frac{m^*}{2} \frac{1}{\tau^2} (x_{j+1}^2 - 2x_{j+1}x_j + x_j^2)$ .

Например,

$$e(T) = \frac{m^*}{2} \frac{1}{\tau^2} (x^2(T + \tau) - 2x(T + \tau)x(T) + x^2(T)), \dots$$

$$e(T + (N - 2)\tau) = \frac{m^*}{2} \frac{1}{\tau^2} \times \\ \times (x^2(T + (N - 1)\tau) - 2x(T + (N - 2)\tau)x(T + (N - 1)\tau) + x^2(T + (N - 3)\tau)).$$

5) Последовательность наблюдений потока энергии  $\{q_j\}$ :

$$q = \{q(T), q(T + \tau), q(T + 2\tau), \dots, q(T + (N - 2)\tau)\}, \quad (2.2.6)$$

где  $q_j = q(T + j\tau)$ ,  $q_j = \frac{m^* v_j^3}{2} = \frac{m^*}{2} \frac{1}{\tau^3} (x_{j+1} - x_j)^3$ .

Аналогично,

$$q(T) = \frac{m^*}{2} \frac{1}{\tau^3} (x(T + \tau) - x(T))^3, \dots, \\ q(T + (N - 2)\tau) = \frac{m^*}{2} \frac{1}{\tau^3} (x(T + (N - 1)\tau) - x(T + (N - 2)\tau))^3.$$

Обобщая (2.2.2)–(2.2.6), динамику регистрируемого параметра сложной системы можно представить в виде:

$$\xi = \{\xi(T), \xi(T + \tau), \xi(T + 2\tau), \dots\}, \quad (2.2.7)$$

где  $\xi = \{x, v, a, e, q\}$ .

Для дискретного процесса  $\xi$  определяем среднее значение  $\langle \xi \rangle$ , флуктуации  $\delta \xi_j$  и абсолютную дисперсию  $\sigma^2$  в виде:

$$\langle \xi \rangle = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \xi(T + j\tau),$$

$$\delta \xi_j = \delta \xi(T + j\tau) = \xi(T + j\tau) - \langle \xi \rangle,$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \delta \xi_j^2(T + j\tau).$$

Верхний предел сумм определяется размерностью введенных величин.

## §2.3 Учет корреляций в последовательностях квазипроизводных разных порядков

Введем набор нормированных временных корреляционных функций (ВКФ) для последовательностей наблюдений  $\{x_j\}$ ,  $\{v_j\}$ ,  $\{a_j\}$ ,  $\{e_j\}$ ,  $\{q_j\}$ :

1) для временных вариаций координаты  $\{x_j\}$ :

$$X(t) = \frac{1}{(N-m)\sigma_X^2} \sum_{j=0}^{N-m-1} \delta x(T+j\tau)\delta x(T+(j+m)\tau),$$

$$\sigma_X^2 = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \delta x^2(T+j\tau),$$
(2.3.1)

где  $1 \leq m \leq N-1$ ;

2) скорости  $\{v_j\}$ :

$$V(t) = \frac{1}{(N-m-1)\sigma_V^2} \sum_{j=0}^{N-m-2} \delta v(T+j\tau)\delta v(T+(j+m)\tau),$$

$$\sigma_V^2 = \frac{1}{(N-1)} \sum_{j=0}^{N-1} \delta v^2(T+j\tau),$$
(2.3.2)

где  $1 \leq m \leq N-2$ ;

3) ускорения  $\{a_j\}$ :

$$A(t) = \frac{1}{(N-m-2)\sigma_A^2} \sum_{j=0}^{N-m-3} \delta a(T+j\tau)\delta a(T+(j+m)\tau),$$

$$\sigma_A^2 = \frac{1}{(N-2)} \sum_{j=0}^{N-3} \delta a^2(T+j\tau),$$
(2.3.3)

где  $1 \leq m \leq N-3$ ;

4) кинетической энергии  $\{e_j\}$ :

$$E(t) = \frac{1}{(N-m-1)\sigma_E^2} \frac{m^{*2}}{4} \sum_{j=0}^{N-m-2} \delta v^2(T+j\tau)\delta v^2(T+(j+m)\tau),$$

$$\sigma_E^2 = \frac{1}{(N-1)} \frac{m^{*2}}{4} \sum_{j=0}^{N-2} \delta v^4(T+j\tau),$$

где  $1 \leq m \leq N-2$ .

Объединяя последние два выражения получаем:

$$E(t) = \frac{(N-1)}{(N-m-1)} \frac{\sum_{j=0}^{N-m-2} \delta v^2(T+j\tau)\delta v^2(T+(j+m)\tau)}{\sum_{j=0}^{N-2} \delta v^4(T+j\tau)}; \quad (2.3.4)$$

5) для временных вариаций потока энергии  $\{q_j\}$ :

$$Q(t) = \frac{1}{(N-m-1)\sigma_Q^2} \frac{m^{*2}}{4} \sum_{j=0}^{N-m-2} \delta v^3(T+j\tau) \delta v^3(T+(j+m)\tau),$$

$$\sigma_Q^2 = \frac{1}{(N-1)} \frac{m^{*2}}{4} \sum_{j=0}^{N-2} \delta v^6(T+j\tau),$$

где  $1 \leq m \leq N-2$ .

Подставляя выражение для  $\sigma_Q^2$  в уравнение для ВКФ  $Q(t)$  получаем:

$$Q(t) = \frac{(N-1)}{(N-m-1)} \frac{\sum_{j=0}^{N-m-2} \delta v^3(T+j\tau) \delta v^3(T+(j+m)\tau)}{\sum_{j=0}^{N-2} \delta v^6(T+j\tau)}. \quad (2.3.5)$$

Из приведенных выражений следует, что при вычислении корреляционных функций (2.3.4)–(2.3.5) в результате нормировки нет необходимости в определении массы  $m^*$  частицы.

Используя (2.3.1)–(2.3.5), можно записать общее выражение для ВКФ:

$$\Xi(t) = \frac{1}{Z} \frac{\sum_{j=0}^{Z-1} \delta \xi(T+j\tau) \delta \xi(T+(j+m)\tau)}{\sigma_{\Xi}^2}, \quad (2.3.6)$$

где

$$Z = \begin{cases} N-m, & \Xi = X, \\ N-m-1, & \Xi = V, E, Q, \\ N-m-2, & \Xi = A. \end{cases}$$

Нормированная ВКФ должна удовлетворять условиям нормировки и ослабления корреляций:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \Xi(t) = 1, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \Xi(t) = 0. \quad (2.3.7)$$

Однако следует отметить, что условие ослабления корреляций в случае реальных сложных систем не всегда выполняется.

Представим набор значений  $\delta\xi_j = \delta\xi(T + j\tau), j = 0, \dots, N - 1$  динамической переменной  $\xi$  в виде  $k$  - компонентного вектора начального состояния системы:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_k^0(0) &= \{\delta\xi_0, \delta\xi_1, \delta\xi_2, \dots, \delta\xi_{k-1}\} = \\ &= \{\delta\xi(T), \delta\xi(T + \tau), \delta\xi(T + 2\tau), \dots, \delta\xi(T + (k - 1)\tau)\}. \end{aligned}$$

Вектор текущего состояния системы можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{m+k}^m(t) &= \{\delta\xi_m, \delta\xi_{m+1}, \delta\xi_{m+2}, \dots, \delta\xi_{m+k-1}\} = \\ &= \{\delta\xi(T + m\tau), \delta\xi(T + (m + 1)\tau), \delta\xi(T + (m + 2)\tau), \dots, \delta\xi(T + (m + k - 1)\tau)\}, \end{aligned}$$

где  $k < N - 1$ ,  $\mathbf{A}_k^0 = \{x_k^0, v_k^0, a_k^0, e_k^0, q_k^0\}$ ,  $\mathbf{A}_{m+k}^m = \{x_{m+k}^m, v_{m+k}^m, a_{m+k}^m, e_{m+k}^m, q_{m+k}^m\}$ .

Тогда можно представить нормированную ВКФ (2.3.6) в виде:

$$\Xi(t) = \frac{\langle \mathbf{A}_k^0(0) \mathbf{A}_{m+k}^m(t) \rangle}{\langle |\mathbf{A}_k^0(0)|^2 \rangle}, \quad (2.3.8)$$

где  $t = m\tau$ ,  $\langle \dots \rangle$  – скалярное произведение векторов состояния:  $\langle \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \rangle = \sum_{j=0}^{k-1} A_j \cdot B_j$ .

Вектор текущего состояния  $\mathbf{A}_{m+k}^m(t)$  можно формально определить при помощи многократного действия эволюционного оператора  $U(t + \tau, t)$ :

$$\mathbf{A}_{m+k}^m(t) = U(T + m\tau, T) \mathbf{A}_k^0(0).$$

Переход от уравнения (2.3.6) к выражению (2.3.8) возможен при выполнении следующих условий

$$\sigma_{\Xi}^2 \cong k^{-1} \sum_{j=1}^{k-1} \delta\xi_j^2, \sigma_{\Xi}^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} k^{-1} \sum_{j=0}^{k-1} \delta\xi_j^2. \quad (2.3.9)$$

## §2.4 Геометрическое описание динамики векторов состояния

Рассмотрим введенное в соотношении (2.3.8) скалярное произведение векторов состояния. Переобозначим вектора состояния  $\mathbf{A} = \mathbf{A}_k^0(0)$  и  $\mathbf{B} = \mathbf{A}_{m+k}^m(m\tau)$ .

Используя геометрическое соотношение, представленное на Рис. 2.4.1, запишем скалярное произведение векторов  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  в следующем виде

$$\begin{aligned}
 1) \langle \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \rangle &= |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}| \cos \vartheta, \cos \vartheta = a(t), \\
 2) \mathbf{B} &= \mathbf{B}_{\parallel} + \mathbf{B}_{\perp}, \\
 3) |\mathbf{B}_{\parallel}| &= |\mathbf{B}| \cos \vartheta = |\mathbf{B}| a(t), \\
 4) |\mathbf{B}_{\perp}| &= |\mathbf{B}| \sin \vartheta = |\mathbf{B}| \{1 - [a(t)]^2\}^{\frac{1}{2}},
 \end{aligned}
 \tag{2.4.1}$$

где  $|\mathbf{A}|$ ,  $|\mathbf{B}|$  представляют собой длины векторов  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ .

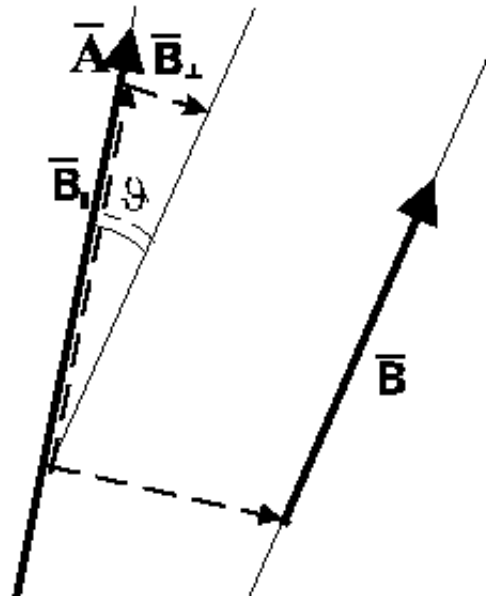


Рис. 2.4.1: Геометрическое соотношение векторов состояния.

Расстояние  $R(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  между векторами  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  может быть записано следующим образом

$$R(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \{|\mathbf{A} - \mathbf{B}|^2\}^{\frac{1}{2}} = \left\{ \sum_{j=0}^{k-1} (A_j - B_j)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Принимая во внимание соотношения (2.4.1), замечаем, что имеет место выражение

$$R(\mathbf{A}_k^0(0), \mathbf{A}_{m+k}^m(t)) = \{|\mathbf{A}_{m+k,\perp}^m(t)|^2\}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} |\mathbf{A}_{m+k}^m(t)| \{1 - a^2(t)\}^{\frac{1}{2}}.$$

Отсюда следует, что расстояние между векторами состояния определяется динамикой корреляционного процесса.

Учитывая соотношения (2.3.7) и (2.3.9), а также определение вектора текущего состояния, получаем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} R(\mathbf{A}_k^0(0), \mathbf{A}_{m+k}^m(t)) = \sqrt{2k\sigma_{\Xi}^2},$$

где  $\sigma_{\Xi}^2$  – дисперсия.

В соответствии с условием ослабления корреляций (2.3.7) параллельная компонента  $\mathbf{A}_{m+k,\parallel}^m(t)$  вектора текущего состояния постепенно аннигилирует при  $t \rightarrow \infty$ . В связи с этим состояние системы определяется перпендикулярной компонентой  $\mathbf{A}_{m+k,\perp}^m(t)$ . В пределе при  $t \rightarrow \infty$  имеют место соотношения

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{A}_{m+k,\parallel}^m(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{A}_{m+k,\perp}^m(t) = \mathbf{A}_{m+k}^m(t),$$

что соответствует известному принципу затухания корреляций Боголюбова.

## §2.5 Формализм функций памяти для последовательностей квазипроизводных дискретного типа

Опираясь на соотношения формализма функций памяти Цванцига-Мори, по аналогии с работами [48, 73, 83] можно записать аналитические выражения для цепочки конечно-разностных уравнений с набором исходных ВКФ  $\Xi(t)$  и получить соотношения для функций памяти более высокого порядка  $M_i^{\Xi}(t), i = 1, 2, \dots$ , где  $\Xi = \{X, V, A, E, Q\}$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\Delta \Xi(t)}{\Delta t} = \lambda_1^{\xi} \Xi(t) - \tau \Lambda_1^{\xi} \sum_{j=0}^{m-1} M_1^{\Xi}(j\tau) \Xi(t - j\tau), \\ \frac{\Delta M_1^{\Xi}(t)}{\Delta t} = \lambda_2^{\xi} M_1^{\Xi}(t) - \tau \Lambda_2^{\xi} \sum_{j=0}^{m-1} M_2^{\Xi}(j\tau) M_1^{\Xi}(t - j\tau), \\ \dots \\ \frac{\Delta M_{n-1}^{\Xi}(t)}{\Delta t} = \lambda_n^{\xi} M_{n-1}^{\Xi}(t) - \tau \Lambda_n^{\xi} \sum_{j=0}^{m-1} M_n^{\Xi}(j\tau) M_{n-1}^{\Xi}(t - j\tau). \end{array} \right. \quad (2.5.1)$$

Здесь  $\lambda_n^\xi$  – собственные значения квазиоператора Лиувилля  $\widehat{L}^\xi$ ,  $\Lambda_n^\xi$  – релаксационные параметры, имеющие размерность квадрата частоты:

$$\lambda_n^\xi = i \frac{\langle \mathbf{W}_n^\xi \widehat{L}_n^\xi \mathbf{W}_n^\xi \rangle}{\langle |\mathbf{W}_n^\xi|^2 \rangle}, \quad \Lambda_n^\xi = \frac{\langle |\mathbf{W}_n^\xi|^2 \rangle}{\langle |\mathbf{W}_{n-1}^\xi|^2 \rangle}. \quad (2.5.2)$$

Нормированные дискретные функции памяти  $n - 1$  - порядка определяются в виде

$$M_{n-1}^\Xi(t) = \frac{\langle \mathbf{W}_{n-1}^\xi (1 + i\tau \widehat{L}_{n-1}^\xi)^m \mathbf{W}_{n-1}^\xi \rangle}{\langle |\mathbf{W}_{n-1}^\xi|^2 \rangle}.$$

Квазиоператор Лиувилля  $\widehat{L}_n^\xi$  может быть получен из  $\widehat{L}^\xi$  путем использования техники проекционных операторов. В свою очередь  $\widehat{L}^\xi$  определяется следующим образом:

$$\widehat{L}^\xi(t, \tau) = (i\tau)^{-1} (U^\xi(t + \tau, t) - 1), \quad \xi_{i+1} = U^\xi(t + \tau, t) \xi_i. \quad (2.5.3)$$

При помощи эволюционного оператора  $U^\xi(t + \tau, t)$  можно формально записать дискретное уравнение движения

$$\frac{\Delta \xi(t)}{\Delta t} = i \widehat{L}^\xi(t, \tau) \xi(t), \quad \frac{\Delta \xi_j(t)}{\Delta t} = \frac{\xi_{j+1}(t + \tau) - \xi_j(t)}{\tau} = \tau^{-1} \{U^\xi(t + \tau, t) - 1\} \xi_j(t).$$

Отметим, что уравнение движения для величины  $\xi$  можно записать, используя переходы от  $d/dt$  к  $\Delta/\Delta t$  в трех разностных формах [86].

Динамические ортогональные переменные  $\mathbf{W}_n^\xi$  в уравнении (2.5.2) получаются путем использования процедуры ортогонализации Грама-Шмидта [78]:  $\langle \mathbf{W}_n^\xi, \mathbf{W}_m^\xi \rangle = \delta_{n,m} \langle |\mathbf{W}_n^\xi|^2 \rangle$ , где  $\delta_{n,m}$  – символ Кронекера. Переменные  $\mathbf{W}_n^\xi$  связаны с младшими  $\mathbf{W}_{n-1}^\xi$  соотношениями:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_0^\xi &= \mathbf{A}_k^0(0), \quad \mathbf{W}_1^\xi = (i\widehat{L}^\xi - \lambda_1^\xi) \mathbf{W}_0^\xi, \quad \mathbf{W}_2^\xi = (i\widehat{L}^\xi - \lambda_2^\xi) \mathbf{W}_1^\xi - \Lambda_1^\xi \mathbf{W}_0^\xi, \dots, \\ \mathbf{W}_n^\xi &= (i\widehat{L}^\xi - \lambda_n^\xi) \mathbf{W}_{n-1}^\xi - \Lambda_{n-1}^\xi \mathbf{W}_{n-2}^\xi - \dots \end{aligned} \quad (2.5.4)$$

Таким образом, представлен общий алгоритм построения конечно-разностных уравнений немарковского типа для введенных ранее последовательностей:

- 1) последовательность наблюдений координат  $\{x_j\}$ :  $\Xi(t) \equiv X(t)$ ,  $\mathbf{W}_0^x = x_k^0$ ;
- 2) скорости  $\{a_j\}$ :  $\Xi(t) \equiv V(t)$ ,  $\mathbf{W}_0^v = v_k^0$ ;

- 3) ускорения  $\{v_j\}$ :  $\Xi(t) \equiv A(t)$ ,  $\mathbf{W}_0^a = a_k^0$ ;  
 4) кинетической энергии  $\{e_j\}$ :  $\Xi(t) \equiv E(t)$ ,  $\mathbf{W}_0^e = e_k^0$ ;  
 5) потока энергии  $\{q_j\}$ :  $\Xi(t) \equiv Q(t)$ ,  $\mathbf{W}_0^q = q_k^0$ .

Полученные конечно-разностные кинетические уравнения для ВКФ и функций памяти (2.5.1) представляют обобщение статистической теории необратимых процессов Цванцига-Мори [60, 64] на случай анализа квазипроизводных различного порядка для динамики сложных негамильтоновых систем.

## §2.6 Учет нестационарности исследуемого процесса

В случае нестационарного процесса ВКФ в соотношении (2.3.8) примет вид

$$\Xi(T, t) = \frac{\langle \mathbf{A}(T)\mathbf{A}(T+t) \rangle}{\langle |\mathbf{A}(T)| \rangle \langle |\mathbf{A}(T+t)| \rangle},$$

где  $T$  – начальное время регистрации. Нестационарная ВКФ будет удовлетворять условиям подобным соотношениям (2.3.7).

Для учета эффектов нестационарности в исследуемой дискретной динамике необходимо использовать функцию нестационарности

$$\gamma(T, t) = \frac{\langle |\mathbf{A}(T+t)| \rangle}{\langle |\mathbf{A}(T)| \rangle} = \left\{ \frac{\sigma^2(T+t)}{\sigma^2(T)} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Тогда можно получить цепочку формально точных конечно-разностных кинетических уравнений для нестационарных ВКФ и функций памяти

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\Delta \Xi(t)}{\Delta t} = \lambda_1^\xi \Xi(t) - \tau \Lambda_1^\xi \sum_{j=0}^{m-1} M_1^\Xi(j\tau) \Xi(t-j\tau) \left\{ \frac{\gamma_1^\xi(j\tau) \gamma_1^\xi(t-j\tau)}{\gamma_1^\xi(t)} \right\}, \\ \frac{\Delta M_1^\Xi(t)}{\Delta t} = \lambda_2^\xi M_1^\Xi(t) - \tau \Lambda_2^\xi \sum_{j=0}^{m-1} M_2^\Xi(j\tau) M_1^\Xi(t-j\tau) \left\{ \frac{\gamma_2^\xi(j\tau) \gamma_2^\xi(t-j\tau)}{\gamma_2^\xi(t)} \right\}, \\ \dots \\ \frac{\Delta M_{n-1}^\Xi(t)}{\Delta t} = \lambda_n^\xi M_{n-1}^\Xi(t) - \\ - \tau \Lambda_n^\xi \sum_{j=0}^{m-1} M_n^\Xi(j\tau) M_{n-1}^\Xi(t-j\tau) \left\{ \frac{\gamma_{n-1}^\xi(j\tau) \gamma_{n-1}^\xi(t-j\tau)}{\gamma_{n-1}^\xi(t)} \right\}. \end{array} \right. \quad (2.6.1)$$

Здесь введены следующие обозначения

$$\gamma_n^\xi(j\tau) = \frac{|\mathbf{W}_n^\xi(j\tau)|}{|\mathbf{W}_n^\xi(0)|}, \quad M_n^{\Xi}(t) = \frac{\langle \mathbf{W}_n^\xi(0) \mathbf{W}_n^\xi(t) \rangle}{|\mathbf{W}_n^\xi(0)| |\mathbf{W}_n^\xi(t)|}, \quad (2.6.2)$$

$$\lambda_n^\xi = i \frac{\langle \mathbf{W}_{n-1}^\xi \widehat{L}_n^\xi \mathbf{W}_{n-1}^\xi \rangle}{|\mathbf{W}_{n-1}^\xi|^2}, \quad \Lambda_n^\xi = \frac{\langle \mathbf{W}_{n-1}^\xi \widehat{L}_n^\xi \mathbf{W}_n^\xi \rangle}{|\mathbf{W}_{n-1}^\xi|^2}.$$

Ортогональные динамические переменные  $\mathbf{W}_n^\xi(t)$  находятся аналогично соотношениям (2.5.4). В данном случае оператор эволюции  $U^\xi(t + \tau, t)$  примет более сложный вид, что связано с учетом нестационарности исследуемого процесса.

В следующей главе учет нестационарности в дискретной динамике экспериментально наблюдаемого параметра негамильтоновой системы будет выполняться в рамках использования процедур локализации. Предварительно оценивается оптимальная длина локального окна с “островками” стационарности, для которых рассчитываемые временные корреляционные функции, функции статистической памяти, частотные релаксационные и кинетические параметры сохраняют свою инвариантность.

## §2.7 Критерии статистической памяти для последовательностей квазипроизводных разных порядков

Параметр немарковости  $\varepsilon$  первоначально был предложен для количественной оценки степени проявления демарковизации необратимых процессов в конденсированных средах [88].

Введем меры памяти для анализа эффектов последействия в последовательностях квазипроизводных дискретного типа. Времена релаксации исходной ВКФ  $M_0^\Xi(t)$  и функций памяти  $n$ -го порядка  $M_n^\Xi(t)$  определяются следующим образом:  $\tau_{M_0^\Xi} = \Delta t \sum_{j=0}^{N-1} M_0^\Xi(t_j), \dots, \tau_{M_n^\Xi} = \Delta t \sum_{j=0}^{N-1} M_n^\Xi(t_j)$ . Простым

критерием сопоставления времен существования корреляций и статистической памяти в системе служит безразмерный параметр, определяемый отношением:  $\varepsilon_1 = \tau_{M_0^{\Xi}}/\tau_{M_1^{\Xi}}$ .

По аналогии с более поздними работами (см., например, [89]) введем статистический спектр параметра немарковости для описания степени демарковизации на различных релаксационных уровнях:

$$\{\varepsilon_i^{\xi}\} = \{\varepsilon_1^{\xi}, \varepsilon_2^{\xi}, \dots, \varepsilon_{n-1}^{\xi}\},$$

где  $\varepsilon_1^{\xi} = \tau_{M_0^{\Xi}}/\tau_{M_1^{\Xi}}, \dots, \varepsilon_{n-1}^{\xi} = \tau_{M_{n-1}^{\Xi}}/\tau_{M_n^{\Xi}}$ .

Для описания эффектов статистической памяти и степени коррелированности в дискретной динамике сложных систем было выполнено частотно-зависящее обобщение критерия  $\varepsilon_i^{\xi}(\nu)$ :

$$\varepsilon_i^{\xi}(\nu) = \left\{ \frac{\mu_{i-1}^{\xi}(\nu)}{\mu_i^{\xi}(\nu)} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Здесь  $\mu_i^{\xi}(\nu)$  представляет собой спектральную плотность мощности или спектр мощности соответствующей функции памяти  $i$ -го порядка  $M_i^{\Xi}(t)$ :

$$\mu_i^{\xi}(\nu) = \left| \Delta t \sum_{j=0}^{N-1} M_i^{\Xi}(t_j) \cos(2\pi\nu t_j) \right|^2.$$

В работе [90] для описания эффектов статистической памяти в релаксационных процессах для физических систем (от движения броуновской частицы до осцилляций узлов решетки в кристаллических твердых телах) предложена другая мера памяти  $\delta = \tau_a^2/\tau_M^2$ , где  $\tau_a^2 = \left| \int_0^{\infty} ta(t)dt \right|$ ,  $\tau_M^2 = \left| \int_0^{\infty} tM(t)dt \right|$ . Здесь  $\tau_a^2$  и  $\tau_M^2$ , возведенные в квадрат релаксационные масштабы автокорреляционной функции скорости  $a(t)$  и соответствующей функции памяти  $M(t)$ . В случае анализа временных последовательностей параметров сложных систем данная мера примет вид:

$$\delta_i^{\xi}(\nu) = \left| \frac{\widetilde{M}_{i-1}^{\Xi}(\nu)}{\widetilde{M}_i^{\Xi}(\nu)} \right|, \quad (2.7.1)$$

где  $\widetilde{M}'_i{}^\Xi(\nu) = d\widetilde{M}_i{}^\Xi(\nu)/d\nu$ ,  $\widetilde{M}_i{}^\Xi(\nu)$  – Фурье-образ соответствующей функции памяти  $i$ -го порядка  $M_i{}^\Xi(t)$ .

Введенные критерии статистической памяти описывают степень проявления эффектов последействия и коррелированности в дискретной динамике. Для изучения эффектов статистической памяти в долговременной составляющей последовательностей  $\{x_j\}, \dots, \{q_j\}$  исследуется область сверхнизких частот  $\varepsilon_i^\xi(\nu \rightarrow 0)$ ,  $\delta_i^\xi(\nu \rightarrow 0)$ . Для упрощения переобозначим параметры  $\{\varepsilon_1^\xi(0), \delta_1^\xi(0)\}$  как  $\{\varepsilon^\xi, \delta^\xi\}$ . В том случае, когда  $\{\varepsilon^\xi, \delta^\xi\} \gg 1$ , процесс характеризуется ярковыраженными марковскими особенностями. Тогда время существования памяти намного короче (слабая статистическая память), чем временной масштаб релаксации исходной ВКФ. В предельном случае  $\{\varepsilon^\xi, \delta^\xi\} \rightarrow \infty$  динамика описывается *дельта*-образной памятью. Уменьшения значений критериев памяти  $\{\varepsilon^\xi, \delta^\xi\} \approx 1$  отражает удлинение времени существования статистической памяти. Тогда время существования памяти соизмеримо с временным масштабом релаксации исходной ВКФ. При  $\{\varepsilon^\xi, \delta^\xi\} > 1$  динамика описывается как квазимарковская с проявлением умеренной (промежуточной) статистической памятью.

## §2.8 Выводы

Техника проекционных операторов Цванцига-Мори используется для изучения динамических свойств жидкостей, исследования динамики броуновской частицы, описания фазовых переходов, объяснения долговременного поведения корреляционных функций, вычисления коэффициентов переноса, анализа аномальной диффузии и различных экспериментальных спектров [77]. Исследование эффектов статистической памяти в многочастичных физических системах при помощи формализма функций памяти подразумевает использование гамильтониана, операция статистического усреднения осуществляется с помощью квантового оператора плотности или классической функции

распределения Гиббса. Движение частиц в физических системах определяется состояниями с непрерывным временем, эволюцию которых удобно рассматривать при помощи интегро-дифференциальных уравнений с бесконечно малыми приращениями времени. В отличие от этого стохастическая динамика сложных систем характеризуется дискретными последовательностями наблюдений, фиксируемых с определенным шагом дискретизации. Дискретность параметров приводит к затруднениям в традиционном теоретическом описании сложных систем на основе интегро-дифференциального исчисления. Кроме того, становится невозможным использование гамильтониана.

В настоящей главе для временных корреляционных функций и функций памяти, вычисляемых на основе временных последовательностей квазипроизводных различных порядков экспериментально фиксируемых параметров сложных систем, построена цепочка связанных формально точных конечно-разностных кинетических уравнений типа Цванцига-Мори. Полученные уравнения позволяют ввести нормированные временные автокорреляционные функции, функции статистической памяти разного порядка, выполнить построение спектров мощности, провести расчеты ортогональных динамических переменных, кинетических и релаксационных параметров на разных уровнях статистического описания, а также осуществить сравнение и сопоставление временных масштабов релаксации и существования памяти в динамике квазипроизводных, рассчитываемых на основе исходных временных серий. Указывается на возможность учета нестационарности в последовательностях квазипроизводных с использованием функций нестационарности.

На основании представленных выводов на защиту выносятся следующее положение. **Формализм Цванцига-Мори в конечно-разностном представлении применим для анализа динамики негамильтоновых систем.**

## Глава 3

# Обобщение конечно-разностного формализма функций памяти Цванцига-Мори на случай нестационарных процессов

### §3.1 Использование процедур локализации в анализе динамики сложных систем

Характерная особенность большинства методов статистического анализа временных рядов состоит в том, что для детального описания свойств исследуемой системы требуется максимально возможный набор экспериментальных данных. Чем больше статистика временных зависимостей фиксируемых динамических переменных, тем более точной будет информация, предоставляемая методом. При этом в основном, исследуются либо бифуркационные свойства, связанные с динамическими фазовыми переходами, либо характеристики, полученные путем усреднения по большим интервалам времени и обусловленные перемежаемостью, фрактальностью, самоорганизованной критичностью и другими свойствами динамических и статистических систем.

В то же время, процессы, реализуемые в сложных системах, представляют последовательную смену динамических состояний. Возникает задача извле-

чения информации не только об универсальных или глобальных закономерностях процесса, но и об отдельном динамическом состоянии или особенностях локальной структуры исследуемой системы. В данном случае анализ локальных последовательностей наблюдений оказывается предпочтительным в сравнении с исследованием экспериментальных данных, зафиксированных в течение больших интервалов времени. С этой целью при анализе временных серий используются процедуры локализации.

Например, для извлечения информации о локальных персистентных и антиперсистентных особенностях временных сигналов проводится анализ локального поведения показателя Херста [73]. Причиной изменений в поведении параметра  $H$  является не только представление сигнала в виде последовательности выборок, но и медленно изменяющиеся вариации корреляционного шума [A13].

Для изучения локального поведения показателя Херста возможна реализация двух алгоритмов. В первом случае вычисление проводится путем разбиения исходной временной серии на короткие сегменты равной длины  $n\tau$ . Получаем последовательность значений:

$$H\{T, \dots, T + (n - 1)\tau\}, H\{T + n\tau, \dots, T + (2n - 1)\tau\}, \dots, \\ H\{T + (K - n - 1)\tau, \dots, T + (K - 1)\tau\}.$$

В фигурных скобках указаны временные выборки наблюдений, для которых рассчитывается  $H$ . Данный алгоритм предпочтительно использовать для длинных временных серий.

Во втором алгоритме сегмент определенной длины  $n\tau$  перемещается по исходной последовательности путем сдвига на шаг дискретизации. В каждом случае рассчитывается показатель Херста. Получаем набор значений:

$$H\{T, \dots, T + (n - 1)\tau\}, H\{T + \tau, \dots, T + n\tau\}, \dots, H\{T + (K - n - 1)\tau, \dots, T + (K - 1)\tau\}.$$

В заключительной главе будут обобщены результаты анализа локальных особенностей и закономерностей эволюции некоторых сложных систем [A2,

A4, A5, A7, A23]. В рамках обобщения конечно-разностного формализма функций памяти Цванцига-Мори на случай локальных выборок дискретных временных рядов определяются динамические, кинетические и релаксационные переменные и параметры, строятся частотные спектры ВКФ, функций и мер памяти [91].

### §3.2 Поиск оптимальной длины локального окна

Реализация процедур локализации требует предварительного определения оптимальной длины локального окна. В случае слишком малого количества наблюдений вычисляемые параметры не будут обладать необходимой “чувствительностью” и надежностью [73, 86]. При выборе большого числа наблюдений локальные параметры потеряют необходимую чувствительность в результате шумовых эффектов и возрастающей погрешности. Для определения оптимальной длины локального окна используется оригинальный подход, представленный в работах [A2, A4, A5, A7, A23].

Возможны два пути поиска оптимальной длины локального окна. Продемонстрируем их реализацию на случай исследования локального поведения кинетических  $\lambda_i$  и релаксационных  $\Lambda_i$  параметров (например, см. соотношения (2.5.2), (2.6.2)).

Первый способ оптимизации состоит из следующих шагов:

1. В исходной временной последовательности выбирается окно длиной в 50 наблюдений.
2. Осуществляется расчет параметров, для которых предусмотрена локализация.
3. Длина локального окна увеличивается на один шаг дискретизации.
4. Вычисляются параметры  $\lambda_i$ ,  $\Lambda_i$ , где  $i = 1, 2, 3$ .
5. Вычисляем кинетические и релаксационные параметры до тех пор, пока

длина окна не достигнет  $200 \div 300$  наблюдений.

6. Выход на “плато” анализируемых параметров определяет оптимальную длину локальной выборки.

“Медленный” алгоритм более трудоемкий. Его использование оправдано в случае, когда получившаяся в первом алгоритме зависимость, имеет сложную изломанную форму. Локальное окно перемещается по всей последовательности экспериментальных данных. Накопленный массив значений, например,  $\lambda_i(N = 50, t)$  усредняется. Искомая зависимость будет состоять из средних значений параметров для разных длин локального окна. Количество наблюдений как и в первом случае варьируется от 50 до  $200 \div 300$ .

### §3.3 Обобщение формализма функций памяти Цванцига-Мори на случай локальных выборок дискретных временных рядов

Представим динамику экспериментально фиксируемого параметра  $X$  в виде временной серии  $\{x_j\}$ :

$$X = \{x(T), x(T + \tau), \dots, x(T + (N - 1)\tau)\}.$$

Здесь  $T$  – начальный момент регистрации сигнала,  $(N - 1)\tau$  – время регистрации сигнала,  $\tau$  – временной шаг дискретизации сигнала,  $x_j = x(T + j\tau)$  – значение величины  $X$  на  $j$ -м шаге.

Для анализа локальных особенностей исходной временной серии выберем окно:

$$\xi_0 = \{x(T), x(T + \tau), \dots, x(T + (n - 1)\tau)\},$$

где  $(n - 1)\tau$  – время регистрации наблюдений, вошедших в выборку  $\xi_0$ . Передвигая окно от начала исходной временной серии  $\{x_j\}$  каждый раз на один

шаг дискретизации  $\tau$ , получаем  $R = N - n + 1$  локальных выборок:

$$\begin{aligned}\xi_0 &= \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\}, \\ &\dots \\ \xi_{R-1} &= \{x_{N-n}, x_{N-n+1}, \dots, x_{N-1}\}.\end{aligned}$$

Средние значения для каждой из выборок определяются в виде

$$\begin{aligned}\langle \xi_0 \rangle &= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} x_{j+0}, \\ &\dots \\ \langle \xi_{R-1} \rangle &= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} x_{j+(N-n)}.\end{aligned}$$

Флуктуации значений переменной внутри выборок будут иметь вид

$$\begin{aligned}\delta \xi_0 &= \{\delta x_0, \delta x_1, \dots, \delta x_{n-1}\}, \\ &\dots \\ \delta \xi_{R-1} &= \{\delta x_{N-n}, \delta x_{N-n+1}, \dots, \delta x_{N-1}\}.\end{aligned}\tag{3.3.1}$$

Введем набор временных корреляционных функций (ВКФ) для приведенных последовательностей (3.3.1):

$$\begin{aligned}a_0(t) &= \frac{\langle \delta \xi_0(0) \delta \xi_0(t) \rangle}{\langle |\delta \xi_0(0)|^2 \rangle}, \\ &\dots \\ a_{R-1}(t) &= \frac{\langle \delta \xi_{R-1}(0) \delta \xi_{R-1}(t) \rangle}{\langle |\delta \xi_{R-1}(0)|^2 \rangle}.\end{aligned}\tag{3.3.2}$$

Здесь  $t = m\tau$  и

$$\begin{aligned}\langle \delta \xi_0(0) \delta \xi_0(t) \rangle &= \frac{1}{n-m} \sum_{j=0}^{n-1-m} \delta x(T + j\tau) \delta x(T + (j+m)\tau), \\ &\dots \\ \langle \delta \xi_{R-1}(0) \delta \xi_{R-1}(t) \rangle &= \\ &= \frac{1}{n-m} \sum_{j=0}^{n-1-m} \delta x(T + (j+N-n)\tau) \delta x(T + (j+N-n+m)\tau).\end{aligned}$$

Свойства нормировки и ослабления корреляций для ВКФ (3.3.2):

$$\lim_{t \rightarrow 0} a_0(t) = 1, \lim_{t \rightarrow \infty} a_0(t) = 0, \dots$$

Для описания эволюции дискретной последовательности наблюдений внутри выборки  $\xi_0$  воспользуемся конечно-разностным уравнением Лиувилля:

$$\frac{\Delta \xi_0(t)}{\Delta t} = \frac{\xi_0(t + \tau) - \xi_0(t)}{\tau} = i\widehat{L}^{(0)}(t, \tau)\xi_0(t), \quad (3.3.3)$$

что равноценно уравнению

$$\frac{\Delta x_j(t)}{\Delta t} = \frac{x_{j+1}(t + \tau) - x_j(t)}{\tau} = i\widehat{L}^{(0)}(t, \tau)x_j(t), \quad j = 0, \dots, n - 1.$$

Здесь  $\widehat{L}^{(0)}(t, \tau)$  представляет собой квазиоператор Лиувилля для выборки наблюдений  $\xi_0$ :

$$\begin{aligned} \widehat{L}^{(0)}(t, \tau) &= (i\tau)^{-1}\{U^{(0)}(t + \tau, t) - 1\}, \\ \xi_0(t + \tau) &= U^{(0)}(t + \tau, t)\xi_0(t), \end{aligned}$$

где  $U^{(0)}(t + \tau, t)$  – оператор эволюции, который определяет значение переменной  $\xi_0(t)$  через один шаг дискретизации. Очевидно, что уравнения (3.3.3) используются для изучения эволюции переменной во всех локальных выборках.

Последовательность значений динамической переменной  $\delta\xi_{0,j} = \delta x(j\tau)$ ,  $j = 0, \dots, n - 1$  представим в виде  $k$ -компонентных векторов начального и текущего состояний системы:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{(0)}(0) &= \{\delta x_0, \delta x_1, \dots, \delta x_{k-1}\}, \\ \mathbf{A}^{(0)}(t) &= \{\delta x_m, \delta x_{m+1}, \dots, \delta x_{m+k-1}\}. \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

По аналогии для всех последующих выборок определяются векторы начального и текущего состояний, например, для выборки  $\xi_{R-1}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{(R-1)}(0) &= \{\delta x_{N-n}, \delta x_{N-n+1}, \dots, \delta x_{N-n+k-1}\}, \\ \mathbf{A}^{(R-1)}(t) &= \{\delta x_{N-n+m}, \delta x_{N-n+m+1}, \dots, \delta x_{N-n+m+k-1}\}. \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

За счет этого достигается сокращение в описании изменений динамической переменной. Время  $t$  отсчитывается с начального индекса каждой выборки.

$k$ -компонентные векторы  $\mathbf{A}^{(0)}(t), \dots, \mathbf{A}^{(R-1)}(t)$ , сдвинутые по дискретной временной шкале на расстояние  $t = m\tau$ , могут быть формально получены путем многократного действия операторов эволюции  $U^{(0)}(t + \tau, t), \dots, U^{(R-1)}(t + \tau, t)$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{(0)}(t) &= U^{(0)}(T + m\tau, T)\mathbf{A}^{(0)}(0), \\ &\dots, \\ \mathbf{A}^{(R-1)}(t) &= U^{(R-1)}(T + m\tau, T)\mathbf{A}^{(R-1)}(0). \end{aligned}$$

Используя выражение для скалярного произведения векторов и соотношения (3.3.2), (3.3.4), (3.3.5), представим нормированные ВКФ в виде:

$$\begin{aligned} a^{(0)}(t) &= \frac{\langle \mathbf{A}^{(0)}(0)\mathbf{A}^{(0)}(t) \rangle}{\langle |\mathbf{A}^{(0)}(0)|^2 \rangle}, \\ &\dots \\ a^{(R-1)}(t) &= \frac{\langle \mathbf{A}^{(R-1)}(0)\mathbf{A}^{(R-1)}(t) \rangle}{\langle |\mathbf{A}^{(R-1)}(0)|^2 \rangle}. \end{aligned} \tag{3.3.6}$$

### §3.4 Конечно-разностные кинетические уравнения для локальных временных автокорреляционных функций

Рассмотрим уравнение Лиувилля (3.3.3) для вектора текущего состояния системы в первом локальном окне:

$$\frac{\Delta \mathbf{A}^{(0)}(t)}{\Delta t} = i\widehat{L}^{(0)}(t, \Delta t)\mathbf{A}^{(0)}(t). \tag{3.4.1}$$

Введем линейный оператор  $\Pi^{(0)}$ , который проектирует текущий вектор  $\mathbf{A}^{(0)}(t)$  на направление начального вектора  $\mathbf{A}^{(0)}(0)$  и ортогональный оператор  $\mathbf{P}^{(0)}$ , который выделяет ортогональное направление. Операторы  $\Pi^{(0)}$  и  $\mathbf{P}^{(0)}$  обладают следующими свойствами:

$$\Pi^{(0)} = \frac{|\mathbf{A}^{(0)}(0)\rangle\langle \mathbf{A}^{(0)}(0)|}{\langle |\mathbf{A}^{(0)}(0)|^2 \rangle},$$

$$\Pi^{(0)2} = \Pi^{(0)}, \mathbf{P}^{(0)} = 1 - \Pi^{(0)}, \mathbf{P}^{(0)2} = \mathbf{P}^{(0)}, \Pi^{(0)}\mathbf{P}^{(0)} = \mathbf{P}^{(0)}\Pi^{(0)} = 0.$$

Они являются идемпотентными и взаимнодополнительными.

Выбор вида оператора проектирования  $\Pi^{(0)}$  связан с получением ВКФ  $a^{(0)}(t)$  путем проектирования вектора  $\mathbf{A}^{(0)}(t)$  на начальный вектор состояния  $\mathbf{A}^{(0)}(0)$ :

$$\Pi^{(0)}\mathbf{A}^{(0)}(t) = \mathbf{A}^{(0)}(0) \frac{|\mathbf{A}^{(0)}(0)\rangle\langle\mathbf{A}^{(0)}(t)|}{\langle|\mathbf{A}^{(0)}(0)|^2\rangle} = \mathbf{A}^{(0)}(0)a^{(0)}(t).$$

Совокупность векторов состояния  $\mathbf{A}^{(0)}(t)$  образует конечномерное векторное пространство  $A^{(0)}(k)$ . Операторы  $\Pi^{(0)}$  и  $\mathbf{P}^{(0)}$  расщепляют пространство векторов состояния на взаимно-ортогональные подпространства:  $A^{(0)}(k) = [A^{(0)}(k)]' + [A^{(0)}(k)]''$ ,  $[A^{(0)}(k)]' = \Pi^{(0)}A^{(0)}(k)$ ,  $[A^{(0)}(k)]'' = \mathbf{P}^{(0)}A^{(0)}(k)$ .

Приводимая  $[\mathbf{A}^{(0)}(0)]'$  и неприводимая  $[\mathbf{A}^{(0)}(0)]''$  части переменной  $\mathbf{A}^{(0)}(0)$  определяются путем действия указанными операторами:

$$[\mathbf{A}^{(0)}(0)]' = \Pi^{(0)}\mathbf{A}^{(0)}(0), \quad [\mathbf{A}^{(0)}(0)]'' = \mathbf{P}^{(0)}\mathbf{A}^{(0)}(0) = (1 - \Pi^{(0)})\mathbf{A}^{(0)}(0).$$

Так как  $\mathbf{A}^{(0)}(t) = (\Pi^{(0)} + \mathbf{P}^{(0)})\mathbf{A}^{(0)}(t)$ , то конечно-разностное уравнение Лиувилля (3.4.1) можно спроектировать в виде системы двух уравнений во взаимно ортогональных линейных подпространствах:

$$\frac{\Delta}{\Delta t} \left\{ [\mathbf{A}^{(0)}(t)]' + [\mathbf{A}^{(0)}(t)]'' \right\} = i\widehat{L}^{(0)} \left\{ [\mathbf{A}^{(0)}(t)]' + [\mathbf{A}^{(0)}(t)]'' \right\}.$$

$$\frac{\Delta}{\Delta t} [\mathbf{A}^{(0)}(t)]' = i\widehat{L}_{11}^{(0)} [\mathbf{A}^{(0)}(t)]' + i\widehat{L}_{12}^{(0)} [\mathbf{A}^{(0)}(t)]'', \quad (3.4.2a)$$

$$\frac{\Delta}{\Delta t} [\mathbf{A}^{(0)}(t)]'' = i\widehat{L}_{21}^{(0)} [\mathbf{A}^{(0)}(t)]' + i\widehat{L}_{22}^{(0)} [\mathbf{A}^{(0)}(t)]''. \quad (3.4.2b)$$

Здесь введены матричные элементы квазиоператора Лиувилля

$$\widehat{L}^{(0)} = \widehat{L}_{11}^{(0)} + \widehat{L}_{12}^{(0)} + \widehat{L}_{21}^{(0)} + \widehat{L}_{22}^{(0)},$$

$$\widehat{L}_{11}^{(0)} = \Pi^{(0)}\widehat{L}^{(0)}\Pi^{(0)}, \quad \widehat{L}_{12}^{(0)} = \Pi^{(0)}\widehat{L}^{(0)}\mathbf{P}^{(0)},$$

$$\widehat{L}_{21}^{(0)} = \mathbf{P}^{(0)}\widehat{L}^{(0)}\Pi^{(0)}, \quad \widehat{L}_{22}^{(0)} = \mathbf{P}^{(0)}\widehat{L}^{(0)}\mathbf{P}^{(0)}.$$

Матричные элементы квазиоператора Лиувилля действуют следующим образом:  $\widehat{L}_{11}^{(0)}$  – из  $[A^{(0)}(k)]'$  в  $[A^{(0)}(k)]'$  и т.д.

Для решения системы уравнений (3.4.2a), (3.4.2b) исключим неприводимую часть  $[\mathbf{A}^{(0)}(t)]''$  и найдем замкнутое уравнение для приводимой части  $[\mathbf{A}^{(0)}(t)]'$ . Для этого сначала решим пошагово уравнение (3.4.2b), а затем подставим полученное решение в правую часть уравнения (3.4.2a).

Решим пошагово уравнение (3.4.2b):

$$\begin{aligned} \frac{\Delta}{\Delta t} [\mathbf{A}^{(0)}(t)]'' &= \frac{[\mathbf{A}^{(0)}(t + \Delta t)]'' - [\mathbf{A}^{(0)}(t)]''}{\Delta t} = i\widehat{L}_{21}^{(0)} [\mathbf{A}^{(0)}(t)]' + i\widehat{L}_{22}^{(0)} [\mathbf{A}^{(0)}(t)]'', \\ [\mathbf{A}^{(0)}(t + \Delta t)]'' &= i\Delta t \widehat{L}_{21}^{(0)} [\mathbf{A}^{(0)}(t)]' + \{1 + i\Delta t \widehat{L}_{22}^{(0)}\} [\mathbf{A}^{(0)}(t)]'', \\ [\mathbf{A}^{(0)}(t + 2\Delta t)]'' &= i\Delta t \widehat{L}_{21}^{(0)} [\mathbf{A}^{(0)}(t + \Delta t)]' + \{1 + i\Delta t \widehat{L}_{22}^{(0)}\} [\mathbf{A}^{(0)}(t + \Delta t)]'', \\ [\mathbf{A}^{(0)}(t + 3\Delta t)]'' &= i\Delta t \widehat{L}_{21}^{(0)} [\mathbf{A}^{(0)}(t + 2\Delta t)]' + \{1 + i\Delta t \widehat{L}_{22}^{(0)}\} [\mathbf{A}^{(0)}(t + 2\Delta t)]'', \\ [\mathbf{A}^{(0)}(t + 3\Delta t)]'' &= i\Delta t \widehat{L}_{21}^{(0)} [\mathbf{A}^{(0)}(t + 2\Delta t)]' + \{1 + i\Delta t \widehat{L}_{22}^{(0)}\} \times \\ &\quad \times (i\Delta t \widehat{L}_{21}^{(0)} [\mathbf{A}^{(0)}(t + \Delta t)]' + \{1 + i\Delta t \widehat{L}_{22}^{(0)}\} \times \\ &\quad \times (i\Delta t \widehat{L}_{21}^{(0)} [\mathbf{A}^{(0)}(t)]' + \{1 + i\Delta t \widehat{L}_{22}^{(0)}\} [\mathbf{A}^{(0)}(t)]''). \end{aligned}$$

В последнем выражении раскроем скобки

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}^{(0)}(t + 3\Delta t)]'' &= i\Delta t \widehat{L}_{21}^{(0)} [\mathbf{A}^{(0)}(t + 2\Delta t)]' + \{1 + i\Delta t \widehat{L}_{22}^{(0)}\} \times \\ &\quad \times (i\Delta t \widehat{L}_{21}^{(0)} [\mathbf{A}^{(0)}(t + \Delta t)]' + \{1 + i\Delta t \widehat{L}_{22}^{(0)}\} i\Delta t \widehat{L}_{21}^{(0)} [\mathbf{A}^{(0)}(t)]' + \\ &\quad \{1 + i\Delta t \widehat{L}_{22}^{(0)}\}^2 [\mathbf{A}^{(0)}(t)]'') = \\ &= i\Delta t \widehat{L}_{21}^{(0)} [\mathbf{A}^{(0)}(t + 2\Delta t)]' + \{1 + i\Delta t \widehat{L}_{22}^{(0)}\} i\Delta t \widehat{L}_{21}^{(0)} [\mathbf{A}^{(0)}(t + \Delta t)]' + \\ &\quad + \{1 + i\Delta t \widehat{L}_{22}^{(0)}\}^2 i\Delta t \widehat{L}_{21}^{(0)} [\mathbf{A}^{(0)}(t)]' + \{1 + i\Delta t \widehat{L}_{22}^{(0)}\}^3 [\mathbf{A}^{(0)}(t)]''. \end{aligned}$$

Соберем подобные

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}^{(0)}(t + 3\Delta t)]'' &= \{1 + i\Delta t \widehat{L}_{22}^{(0)}\}^3 [\mathbf{A}^{(0)}(t)]'' + i\Delta t \widehat{L}_{21}^{(0)} \times \\ &\quad \times ([\mathbf{A}^{(0)}(t + 2\Delta t)]' + \{1 + i\Delta t \widehat{L}_{22}^{(0)}\} [\mathbf{A}^{(0)}(t + \Delta t)]' + \{1 + i\Delta t \widehat{L}_{22}^{(0)}\}^2 [\mathbf{A}^{(0)}(t)]'). \end{aligned}$$

Окончательно для неприводимой части получаем

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}^{(0)}(t + m\Delta t)]'' &= \{1 + i\Delta t \widehat{L}_{22}^{(0)}\}^m [\mathbf{A}^{(0)}(t)]'' + \\ &\quad + i\Delta t \widehat{L}_{21}^{(0)} \sum_{j=0}^{m-1} \{1 + i\Delta t \widehat{L}_{22}^{(0)}\}^j [\mathbf{A}^{(0)}(t + (m-1-j)\Delta t)]'. \end{aligned}$$

Подставим полученное решение в правую часть уравнения (3.4.2а)

$$\begin{aligned} \frac{\Delta}{\Delta t}[\mathbf{A}^{(0)}(t + m\Delta t)]' &= i\widehat{L}_{11}^{(0)}[\mathbf{A}^{(0)}(t + m\Delta t)]' + i\widehat{L}_{12}^{(0)}[\mathbf{A}^{(0)}(t + m\Delta t)]'', \\ \frac{\Delta}{\Delta t}[\mathbf{A}^{(0)}(t + m\Delta t)]' &= i\widehat{L}_{11}^{(0)}[\mathbf{A}^{(0)}(t + m\Delta t)]' + i\widehat{L}_{12}^{(0)}\{1 + i\Delta t\widehat{L}_{22}^{(0)}\}^m[\mathbf{A}^{(0)}(t)]'' - \\ &\quad - \Delta t\widehat{L}_{12}^{(0)}\widehat{L}_{21}^{(0)}\sum_{j=0}^{m-1}\{1 + i\Delta t\widehat{L}_{22}^{(0)}\}^j[\mathbf{A}^{(0)}(t + (m-1-j)\Delta t)]'. \end{aligned}$$

Согласно свойству идемпотентности проекционных операторов и условию  $[\mathbf{A}^{(0)}(t)]'' = 0$  получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta}{\Delta t}[\mathbf{A}^{(0)}(m\Delta t)]' &= i\widehat{L}_{11}^{(0)}[\mathbf{A}^{(0)}(m\Delta t)]' - \\ - \Delta t \sum_{j=0}^{m-1} \widehat{L}_{12}^{(0)}\widehat{L}_{21}^{(0)}\{1 + i\Delta t\widehat{L}_{22}^{(0)}\}^j[\mathbf{A}^{(0)}((m-j)\Delta t)]'. \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

Здесь проведена замена временных аргументов при условии, что  $t \rightarrow T$ .

Разобьем  $\Pi^{(0)}$  на произведение двух операторов в виде  $\Pi^{(0)} = \mathbf{R}^{(0)}\mathbf{S}^{(0)}$ , где

$$\mathbf{R}^{(0)} = \mathbf{A}^{(0)}(0)\rangle, \mathbf{S}^{(0)} = \frac{\langle \mathbf{A}^{(0)}(0)}{\langle |\mathbf{A}^{(0)}(0)|^2 \rangle}.$$

Подействуем проекционным оператором  $\mathbf{S}^{(0)}$  на левую и правую части полученного соотношения (3.4.3)

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^{(0)}\frac{\Delta}{\Delta t}[\mathbf{A}^{(0)}(m\Delta t)]' &= \mathbf{S}^{(0)}i\widehat{L}_{11}^{(0)}[\mathbf{A}^{(0)}(m\Delta t)]' - \\ - \Delta t \sum_{j=0}^{m-1} \mathbf{S}^{(0)}\widehat{L}_{12}^{(0)}\widehat{L}_{21}^{(0)}\{1 + i\Delta t\widehat{L}_{22}^{(0)}\}^j[\mathbf{A}^{(0)}((m-j)\Delta t)]'. \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

Учтем, что

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}^{(0)}(m\Delta t)]' &= \Pi^{(0)}\mathbf{A}^{(0)}(m\Delta t), \\ \mathbf{S}^{(0)}\Pi^{(0)}\mathbf{A}^{(0)}(m\Delta t) &= \frac{\langle \mathbf{A}^{(0)}(0)}{\langle |\mathbf{A}^{(0)}(0)|^2 \rangle} \frac{\mathbf{A}^{(0)}(0)\rangle \langle \mathbf{A}^{(0)}(0)}{\langle |\mathbf{A}^{(0)}(0)|^2 \rangle} \mathbf{A}^{(0)}(m\Delta t) = \\ &= \mathbf{S}^{(0)}\mathbf{A}^{(0)}(m\Delta t) = \frac{\langle \mathbf{A}^{(0)}(0)\mathbf{A}^{(0)}(m\Delta t)\rangle}{\langle |\mathbf{A}^{(0)}(0)|^2 \rangle} = a^{(0)}(m\Delta t). \end{aligned}$$

Преобразуем левую и правую части соотношения (3.4.4)

$$\begin{aligned} \frac{\Delta}{\Delta t} a^{(0)}(m\Delta t) &= \frac{\langle \mathbf{A}^{(0)}(0) \rangle}{\langle |\mathbf{A}^{(0)}(0)|^2 \rangle} i \widehat{L}_{11}^{(0)} \frac{\langle \mathbf{A}^{(0)}(0) \rangle}{\langle |\mathbf{A}^{(0)}(0)|^2 \rangle} \mathbf{A}^{(0)}(m\Delta t) - \\ &- \Delta t \sum_{j=0}^{m-1} \frac{\langle \mathbf{A}^{(0)}(0) \widehat{L}_{12}^{(0)} \widehat{L}_{21}^{(0)} \{1 + i\Delta t \widehat{L}_{22}^{(0)}\}^j [\mathbf{A}^{(0)}((m-j)\Delta t)] \rangle}{\langle |\mathbf{A}^{(0)}(0)|^2 \rangle}, \\ \frac{\Delta}{\Delta t} a^{(0)}(m\Delta t) &= \frac{\langle \mathbf{A}^{(0)}(0) \rangle}{\langle |\mathbf{A}^{(0)}(0)|^2 \rangle} i \widehat{L}_{11}^{(0)} \frac{\langle \mathbf{A}^{(0)}(0) \rangle}{\langle |\mathbf{A}^{(0)}(0)|^2 \rangle} \mathbf{A}^{(0)}(m\Delta t) - \\ &- \Delta t \sum_{j=0}^{m-1} \frac{\langle \mathbf{A}^{(0)}(0) \widehat{L}_{12}^{(0)} \widehat{L}_{21}^{(0)} \{1 + i\Delta t \widehat{L}_{22}^{(0)}\}^j \mathbf{A}^{(0)}(0) \rangle \langle \mathbf{A}^{(0)}(0) \mathbf{A}^{(0)}((m-j)\Delta t) \rangle}{\langle |\mathbf{A}^{(0)}(0)|^2 \rangle \langle |\mathbf{A}^{(0)}(0)|^2 \rangle}. \end{aligned}$$

Последнее выражение можно представить в виде

$$\frac{\Delta}{\Delta t} a^{(0)}(m\Delta t) = \lambda_1^{(0)} a^{(0)}(m\Delta t) - \Delta t \sum_{j=0}^{m-1} K_1^{(0)}(j\Delta t) a^{(0)}((m-j)\Delta t). \quad (3.4.5)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \lambda_1^{(0)} &= \frac{\langle \mathbf{A}^{(0)}(0) i \widehat{L}_{11}^{(0)} \mathbf{A}^{(0)}(0) \rangle}{\langle |\mathbf{A}^{(0)}(0)|^2 \rangle}, \quad \widehat{L}_{11}^{(0)} = \Pi^{(0)} \widehat{L} \Pi^{(0)}, \\ \lambda_1^{(0)} &= \frac{\langle \mathbf{A}^{(0)}(0) \mathbf{A}^{(0)}(0) \rangle \langle \mathbf{A}^{(0)}(0) i \widehat{L}^{(0)} \mathbf{A}^{(0)}(0) \rangle \langle \mathbf{A}^{(0)}(0) \mathbf{A}^{(0)}(0) \rangle}{\langle |\mathbf{A}^{(0)}(0)|^2 \rangle \langle |\mathbf{A}^{(0)}(0)|^2 \rangle \langle |\mathbf{A}^{(0)}(0)|^2 \rangle} = \\ &= i \frac{\langle \mathbf{A}^{(0)}(0) \widehat{L}^{(0)} \mathbf{A}^{(0)}(0) \rangle}{\langle |\mathbf{A}^{(0)}(0)|^2 \rangle}. \end{aligned} \quad (3.4.6)$$

В правой части выражения (3.4.5) функция  $K_1^{(0)}(j\Delta t)$  представляет собой ненормированную функцию памяти первого порядка:

$$K_1^{(0)}(j\Delta t) = \frac{\langle \mathbf{A}^{(0)}(0) \widehat{L}_{12}^{(0)} \widehat{L}_{21}^{(0)} \{1 + i\Delta t \widehat{L}_{22}^{(0)}\}^j \mathbf{A}^{(0)}(0) \rangle}{\langle |\mathbf{A}^{(0)}(0)|^2 \rangle}.$$

Для удобства выполним нормировку функции памяти

$$K_1^{(0)}(j\Delta t) = \frac{\langle \mathbf{A}^{(0)}(0) \widehat{L}_{12}^{(0)} \widehat{L}_{21}^{(0)} \{1 + i\Delta t \widehat{L}_{22}^{(0)}\}^j \mathbf{A}^{(0)}(0) \rangle \langle \mathbf{A}^{(0)}(0) \widehat{L}_{12}^{(0)} \widehat{L}_{21}^{(0)} \mathbf{A}^{(0)}(0) \rangle}{\langle |\mathbf{A}^{(0)}(0)|^2 \rangle \langle \mathbf{A}^{(0)}(0) \widehat{L}_{12}^{(0)} \widehat{L}_{21}^{(0)} \mathbf{A}^{(0)}(0) \rangle}.$$

Переобозначим

$$\begin{aligned} M_1(j\Delta t) &= \frac{\langle \mathbf{A}^{(0)}(0) \widehat{L}_{12}^{(0)} \{1 + i\Delta t \widehat{L}_{22}^{(0)}\}^j \widehat{L}_{21}^{(0)} \mathbf{A}^{(0)}(0) \rangle}{\langle \mathbf{A}^{(0)}(0) \widehat{L}_{12}^{(0)} \widehat{L}_{21}^{(0)} \mathbf{A}^{(0)}(0) \rangle}, \\ \Lambda_1^{(0)} &= \frac{\langle \mathbf{A}^{(0)}(0) \widehat{L}_{12}^{(0)} \widehat{L}_{21}^{(0)} \mathbf{A}^{(0)}(0) \rangle}{\langle |\mathbf{A}^{(0)}(0)|^2 \rangle}. \end{aligned} \quad (3.4.7)$$

Тогда выражение (3.4.5) примет вид:

$$\frac{\Delta}{\Delta t} a^{(0)}(m\Delta t) = \lambda_1^{(0)} a^{(0)}(m\Delta t) - \Delta t \Lambda_1^{(0)} \sum_{j=0}^{m-1} M_1^{(0)}(j\Delta t) a^{(0)}((m-j)\Delta t).$$

Так как  $\Delta t = \tau$ ,  $m\Delta t = t$ , получаем конечно-разностное уравнение немарковского типа для ВКФ  $a^{(0)}(t)$ , позволяющей описать динамические свойства в последовательности наблюдений  $\xi_0$

$$\frac{\Delta}{\Delta t} a^{(0)}(t) = \lambda_1^{(0)} a^{(0)}(t) - \tau \Lambda_1^{(0)} \sum_{j=0}^{m-1} M_1^{(0)}(j\tau) a^{(0)}(t - j\tau). \quad (3.4.8)$$

В последнем выражении учтено, что  $0 < m \leq n - 1$ .

Аналогичным образом для любой из последующих выборок  $\xi_\theta$ , где  $\theta = 1, \dots, R - 1$  получаем подобные уравнения для ВКФ  $a^{(\theta)}(t)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta}{\Delta t} a^{(1)}(t + \tau) &= \lambda_1^{(1)} a^{(1)}(t + \tau) - \tau \Lambda_1^{(1)} \sum_{j=0}^{m-1} M_1^{(1)}((j+1)\tau) a^{(1)}(t - (j-1)\tau), \\ &\dots \\ \frac{\Delta}{\Delta t} a^{(R-1)}(t + (N-n)\tau) &= \lambda_1^{(R-1)} a^{(R-1)}(t + (N-n)\tau) - \\ &- \tau \Lambda_1^{(R-1)} \sum_{j=0}^{m-1} M_1^{(R-1)}((j+N-n)\tau) a^{(R-1)}(t + (N-n-j)\tau). \end{aligned}$$

В общем случае

$$\frac{\Delta}{\Delta t} a^{(\theta)}(t + \theta\tau) = \lambda_1^{(\theta)} a^{(\theta)}(t + \theta\tau) - \tau \Lambda_1^{(\theta)} \sum_{j=0}^{m-1} M_1^{(\theta)}((j+\theta)\tau) a^{(\theta)}(t + (\theta-j)\tau). \quad (3.4.9)$$

Здесь индекс  $\theta = 0, \dots, R - 1$  пробегает по всем выборкам.

### §3.5 Конечно-разностные кинетические уравнения для локальных функций памяти

Эволюция набора дискретных функций памяти  $M_1^{(\theta)}((j+\theta)\tau)$  в соотношении (3.4.9) определяется деформированным лиувиллианом  $\widehat{L}_1^{(\theta)} = \widehat{L}_{22}^{(\theta)1} =$

$(1 - \Pi^{(\theta)})\widehat{L}^{(\theta)}(1 - \Pi^{(\theta)})$  для новой динамической переменной  $\mathbf{B}^{(\theta)}((j + \theta)\tau)$  (см. соотношение (3.4.7)). В свою очередь, динамическая переменная  $\mathbf{B}^{(\theta)}(0) = \widehat{L}_{21}^{(\theta)}\mathbf{A}^{(\theta)}(0)$ . Элемент лиувиллиана  $\widehat{L}_{21}^{(\theta)}$  связан с проекционным оператором  $\mathbf{P}^{(\theta)} = 1 - \Pi^{(\theta)}$ , который выделяет ортогональное направление к вектору  $\mathbf{A}^{(\theta)}(0)$ .

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{A}^{(\theta)}(0)\mathbf{B}^{(\theta)}(0) \rangle &= \langle \mathbf{A}^{(\theta)}\widehat{L}_{21}^{(\theta)}\mathbf{A}^{(\theta)} \rangle = \langle \mathbf{A}^{(\theta)}(1 - \Pi^{(\theta)})\widehat{L}^{(\theta)}\Pi^{(\theta)}\mathbf{A}^{(\theta)} \rangle = \\ &= \langle \mathbf{A}^{(\theta)}\widehat{L}^{(\theta)}\Pi^{(\theta)}\mathbf{A}^{(\theta)} \rangle - \langle \mathbf{A}^{(\theta)}\Pi^{(\theta)}\widehat{L}^{(\theta)}\Pi^{(\theta)}\mathbf{A}^{(\theta)} \rangle = \\ &= \frac{\langle \mathbf{A}^{(\theta)}\widehat{L}^{(\theta)}\mathbf{A}^{(\theta)} \rangle \langle \mathbf{A}^{(\theta)}\mathbf{A}^{(\theta)} \rangle}{\langle |\mathbf{A}^{(\theta)}|^2 \rangle} - \langle \mathbf{A}^{(\theta)}\widehat{L}^{(\theta)}\mathbf{A}^{(\theta)} \rangle = 0. \end{aligned}$$

Динамическая переменная  $\mathbf{B}^{(\theta)}(t)$  может быть получена путем многократного действия эволюционного оператора  $U(T + m\tau, T)$  на переменную  $\mathbf{B}^{(\theta)}(0)$ . Придерживаясь последовательно ранее приведенной логике (3.4.1)-(3.4.9) получаем конечно-разностные уравнения вида (3.4.9) для локальных функций памяти  $M_1^{(\theta)}((j + \theta)\tau)$ . Аналогично получаем конечно-разностные уравнения для функций памяти более высокого  $s - 1$ -го порядка.

Однако для упрощения математически трудоемкого алгоритма воспользуемся процедурой ортогонализации Грама-Шмидта для определения набора новых динамических ортогональных переменных:

$$\langle \mathbf{W}_s^{(\theta)}, \mathbf{W}_p^{(\theta)} \rangle = \delta_{sp}^{(\theta)} \langle |\mathbf{W}_s^{(\theta)}|^2 \rangle.$$

Здесь угловые скобки – скалярное произведение векторов,  $\delta_{sp}^{(\theta)}$  – символ Кронекера для  $\theta$ -выборки данных.

Запишем набор новых ортогональных динамических переменных:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_0^{(\theta)} &= \mathbf{A}^{(\theta)}(0), \quad \mathbf{W}_1^{(\theta)} = \{i\widehat{L}^{(\theta)} - \lambda_1^{(\theta)}\}\mathbf{W}_0^{(\theta)}, \\ \mathbf{W}_2^{(\theta)} &= \{i\widehat{L}^{(\theta)} - \lambda_2^{(\theta)}\}\mathbf{W}_1^{(\theta)} - \Lambda_1^{(\theta)}\mathbf{W}_0^{(\theta)}, \dots \end{aligned} \quad (3.5.1)$$

Повторяя представленный алгоритм действий, можно ввести последовательность проекционных операторов  $\Pi_s^{(\theta)}$  и набор взаимно дополнительных проекторов  $\mathbf{P}_s^{(\theta)} = 1 - \Pi_s^{(\theta)}$ , которые обладают следующими свойствами:

$$\Pi_s^{(\theta)} = |\mathbf{W}_s^{(\theta)}\rangle \langle \mathbf{W}_s^{(\theta)}| / \langle |\mathbf{W}_s^{(\theta)}|^2 \rangle,$$

$$\begin{aligned}\Pi_s^{(\theta)^2} &= \Pi_s^{(\theta)}, P_s^{(\theta)^2} = P_s^{(\theta)}, \Pi_s^{(\theta)}P_s^{(\theta)} = P_s^{(\theta)}\Pi_s^{(\theta)} = 0, \\ \Pi_s^{(\theta)}\Pi_p^{(\theta)} &= \delta_{sp}^{(\theta)}\Pi_s^{(\theta)}, P_s^{(\theta)}P_p^{(\theta)} = \delta_{sp}^{(\theta)}P_s^{(\theta)}.\end{aligned}$$

Каждая пара проекционных операторов  $\Pi_s^{(\theta)}, P_s^{(\theta)}$  расщепляет соответствующее пространство многомерных векторов  $\mathbf{W}_s^{(\theta)}$  на два взаимно дополнительных подпространства:  $W_s^{(\theta)} = W_s^{(\theta)'} + W_s^{(\theta)''}$ ,  $W_s^{(\theta)'} = \Pi_s^{(\theta)}W_s^{(\theta)}$ ,  $W_s^{(\theta)''} = P_s^{(\theta)}W_s^{(\theta)}$ .

Используя технику проекционных операторов для ортогональных переменных  $\mathbf{W}_s^{(\theta)}(t)$ , получаем цепочку связанных конечно-разностных уравнений немарковского типа для нормированных функций памяти  $s - 1$ -го порядка. К примеру, для выборки  $\xi_0$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\Delta M_1^{(0)}(t)}{\Delta t} &= \lambda_2^{(0)} M_1^{(0)}(t) - \tau \Lambda_2^{(0)} \sum_{j=0}^{m-1} M_2(j\tau) M_1^{(0)}(t - j\tau), \\ &\dots \\ \frac{\Delta M_{s-1}^{(0)}(t)}{\Delta n} &= \lambda_s^{(0)} M_{s-1}^{(0)}(t) - \tau \Lambda_s^{(0)} \sum_{j=0}^{m-1} M_{s-1}^{(0)}(j\tau) M_s^{(0)}(t - j\tau). \end{aligned} \right. \quad (3.5.2)$$

Для произвольной выборки с индексом  $\theta$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\Delta M_1^{(\theta)}(t + \theta\tau)}{\Delta t} &= \lambda_2^{(\theta)} M_1^{(\theta)}(t + \theta\tau) - \\ &- \tau \Lambda_2^{(\theta)} \sum_{j=0}^{m-1} M_2^{(\theta)}((j + \theta)\tau) M_1^{(\theta)}(t + (\theta - j)\tau), \\ &\dots \\ \frac{\Delta M_{s-1}^{(\theta)}(t + \theta\tau)}{\Delta t} &= \lambda_s^{(\theta)} M_{s-1}^{(\theta)}(t + \theta\tau) - \\ &- \tau \Lambda_s^{(\theta)} \sum_{j=0}^{m-1} M_{s-1}^{(\theta)}((j + \theta)\tau) M_s^{(\theta)}(t + (\theta - j)\tau). \end{aligned} \right. \quad (3.5.3)$$

В уравнении (3.5.3) введены нормированная ФП первого порядка:

$$M_1^{(\theta)}(t + \theta\tau) = \frac{\langle \mathbf{W}_1^{(\theta)} (1 + i\Delta t \widehat{L}_1^{(\theta)})^m \mathbf{W}_1^{(\theta)} \rangle}{\langle |\mathbf{W}_1^{(\theta)}|^2 \rangle},$$

функции памяти  $s - 1$ -го порядка:

$$M_{s-1}^{(\theta)}(t + \theta\tau) = \frac{\langle \mathbf{W}_{s-1}^{(\theta)} (1 + i\Delta t \widehat{L}_{s-1}^{(\theta)})^m \mathbf{W}_{s-1}^{(\theta)} \rangle}{\langle |\mathbf{W}_{s-1}^{(\theta)}|^2 \rangle},$$

собственные значения квазиоператора Лиувилля  $\widehat{L}_s^{(\theta)}$ :

$$\lambda_s^{(\theta)} = i \frac{\langle \mathbf{W}_s^{(\theta)} \widehat{L}_s^{(\theta)} \mathbf{W}_s^{(\theta)} \rangle}{\langle |\mathbf{W}_s^{(\theta)}|^2 \rangle}$$

и релаксационные параметры:

$$\Lambda_s^{(\theta)} = \frac{\langle |\mathbf{W}_s^{(\theta)}|^2 \rangle}{\langle |\mathbf{W}_{s-1}^{(\theta)}|^2 \rangle}.$$

Здесь выполнено расщепление оператора Лиувилля на матричные элементы:

$$\widehat{L}_{ij}^{(\theta)s} = \Pi_i^{(\theta)s-1} \widehat{L}^{(\theta)} \Pi_j^{(\theta)s-1}, \quad \widehat{L}_s^{(\theta)} = \widehat{L}_{22}^{(\theta)s} = \mathbf{P}_{s-1}^{(\theta)} \mathbf{P}_{s-2}^{(\theta)} \dots \mathbf{P}_0^{(\theta)} \widehat{L}^{(\theta)} \mathbf{P}_0^{(\theta)} \dots \mathbf{P}_{s-2}^{(\theta)} \mathbf{P}_{s-1}^{(\theta)}.$$

В заключение необходимо указать еще один путь локального обобщения формализма функций памяти. Формально уравнение движения для любого  $x$  можно записать в виде

$$\frac{\Delta x(t)}{\Delta t} = \tau^{-1} \{x(t + \tau) - x(t)\} = \tau^{-1} \{U(t + \tau, t) - 1\} x(t),$$

где  $U(t + \tau, t)$  – оператор эволюции, который определяет значение переменной  $x$  через один шаг по временной шкале:

$$x(t + \tau) = U(t + \tau, t)x(t).$$

Используя дополнительный оператор эволюции  $V(t + \theta, t)$  мы сможем “перенести” рассмотрение эволюции переменной  $x$  в произвольную выборку с индексом  $\theta$

$$V(t + \theta, t)x(t) = x(t + \theta\tau).$$

Таким образом перемещение внутри произвольной выборки будет осуществляться действием двух операторов эволюции:

$$x(t + (\theta + 1)\tau) = U(t + \tau, t) \{V(t + \theta, t)x(t)\}.$$

### §3.6 Выводы

В данной главе выполнено обобщение конечно-разностного аналога формализма функций памяти на случай локальных выборок дискретной динамики сложных систем. Сокращение в описании эволюции динамической переменной внутри произвольной локальной выборки наблюдений достигается путем введения многокомпонентного динамического вектора, для которого записывается дискретное уравнение движения. Описание дискретной динамики исследуемой системы на локальных временных интервалах осуществляется последовательным действием операторов эволюции, использованием техники проекционных операторов и процедуры ортогонализации Грама-Шмидта для определения новых динамических переменных. Окончательно в настоящей главе получены системы связанных модифицированных конечно-разностных кинетических уравнений типа Цванцига-Мори для ВКФ и функций памяти. Численные расчеты ортогональных динамических переменных, ВКФ, функций памяти, спектральных плотностей мощности, частотных релаксационных и кинетических параметров, частотных обобщений критериев статистической памяти осуществляются напрямую для локальных выборок наблюдений. Для учета эффектов нестационарности исследуемой дискретной динамики исходным этапом в реализации теоретического формализма функций памяти и техники проекционного проектирования является установление оптимальной длины локального окна.

Переход от соотношений (3.4.1) и (3.4.8) к стандартному уравнению Лиувилля в статистической физике (1.5.3), где  $\hat{\mathcal{L}}$  представляет собой квантовый или классический лиувиллиан, определяемый гамильтонианом системы, и формально точному кинетическому уравнению для ВКФ  $a(t)$  (1.5.7) осуществляется при  $\tau \rightarrow 0$ .

Согласно основным результатам, полученным в настоящей главе, на защиту выносится следующее положение. **Учет нестационарности в динамике сложных систем реализуется на основе введения локальных кинетических и релаксационных параметров.**

## Глава 4

# Событийные корреляции в динамике СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

### §4.1 Введение

В данной главе будут рассмотрены динамические корреляции и эффекты статистической памяти сложных систем, возникающие в дискретных неэквидистантных временных сигналах. В статистическом анализе временных рядов существуют различные методы, позволяющие весьма успешно проводить исследование равноотстоящих серий  $\{x_j\}$  с постоянным шагом дискретизации  $\tau$  или  $\Delta t$ . Речь о них шла ранее в §1.2.5. Часто такие методы используются и для неравноинтервальных (неэквидистантных во временном отношении) временных сигналов, фиксируемых с переменным шагом дискретизации, после усреднения “сырой” последовательности. Разработка теоретических подходов, адаптированных к непосредственному анализу неравноинтервальных последовательностей экспериментальных данных, является актуальной задачей современной статистической физики.

Для анализа неравноинтервальных наблюдений параметров сложных систем приведем ключевые положения формализма функций памяти, сформулированные в терминах “событий”. Идея обобщения состоит в переходе от временной к событийной шкале. В отличие от статистики экстремальных

событий, где под событием понимается некоторый экстремум сигнала (см. §1.3.2), представленное обобщение позволяет осуществить анализ дискретной последовательности с учетом всех значений в линейной шкале событий:  $\{x_j\} \rightarrow \{\xi_i\}$ , где  $\Delta t_j \rightarrow \Delta n_i$ .

## §4.2 Обобщение формализма функций памяти на случай неэквидистантных временных рядов

Следуя работам [А6, А9], представим цепочку взаимосвязанных формально точных кинетических уравнений для корреляционной функции  $a(n)$  и функций памяти  $M_s(n)$ , определяемых в линейной шкале событий. Для этого представим неравноинтервальную временную последовательность наблюдений параметра сложной системы в виде набора событий:

$$E = \{\xi_1, \dots, \xi_k, \dots, \xi_N\}, \quad (4.2.1)$$

где  $\xi_i$  – событие (значение параметра), зафиксированное в момент времени  $t_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  – номер события.

Среднее значение переменной  $\langle E \rangle$ , флуктуации  $\delta\xi_i$ , абсолютную дисперсию  $\sigma^2$  для последовательности событий (4.2.1) представим в виде:

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i, \quad \delta\xi_i = \xi_i - \langle E \rangle, \\ \sigma^2 &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta\xi_i^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \{\xi_i - \langle E \rangle\}^2. \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

Для описания динамических свойств системы определим корреляционную функцию в дискретном ряде событий в уравнении (4.2.1) следующим образом:

$$a(n) = \frac{1}{(N - m)\sigma^2} \sum_{i=1}^{N-m} \delta\xi_i \delta\xi_{i+m}. \quad (4.2.3)$$

Здесь  $n = m\Delta n$ ,  $\Delta n = 1$ , а функция  $a(n)$  представляет собой событийную корреляционную функцию (СКФ).

Нормированная СКФ удовлетворяет условиям нормировки и затухания корреляций:  $\lim_{n \rightarrow 1} a(n) = 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a(n) = 0$ . Отметим, что условие затухания корреляций для рассчитываемых событийных корреляционных функций выполняется достаточно редко.

В научной практике разрабатываются методы для изучения событий, фиксируемых в ходе эволюции природных систем. Например, в работе С. Абе (S. Abe) [24] вводится корреляционная функция для исследования коррелированности времен возникновения “значимых” событий в дискретной динамике сейсмической активности

$$C(n + n_W, n_W) = \frac{\langle t_{n+n_W} t_{n_W} \rangle - \langle t_{n+n_W} \rangle \langle t_{n_W} \rangle}{(\sigma_{n+n_W}^2 \sigma_{n_W}^2)^{1/2}},$$

где средние значения и дисперсии вычисляются согласно соотношениям:

$$\begin{aligned} \langle t_m \rangle &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} t_{m+k}, & \langle t_m t'_m \rangle &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} t_{m+k} t'_{m'+k}, \\ \sigma_m^2 &= \langle t_m^2 \rangle - \langle t_m \rangle^2. \end{aligned}$$

Для изучения эволюции переменной  $E$  в последовательности событий запишем уравнение движения Лиувилля в конечно-разностном виде:

$$\frac{\Delta \xi_i(n)}{\Delta n} = i \widehat{L}(n, \Delta n) \xi_i(n). \quad (4.2.4)$$

Здесь  $\xi_i(n + \Delta n) = U(n + \Delta n, n) \xi_i(n)$ , а  $U(n + \Delta n, n)$  представляет собой “событийный” оператор эволюции. Он определяет сдвиг на один шаг  $\Delta n$  по линейной шкале событий. Эволюционный оператор  $U(n + \Delta n, n)$  и квазиоператор Лиувилля  $\widehat{L}(n, \Delta n)$  связаны следующим образом:  $\widehat{L}(n, \Delta n) = (i\Delta n)^{-1}(U(n + \Delta n, n) - 1)$ .

Представим совокупность значений динамической переменной  $\delta \xi_i = \delta \xi(i\Delta n)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , в виде многокомпонентных векторов состояния системы:

а) вектор начального состояния:

$$\mathbf{A}_{k+1}^1(\Delta n) = \mathbf{A}_{k+1}^1 = \{\delta\xi_1, \delta\xi_2, \dots, \delta\xi_k\}, \quad (4.2.5a)$$

б) вектор текущего состояния системы, сдвинутый на расстояние  $m$  событий по дискретной событийной шкале:

$$\mathbf{A}_{m+k}^m(n) = \mathbf{A}_{m+k}^m = \{\delta\xi_m, \delta\xi_{m+1}, \dots, \delta\xi_{m+k-1}\}, \quad (4.2.5b)$$

где  $1 \leq k \leq N - m$ . Введенные таким образом векторы состояний исследуемой системы удобны для анализа динамики случайных процессов в линейной шкале. Как уже было отмечено, представление флуктуаций динамической переменной в виде многомерных векторов состояний позволяет достигнуть сокращения в описании эволюции негамильтоновой системы.

Используя выражения для векторов начального и текущего состояний системы (4.2.5a), (4.2.5b) и определение скалярного произведения векторов, нормированную событийную корреляционную функцию (4.2.3) представим в более компактном виде:

$$a(n) = \frac{\langle \mathbf{A}_{k+1}^1 \mathbf{A}_{k+m}^m \rangle}{\langle |\mathbf{A}_{k+1}^1|^2 \rangle}. \quad (4.2.6)$$

### §4.3 Цепочка конечно-разностных уравнений для событийных функций памяти

По аналогии с уравнением (4.2.4) запишем уравнение движения для вектора текущего состояния системы:

$$\frac{\Delta \mathbf{A}_{m+k}^m(n)}{\Delta n} = i\widehat{L}(n, \Delta n) \mathbf{A}_{m+k}^m(n). \quad (4.3.1)$$

В соответствии с видом СКФ введем оператор  $\Pi$ , позволяющий спроектировать вектор текущего состояния  $\mathbf{A}_{m+k}^m(n)$  на направление вектора  $\mathbf{A}_{k+1}^1(\Delta n)$ , а также ортогональный оператор  $P$ , выделяющий ортогональное направле-

ние. Операторы  $\Pi$  и  $P$  обладают следующими свойствами:

$$\Pi = \frac{|\mathbf{A}_{k+1}^1(\Delta n)\rangle\langle\mathbf{A}_{k+1}^1(\Delta n)|}{\langle|\mathbf{A}_{k+1}^1(\Delta n)|^2\rangle},$$

$$\Pi^2 = \Pi, P = 1 - \Pi, P^2 = P, \Pi P = P\Pi = 0.$$

Тогда исходная СКФ  $a(n)$  в уравнении (4.2.6) может быть получена в ходе проектирования вектора  $\mathbf{A}_{m+k}^m(n)$  на вектор начального состояния  $\mathbf{A}_{k+1}^1(\Delta n)$ :

$$\Pi\mathbf{A}_{m+k}^m(n) = \frac{\mathbf{A}_{k+1}^1(\Delta n)\langle\mathbf{A}_{k+1}^1(\Delta n)\mathbf{A}_{m+k}^m(n)\rangle}{\langle|\mathbf{A}_{k+1}^1(\Delta n)|^2\rangle} = \mathbf{A}_{k+1}^1(\Delta n)a(n).$$

Операторы  $\Pi$  и  $P$  расщепляют пространство векторов состояния  $A(k)$  на два ортогональных подпространства:

$$A(k) = A'(k) + A''(k), \quad A'(k) = \Pi A(k), \quad A''(k) = P A(k), \quad \mathbf{A}_{m+k}^m \in A(k).$$

Тогда уравнение движения для вектора текущего состояния (4.3.1) можно представить в виде системы двух уравнений во взаимно ортогональных линейных подпространствах:

$$\frac{\Delta\mathbf{A}'(n)}{\Delta n} = i\widehat{L}_{11}\mathbf{A}'(n) + i\widehat{L}_{12}\mathbf{A}''(n), \quad (4.3.2a)$$

$$\frac{\Delta\mathbf{A}''(n)}{\Delta n} = i\widehat{L}_{21}\mathbf{A}'(n) + i\widehat{L}_{22}\mathbf{A}''(n). \quad (4.3.2b)$$

Матричные элементы квазиоператора Лиувилля имеют вид:  $\widehat{L}_{ij} = \Pi_i\widehat{L}\Pi_j$  или  $\widehat{L} = \widehat{L}_{11} + \widehat{L}_{12} + \widehat{L}_{21} + \widehat{L}_{22}$ ,  $\widehat{L}_{11} = \Pi\widehat{L}\Pi$ ,  $\widehat{L}_{12} = \Pi\widehat{L}P$ ,  $\widehat{L}_{21} = P\widehat{L}\Pi$ ,  $\widehat{L}_{22} = P\widehat{L}P$ .

Для решения системы уравнений (4.3.2a)–(4.3.2b) исключаем неприводимую часть  $\mathbf{A}''(n) = P\mathbf{A}(n) = (1 - \Pi)\mathbf{A}(n)$  и записываем замкнутое уравнение для приводимой части  $\mathbf{A}'(n) = \Pi\mathbf{A}(n)$ . Для этого пошагово решаем уравнение (4.3.2b). Полученное решение подставляем в правую часть уравнения (4.3.2a). В результате получаем конечно-разностное уравнение для приводимой части:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\mathbf{A}'(m\Delta n)}{\Delta n} &= i\widehat{L}_{11}\mathbf{A}'(m\Delta n) + i\widehat{L}_{12}\{1 + i\Delta n\widehat{L}_{22}\}^m\mathbf{A}''(m\Delta n) - \\ &\quad - \widehat{L}_{12}\sum_{j=1}^m\{1 + i\Delta n\widehat{L}_{22}\}^j\Delta n\widehat{L}_{21}\mathbf{A}'((m-j+1)\Delta n). \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

Действуя оператором  $S$  на уравнение (4.3.3), где

$$\Pi = RS, \quad R = |\mathbf{A}_{k+1}^1(\Delta n)\rangle, \quad S = \frac{\langle \mathbf{A}_{k+1}^1(\Delta n) |}{\langle |\mathbf{A}_{k+1}^1(\Delta n)|^2 \rangle},$$

получим формально точное конечно-разностное кинетическое уравнение для исходной событийной корреляционной функции:

$$\frac{\Delta a(n)}{\Delta n} = \lambda_1 a(n) - \Delta n \Lambda_1 \sum_{j=1}^m M_1(j\Delta n) a((m-j+1)\Delta n). \quad (4.3.4)$$

Используя значение для шага дискретизации последовательности событий, решение уравнения (4.3.4) представляем в виде:

$$a(n+1) = \{\lambda_1 + 1\}a(n) - \Lambda_1 \sum_{j=1}^m M_1(j)a(m-j+1).$$

Здесь  $\lambda_1$  – кинетический параметр, соответствующий собственному значению квазиоператора Лиувилля  $\widehat{L}$ ,  $\Lambda_1$  – частотный релаксационный параметр. Функция  $M_1(j\Delta n)$  в правой части уравнения (4.3.4) есть нормированная событийная функция памяти (СФП) первого порядка:

$$\lambda_1 = i \frac{\langle \mathbf{A}_{k+1}^1 \widehat{L} \mathbf{A}_{k+1}^1 \rangle}{\langle |\mathbf{A}_{k+1}^1|^2 \rangle}, \quad \Lambda_1 = \frac{\langle \mathbf{A}_{k+1}^1 \widehat{L}_{12} \widehat{L}_{21} \mathbf{A}_{k+1}^1 \rangle}{\langle |\mathbf{A}_{k+1}^1|^2 \rangle},$$

$$M_1(j\Delta n) = \frac{\langle \mathbf{A}_{k+1}^1 \widehat{L}_{12} (1 + i\Delta n \widehat{L}_{22})^j \widehat{L}_{21} \mathbf{A}_{k+1}^1 \rangle}{\langle \mathbf{A}_{k+1}^1 \widehat{L}_{12} \widehat{L}_{21} \mathbf{A}_{k+1}^1 \rangle}.$$

Пользуясь техникой проекционных операторов можно записать следующее формально точное кинетическое уравнение для СФП  $M_1(n)$ , а далее уравнения для функций памяти более высокого  $s - 1$ -го порядка. Для определения СФП и функций памяти более высокого порядка рассчитываются новые динамические переменные, полученные на основе процедуры ортогонализации Грама-Шмидта [78]:

$$\langle \mathbf{W}_s, \mathbf{W}_p \rangle = \delta_{sp} \langle |\mathbf{W}_s|^2 \rangle, \quad \delta_{sp} = \begin{cases} 1, & \text{в случае } s = p, \\ 0, & \text{в случае } s \neq p, \end{cases} \quad (4.3.5)$$

где  $\delta_{sp}$  символ Кронекера. Рекуррентная формула для динамических переменных имеет вид:

$$\mathbf{W}_0 = \mathbf{A}_{k+1}^1, \quad \mathbf{W}_1 = \{i\widehat{L} - \lambda_1\}\mathbf{W}_0, \quad \mathbf{W}_2 = \{i\widehat{L} - \lambda_2\}\mathbf{W}_1 - \Lambda_1\mathbf{W}_0, \dots \quad (4.3.6)$$

Следуя указанным выше соотношениям можно ввести последовательность проекционных операторов  $\Pi_s$  и набор взаимно дополнительных проекторов  $P_s = 1 - \Pi_s$ , которые обладают следующими свойствами:

$$\Pi_s = \frac{|\mathbf{W}_s\rangle\langle\mathbf{W}_s|}{\langle|\mathbf{W}_s|^2\rangle},$$

$$\Pi_s^2 = \Pi_s, P_s^2 = P_s, \Pi_s P_s = P_s \Pi_s = 0, \Pi_s \Pi_p = \delta_{sp} \Pi_s, P_s P_p = \delta_{sp} P_s.$$

Каждая пара проекционных операторов  $\Pi_s, P_s$  расщепляет соответствующее пространство векторов  $\mathbf{W}_s$  на два взаимно дополнительных подпространства:  $W_s = W'_s + W''_s, W'_s = \Pi_s W_s, W''_s = P_s W_s$ .

Для вычисленных ортогональных динамических переменных  $\mathbf{W}_s$  окончательно получаем цепочку связанных формально точных кинетических уравнений для нормированных СФП  $s - 1$ -го порядка:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\Delta M_1(n)}{\Delta n} = \lambda_2 M_1(n) - \Delta n \Lambda_2 \sum_{j=1}^m M_2(j\Delta n) M_1((m-j+1)\Delta n), \\ \dots \\ \frac{\Delta M_{s-1}(n)}{\Delta n} = \lambda_s M_{s-1}(n) - \Delta n \Lambda_s \sum_{j=1}^m M_{s-1}(j\Delta n) M_s((m-j+1)\Delta n). \end{array} \right. \quad (4.3.7)$$

В уравнении (4.3.7) введены нормированная СФП первого порядка:

$$M_1(n) = \frac{\langle \mathbf{W}_1 (1 + i\Delta n \widehat{L})^m \mathbf{W}_1 \rangle}{\langle |\mathbf{W}_1|^2 \rangle},$$

функции памяти  $s - 1$ -го порядка:

$$M_{s-1}(n) = \frac{\langle \mathbf{W}_{s-1} (1 + i\Delta n \widehat{L}_{s-1})^m \mathbf{W}_{s-1} \rangle}{\langle |\mathbf{W}_{s-1}|^2 \rangle},$$

собственные значения квазиоператора Лиувилля  $\widehat{L}$  и релаксационные параметры:

$$\lambda_s = i \frac{\langle \mathbf{W}_s \widehat{L}_s \mathbf{W}_s \rangle}{\langle |\mathbf{W}_s|^2 \rangle}, \quad \Lambda_s = \frac{\langle |\mathbf{W}_s|^2 \rangle}{\langle |\mathbf{W}_{s-1}|^2 \rangle}.$$

Здесь выполнено расщепление оператора Лиувилля на матричные элементы:

$$\widehat{L}_{ij}^s = \Pi_i^{s-1} \widehat{L} \Pi_j^{s-1}, \quad \widehat{L}_s = \widehat{L}_{22}^s = P_{s-1} P_{s-2} \dots P_0 \widehat{L} P_0 \dots P_{s-2} P_{s-1}.$$

Кинетические уравнения (4.3.4), (4.3.7) представляют собой обобщение формализма функций памяти на случай исследования событийных корреляций в неравноинтервальной дискретной динамике негамильтоновых систем. Переход от соотношений, введенных в §2.1, к выражениям (4.2.1)-(4.3.7) используется в случае анализа неравноинтервальной динамики фиксируемых параметров.

Для сопоставления временных масштабов релаксации исходной СКФ  $a(n)$  и функций памяти  $i$ -го порядка  $M_i(n)$  воспользуемся частотной зависимостью меры памяти  $\varepsilon_i(\nu)$ . Введенная по аналогии с работами [73, 83] для дискретной шкалы событий эта мера имеет вид:

$$\varepsilon_i(\nu) = \left\{ \frac{\mu_{i-1}(\nu)}{\mu_i(\nu)} \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (4.3.8)$$

Здесь  $\mu_i(\nu)$  представляет спектр мощности СФП  $i$ -го порядка  $M_i(n)$ :

$$\mu_i(\nu) = \left| \Delta n \sum_{n=1}^N M_i(n) \cos(2\pi n\nu) \right|^2.$$

Выражение для частотно-зависящего случая второго критерия памяти  $\delta_i(\nu)$  определяется аналогично (2.7.1) путем перехода к одномерной событийной шкале.

## §4.4 Выводы

В настоящей главе разрабатывается теоретический подход для изучения динамических корреляций экспериментально наблюдаемого параметра, значе-

ния которого представлены в последовательности событий. Формализм функций памяти Цванцига-Мори позволяет осуществить разделение “собственного движения” некоторой переменной  $\mathbf{A}_{m+k}^m(n) = \mathbf{A}(n)$  и эффектов взаимодействия с другими степенями свободы. Появление таких эффектов связано с наличием связи между  $\mathbf{A}(n)$  и так называемой “флуктуирующей силой”  $\mathbf{W}_1(n)$ , ортогональной к  $\mathbf{A}_{k+1}^1(\Delta n) = \mathbf{A}(\Delta n)$ . В свою очередь переменная  $\mathbf{W}_2(n)$  связана с  $\mathbf{W}_1(\Delta n)$  и т.д. В результате появляется возможность описания взаимодействий, реализующихся в последовательности наблюдений событий в предшествующие и текущие моменты времени. Именно в таком контексте нужно понимать термин “статистическая память”. Указанные ортогональные динамические переменные включаются в выражения для функций статистической памяти.

На основе техники проекционных операторов найдена цепочка связанных дискретных конечно-разностных уравнений для исходной событийной корреляционной функции и набора событийных функций памяти. Предложены кинетические, релаксационные параметры и критерии статистической памяти, которые эффективно описывают релаксационные особенности и эффекты памяти в дискретной неравноинтервальной динамике негамильтоновых систем. В качестве примера в заключительной главе будут представлены результаты анализа неэквидистантной динамики полного потока рентгеновской активности микроквazarов.

На основании результатов, представленных в настоящей главе, на защиту выносятся следующее положение. **Цепочка конечно-разностных уравнений для событийных функций памяти воспроизводит особенности неравноинтервальной дискретной динамики негамильтоновых систем.**

## Глава 5

# Статистическая память и корреляции в равноинтервальной и неравноинтервальной динамике сложных систем. Конкретные примеры

### §5.1 Эффекты памяти и особенности релаксационных процессов в динамике живых негамильтоновых систем

Далее будут представлены результаты анализа конечно-разностных производных сигналов, генерируемых сложными системами, на примере исследования вызванных нейромагнитных откликов коры головного мозга в ответ на мерцающий зрительный стимул для группы здоровых людей и пациента с фоточувствительной эпилепсией (ФЧЭ) [A11]. На основе формализма функций памяти Цванцига-Мори для множеств значений  $\{x_j\}$ ,  $\{v_j\}$ ,  $\{a_j\}$ ,  $\{e_j\}$ ,  $\{q_j\}$  помимо временных корреляционных функций и функций статистической памяти вычислены кинетические и релаксационные параметры, информационные меры памяти (см. §2.2-§2.7). Будет продемонстрировано, что при переходе от нормальной к патологической нейромагнитной активности обнаруже-

ны специфическая стратификация фазовых портретов, критическое изменение эффектов статистической памяти и скорости затухания релаксационных процессов, нарушение ритмов мозга. Это свидетельствует о существовании своеобразного регулятора в реакционной активности головного мозга человека в ответ на опасные внешние воздействия, функционирование которого подавляется в случае ФЧЭ.

### **§5.1.1 Регистрация нейромагнитных откликов коры головного мозга человека**

При ФЧЭ эпилептические приступы провоцируются мерцающим светом большой интенсивности. В настоящее время для диагностики эпилепсии используют электроэнцефалографию (ЭЭГ), компьютерную и магнитно-резонансную томографию (КТ и МРТ), магнитоэнцефалографию (МЭГ). Важнейшим для диагностики эпилепсии методом остается ЭЭГ. Диагностика осуществляется по наличию устойчивых или эпизодических пароксизмальных пиков и острых волн на ЭЭГ. При помощи записей ЭЭГ можно установить очаги провоцирования приступов и осуществлять мониторинг активности мозга при лекарственной терапии. Также для диагностики и исследования эпилепсии, в том числе и ФЧЭ, используется метод МЭГ.

В регистрации нейромагнитных откликов коры головного мозга на мерцающий световой стимул принимала участие группа здоровых людей (9 человек в возрасте 22-27 лет) и пациент с ФЧЭ (подросток, 12 лет). Все волонтеры были информированы о цели и возможности потенциального риска в ходе проведения процедур. Во время регистрации испытуемые находились в магнитонепроницаемой комнате. Красно-голубая комбинация цветов генерировалась с помощью двух видеопроекторов, каждый из которых непрерывно воспроизводил отдельный цветовой стимул. Стимулы подавались 80 раз по две секунды с интервалом в три секунды. После этого результаты испытания

были усреднены. Вызванные нейромагнитные отклики коры головного мозга человека фиксировались шестьдесят одним 2-канальным СКВИД-сенсором (сверхпроводящий квантовый интерференционный детектор). Сенсоры, способные регистрировать слабые градиенты магнитной индукции  $\sim 10^{-11} - 10^{-10}$  Тл/см, были расположены на всей поверхности головы (*Neuromag-122, Neuromag Ltd. Finland*). Аналоговый сигнал отфильтровывался в полосе 0.03-100 Гц, а затем оцифровывался с частотой 0.5 кГц. Более подробно с методикой проведения эксперимента можно познакомиться, в частности, в работе [92].

Предварительный анализ всей совокупности сигналов показал, что наибольшая “чувствительность” к воздействию мерцающих цветовых стимулов проявляется в областях лобной доли коры головного мозга, локализованных в окрестности десятого сенсора. Было показано, что данные области, также как и некоторые другие, являются зонами локализации патологических механизмов ФЧЭ и, возможно, очагами аномального коллективного возбуждения нейронов коры и подкорковых структур, приводящего к эпилептическому приступу [A10]. В связи с этим в качестве примера далее приводится анализ квазипроизводных разных порядков, рассчитанных для нейромагнитного сигнала, фиксируемого 10 сенсором.

### **§5.1.2 Исследование конечно-разностных производных для сигналов магнитоэнцефалограмм человека**

#### **Стратификация фазовых траекторий квазипроизводных разных порядков при ФЧЭ**

На Рис. 5.1.1, 5.1.2 представлены фазовые траектории для двух первых ортогональных динамических переменных  $\mathbf{W}_1^\xi = f(\mathbf{W}_0^\xi)$  нейромагнитных откликов, регистрируемых на десятом сенсоре для здорового испытуемого и пациента при воздействии красно-голубого зрительного стимула. Плоские про-

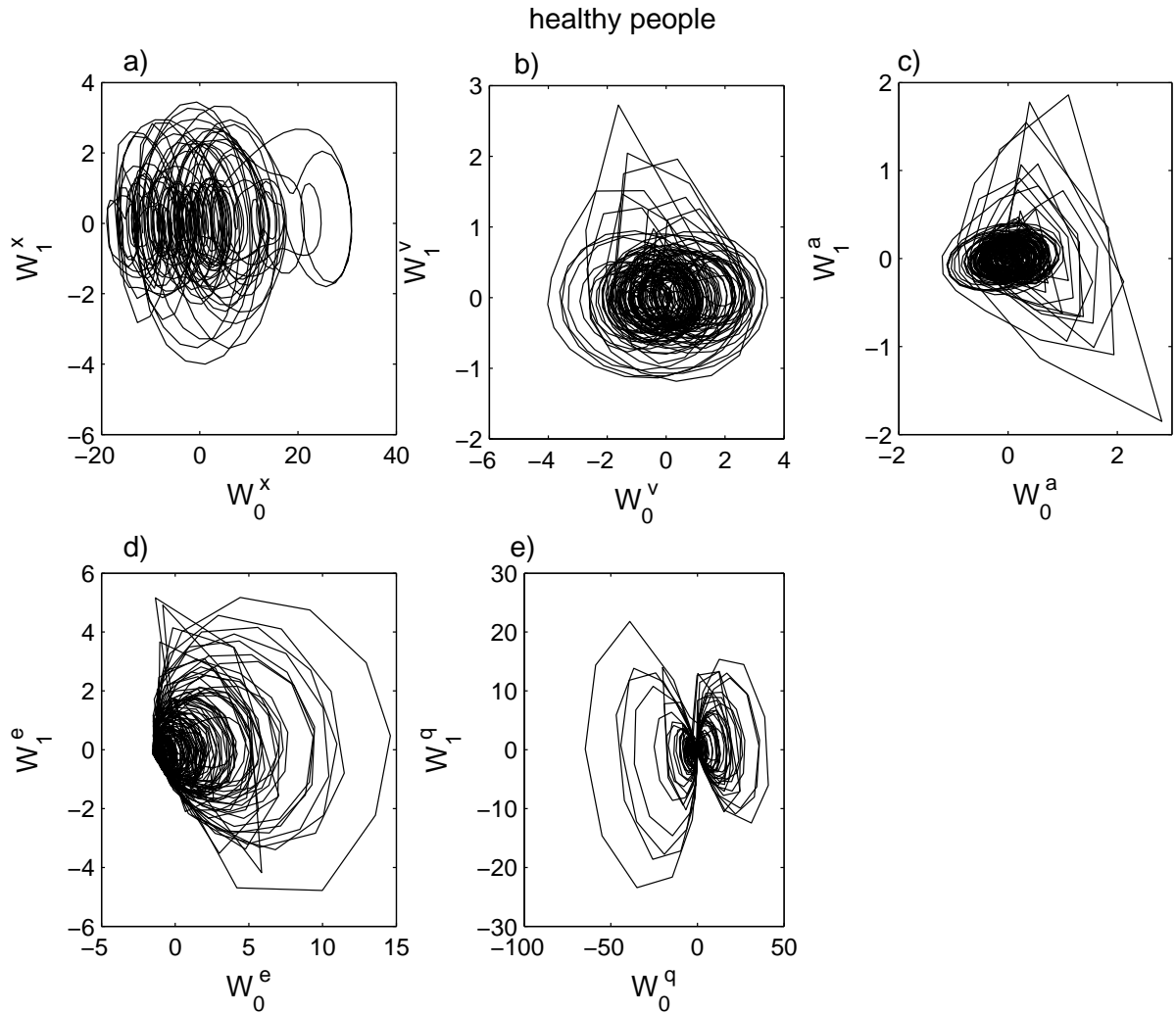


Рис. 5.1.1: Плоские проекции фазовых портретов ортогональных динамических переменных  $\mathbf{W}_0^\xi, \mathbf{W}_1^\xi$  для сигнала МЭГ 10 сенсора в случае здорового испытуемого (№ 7) при воздействии красно-голубого стимула. Подобная структура фазовых траекторий характерна для нейромагнитных сигналов здоровых людей.

екции фазовых портретов построены для рассчитанной последовательности динамической переменной: “координаты”  $\{x_j\}$  (Рис. 5.1.1а, 5.1.2а), “скорости”  $\{v_j\}$  (Рис. 5.1.1б, 5.1.2б), “ускорения”  $\{a_j\}$  (Рис. 5.1.1с, 5.1.2с), “кинетической энергии частицы”  $\{e_j\}$  (Рис. 5.1.1д, 5.1.2д), “потока энергии”  $\{q_j\}$  (Рис. 5.1.1е, 5.1.2е). Фазовые траектории в случае здорового испытуемого имеют структуру квазипериодических спиралей. Кроме того, обнаруживаются симметричные относительно начала координат ядра. Аналогичные структуры выявлены для других волонтеров из контрольной группы. В случае пациента, очевидным оказывается существенное увеличение масштабов фазовых облаков по

сравнению с фазовыми траекториями, построенными для здорового испытуемого. Масштабы фазовых облаков для пациента увеличиваются примерно в 10 раз для зависимости  $\mathbf{W}_1^x = f(\mathbf{W}_0^x)$ , примерно в 1000 раз для  $\mathbf{W}_1^q = f(\mathbf{W}_0^q)$ .

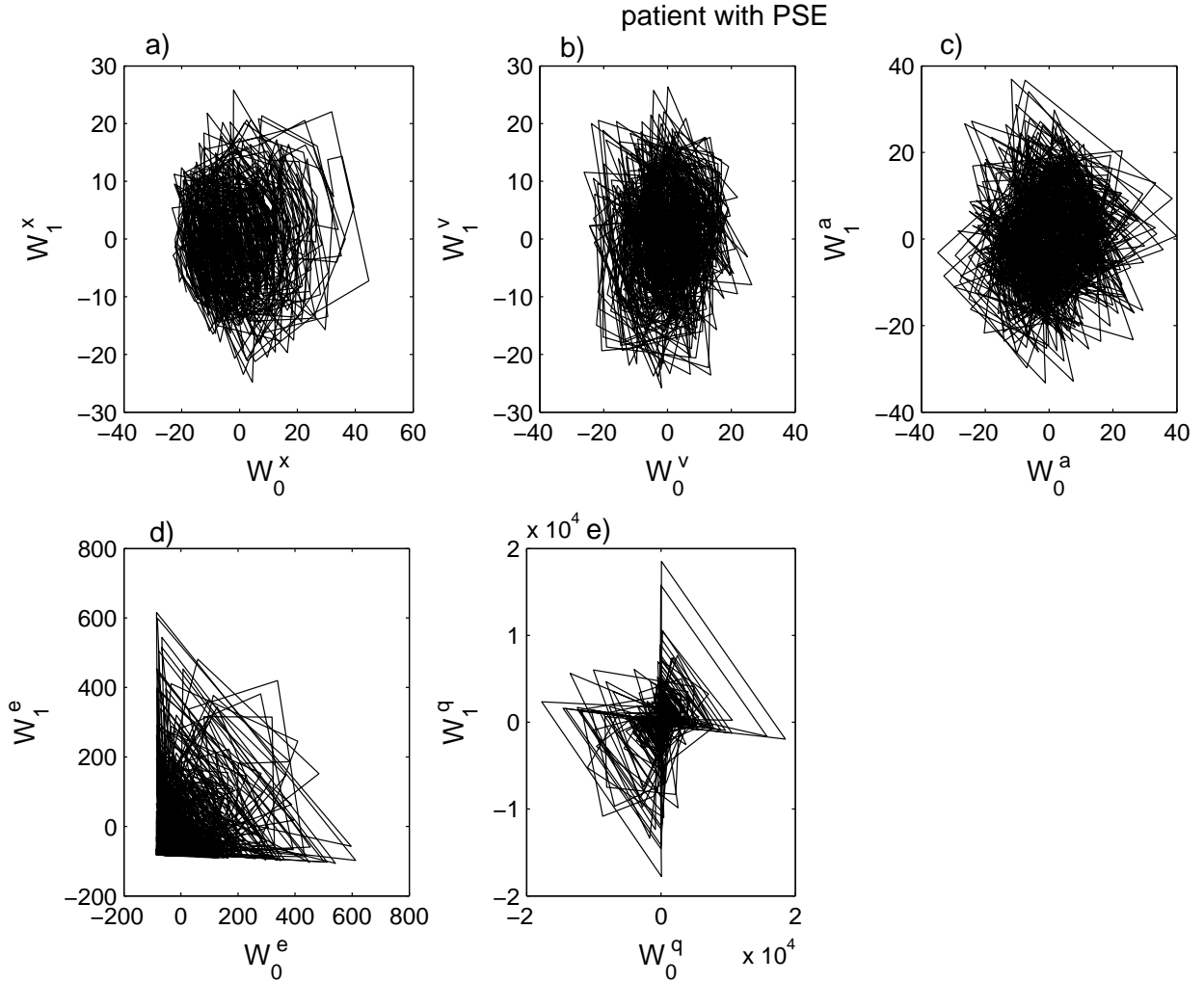


Рис. 5.1.2: Плоские проекции фазовых портретов первых двух динамических ортогональных переменных  $\mathbf{W}_0^\xi, \mathbf{W}_1^\xi$  для сигнала МЭГ сенсора № 10 для пациента с ФЧЭ при воздействии красно-голубого мерцающего стимула. Фазовые траектории построены для квазипроизводных разных порядков: (a)  $\xi = x$ , (b)  $\xi = v$ , (c)  $\xi = a$ , (d)  $\xi = e$ , (e)  $\xi = q$ .

### Изменение периодических особенностей нейромагнитной активности мозга человека при ФЧЭ

На Рис. 5.1.3, 5.1.4 представлены спектральные плотности мощности ВКФ и функций памяти  $\mu_i^q(\nu)$ , где  $i = 0 \dots 3$ , для рассчитанной последовательности потока энергии  $\{q_j\}$  для сигналов МЭГ, зарегистрированных с 10 сенсора

здорового испытуемого и пациента. В случае представления спектра мощности исходной ВКФ (Рис. 5.1.3а) для здорового испытуемого в двойной логарифмической шкале в области средних и высоких частот выявляется степенная зависимость  $\mu_0^q(\nu) \sim 1/\nu^\alpha$ . В области низких частот до 50 Гц отчетливо различимы всплески, которые характеризуют периодические особенности активности мозга – мозговые ритмы. Известно, что ритмы мозга отражают сложные психо-физиологические процессы мозговой деятельности. Их изменение свидетельствуют о нарушениях в функционировании головного мозга и центральной нервной системы человека. На спектрах мощности функций памяти в области средних частот проявляются пики, отражающие дополнительные периодические особенности активности мозга.

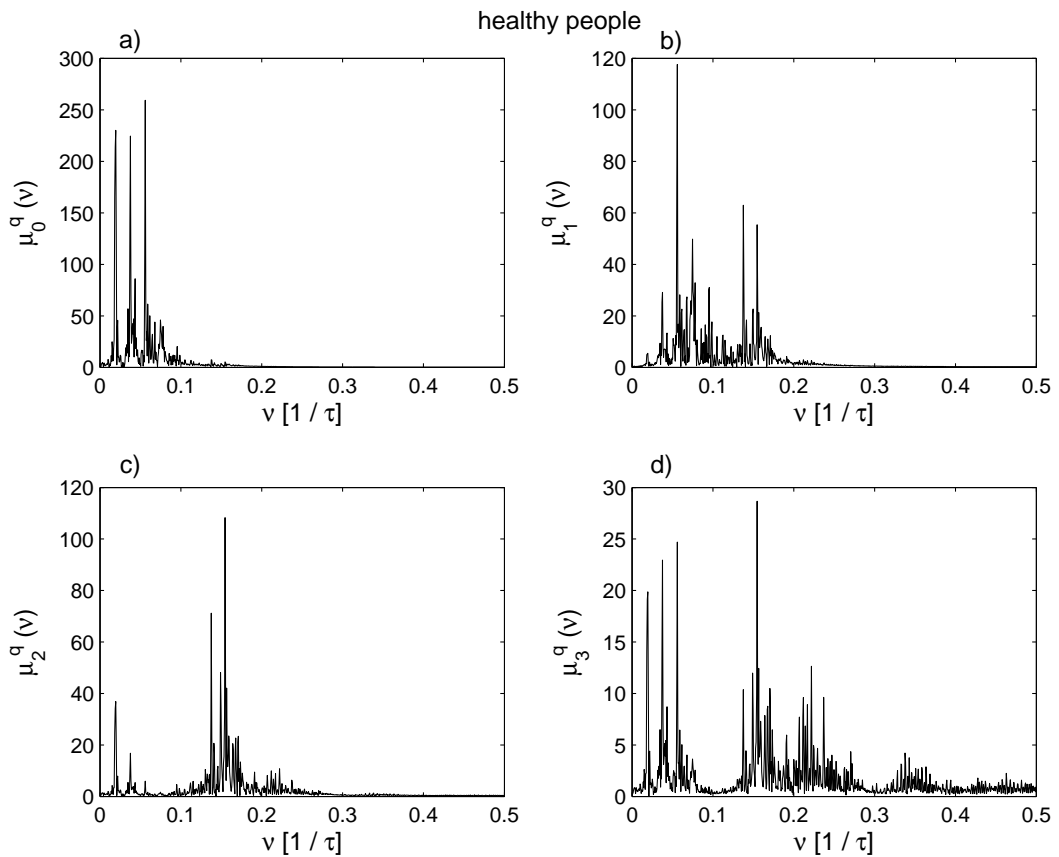


Рис. 5.1.3: Спектры мощности исходной ВКФ и функций памяти  $\mu_i^q(\nu)$ , где  $i = 0 \dots 3$ , для регистрируемого с десятого сенсора сигнала МЭГ здорового испытуемого (№ 7) при красно-голубом мерцающем стимуле. Частотные зависимости  $\mu_i^q(\nu)$  построены для последовательности наблюдений  $\{q_j\}$ .

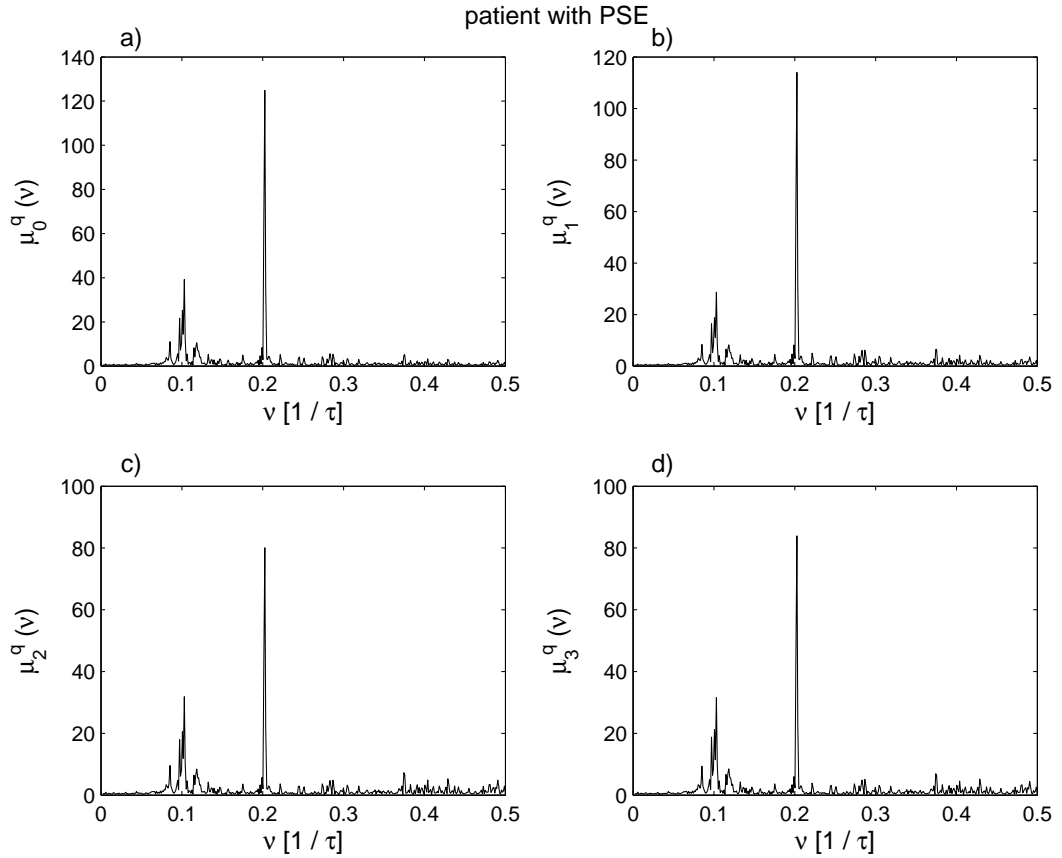


Рис. 5.1.4: Частотные зависимости исходной ВКФ и функций памяти  $\mu_i^q(\nu)$ , где  $i = 0 \dots 3$ , для нейромагнитного отклика пациента с ФЧЭ (сенсор № 10, красно-голубой мерцающий стимул). Спектры построены для последовательности наблюдений  $\{q_j\}$ .

Иное поведение обнаруживается на спектрах мощности ВКФ и функций памяти для сигнала МЭГ пациента (Рис. 5.1.4). В широкой полосе частот наблюдается нарушение степенной зависимости (Рис. 5.1.4a-d). На спектрах мощности в окрестностях 50 Гц и 100 Гц отчетливо различимы доминирующие пики. Аномальное поведение мозговых ритмов свидетельствует о существенных изменениях в нейромагнитной активности мозга пациента по сравнению с контрольной группой. Можно сформулировать предположение о существовании у здоровых испытуемых защитного механизма, блокирующего аномальную коллективную активность нейронов. При возникновении патологии действие данного регулятора подавляется, что отражается в появлении более высокочастотной динамики сигналов мозга. Именно воздействие

зрительного мерцающего стимула в случае ФЧЭ приводит к появлению квазипериодических процессов, имеющих более высокую частоту и отражающих патологические изменения, проявляющиеся при данном заболевании.

### Аномальное проявление эффектов статистической памяти при ФЧЭ

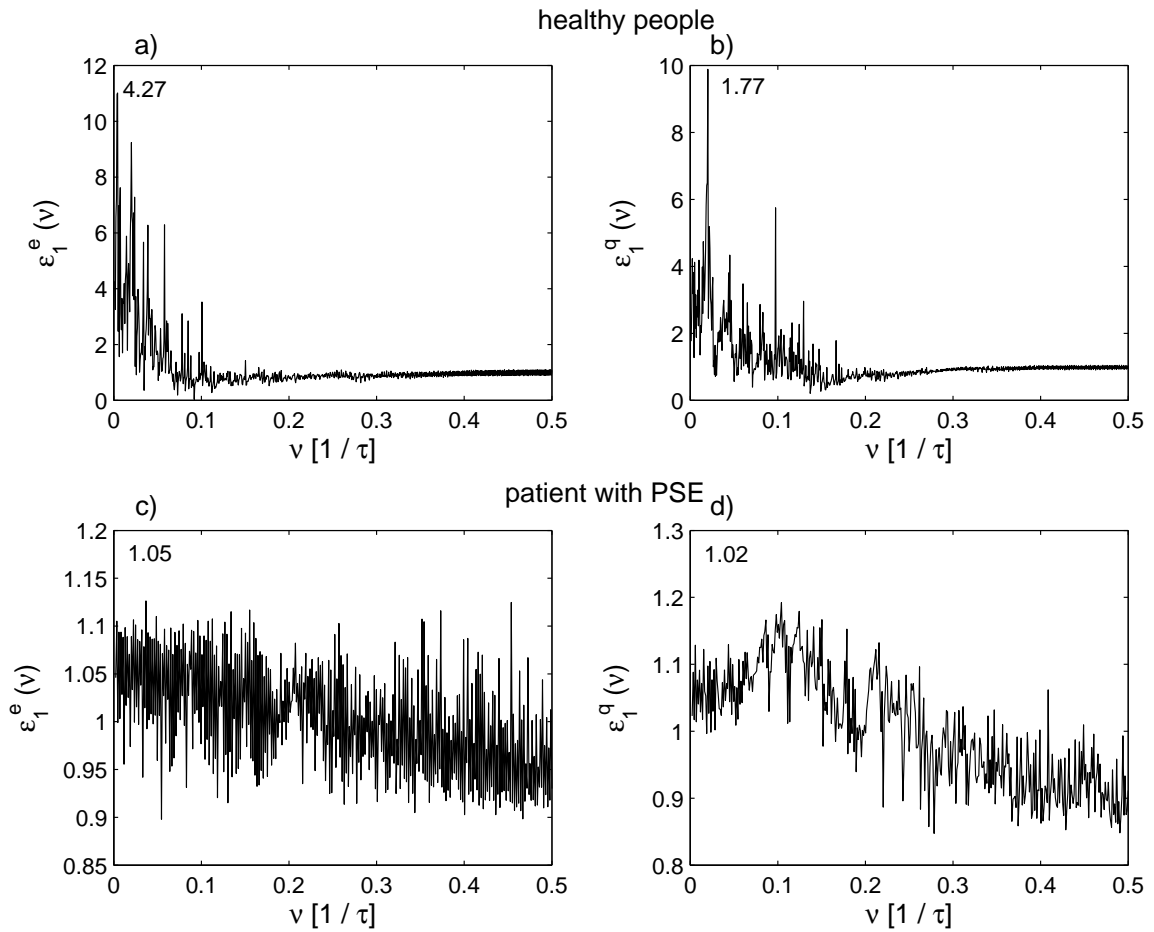


Рис. 5.1.5: Частотная зависимость меры статистической памяти  $\varepsilon_1^{e,q}(\nu)$  сигналов МЭГ, фиксируемых десятым сенсором: (а, б) для здорового испытуемого № 7 и (с, d) – пациента с ФЧЭ (красно-голубой мерцающий стимул). Частотные зависимости построены для временных зависимостей  $\{e_j\}$  и  $\{q_j\}$ . Указаны значения критерия памяти на нулевой частоте.

Для исследования эффектов статистической памяти в последовательностях  $\{e_j\}$ ,  $\{q_j\}$  выполним построение соответствующих частотных зависимостей  $\varepsilon_1^e(\nu)$ ,  $\varepsilon_1^q(\nu)$  для сигналов МЭГ десятого сенсора здорового испытуемого (Рис. 5.1.5а,б) и пациента (Рис. 5.1.5с,д) при воздействии красно-голубого

мерцающего стимула (соотношения приведены в §2.7). В случае здорового испытуемого в области частот до 50 Гц обнаруживается осциллирующее поведение с последующим затуханием в полосе средних и высоких частот (Рис. 5.1.5a,b). Подобное поведение связано с проявлением мозговых ритмов. Значения параметров  $\varepsilon_1^e(0) = 4.3, \varepsilon_1^q(0) = 1.77$  для здорового испытуемого и  $\varepsilon_1^{e,q}(0) \sim 1$  для пациента указывают на критическую роль эффектов статистической памяти при патологических изменениях в деятельности мозга человека при ФЧЭ.

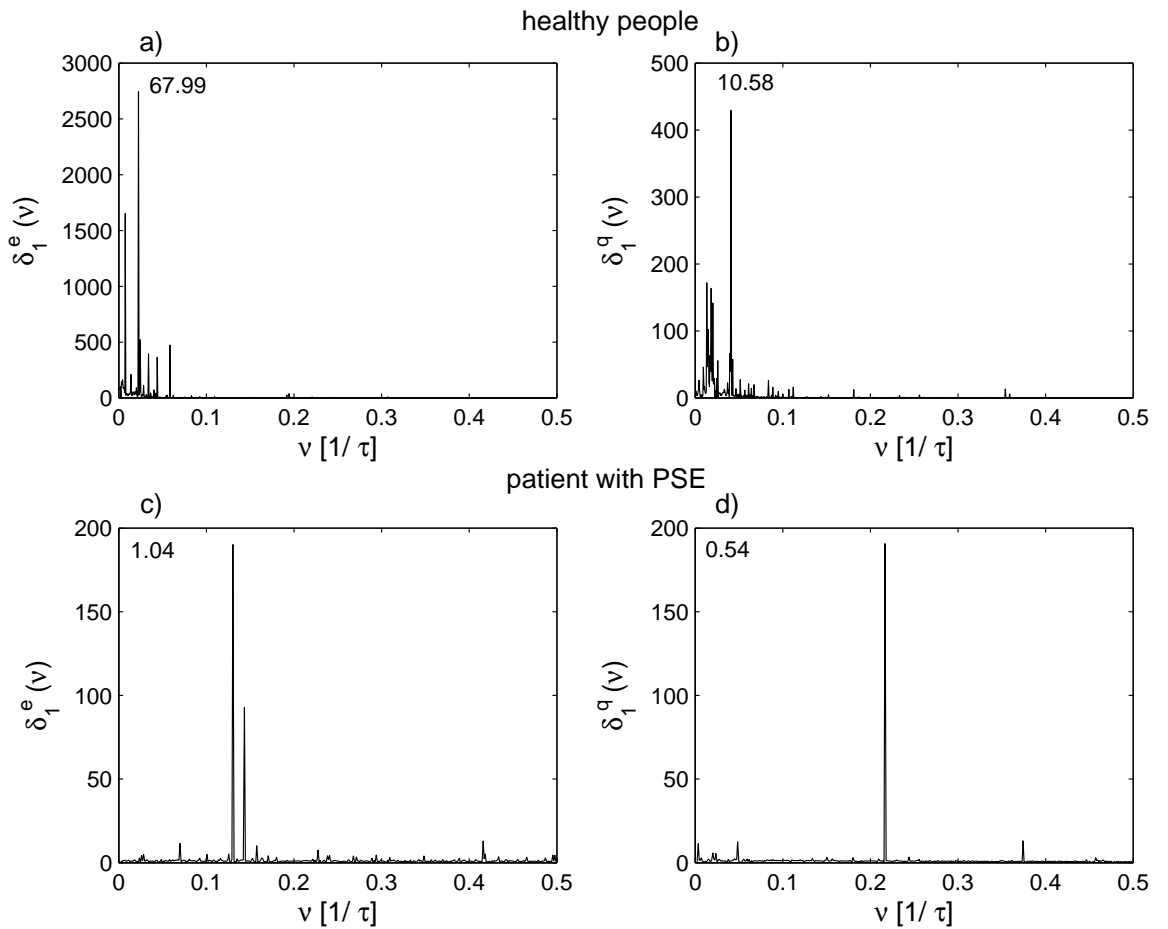


Рис. 5.1.6: Частотная зависимость меры памяти  $\delta_1^{e,q}(\nu)$  для сигналов сенсора № 10: для здорового испытуемого (a, b) и пациента с ФЧЭ (c, d) (красно-голубой мерцающий стимул). Зависимости построены для вычисленных последовательностей  $\{e_j\}, \{q_j\}$ . Указаны значения  $\delta_1^{e,q}$  на нулевой частоте.

На Рис. 5.1.6 представлены частотные зависимости  $\delta_1^e(\nu), \delta_1^q(\nu)$  для сигналов сенсора № 10 здорового испытуемого (Рис. 5.1.6a,b) и пациента (Рис.

5.1.6с,d). В области низких частот обнаруживается осциллирующее поведение для нейромагнитных откликов в случае здорового человека. Существенные по амплитуде пики соответствуют физиологическим ритмам мозга. В случае пациента амплитуда пиков, наблюдаемых в области средних частот, значительно уменьшается. Значения критерия памяти составляют  $\delta_1^e(0) = 68$ ,  $\delta_1^q(0) = 10.6$  и  $\delta_1^e(0) \approx 1$ ,  $\delta_1^q(0) \approx 0.5$  для здорового испытуемого и пациента соответственно. Изменение характера проявления эффектов памяти в сигналах МЭГ пациента связано с распространением аномального коллективного возбуждения нейронов коры и подкорковых структур при воздействии светового стимула.

### **Релаксационные особенности нейромагнитной активности мозга человека при ФЧЭ**

В таблице 5.1.1 представлены значения кинетических  $|\lambda_i|$  и релаксационных  $|\Lambda_i|$  параметров для пациента и усредненные по группе здоровых испытуемых для рассчитанных последовательностей динамических переменных:  $\{x_j\}$ ,  $\{v_j\}$ ,  $\{a_j\}$ ,  $\{e_j\}$ ,  $\{q_j\}$ . Сравнительный анализ данных параметров позволяет обнаружить существенные различия релаксационных особенностей динамики нейромагнитных откликов. С физической точки зрения параметры  $|\lambda_i|$ ,  $|\Lambda_i|$  характеризуют скорость и частоту затухания релаксационных процессов на соответствующих уровнях статистического описания. Для всех последовательностей квазипроизводных наблюдается значительное увеличение параметра  $|\lambda_1|$  в случае сигналов МЭГ пациента по сравнению с контрольной группой. Различия в значениях кинетических и релаксационных параметров при переходе от нормальной к патологической нейромагнитной активности человека связаны с большим числом высокочастотных резонансов в динамике сигналов мозга пациента.

На Рис. 5.1.7 представлены зависимости кинетических параметров  $\lambda_i$  от номера СКВИДа. Сравнительный анализ кинетических параметров, вычис-

Таблица 5.1.1: Значения кинетических  $|\lambda_i|$  и релаксационных  $|\Lambda_i|$  параметров, где  $i = 1, 2, 3$ , для биомагнитной активности с 10-го сенсора пациента с ФЧЭ (Р), а также значения параметров усредненные по контрольной группе (Со).

Переменная	Субъект	$ \lambda_1 $	$ \lambda_2 $	$ \lambda_3 $	$ \Lambda_1 $	$ \Lambda_2 $	$ \Lambda_3 $
$x$	Со	0.01	0.07	0.21	0.01	0.1	0.07
	Р	0.29	0.74	$\sim 1$	0.18	0.04	0.01
$v$	Со	0.07	$\sim 0.2$	0.75	0.12	0.06	0.09
	Р	0.83	0.95	1.05	0.27	0.03	0.04
$a$	Со	0.2	$\sim 0.6$	$\sim 1$	0.18	0.04	0.11
	Р	1.25	1.08	1.09	0.3	0.07	0.07
$e$	Со	0.11	0.34	$\sim 0.7$	0.16	0.14	0.02
	Р	0.96	$\sim 1$	$\sim 1$	0.05	0.01	0.01
$q$	Со	0.11	0.32	0.62	0.16	0.17	0.11
	Р	0.89	$\sim 1$	1.01	0.1	0.01	0.02

ленных для нейромагнитных откликов здоровых испытуемых и пациента – последовательности  $\{x_j\}$ , позволяет установить существенные различия в скорости затухания релаксационных процессов.

### §5.1.3 Выводы. Описание квазипроизводных дискретного типа сигналов, генерируемых сложными системами

Ранее в §2.2-§2.7 были представлены результаты обобщения формализма функций памяти Цванцига-Мори на случай квазипроизводных разных порядков. Исходная дискретная последовательность наблюдений представляется в виде последовательности “координат”  $\{x_j\}$  квазичастицы. Рассчитываются последовательности динамических переменных  $\{v_j\}$ ,  $\{a_j\}$ ,  $\{e_j\}$ ,  $\{q_j\}$ , характеризующие динамику движения квазичастицы. В рамках ФФП выполняется расчет ортогональных динамических переменных, построение фазовых портретов комбинаций динамических переменных, спектров мощности ВКФ

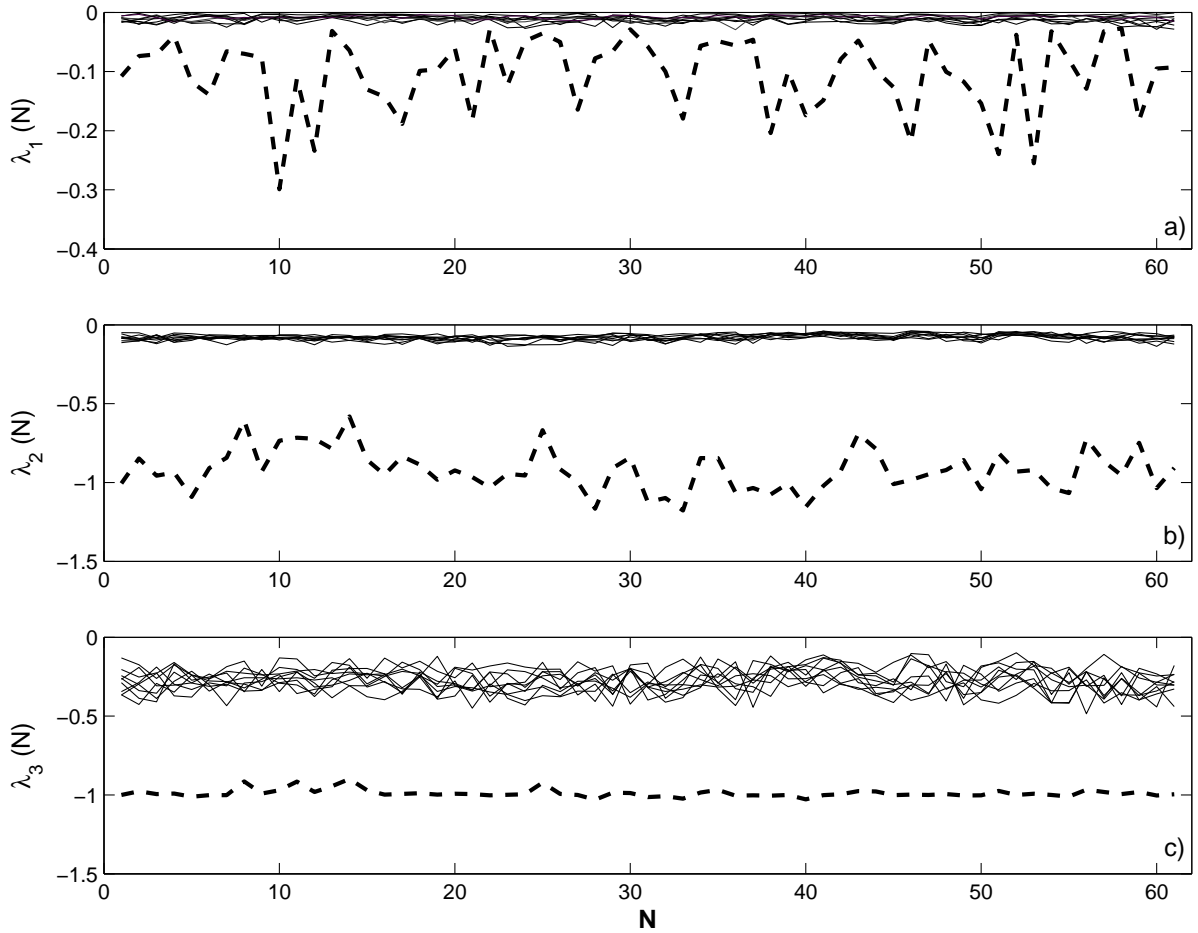


Рис. 5.1.7: Зависимость кинетических параметров  $\lambda_i$  ( $i=1,2,3$ ) от номера сенсора (СКВИДа). Кинетические параметры вычислены для динамики МЭГ-сигналов здоровых испытуемых (сплошные линии) и пациента с ФЧЭ (штриховая линия).

и функций памяти, частотных зависимостей мер памяти, производится расчет кинетических и релаксационных параметров для последовательностей конечно-разностных производных разных порядков.

Здесь проведено исследование вызванных нейромагнитных откликов на стороннее световое воздействие здоровых испытуемых и пациента с ФЧЭ. При патологии обнаруживается существенная стратификация (расслоение), а также изменение структуры фазовых портретов ортогональных динамических переменных  $\mathbf{W}_1^\xi = f(\mathbf{W}_0^\xi)$ , вычисленных для последовательностей  $\{x_j\}$ ,  $\{v_j\}$ ,  $\{a_j\}$ ,  $\{e_j\}$ ,  $\{q_j\}$ . На спектрах мощности исходной ВКФ и функций па-

мента, построенных для магнитоэлектрической активности мозга пациента, обнаруживается подавление физиологических ритмов мозга и преобладание более высокочастотной квазипериодической активности. Коллективное возбуждение нейронов коры головного мозга пациента в случае внешнего светового воздействия при ФЧЭ приводит к аномальному проявлению эффектов статистической памяти в дискретной динамике последовательностей квазипроизводных. Например, отношение критериев статистической памяти на нулевой частоте для вариаций  $\{e_j\}$  и  $\{q_j\}$  для сигналов здорового человека ( $I$ ) и пациента ( $II$ ) составляет

$$\frac{\varepsilon_1^e(I)}{\varepsilon_1^e(II)} \approx 4.1, \quad \frac{\delta_1^e(I)}{\delta_1^e(II)} \approx 65.4, \quad \frac{\varepsilon_1^q(I)}{\varepsilon_1^q(II)} \approx 1.7, \quad \frac{\delta_1^q(I)}{\delta_1^q(II)} \approx 19.6.$$

Сравнительный анализ значений кинетических  $|\lambda_i|$  и релаксационных  $|\Lambda_i|$  параметров характеризует существенное различие в скорости затухания релаксационных процессов в динамике МЭГ-сигналов пациента в сравнении с контрольной группой.

Тем самым, анализ квазипроизводных исследуемой дискретной динамики позволяет установить различия между характеристиками сигналов для пациента и контрольной группы и количественно идентифицировать проявления ФЧЭ – аномальную коллективную активность нейронов коры головного мозга, особенно выявляемую при анализе сигнала 10-го сенсора и сопровождающуюся различными клиническими и параклиническими проявлениями.

Особый интерес представляют исследования кросс-корреляционных связей [93], обнаруженных в МЭГ-сигналах здоровых испытуемых и пациента, а также эффектов частотно-фазовой синхронизации как проявления некоторых соотношений между характерными частотами и фазами возбуждений в различных областях коры головного мозга [A12]. Нарушение данных взаимосвязей определяет пути для поиска диагностических критериев различных патологий мозга.

## **§5.2 Локальные особенности стохастической динамики негамильтоновых живых систем**

В настоящем параграфе обобщены результаты анализа локальных особенностей и закономерностей в дискретной динамике живых систем. Эти закономерности обнаруживаются посредством разработки оригинальных процедур локализации. Предполагается следующий алгоритм действий: предварительный выбор оптимальной длины выборки, разбиение исходной временной серии на характерные участки, вычисление локальных характеристик для каждой выборки. Процедуры локализации позволяют извлекать информацию о локальных особенностях временных сигналов. Далее на примере анализа биомедицинских сигналов будут продемонстрированы процедуры построения оконно-временного поведения спектральных характеристик и локальных кинетических и релаксационных параметров.

### **§5.2.1 Роль эффектов статистической памяти в эволюции живых систем**

Как было указано ранее (см. §2.7) с физической точки зрения критерии памяти позволяют различать марковские процессы с короткой или мгновенной статистической памятью и немарковские процессы с далекодействующей памятью. При этом под памятью понимается коррелированность, проявляющаяся в поведении исходной ВКФ и функций памяти. Комплексный анализ биомедицинских и физиологических показателей [A1, A8, A5, A11, A23] позволил установить взаимосвязь, которая существует между поведением статистических мер памяти и динамическими состояниями живых систем [48, 93, 94, 95, 96]. Меры памяти, вычисленные для сигналов здоровых испытуемых, принимали значения  $\varepsilon_1(0), \delta_1(0) \sim 10^2 \div 10^3$ . В случае исследования биомедицинских сигналов, временных серий физиологических показателей

человека при различных патологиях значения мер памяти  $\varepsilon_1(0)$ ,  $\delta_1(0)$  не превышали нескольких единиц.

Высокая размерность, наличие сильных нелинейных взаимодействий и обратных связей определяют эволюцию сложных систем живой природы. При различных аномальных состояниях, например, заболеваниях, внешние и/или внутренние воздействия приводит к частичной синхронизации (“регуляризации”, упорядоченности) в поведении анализируемых систем. Возникающие при этом взаимосвязи отражаются в поведении мер статистической памяти.

### §5.2.2 Оконно-временное построение спектральных характеристик

Оконно-временное построение частотных зависимостей ВКФ, функций и критериев мер памяти представляет собой одну из разновидностей локализации. Суть его заключается в следующем. Для каждого временного сигнала определяется оптимальная длина локального окна (выборки). Далее исходная последовательность экспериментальных данных разбивается на совокупность окон определенной длины. Для каждого окна производится построение соответствующих частотных зависимостей.

На Рис. 5.2.1 представлены спектр мощности и его оконно-временное поведение первой функции памяти  $\mu_1(\nu)$  для стохастической динамики  $R$ - $R$  интервала, извлекаемой из ЭКГ молодого и пожилого испытуемых. В регистрации экспериментальных данных [97] участвовали две группы здоровых волонтеров: 10 молодых (средний возраст 27 лет, возрастной диапазон от 21 года до 34 лет) и 10 пожилых (средний возраст 74 года, возрастной диапазон от 68 лет до 81 года) испытуемых. Каждая группа состояла из пяти женщин и пяти мужчин. К эксперименту допускались только некурящие испытуемые без нарушений ритма сердца. Регистрация осуществлялась в синусовом ритме во время просмотра фильма “Фантазия” компании У. Диснея. ЭКГ были подвергнуты автоматической и визуальной обработке на предмет отсут-

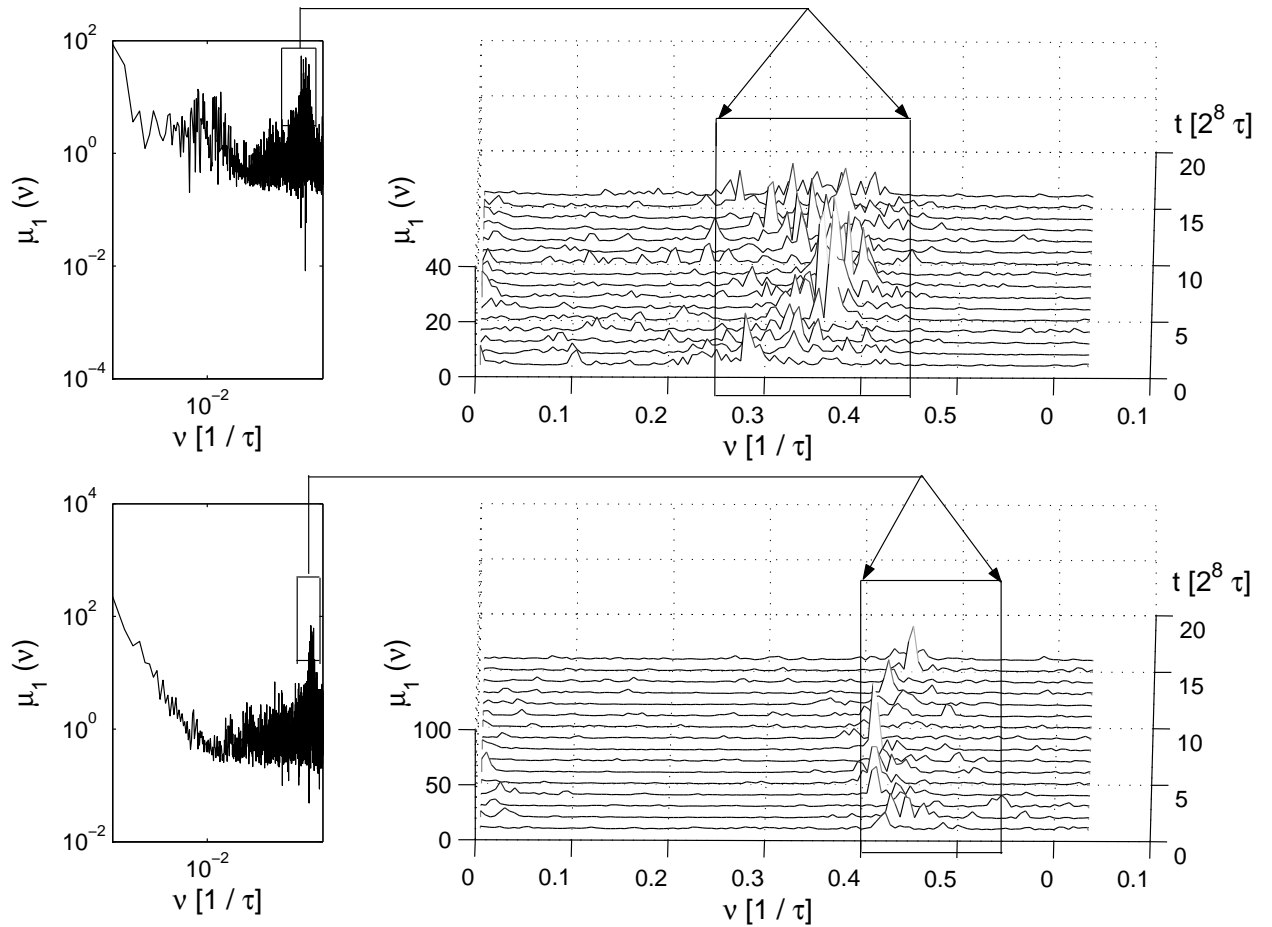


Рис. 5.2.1: Спектральные плотности мощности и их оконно-временные представления ( $N=256$  точек) для функций памяти первого порядка  $\mu_1(\nu)$  динамики  $R$ - $R$  интервала (верхний график – молодой испытуемый; нижний график – пожилой испытуемый). Спектральные плотности мощности представлены в двойной логарифмической шкале.

ствия аритмий. Всплески мощности в области высоких частот в диапазоне  $0.25f.u. < \nu < 0.45f.u.$  для молодого испытуемого и  $0.4f.u. < \nu < 0.55f.u.$  – пожилого волонтера связаны с дыхательной аритмией. Смещение всплесков в более высокочастотную область отражает возрастные физиологические изменения в деятельности сердечно-сосудистой системы человека [A4, A7].

Следующий результат связан с анализом динамики скорости патологического тремора указательного пальца пациента при болезни Паркинсона (БП) (<http://physionet.org/physiobank/database/>). Экспериментальные данные были предоставлены научным коллективом под руководством французского нейрофизиолога А. Бейтер (A. Beuter) [98]. В исследовании участвовали

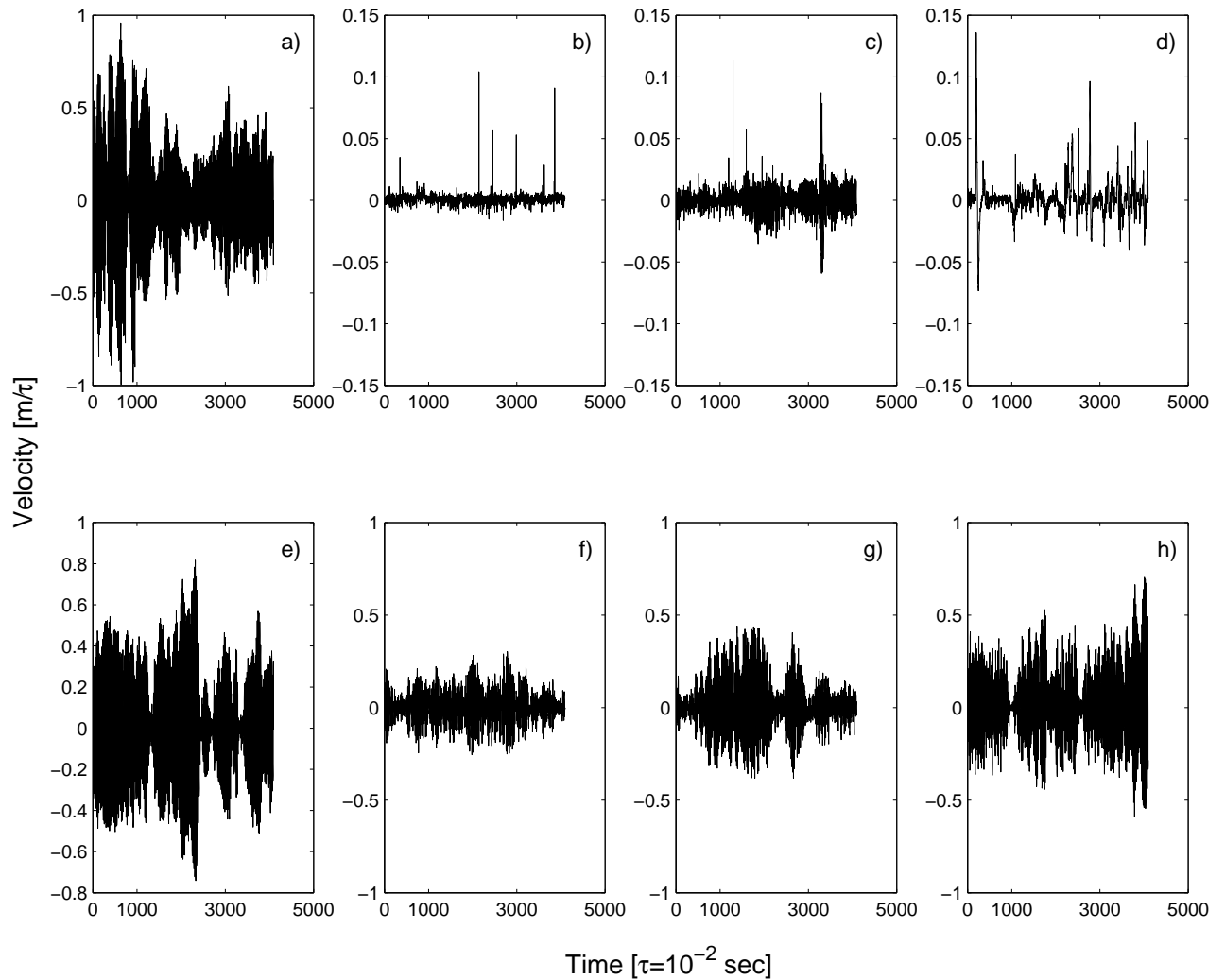


Рис. 5.2.2: Скорость патологического тремора указательного пальца пациента при болезни Паркинсона, фиксируемая в различных условиях: (a) – в естественном состоянии пациента, (b) – при воздействии на организм пациента электромагнитной стимуляции и леводопы, (c) – при электромагнитной стимуляции пациента, (d) – при использовании только медикаментов, (e)-(h) – в состоянии, которое наблюдается через 15, 30, 45, 60 минут после отключения электромагнитной стимуляции, медикаменты не используются.

16 пациентов до 70 лет (11 мужчин и 5 женщин) с диагностированной БП<sup>1</sup>. Все волонтеры находились во время испытания в клинически стабильном состоянии.

Регистрация рассеянного света от указательного пальца пациента осуществлялась гелий-неоновым лазером (класс II), находящимся на расстоянии

<sup>1</sup>Болезнь Паркинсона представляет собой хроническое прогрессирующее заболевание головного мозга и ЦНС человека, наблюдающееся у 1-2 % пожилых людей. Данное заболевание было описано в 1817 г. Дж. Паркинсоном (James Parkinson) в книге *An essay on the shaking palsy*. В 19 столетии французский невролог П. Шарко (Pierre Marie Charcot) предложил использовать обозначение *болезнь Паркинсона*. Симптомами, характерными для БП, являются тремор в покое, замедление движений, скованность мышц.

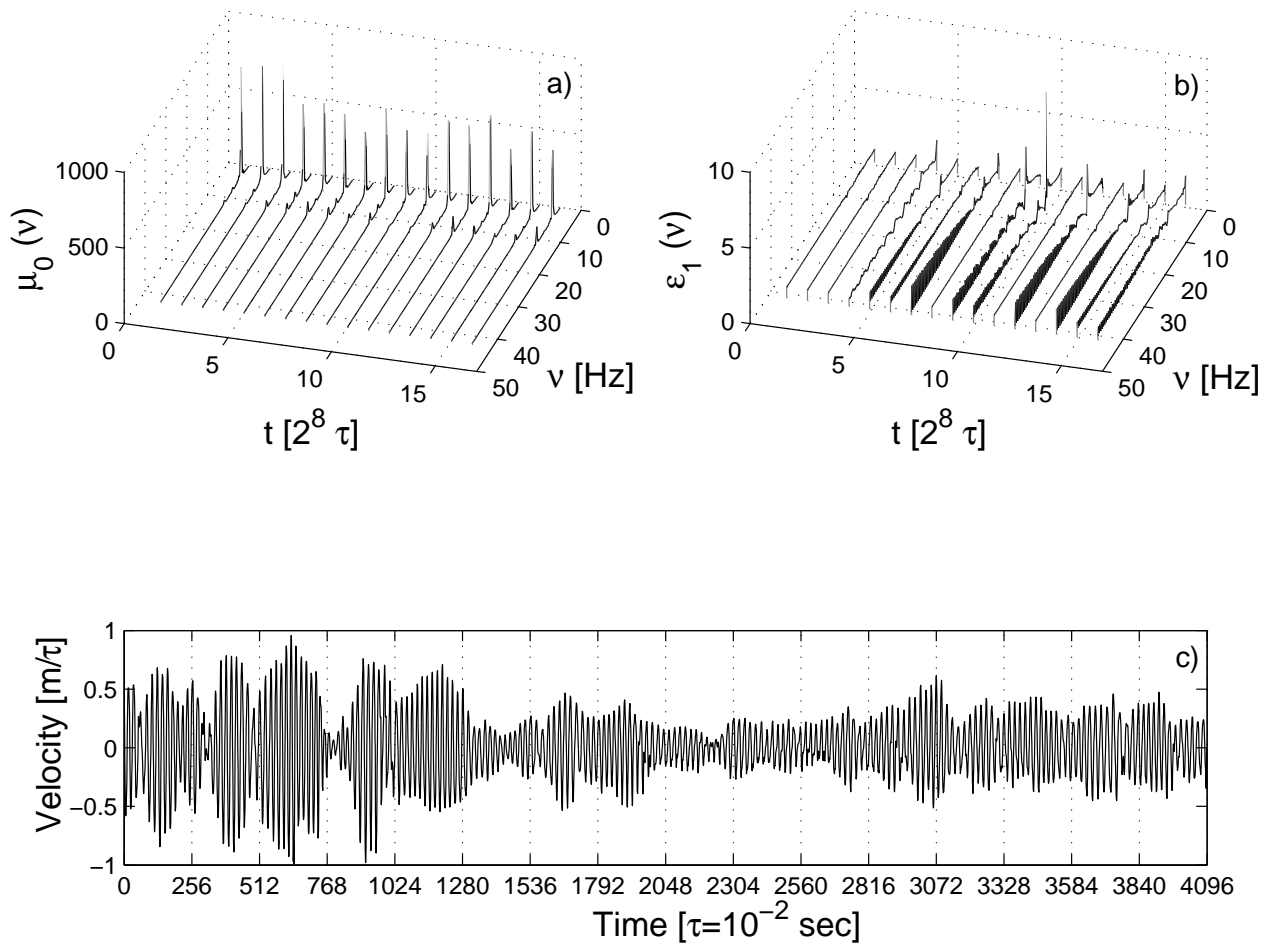


Рис. 5.2.3: Оконно-временное поведение ( $N=256$  точек) спектра мощности исходной ВКФ  $\mu_0(\nu)$  (a) и частотной зависимости параметра  $\varepsilon_1(\nu)$  (b) для скорости патологического тремора указательного пальца пациента при болезни Паркинсона (c).

30 см. Лазерный луч был направлен перпендикулярно поверхности отражающей пленки, прикрепленной к указательному пальцу. Временные сигналы фиксировались при восьми различных условиях проведения испытания (Рис. 5.2.2, шестой испытуемый). Здесь мы анализируем только записи, полученные при естественном состоянии пациента. На Рис. 5.2.3 в оконно-временном поведении исходной ВКФ  $\mu_0(\nu)$  на частоте  $\nu=5.2$  Гц, характерной частоте тремора в рассматриваемом случае, выявляются спектральные всплески. На окнах 1-3 заметны наиболее значительные по амплитуде всплески. В исходной временной записи этим областям соответствует наибольшая скорость патологического тремора. В то же время при возрастании скорости тремора значения меры памяти  $\varepsilon_1(\nu)$  приближаются к единице (окна 1-3, 8, 11, 13). В

моменты уменьшения скорости патологического тремора в оконно-временном поведении меры памяти наблюдается проявление квазимарковского режима [A5, A7, A23].

### **§5.2.3 Временные зависимости локальных кинетических и релаксационных параметров**

В рамках ФФП осуществляется расчет кинетических  $\lambda_i$  и релаксационных  $\Lambda_i$  параметров для всей последовательности экспериментальных данных (соотношения представлены в §2.5, §2.6, §3.5, §4.3). Используя вторую процедуру локализации, можно выполнить построение временных зависимостей кинетических и релаксационных параметров. С начала исходной временной последовательности выбирается локальная выборка, для которой вычисляются кинетические и релаксационные параметры. Выполняется сдвиг локального окна на один шаг дискретизации по временной шкале. Производится расчет кинетических и релаксационных параметров. Передвигаем локальное окно до конца временной серии, каждый раз вычисляя параметры. В полученных временных зависимостях достаточно отчетливо выявляются эффекты динамической перемежаемости.

При использовании данной процедуры предварительно необходимо оценить оптимальную длину локального окна. Продемонстрируем реализацию “быстрого” алгоритма процедуры оптимизации, представленного ранее в §3.2. Воспользуемся приведенными выше экспериментальными данными динамики  $R$ - $R$  интервалов для 10 молодых и 10 пожилых испытуемых [97]. На Рис. 5.2.4 приведены зависимости показателей  $\lambda_i$ ,  $\Lambda_i$  от длины локальной выборки  $N$  для одного из молодых испытуемых. При значениях  $120 \div 150$  возникает “устойчивость” в поведении параметров  $\lambda_i$ ,  $\Lambda_i$ . Соответственно выбирается локальная выборка длиной в 120 точек [A4, A7].

На Рис. 5.2.5 представлены временные зависимости локальных кинетиче-

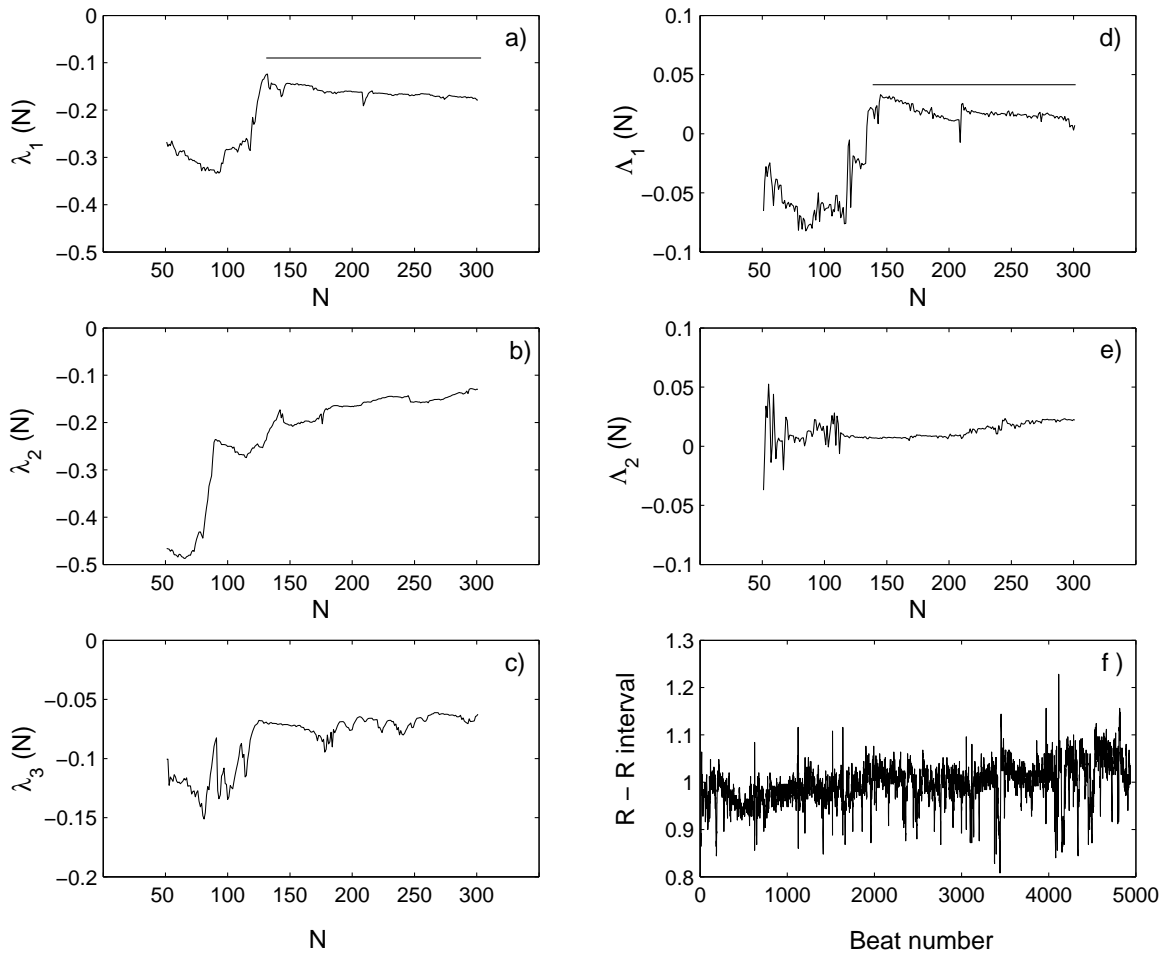


Рис. 5.2.4: Реализация процедуры оптимизации. Вычисления показывают, что для исследуемых временных сигналов динамики  $R$ - $R$  интервалов молодых и пожилых испытуемых (пример одного из сигналов приведен на графике (f)), оптимальная длина локальных окон составляет  $120 \div 150$  временных шагов. В этом интервале поведение кинетических  $\lambda_i$  ((a):  $i=1$ ; (b):  $i=2$ ; (c):  $i=3$ ) и релаксационных  $\Lambda_i$  ((d):  $i=1$ ; (e):  $i=2$ ) параметров становится “устойчивым”.

ских  $\lambda_i(t)$  и релаксационных  $\Lambda_i(t)$  параметров, усредненные для данных молодых и пожилых испытуемых. На графиках сплошными линиями отмечены минимальные и максимальные значения локальных параметров. В среднем для группы молодых испытуемых локальный параметр  $|\lambda_1| = |\lambda_1(t)|$  изменяется в интервале  $0.17\tau^{-1} < |\lambda_1| < 0.85\tau^{-1}$ . В группе пожилых испытуемых данный показатель изменяется в интервале  $0.019\tau^{-1} < |\lambda_1| < 0.36\tau^{-1}$ . Отношение среднеквадратичной амплитуды для временной последовательности значений  $\lambda_1(t)$  сигналов представителей первой и второй групп  $\langle A \rangle = \left( \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} x_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}$

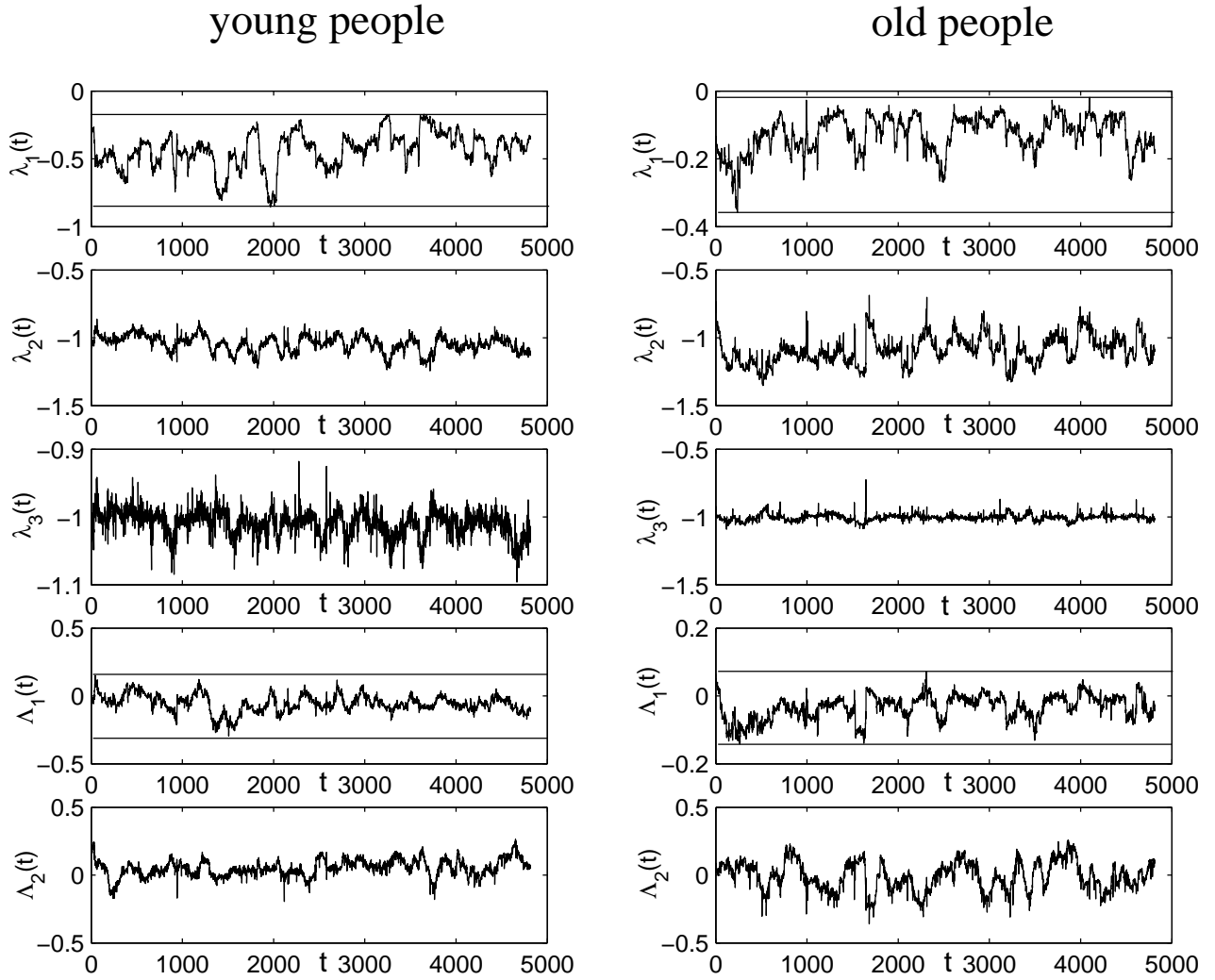


Рис. 5.2.5: Временные зависимости локальных кинетических  $\lambda_i(t)$  и релаксационных  $\Lambda_i(t)$  параметров, усредненные для группы молодых испытуемых (левый столбец) и пожилых испытуемых (правый столбец).

составляет 3.3. Этот результат свидетельствует о возрастных изменениях, связываемых со скоростью затухания релаксационных процессов в функционировании сердечно-сосудистой системы человека. Для сравнения среднеквадратичные амплитуды для параметра  $\Lambda_1(t)$  для молодых и старых испытуемых различаются в 1.7 раза.

На Рис. 5.2.6 представлены временная зависимость локального кинетического параметра  $\lambda_1(t)$  для динамики заболеваемости людей гриппом (Рис. 5.2.6(b)) и острыми респираторными заболеваниями (ОРЗ) (Рис. 5.2.6(d)). Использовались статистические данные санитарно-эпидемиологической станции Приволжского района г. Казани [A2]. Экспериментальные данные бра-

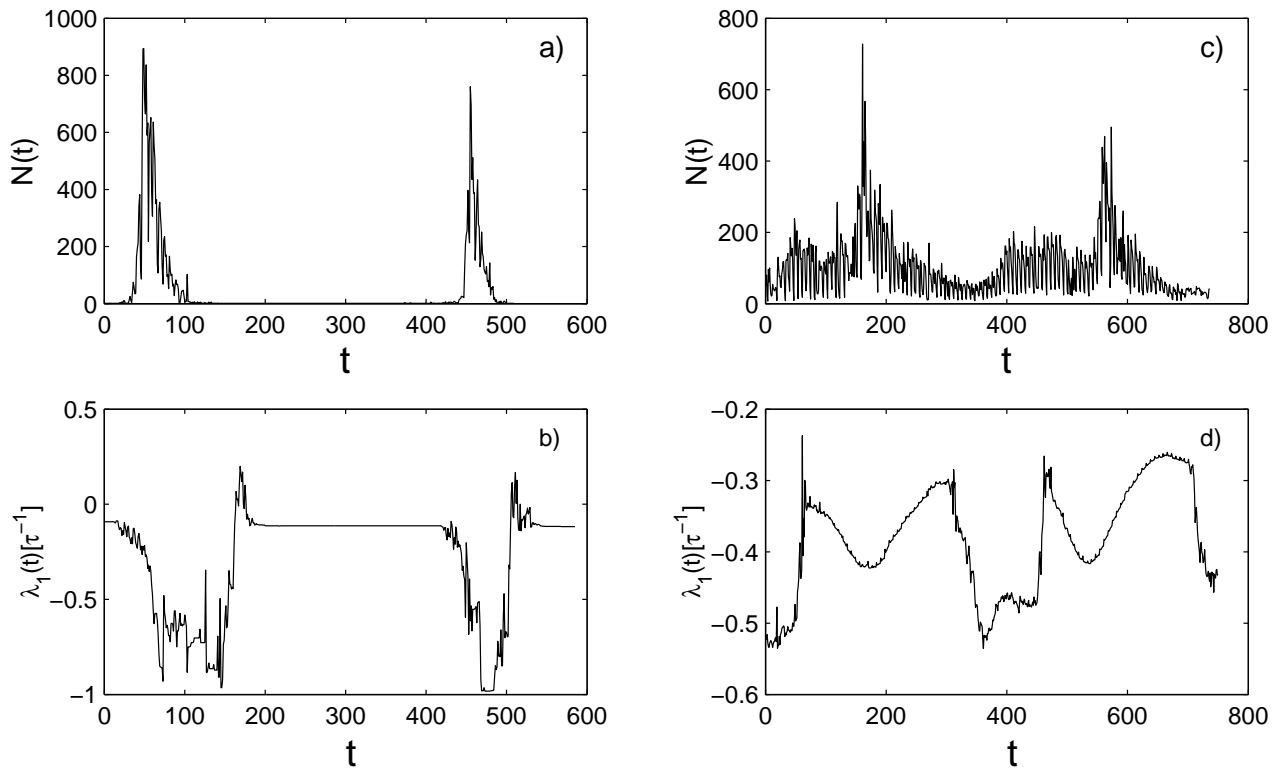


Рис. 5.2.6: Исходные временные серии заболеваемости гриппом (а) и острыми респираторными заболеваниями (с) и локальное временное поведение кинетического параметра  $\lambda_1(t)$  в сравнении. Временная зависимость параметра  $\lambda_1(t)$  отражает релаксационные особенности протекания эпидемических процессов гриппа (b) и ОРЗ (d).

лись из расчета на общее население района, которое составило примерно 300 тыс. человек, в период с 27.10.1995 по 05.03.2002. Для демонстрации локальных закономерностей эпидемических процессов гриппа и ОРЗ выбраны временные интервалы, соответствующий двум годам. Наиболее значительные изменения в динамике заболеваемости гриппом соответствуют возникновению эпидемических процессов средней степени интенсивности (Рис. 5.2.6(a)). Динамический процесс заболеваемости ОРЗ характеризуется более сложной структурой (Рис. 5.2.6(c)). Более детальное представление об эпидемических процессах гриппа и ОРЗ можно обнаружить на основе исследования временного поведения кинетического параметра  $\lambda_1(t)$ . Пользуясь процедурой оптимизации, была вычислена длина локального временного окна, которая составила  $N=200$  точек. В случае гриппа мы обнаруживаем следующие особенно-

сти. В локальной зависимости параметра  $\lambda_1(t)$  в каждый осенне-зимний период можно заметить, как система выходит из устойчивого состояния. Незначительные флуктуации в поведении параметра  $\lambda_1(t)$  соответствуют началу эпидемии, сам эпидемический процесс сопровождается появлением крупномасштабных флуктуаций, затем происходит переход к мелкомасштабным флуктуациям, приходящимся на окончание эпидемии. При завершении эпидемического процесса скорость релаксации возрастает от 4 до 12 раз, что указывает на постепенную стабилизацию системы. Временной интервал такого процесса составляет в среднем 125 шагов, что соответствует одному осенне-зимнему периоду. Периоды между эпидемическими вспышками характеризуются чрезвычайно медленной релаксацией. В случае ОРЗ значения параметра  $\lambda_1(t)$  изменяются в интервале  $0.24\tau^{-1} < |\lambda_1(t)| < 0.6\tau^{-1}$ . На спаде эпидемического процесса ОРЗ скорость релаксации возрастает в 2-2.5 раза. Сопоставление среднеквадратичных амплитуд параметра  $\lambda_1(t)$  для эпидемических процессов ОРЗ и гриппа составляет 3.4 раза. Это свидетельствует о макроскопической устойчивости эпидемического процесса ОРЗ в целом. С другой стороны, локальное, при завершении эпидемического процесса, усиление скорости релаксации в случае общей неустойчивости процесса заболеваемости гриппом выступает дополнительным источником локальной стабилизации.

#### §5.2.4 Выводы

Процедуры локализации, представленные в настоящей главе: оконно-временное представление спектральных плотностей ВКФ, функций и критериев памяти, а также построение временных зависимостей кинетических и релаксационных параметров позволяют извлекать дополнительную информацию, скрытую во временных сигналах, генерируемых сложными системами живой и неживой природы. Обсуждаются локальные пространственно-временные структуры временного сигнала, динамическая перемежаемость на отдельных

участках исходной временной серии, локальные особенности различных спектральных характеристик и закономерности затухания релаксационных процессов.

Обнаружена связь между проявлениями эффектов статической памяти и атипичной динамикой живых систем [A1, A2, A4, A5, A7, A8, A11, A23]. Подобная эволюция живых систем возникает не только как результат проявления длительных или кратковременных изменений за счет внутренних или внешних воздействий (заболевания, экстремальные условия, нарушения в функционировании), но и вследствие возрастных изменений [94, 95, 96]. Атипичные изменения в эволюции живых систем приводят к увеличению коррелированности и усилению эффектов статической памяти анализируемых сигналов, что, возможно, связано с вынужденной “регуляризацией”.

## §5.3 Эффекты статистической памяти в динамике полного потока рентгеновской активности микрокваров

В этом параграфе будет показано, что анализ динамики полного потока рентгеновской активности 19 микрокваров, фиксируемой обзорной камерой *ASM* (All-Sky Monitor) орбитальной обсерватории *RXTE* (Rossi X-Ray Timing Explorer), позволяет установить некоторые механизмы аккреции вещества в двойных звездных системах и провести их классификацию в зависимости от проявления эффектов статистической памяти. Выявляются динамические и спектральные особенности рентгеновского излучения микроквара XTE J1550-564. В зависимости от степени коррелированности исследуемой динамики выделяются три класса двойных рентгеновских систем [A14, A16, A17].

### §5.3.1 Экспериментальные данные

Рентгеновская обсерватория *RXTE* была запущена 30 дек. 1995 г. в рамках проектов NASA с космодрома им. Кеннеди. Станция находилась на земной орбите, на высоте 580 км, что соответствует периоду обращения в 90 мин. Контролировал спутник Центр космических полетов им. Годдарда [99]. Наблюдения за астрофизическими объектами велись тремя камерами в различных энергетических диапазонах: *A* (1.5-3 кэВ), *B* (3-5 кэВ), *C* (5-12 кэВ). Кроме того, база данных содержит экспонированные значения 90-секундных наблюдений полного потока рентгеновского излучения *S* (1.5-12 кэВ). Интенсивность рентгеновского излучения представлена в собственных единицах *ASM* ед/с. Полный поток рентгеновской активности Крабовидной туманности в диапазоне 2-10 кэВ соответствует 75 *ASM* ед/с [100, 101].

Исходные временные последовательности рентгеновской активности астрофизических объектов, фиксируемые в период с 1 янв. 1996 г. по 1 янв. 2008

г. с переменным шагом дискретизации (“сырые” данные – II тип), посуточно усреднялись (I тип данных). Регистрация осуществлялась для 19 двойных рентгеновских систем – микроквазаров. Микроквазары – тесные двойные системы, состоящие из компактного объекта (черная дыра или нейтронная звезда) и оптической звезды-компаньона.

### §5.3.2 Классификация рентгеновской активности микроквазаров

Таблица 5.3.1: Классификация полного потока рентгеновского излучения 19 микроквазаров на основе значений критерия памяти  $\varepsilon_1(0)$  (в порядке возрастания). Стрелками указаны направления перехода от одной группы к другой в зависимости от типа данных.

I тип данных		II тип данных	
<b>1 группа: <math>\varepsilon_1(0) \sim 1 \div 10</math></b>			
LSI+61303	1.03	1E1740.7-2942	1.02
RX J1826.2-1450	1.07	LSI+61303	1.11
GRO J0422+32	1.08	GRO J0422+32	1.12
XTE J1118+480	1.08	GRS 1758-258	1.12
1E1740.7-2942	1.20	SS433	1.14
SS433	1.40	RX J1826.2-1450	1.21
GRS 1758-258	1.40	XTE J1118+480	1.34
Scorpius X-1	1.64	V4641 Sgr	3.88
V4641 Sgr	1.80	XTE J0421+560	5.50
XTE J0421+560	1.86	Scorpius X-1	7.62
GRS 1915+105↓	6.06		
<b>2 группа: <math>\varepsilon_1(0) \sim 10 \div 100</math></b>			
Cygnus X-3	9.86	GRS 1915+105↑	12.93
Circinus X-1	15.61	Cygnus X-3	16.03
Cygnus X-1	18.23	H1743-322	31.10
XTE J1859+226	34.95	Cygnus X-1	33.36
XTE J1550-564↓	45.69	XTE J1859+226	40.48
GX 339-4	51.35	Circinus X-1	57.81
H1743-322	52.60	GX 339-4	63.59
<b>3 группа: <math>\varepsilon_1(0) \sim 100 \div 1\ 000</math></b>			
GRO J1655-40	101.08	XTE J1550-564↑	219.83
		GRO J1655-40	248.58

В Табл. 5.3.1 и 5.3.2 приведена классификация рентгеновского излучения 19 микроквазаров в зависимости от степени проявления эффектов статистической памяти [А6, А9]. В случае анализа дискретной динамики микроквазаров были выделены три группы временных сигналов рентгеновского излучения, характеризующиеся разной степенью проявления эффектов стати-

стической памяти. В динамике большей части микроквазаров проявляются эффекты долговременной памяти (1 группа). В этом случае релаксационные процессы реализуются со значительной скоростью. Отдельный интерес представляют рентгеновские двойные звезды второй и третьей групп приведенной классификации. Рентгеновская активность указанных объектов характеризуется более существенными временами релаксации и кратковременными эффектами статистической памяти. Суточное усреднение экспериментальных данных приводит к уменьшению значений  $\varepsilon_1(0)$  и  $\delta_1(0)$ .

Таблица 5.3.2: Классификация полного потока рентгеновской активности 19 микроквазаров на основе значений критерия памяти  $\delta_1(0)$  (в порядке возрастания).

I тип данных		II тип данных	
<b>1 группа: <math>\delta_1(0) \sim 1 \div 10</math></b>			
LSI+61303	1.04	1E1740.7-2942	1.05
RX J1826.2-1450	1.23	LSI+61303	1.23
GRO J0422+32	1.39	GRO J0422+32	1.25
1E1740.7-2942	1.46	GRS 1758-258	1.26
XTE J1118+480	1.78	SS433	1.27
SS433	2.01	XTE J1118+480	1.39
GRS 1758-258	2.11	RX J1826.2-1450	1.53
Scorpius X-1↓	2.56		
V4641 Sgr↓	3.06		
XTE J0421+560↓	5.10		
<b>2 группа: <math>\delta_1(0) \sim 100 \div 1\ 000</math></b>			
GRS 1915+105	62.04	V4641 Sgr↑	15.04
Circinus X-1↓	238.58	Scorpius X-1↑	57.36
Cygnus X-3	241.07	Cygnus X-3	96.90
Cygnus X-1↓	288.54	XTE J0421+560↑	143.55
H1743-322	664.63	GRS 1915+105	167.41
		H1743-322	1 002.7
<b>3 группа: <math>\delta_1(0) \sim 1\ 000 \div 100\ 000</math></b>			
XTE J1859+226	1 804.7	Cygnus X-1↑	1 097.7
XTE J1550-564	2 502.3	XTE J1859+226	1 558.1
GRO J1655-40	18 204	Circinus X-1↑	3 318
GX 339-4	30 518	GX 339-4	4 207.5
		XTE J1550-564	48 483
		GRO J1655-40	62 595

### §5.3.3 Динамические и спектральные особенности рентгеновского излучения микрокваразара ХТЕ J1550-564

Рентгеновская система ХТЕ J1550-564, расстояние до которой 5.3 кпк, была открыта 7 сент. 1998 г. при помощи камеры *ASM* спутника *RXTE*. Наиболее вероятным оптическим компонентом источника считается звезда блеска  $V = 16^m.7 \pm 0^m.1$  с широкими и яркими эмиссионными линиями (На, Нб, Не II). Масса этой звезды приблизительно равна массе Солнца, а масса компактного объекта оценивается в  $9.4M_{\odot}$  [102]. Микрокваразар ХТЕ J1550-564 является мягким рентгеновским транзиентом с интенсивностью  $\sim 70$  мКраб ( $1.5 \div 12$  кэВ) и координатами  $\alpha = 15^h 50^m 41^s$ ,  $\delta = -56^{\circ} 27' 6''$  [103]. В сент. 1998 г. у источника впервые были обнаружены высокочастотные квазипериодические осцилляции [104]. В 1999 г. было отмечено очередное появление высокочастотных квазипериодических осцилляций [105]. Весной 2003 г. во время программы мониторинга галактической плоскости, проводимой INTEGRAL, была зарегистрирована еще одна вспышка рентгеновской активности [106]. В течение этой вспышки объект находился в жестком низком состоянии [107].

На Рис. 5.3.1 представлены исходные временные серии полного потока рентгеновского излучения микрокваразара ХТЕ J1550-564, фиксируемые в мягкой области рентгеновского спектра ( $1.5 \div 12$  кэВ). На Рис. 5.3.1а приведена усредненная по дням временная серия. Рис. 5.3.1б содержит “сырую” выборку экспериментальных данных, накопленных камерой за указанный период (нумерация ведется по индексам событий). Шкалу событий можно связать с модернизированной юлианской шкалой при помощи среднего интервала между событиями (221 мин). Длина выборки в случае эквидистантной серии составляет 3 644 значений, II тип данных включает 23 735 значений. На графиках видны узкий пик первого максимума, приходящийся на 20 сентября 1998 г. и менее интенсивный, но более широкий вторичный максимум. Как отмечено в работе Александровича и Арефьева [108] во время первой вспышки (1998-1999

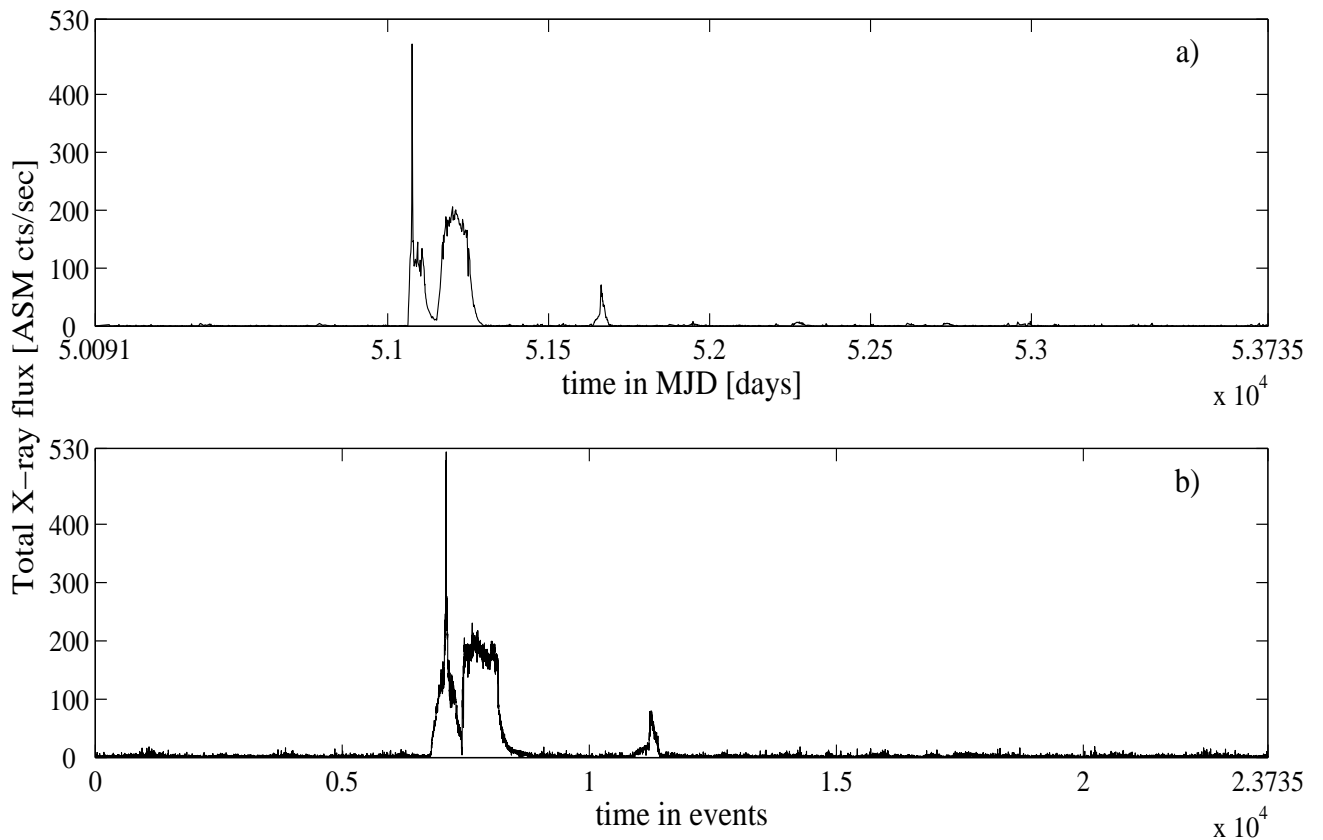


Рис. 5.3.1: Суммарный поток рентгеновского излучения микроквара XTE J1550-564 в энергетическом диапазоне от 1.5 до 12 кэВ в собственных единицах обзорной камеры *ASM* в секунду. а – усредненная по дням рентгеновская активность микроквара в модернизированной юлианской шкале, б – событийное представление полного потока рентгеновского излучения.

гг.) источник продемонстрировал 'М' – образную кривую блеска не только в стандартном, но и в широком (2-200 кэВ) рентгеновском диапазоне. В первой фазе вспышки преобладала степенная компонента, формирующаяся, вероятно, в горячей короне, тогда как во второй фазе значительно больший вклад вносило излучение от диска. Кривая блеска второй вспышки (2000 г.) была существенно проще: в начальной и финальной фазах, когда поток от XTE J1550-564 в стандартном рентгеновском диапазоне был низким, источник находился в жестком спектральном состоянии. В максимуме вспышки источник перешел в промежуточное состояние, в котором наблюдался заметный вклад от излучения аккреционного диска. В дальнейшем вспышки данного объекта фиксировались в 2001, 2002, 2003 гг.

На Рис. 5.3.2 представлены фазовые портреты комбинаций ортогональных динамических переменных  $\mathbf{W}_i = f(\mathbf{W}_0), i = 1..3$ . Фазовые портреты, построенные для равноинтервальной динамики рентгеновской активности микроквазара ХТЕ J1550-564 (Рис. 5.3.2а), имеют симметричное относительно начала координат ядро. Подобная форма определяется усреднением экспериментальных данных. Обработка данных II типа (Рис. 5.3.2б) приводит к пространственно-временной структуре с более значительным масштабным расслоением. Небольшие по площади облака в правой части фазовых портретов связаны с изменением динамического режима – усилением интенсивности рентгеновской активности на кривых блеска.

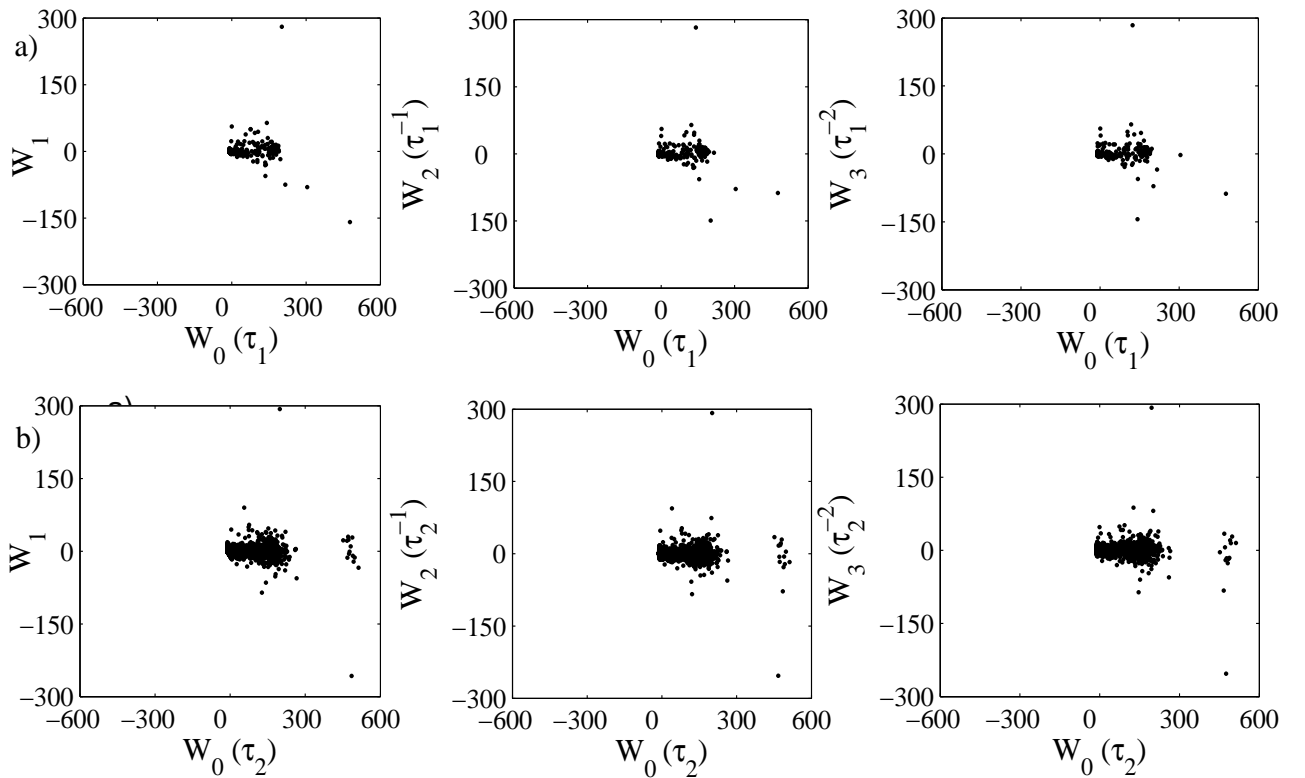


Рис. 5.3.2: Фазовые портреты динамических переменных  $\mathbf{W}_i = f(\mathbf{W}_0)$ , где  $i = 1..3$ , для динамики полного потока рентгеновского излучения микроквазара ХТЕ J1550-564. а – построение выполнено для эквидистантной временной записи сигнала, б – для событийного представления динамики рентгеновской активности микроквазара ХТЕ J1550-564.

На Рис. 5.3.3 приведены спектры мощности исходных ВКФ (Рис. 5.3.3а) и СКФ (Рис. 5.3.3б)  $\mu_0(\nu)$  для динамики полного потока рентгеновского из-

лучения ХТЕ J1550-564. Графики представлены в двойной логарифмической шкале. На спектрах наблюдаются степенные зависимости:  $\mu_0(\nu) \sim 1/\nu^\alpha$  с показателями  $\alpha = 1.74$  и  $\alpha = 1.79$  для данных I и II типов соответственно. Самоподобный осциллирующий характер исходных данных отражается в форме спектров: более низкочастотный и менее амплитудный в случае данных I типа.

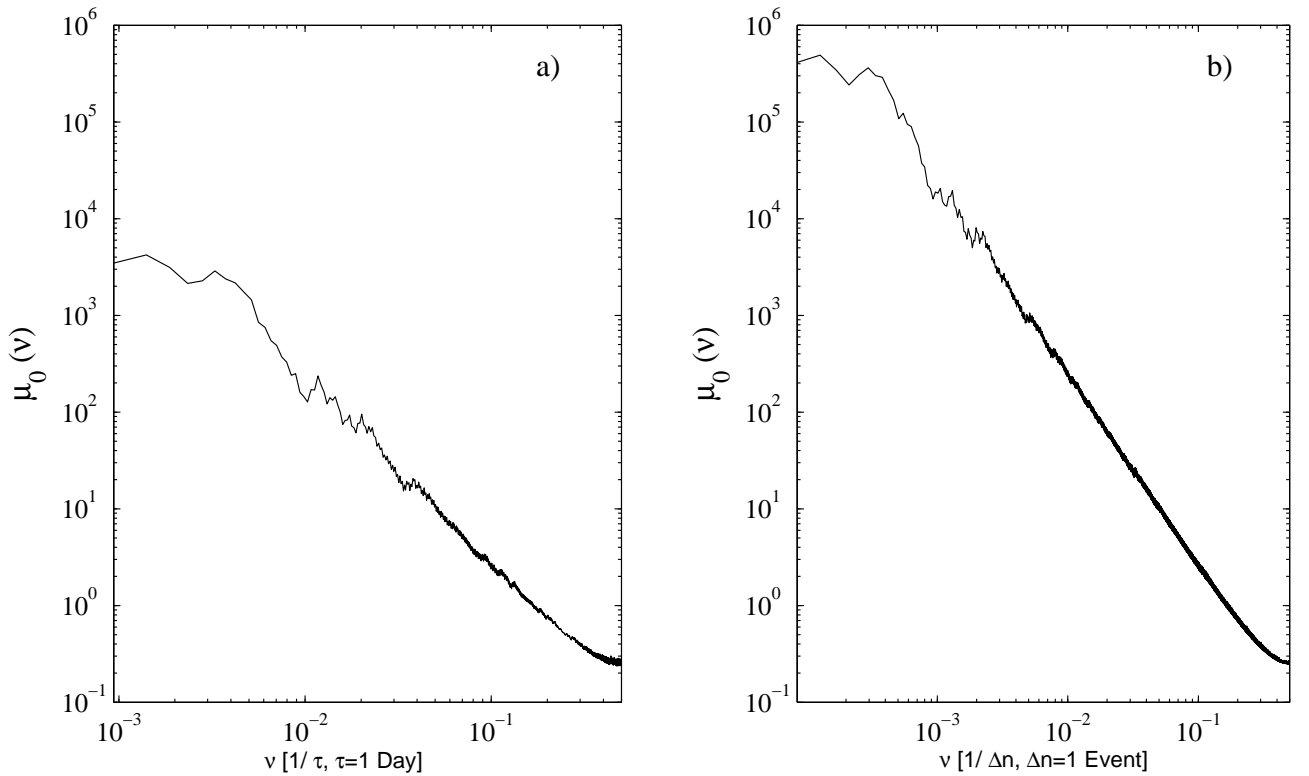


Рис. 5.3.3: Спектральные плотности мощности исходных ВКФ (а) и СКФ (б)  $\mu_0(\nu)$  для динамики полного потока рентгеновского излучения микроквазара ХТЕ J1550-564. Шаг дискретизации  $\tau_1 = 1$  сут и  $\tau_2 = \Delta n = 1$  соб.

На Рис. 5.3.4 представлена частотная зависимость  $\varepsilon_1(\nu)$  для временной (Рис. 5.3.4а) и событийной (Рис. 5.3.4) последовательностей временных вариаций потока рентгеновского излучения ХТЕ J1550-564. На графиках наблюдается значительное ослабление эффектов статистической памяти при переходе от равноинтервальной серии к событийной. Фактически, обнаруживается отчетливый переход от квазимарковского сценария  $\varepsilon_1^I(0) = 45.69$  к марковскому  $\varepsilon_1^{II}(0) = 219.83$ . Усреднение данных приводит к сглажива-

нию флуктуационных разбросов и появлению “излишней” регулярности во временной динамике регистрируемого параметра. Напротив, данные II типа определяют малые времена затухания корреляций, что позволяет сделать предположение о существенной неоднородности внутренних областей аккреционного диска микроквазара (поток вещества вблизи черной дыры), преимущественно генерирующих рентгеновское излучение.

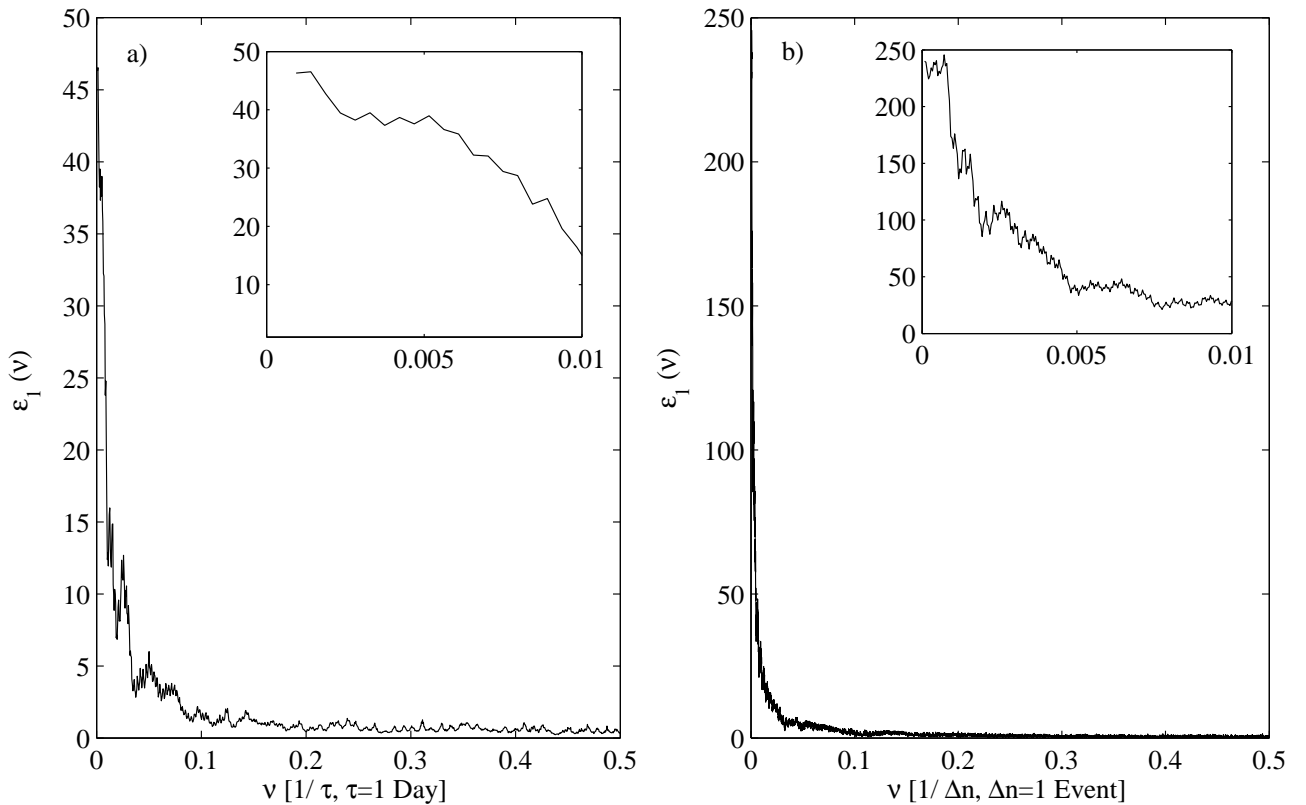


Рис. 5.3.4: Частотная зависимость критерия памяти  $\varepsilon_1(\nu)$  для суточно усредненной (a) и неравноинтервальной (b) динамики полного потока рентгеновского излучения микроквазара XTE J1550-564. На вставках приведены низкочастотные области зависимостей.

Осциллирующий характер рентгеновской активности XTE J1550-564 обнаруживается и в частотной зависимости  $\delta_1(\nu)$ . Совокупность периодических процессов разной частоты свидетельствует о достаточно сложной конфигурации мелкомасштабных флуктуаций в событийной последовательности рентгеновской активности – сильной переменности даже на коротких временных интервалах. В то же время доминирование по интенсивности низкочастотных

пиков (вкладки к Рис. 5.3.5) определяет самоподобные особенности процессов переноса вещества, возникающие в силу достаточно медленной дисковой аккреции. Для усредненной последовательности экспериментальных данных низкочастотная область содержит только один пик, превышающий по амплитуде 5 порядков. В случае II типа данных в указанной области частот наблюдается целый спектр пиков (в том числе, до 6 порядков). Как отмечено в работе [108], возможно, после первой вспышки (1998-1999 гг.) плотность аккреционного диска источника стала меньше, темп аккреции снизился. Низкая подпитка источника за счет аккреционного диска привела в дальнейшем к вспышкам меньшей интенсивности. Значения параметров  $\delta_1(0) = 2\,502.3$  и  $\delta_1(0) = 48\,483$  для данных I и II типов соответственно.

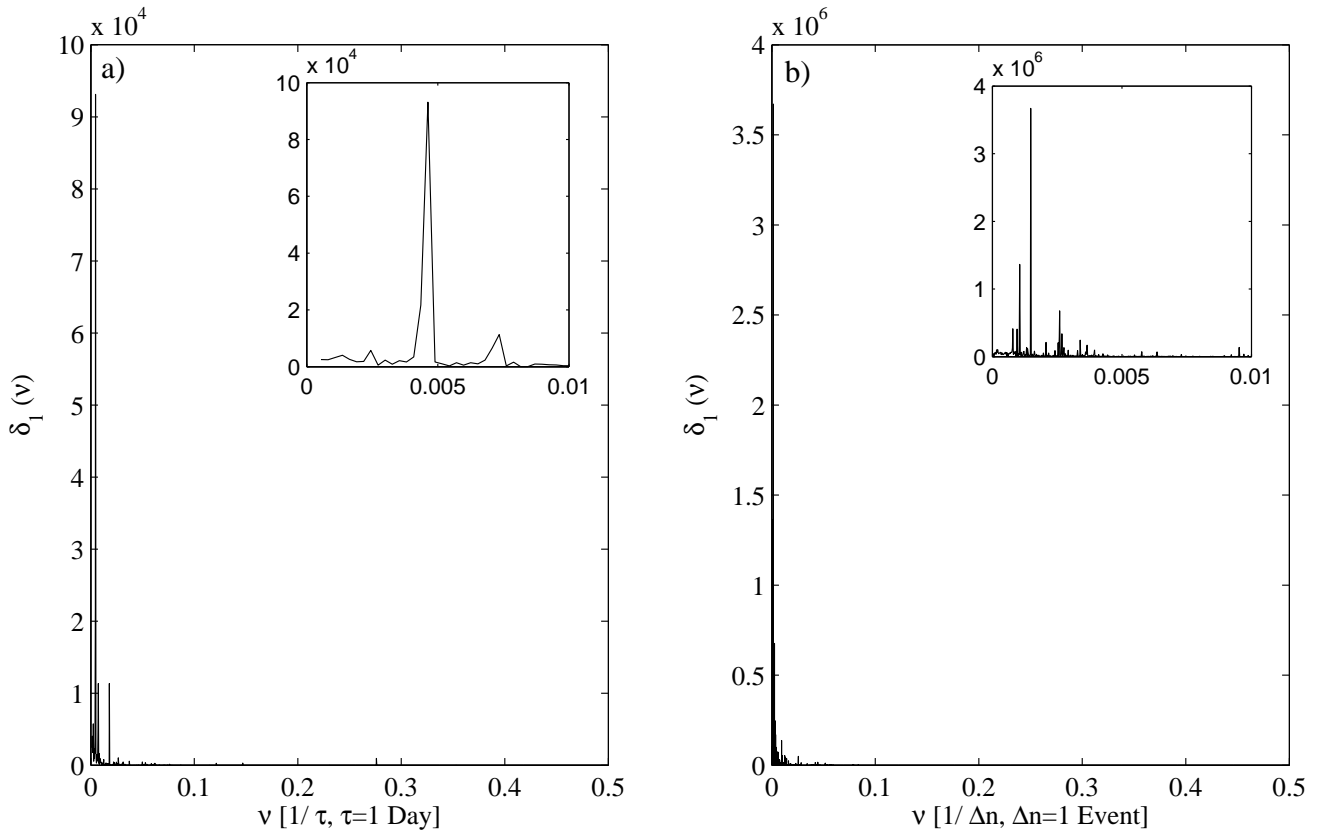


Рис. 5.3.5: Частотная зависимость меры памяти  $\delta_1(\nu)$  для эквидистантной (a) и неэквидистантной (b) динамики полного потока рентгеновского излучения микроквазара XTE J1550-564.

### §5.3.4 Выводы

В данном параграфе формализм функций памяти, а также его обобщение на случай неравноинтервальных временных рядов (см. §4.2, §4.3) используются для анализа динамических корреляций в интенсивности рентгеновского излучения 19 микроквazarов. Предложены меры статистической памяти, позволяющие классифицировать интенсивность рентгеновского излучения микроквazarов. В результате анализа временных и событийных корреляций обнаружен разный характер релаксационных процессов в экви- и неэквидистантной динамике излучения ХТЕ J1550-564 в рентгеновском диапазоне энергий. Установлено, что вводимые ФФП-параметры позволяют выделить три класса двойных звездных систем в зависимости от времени затухания корреляций: объекты, для которых присущи далекодействующие эффекты (существенные временные масштабы) памяти; объекты, в динамике излучения которых выявлена слабая статистическая память (временные масштабы релаксации исходной ВКФ значительно превышают время существования памяти); промежуточный класс.

Многообразие эффектов статистической памяти в рентгеновской активности микроквazarов определяет различимые процессы генерации рентгеновского излучения и указывает на необходимость проведения последующего анализа временных сигналов данного класса астрофизических объектов: исследование автокорреляций и эффектов статистической памяти временных зависимостей в других диапазонах энергетического спектра, анализ кросскорреляций для одновременно фиксируемых временных сигналов в разных частотных диапазонах, выявление эффектов частотно-фазовой синхронизации между равноинтервальной (усредненной) и неравноинтервальной последовательностями значений рентгеновской активности микроквazarов.

Обобщая выводы, представленные в отдельных параграфах заключительной главы настоящего диссертационного исследования, следующее положение выносится на защиту. **Критерии памяти и их частотные обобщения позволяют осуществлять количественную оценку эффектов коррелированности и статистической памяти, а также выявлять характерные режимы динамики сложных систем.**

## Заключение

В настоящей работе проведено исследование релаксационных особенностей и эффектов статистической памяти в динамике экспериментально фиксируемых характеристик сложных систем живой и неживой природы. Параметризация и извлечение информационно значимых параметров для последовательностей наблюдений осуществляется в рамках конечно-разностного обобщения формализма функций памяти Цванцига-Мори. Флуктуации экспериментально фиксируемого параметра записываются в виде многокомпонентных векторов состояния системы. Для векторов текущего состояния рассматриваются уравнения движения. Пользуясь техникой проекционных операторов уравнения движения записываются в двух взаимно ортогональных подпространствах. Решая полученные системы уравнения приходят к формально точным кинетическим уравнениям для временных корреляционных функций и функций статистической памяти. Новые динамические переменные получают на основе процедуры ортогонализации Грама-Шмидта. Для комбинаций динамических переменных строятся фазовые портреты или фазовые облака. Вычисляются релаксационные и кинетические параметры. Анализируются частотные зависимости и числовые значения критериев статистической памяти. При этом расчеты осуществлялись для различных вариантов временных рядов: равноинтервальные дискретные сигналы, временные серии с переменным шагом дискретизации (неравноинтервальная дискретная динамика), последовательности конечно-разностных производных разных порядков, локальные выборки фиксированной длины. Полученные результаты позволяют получить представления о проявлениях эффектов последействия, кратко- и дальнедействующих корреляциях, релаксационных и кинетических особенностях динамических состояний сложных систем, в том числе в случае сторонних воздействий.

## ПРИВЕДЕМ ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ.

1. Реализовано обобщение техники проекционных операторов и формализма функций памяти Цванцига-Мори для случая негамильтоновых систем.
2. Получены конечно-разностные уравнения для набора ортогональных динамических переменных.
3. Выполнено развитие формализма Цванцига-Мори применительно к динамике, где проявляются эффекты нестационарности.
4. Характерной особенностью динамики негамильтоновых систем является перемежаемость, которая проявляется в *последовательной* смене различных режимов. Предложенные в работе локальные частотные релаксационные параметры позволяют идентифицировать такие режимы. Соответствующие численные оценки выполнены на примере некоторых сложных систем.
5. Показано, что обобщение формализма функций памяти Цванцига-Мори может быть применимо к анализу неравноинтервальной дискретной динамики.
6. Установлено, что критерии статистической памяти позволяют осуществлять количественную оценку коррелированности в динамике рассматриваемой системы. Получены частотные обобщения данных критериев. Установлена зависимость между проявлением эффектов статистической памяти и атипичной динамикой сложных систем.

В заключение автор выражает искреннюю благодарность д. ф.-м. н., проф. Р.М. Юльметьеву и д.ф.-м. н., доц. А.В. Мокшину за оказание всесторонней поддержки в ходе выполнения работы, за постановку научных задач и эффективное руководство работой. Особую благодарность автор выражает д. ф.-м. н., проф. С.Ф. Тимашеву за моральную поддержку и помощь в обсуждении полученных результатов, к. ф.-м. н., доц. Р.М. Хуснутдинову, к. ф.-м. н., доц. Б.Н. Галимзянову, асс. О.Ю. Панищеву за содействие в работе, плодотворное сотрудничество и помощь в поиске дальнейших научных задач.

## Публикации автора по теме диссертации

*Статьи в изданиях, рекомендованных ВАК РФ  
для публикации материалов диссертационных работ*

A1. Demin S. Stratification of the phase clouds and statistical effects of the non-Markovity in chaotic time series of human gait for healthy people and Parkinson patients / R. Yulmetyev, S. Demin, N. Emelyanova, F. Gafarov, P. Hänggi // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. – 2003. – Vol. 319. – P. 432-446.

A2. Demin S.A. Non-Markov stochastic dynamics of real epidemic process of respiratory infections / R.M. Yulmetyev, N.A. Emelyanova, S.A. Demin, F.M. Gafarov, P. Hänggi, D.G. Yulmetyeva // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. – 2004. – Vol. 331. – P. 300-318.

A3. Demin S.A. Dinará's Crosses, chaoticity and robustness in stochastic dynamics of solar activity / R.M. Yulmetyev, S.A. Demin, P. Hänggi, A.I. Galeev // *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*. – 2004. – Vol. 7(3). – P. 210-226.

A4. Demin S.A. Age-related alterations of relaxation processes and non-Markov effects in stochastic dynamics of R-R intervals variability from human ECGs / R.M. Yulmetyev, S.A. Demin, O.Yu. Panishev, P. Hänggi // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. – 2005. – Vol. 353. – P. 336-352.

A5. Demin S.A. Regular and stochastic behavior in Parkinsonian pathological tremor signals / R.M. Yulmetyev, S.A. Demin, O.Yu. Panishev, P. Hänggi, S.F. Timashev, G.V. Vstovsky // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. – 2006. – Vol. 369. – P. 655-678.

A6. Demin S.A. Non-Markov Statistical Effects of X-Ray Emission Intensity of The Microquasar GRS 1915+105 / R.M. Yulmetyev, S.A. Demin, R.M. Khusnutdinov, O.Yu. Panishev, P. Hänggi // *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*. – 2006. – Vol. 9(4). – P. 313-330.

A7. Демин С.А. Локальные особенности стохастической динамики живых систем / Р.М. Юльметьев, С.А. Демин, О.Ю. Панищев, Э.В. Хусаенова // Технологии живых систем. – 2007. – Т. 4(2). – С. 32-46.

A8. Demin S.A. Statistical quantifiers of memory for an analysis of human brain and neuro-system diseases / S.A. Demin, R.M. Yulmetyev, O.Yu. Panischev, P. Hänggi // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. – 2008. – Vol. 387. – P. 2100-2110.

A9. Демин С.А. Нелинейная стохастическая динамика событийных корреляций в астрофизических объектах / С.А. Демин, Р.М. Юльметьев, О.Ю. Панищев, Галеев А.И., Р. Hänggi // Нелинейный мир. – 2008. – Т. 6(10). – С. 560-578.

A10. Demin S.A. Analysis of biomedical signals by flicker-noise spectroscopy: Identification of photosensitive epilepsy using magnetoencephalograms / S.F. Timashev, Yu.S. Polyakov, R.M. Yulmetyev, S.A. Demin, O.Yu. Panischev, S. Shimojo, J. Bhattacharya // Laser Physics. – 2009. – Vol. 19(4). – P. 836-854.

A11. Демин С.А. Псевдочастичный подход в описании дискретных стохастических процессов сложных систем / С.А. Демин, О.Ю. Панищев, А.В. Яценко, Р.М. Юльметьев // Нелинейный мир. – 2009. – Т. 7(11). – С. 820-834.

A12. Demin S.A. Frequency and phase synchronization in neuromagnetic cortical responses to flickering-color stimuli / S.F. Timashev, Yu.S. Polyakov, R.M. Yulmetyev, S.A. Demin, O.Yu. Panischev, S. Shimojo, J. Bhattacharya // Laser Physics. – 2010. – Vol. 20(3). – P. 604-617.

A13. Демин С.А. Анализ персистентных и антиперсистентных корреляций в биомедицинских сигналах / С.А. Демин, Б.Н. Галимзянов, О.Ю. Панищев // Успехи современной радиоэлектроники. – 2011. – Т. 5. – С. 61-71.

A14. Демин С.А. Особенности динамики рентгеновского излучения астрофизических объектов: Классификация эффектов статистической памяти / С.А. Демин, О.Ю. Панищев, Ю.А. Нефедьев, Н.Ю. Вараксина // Ученые

записки Казанского университета. Серия Физико-математические науки. – 2012. – Т. 154(3). – С. 62-74.

A15. Демин С.А. Анализ кросс-корреляционных взаимосвязей в сигналах интенсивности радиоизлучения квазаров / С.Ф. Тимашев, О.Ю. Панищев, С.А. Демин, Ю.А. Нефедьев // Георесурсы. – 2013. – Т. 3. – С. 44-48.

A16. Demin S.A. Dynamic and spectral X-ray features of the microquasar XTE J1550-564 / S.A. Demin, O.Y. Panishev, Y.A. Nefedyev // Kinematics and Physics of Celestial Bodies. – 2014. – Vol. 30(2). – P. 63-69.

A17. Demin S.A. Correlation features of microquasar X-ray activity / S.A. Demin, O.Y. Panishev, Y.A. Nefedyev // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2014. – Vol. 17(2). – P. 177-182.

A18. Demin S.A. Auto- and cross-correlation analysis of the QSOs radio wave intensity / S.A. Demin, O.Y. Panishev, Y.A. Nefedyev // Journal of Physics: Conference Series. 2015. – Vol. 661. – P. 012003.

A19. Demin S.A. Non-stationarity and cross-correlation effects in the MHD solar activity / S.A. Demin, Y.A. Nefedyev, A.O. Andreev, N.Y. Demina, S.F. Timashev // Advances in Space Research. – 2018. – Vol. 61(2). – P. 639-644.

A20. Demin S.A. The study of full flow statistical features of the X-rays Cygnus X-1 binary system / S.A. Demin, N.Y. Demina, A.O. Andreev, Y.A. Nefedyev // SGEM. – 2018. – Vol. 18(6.1). – P. 607-614.

A21. Demin S.A. Development of new methods of auto- and cross-correlation analysis of quasi-star objects' X-rays intensity / N.Y. Demina, S.A. Demin, A.O. Andreev, Y.A. Nefedyev // SGEM. – 2018. – Vol. 18(6.1). – P. 561-568.

*Статьи в прочих научных изданиях*

A22. Демин С.А. Дальнейшее развитие теоретических идей академика К.А. Валиева / А.В. Мокшин, С.А. Демин // Вестник КГПУ. – 2004. – Т. 1. – С. 151-154.

A23. Demin S.A. Manifestation of Chaos in Real Complex Systems / R.M. Yulmetyev, S.A. Demin, P. Hänggi // The Logistic Map and the Route to Chaos: From the Beginnings to Modern Applications / ed. by M. Ausloos, M. Dirickx. – Springer, Berlin Heidelberg New York, 2006. – P. 175-196.

A24. Демин С.А. Приложение нового метода анализа неравноинтервальных временных серий к исследованию рентгеновского излучения астрофизических объектов / С.А. Демин, Р.М. Юльметьев, О.Ю. Панищев, Н.Т. Замаляева // Вестник ТГГПУ. – 2006. – Т. 7. – С. 3-17.

A25. Флуктуации и шумы в сложных системах живой и неживой природы: коллективная монография / редкол.: Р.М. Юльметьев, А.В. Мокшин, С.А. Демин, М.Х. Салахов. – Казань: РИЦ “Школа”, 2008. – 456 с.

A26. Демин С.А. Стохастические особенности временных и событийных корреляций в экви- и неэквидистантных сериях астрофизических данных / В.М. Заляялиева, С.А. Демин // Вестник СПбГУ ИТМО. – 2008. – Т. 46. – С. 69-81.

A27. Демин С.А. Многообразие эффектов статистической памяти в стохастической динамике рентгеновского излучения микроквazarов / Р.М. Юльметьев, В.М. Заляялиева, С.А. Демин // Modern Problems of Statistical Physics - Актуальные проблемы статистической радиофизики (Малаховский сборник). – 2008. – Т. 7. – С. 83-100.

A28. Демин С.А. Стохастические особенности рентгеновского излучения микроквazара ХТЕ J1550-564 / В.М. Заляялиева, С.А. Демин, Р.М. Юльметьев // Вестник ТГГПУ. – 2008. – Т. 15. – С. 21-24.

A29. Динамические явления в сложных системах: коллективная монография / редкол.: А.В. Мокшин, С.А. Демин, Р.М. Хуснутдинов, О.Ю. Панищев. – Казань: Изд-во МОиН РТ, 2011. – 308 с.

A30. Демин С.А. Релаксационные особенности рентгеновской активности микроквazarов / С.А. Демин, О.Ю. Панищев, Ю.А. Нефедьев // Сборник

статей “Известия Главной астрономической обсерватории в Пулкове”. – 2013. – Т. 220. – С. 355-360.

А31. Демин С.А. Корреляционные взаимосвязи радиоизлучения квазаров / О.Ю. Панищев, С.А. Демин, С.Ф. Тимашев, Ю.А. Нефедьев // Сборник статей “Известия Главной астрономической обсерватории в Пулкове”. – 2013. – Т. 220. – С. 435-440.

*Тезисы и труды в сборниках международных и всероссийских конференций*

А32. Демин С.А. Немарковская стохастическая динамика реального эпидемиологического процесса респираторных заболеваний человека / С.А. Демин, Р.М. Юльметьев, Н. Емельянова, Ф. Гафаров, Д. Юльметьева // Сборник тезисов Второй Всероссийской конференции *Необратимые процессы в природе и технике*. – МГТУ, Москва, 2003. – С. 184-185.

А33. Демин С.А. Выявление динамических закономерностей протекания эпидемиологических процессов гриппа и ОРЗ на основе физики сложных систем / С.А. Демин, Р.М. Юльметьев // Сборник тезисов X-ой Юбилейной международной конференции *Современные техника и технологии*. – ТПУ, Томск. – 2004. – Т. 1. – С. 289-290.

А34. Демин С.А. Проявление статистических эффектов немарковости в реальных сложных системах / С.А. Демин, Р.М. Юльметьев // Сборник тезисов Третьей Всероссийской конференции *Необратимые процессы в природе и технике*. – МГТУ, Москва, 2005. – С. 34-36.

А35. Демин С.А. Возрастные изменения немарковских эффектов и скорости релаксации в вариабельности RR-интервала / О.Ю. Панищев, Р.М. Юльметьев, С.А. Демин // Сборник тезисов Третьей Всероссийской конференции *Необратимые процессы в природе и технике*. – МГТУ, Москва, 2005. – С. 36-38.

А36. Демин С.А. Немарковские эффекты и хаотичность в стохастической динамике рентгеновского излучения микроквазара GRS 1915+105 / С.А. Де-

мин, О.Ю. Панищев, Э.В. Хусаенова, Р.М. Юльметьев // Сборник тезисов *ВНКСФ-12*. – Новосибирск, 2006. – С. 59-61.

А37. Демин С.А. Разработка нового метода анализа временных серий с переменным шагом дискретизации / С.А. Демин, Р.М. Юльметьев, О.Ю. Панищев // Сборник материалов V Уральской региональной научно-практической конференции *Современные проблемы физики и физико-математического образования*. – БГПУ, Уфа, 2006. – С. 31-37.

А38. Демин С.А. Анализ локальных закономерностей в стохастической динамике живых систем / С.А. Демин, О.Ю. Панищев, Р.М. Юльметьев // Сборник докладов 7-ой Международной научно-технической конференции *Физика и радиоэлектроника в медицине и экологии*. – ВлГУ, Владимир-Суздаль, 2006. – С. 175-178.

А39. Демин С.А. Стохастическая динамика событийных корреляций в сложных системах: приложение к астрофизическим данным / Р.М. Юльметьев, С.А. Демин, О.Ю. Панищев // Сборник трудов Четвертой Всероссийской астрономической конференции *Космические рубежи XXI века*. – КГУ, Казань, 2007. – С. 256-258.

А40. Демин С.А. Классификация астрофизических объектов (квазары, микроквазары, лацертиды, галактики и пульсары) на основе стохастической динамики рентгеновского излучения / В.М. Залялиева, Р.М. Юльметьев, С.А. Демин, А.И. Галеев // Сборник трудов Четвертой Всероссийской астрономической конференции *Космические рубежи XXI века*. – КГУ, Казань, 2007. – С. 236-237.

А41. Демин С.А. Немарковские особенности в динамике полного потока рентгеновского излучения микроквазаров / В.М. Залялиева, С.А. Демин // Сборник материалов Всероссийской конференции студентов, аспирантов и молодых ученых по физике. – ДВГУ, Владивосток, 2007. – С. 4-6.

А42. Демин С.А. Локальные спектральные и релаксационные особенности

дискретной стохастической эволюции живых систем / Демин С.А. // Сборник тезисов XIV Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых по фундаментальным наукам *Ломоносов-2007*. Секция “Физика”. – МГУ, Москва, 2007. – С. 28-30.

A43. Demin S.A. Flicker-noise spectroscopy: analysis of biomedical signals in photodiagnosis / S.F. Timashev, Yu.S. Polyakov, R.M. Yulmetyev, S.A. Demin, O.Yu. Panishev // In: Abstracts of the Conference *Photodynamic Therapy and Photodiagnosis in Clinical Practice*. University of Padova, Brixen/Bressanone, Italy, 2008. – P. 106.

A44. Demin S.A. Identification of photosensitive epilepsy using the flicker-noise spectroscopy of magnetoencephalograms / S.F. Timashev, R.M. Yulmetyev, S.A. Demin, O.Yu. Panishev, Yu.S. Polyakov // In: Abstracts of the Conference *LPHYS'2008*. – Norwegian University of Science and Technology, Trondheim, Norway, 2008. – P. 206.

A45. Демин С.А. Стохастические особенности временных и событийных корреляций в экви- и неэквидистантных сериях астрофизических данных / В.М. Залялиева, С.А. Демин, Р.М. Юльметьев // Сборник научных трудов V Всероссийской межвузовской конференции молодых ученых. – СПбГУ ИТМО, Санкт-Петербург, 2008. – С. 5-6.

A46. Демин С.А. Анализ персистентных и антиперсистентных корреляций физиологических сигналов человека / С.А. Демин, Б.Н. Галимзянов // Сборник материалов III Евразийского конгресса по медицинской физике и инженерии *Медицинская физика-2010*. – МГУ, Москва, 2010. – Т. 4. – С. 201-204.

A47. Демин С.А. Псевдочастичное описание сигналов МЭГ человека при фоточувствительной эпилепсии / С.А. Демин, О.Ю. Панищев // Сборник материалов III Евразийского конгресса по медицинской физике и инженерии *Медицинская физика-2010*. – МГУ, Москва, 2010. – Т. 4. – С. 205-208.

A48. Demin S.A. Flicker-noise spectroscopy analysis of magnetoencephalogram signals in diagnosis and treatment of photosensitive epilepsy / S.F. Timashev, O.Yu. Panishev, S.A. Demin, Yu.S. Polyakov, J. Bhattacharya // In: Proceedings of the Conference *ALT'12*. – Bern University of Applied Sciences, Switzerland, 2012. – P. 327-328.

A49. Демин С.А. Корреляционные взаимосвязи радиоизлучения некоторых квазаров на длинах волн 11 см и 3.7 см / О.Ю. Панищев, С.А. Демин, Ю.А. Нефедьев, С.Ф. Тимашев // Сборник тезисов Всероссийской астрометрической конференции *Пулково-2012*. – Главная (Пулковская) астрономическая обсерватория РАН, Санкт-Петербург, 2012. – С. 52.

A50. Демин С.А. Релаксационные особенности рентгеновской активности микроквазаров: Классификация эффектов памяти / С.А. Демин, О.Ю. Панищев, Ю.А. Нефедьев // Сборник тезисов Всероссийской астрометрической конференции *Пулково-2012*. – Главная (Пулковская) астрономическая обсерватория РАН, Санкт-Петербург, 2012. – С. 16-17.

A51. Demin S. Method of analysis of time series based on statistical physics including Fourier analysis, correlation analysis, elements of fractal analysis and regression modeling / S. Demin, O. Panishev, Y. Nefedyev // In: Abstracts of the European Planetary Science Congress *EPSC-2013*. – University College London, London, United Kingdom, 2013. – Vol. 8. – P. EPSC2013-82.

A52. Демин С.А. Кросс-корреляционные особенности интенсивности радиоизлучения квазаров / О.Ю. Панищев, С.А. Демин // Материалы Международного молодежного научного форума *Ломоносов-2013*. Секция “Физика”. – МГУ, Москва, 2013. – С. 11-13.

A53. Demin S. Cross-correlation in quasar radio emission / Y. Nefedyev, O. Panishev, S. Demin // In: Abstracts of the 40th COSPAR scientific assembly. – Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia, 2014. – P. E1.18-17-14.

A54. Демин С.А. Анализ авто- и кросс-корреляций в сигналах интенсивно-

сти радиоизлучения квазаров / С.А. Демин, О.Ю. Панищев, Ю.А. Нефедьев // Сборник тезисов российской молодежной конференции по физике и астрономии *Физика. СПб-2014*. – ФТИ им. А.Ф. Иоффе, Санкт-Петербург, 2014. – С. 13-14.

A55. Demin S. Non-stationary effects and cross correlations in Solar activity / Y. Nefedyev, S. Demin, O. Panishev // In: Abstracts 41st COSPAR scientific assembly. – TUBITAK Space Technologies Research Institute, Istanbul, Turkey, 2016. – P. D2.6-12-16.

A56. Demin S. MFF-analysis of Zurich sunspot numbers / Y. Nefedyev, S. Demin, O. Panishev // In: Abstracts 41st COSPAR scientific assembly. – TUBITAK Space Technologies Research Institute, Istanbul, Turkey, 2016. – P. D2.6-13-16.

A57. Демин С.А. Исследование статистических закономерностей Цирихского ряда чисел Вольфа / С.А. Демин, Н.Ю. Демина, Ю.А. Нефедьев, О.Ю. Панищев // Сборник Тезисов 17 Международной солнечной конференции *Физика солнечной плазмы и активность Солнца*. – Крымская астрофизическая обсерватория РАН, Крым, п. Научный, 2016. – С. 30.

A58. Демин С.А. Нестационарные эффекты и перекрестные корреляции в динамике солнечной активности / Н.Ю. Демина, С.А. Демин, Ю.А. Нефедьев, О.Ю. Панищев, С.Ф. Тимашев // Сборник Тезисов 17 Международной солнечной конференции *Физика солнечной плазмы и активность Солнца*. – Крымская астрофизическая обсерватория РАН, Крым, п. Научный, 2016. – С. 31.

## Список цитируемой литературы

- [1] Gell-Mann M. What is complexity? / M. Gell-Mann // Complexity. – 1995. – Vol. 1, № 1. – P. 16-19.
- [2] Lloyd S. Programming the Universe: A Quantum Computer Scientist Takes On the Cosmos / S. Lloyd. – New York: Alfred A. Knopf, 2006. – 256 p.
- [3] Anderson P.W. Physics: The opening to complexity / P.W. Anderson // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. – 1995. – Vol. 92. – P. 6653-6654.
- [4] Гринченко В.Т. Введение в нелинейную динамику: Хаос и фракталы / В.Т. Гринченко, В.Т. Мацыпура, А.А. Снарский. – М.: Изд-во ЛКИ, 2007. – 264 с.
- [5] Малинецкий Г.Г. Хаос. Структуры. Вычислительный эксперимент: Введение в нелинейную динамику / Г.Г. Малинецкий. – М.: УРСС, 2000. – 256 с.
- [6] Kantz H. Nonlinear Time Series Analysis / H. Kantz, T. Schreiber. – Cambridge: Cambridge University Press, 2004. – 386 p.
- [7] Кузнецов С.П. Динамический хаос / С.П. Кузнецов. – М.: Физматлит, 2001. – 295 с.
- [8] Вероятность и математическая статистика: энциклопедия / под ред. Ю.В. Прохорова. – М.: Большая Российская Энциклопедия, 1999. – 910 с.

- [9] Кавалеров Г.И. Введение в информационную теорию измерений / Г.И. Кавалеров, С.М. Мандельштам. – М.: Энергия, 1974. – 376 с.
- [10] Котельников В.А. Теория потенциальной помехозащищенности / В.А. Котельников. – М.: Госэнергоиздат, 1956. – 152 с.
- [11] Тимашев С.Ф. Фликкер-шумовая спектроскопия: Информация в хаотических сигналах / С.Ф. Тимашев. – М.: Физматлит, 2007. – 248 с.
- [12] Флуктуации и шумы в сложных системах живой и неживой природы: коллективная монография / редкол.: Р.М. Юльметьев, А.В. Мокшин, С.А. Демин, М.Х. Салахов. – Казань: РИЦ “Школа”, 2008. – 456 с.
- [13] Динамические явления в сложных системах: коллективная монография / редкол.: А.В. Мокшин, С.А. Демин, Р.М. Хуснутдинов, О.Ю. Панищев. – Казань: Изд-во МОиН РТ, 2011. – 308 с.
- [14] Bickel D.R. Detection of anomalous diffusion using confidence intervals of the scaling exponent with application to preterm neonatal heart rate variability / D.R. Bickel, M.T. Verklan, J. Moon // Phys. Rev. E. – 1998. – Vol. 58, № 5. – P. 6440-6448.
- [15] Liebovitch L.S. Transition from persistent to antipersistent correlation in biological systems / L.S. Liebovitch, W. Yang // Phys. Rev. E. – 1997. – Vol. 56, № 4. – P. 4557-4566.
- [16] Ахромеева Т.С. Нестационарные структуры и диффузионный хаос / Т.С. Ахромеева, С.П. Курдюмов, Г.Г. Малинецкий, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1992. – 541 с.
- [17] Timmer J. Quantitative analysis of tremor time series / J. Timmer, M. Lauk, G. Deuschl // Electroencephalography and clinical neurophysiology. – 1996. – Vol. 101, № 5. – P. 461-468.

- [18] Permann D. Wavelet analysis of time series for the Duffing oscillator: The detection of order within chaos / D. Permann, I. Hamilton // *Phys. Rev. Lett.* – 1992. – Vol. 69, № 18. – P. 2607-2610.
- [19] Farmer J.D. Predicting chaotic time series / J.D. Farmer, J.J. Sidorowich // *Phys. Rev. Lett.* – 1987. – Vol. 59, № 8. – P. 845-848.
- [20] Журбенко И.Г. Анализ стационарных и однородных случайных систем / И.Г. Журбенко. – М.: Изд-во МГУ, 1987. – 240 с.
- [21] Robinson E. Multichannel time series analysis with digital computer programs / E. Robinson. – Houston: Goose Pond Press, 1983. – 454 p.
- [22] Хармут Х. Применение методов теории информации в физике / Х. Хармут. – М.: Мир, 1989. – 344 с.
- [23] Abe S. Aging and scaling of earthquake aftershocks / S. Abe, N. Suzuki // *Physica A.* – 2004. – Vol. 332. – P. 533-538.
- [24] Tirnakli U. Aging in coherent noise models and natural time / U. Tirnakli, S. Abe // *Phys. Rev. E.* – 2004. – Vol. 70, № 5 – P. 056120 (1-4).
- [25] Varotsos P.A. Natural entropy fluctuations discriminate similar-looking electric signals emitted from systems of different dynamics / P.A. Varotsos, N.V. Sarlis, E.S. Skordas, M.S. Lazaridou // *Phys. Rev. E.* – 2005. – Vol. 71. – P. 011110 (1-11).
- [26] Quiroga R.Q. Event synchronization: A simple and fast method to measure synchronicity and time delay patterns / R.Q. Quiroga, T. Kreuz, P. Grassberger // *Phys. Rev. E.* – 2002. – Vol. 66. – P. 041904 (1-9).
- [27] Witkoskie J.B. Single molecule kinetics. I. Theoretical analysis of indicators / J.B. Witkoskie, J. Cao // *J. Chem. Phys.* – 2004. – Vol. 121, № 13. – P. 6361-6372.

- [28] Gumbel E.J. *Statistics of Extremes* / E.J. Gumbel. – New York: Columbia University Press, 1958. – 375 p.
- [29] Embrechts P. *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance* / P. Embrechts, C. Kluppelberg, T. Mikosch. – Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2003. – 648 p.
- [30] Redner S. On the Role of Global Warming on the Statistics of Record-Breaking Temperatures / S. Redner, M. Petersen // *Phys. Rev. E*. – 2006. – Vol. 74. – P. 061114 (1-14).
- [31] Comtet A. Level Density of a Bose Gas and Extreme Value Statistics / A. Comtet, P. Leboeuf, S.N. Majumdar // *Phys. Rev. Lett.* – 2007. – Vol. 98, № 7. – P. 070404 (1-4).
- [32] Stratonovich R.L. *Topics in the Theory of Random Noise* / R.L. Stratonovich. – New York: Gordon and Breach, 1963, Vol. 1. – 306 p.; 1967, Vol. 2. – 346 p.
- [33] Witt A. Testing stationarity in time series / A. Witt, J. Kurths, A. Pikovsky // *Phys. Rev. E*. – 1998. – Vol. 58, № 2. – P. 1800-1810.
- [34] Bernaola-Galvan P. Scale Invariance in the Nonstationarity of Human Heart Rate / P. Bernaola-Galvan, P.Ch. Ivanov, L.A.N. Amaral, H.E. Stanley // *Phys. Rev. Lett.* – 2001. – Vol. 87, № 16. – P. 168105 (1-4).
- [35] Chen Z. Effect of nonstationarities on detrended fluctuation analysis / Z. Chen, P.Ch. Ivanov, K. Hu, H.E. Stanley // *Phys. Rev. E*. – 2002. – Vol. 65, № 4. – P. 041107 (1-15).
- [36] Kennel M.B. Testing for general dynamical stationarity with a symbolic data compression technique / M.B. Kennel, A.I. Mees // *Phys. Rev. E*. – 2000. – Vol. 61, № 3. – P. 2563-2568.

- [37] Зельдович Я.Б. Перемежаемость в случайной среде / Я.Б. Зельдович, С.А. Молчанов, А.А. Рузмайкин, Д.Д. Соколов // УФН. – 1987. – Т. 152, № 1. – С. 3-31.
- [38] Batchelor G.K. The Nature of Turbulent Motion at Large Wave-Numbers / G.K. Batchelor, A.A. Townsend // Proc. R. Soc. Lond. A. – 1949. – Vol. 199. – P. 238-255.
- [39] Монин А.С. Статистическая гидромеханика. Ч. 2. / А.С. Монин, А.М. Яглом. – М.: Наука, 1967. – 720 с.
- [40] Рытов С.М. Введение в статистическую радиофизику. Ч. II. / С.М. Рытов, Ю.А. Кравцов, В.И. Татарский. – М.: Наука, 1978. – 463 с.
- [41] Лифшиц И.М. Введение в теорию неупорядоченных систем / И.М. Лифшиц, С.А. Гредескул, Л.А. Пастур. – М.: Наука, 1982. – 360 с.
- [42] Meneguzzi M. Helical and non-helical turbulent dynamos / M. Meneguzzi, U. Frisch, A. Pouquet // Phys. Rev. Lett. – 1981. – Vol. 47. – P. 1060–1064.
- [43] Shandarin S.F. Topological Mapping Properties of Collisionless Potential and Vortex Motion / S. F. Shandarin, Ya. B. Zeldovich // Phys. Rev. Lett. – 1984. – Vol. 52. – P. 1488–1491.
- [44] Мигранов Н.Г. Кооперативные явления в открытых системах: функциональный подход / Н.Г. Мигранов, Р.Н. Мигранова // Флуктуации и шумы в сложных системах живой и неживой природы / редкол.: Р.М. Юльметьев, А.В. Мокшин, С.А. Демин, М.Х. Салахов. – РИЦ “Школа”, Казань. – 2008. – С. 421-440.
- [45] Graham R. Hydrodynamic fluctuations near the convective instability / R. Graham // Phys. Rev. A. – 1974. – Vol. 10, № 5. – P. 1762–1784.

- [46] Ганн Дж. Эффект Ганна / Дж. Ганн // УФН. – 1966. – Т. 89, № 1. – С. 147-160.
- [47] Жаботинский А.М. Концентрационные автоколебания / А.М. Жаботинский. – М.: Наука, 1974. – 180 с.
- [48] Yulmetyev R.M. Correlations in Complex Systems / R.M. Yulmetyev, P. Hänggi // Encyclopedia of Complexity and Systems Science. – 2009. – Vol. 3. – P. 1615-1634.
- [49] Марков А.А. Распространение закона больших чисел на величины, зависящие друг от друга / А.А. Марков // Изв. физ.-мат. общ-ва Казан. ун-та. – 1906. – Т. 15, № 4. – С. 135-156.
- [50] Bachelier L. Théorie de la spéculation / L. Bachelier // Ann. Sci. École Norm. Supér. – 1900. – Vol. 17. – P. 21-86.
- [51] Wiener N. Differential space / N. Wiener // J. Math. Phys. – 1923. – Vol. 2. – P. 131-174.
- [52] Колмогоров А.Н. Теория вероятностей и математическая статистика / А.Н. Колмогоров. – М.: Наука, 1986. – 535 с.
- [53] Дуб Дж.Л. Вероятностные процессы / Дж.Л. Дуб. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1956. – 606 с.
- [54] Колмогоров А.Н. Основы теории марковских цепей с бесконечным числом возможных состояний / А.Н. Колмогоров // Матем. сбор. – 1936. – Т. 1, № 4. – С. 607-610.
- [55] Doeblin W. Eléments d'une théorie générale des chaînes simple constantes de Markoff / W. Doeblin // Ann. Sci. École Norm. Supér. – 1940. – Vol. 57. – P. 61-111.
- [56] Ревюз Д. Цепи Маркова / Д. Ревюз. – М.: РФФИ, 1997. – 432 с.

- [57] Albeverio S. Stochastic Processes and their Applications in Mathematics and Physics / S. Albeverio, Ph. Blanchard, L. Streit. – Boston: Kluwer Academic Publishers, 1990. – 402 p.
- [58] Sachs I. Elements of Statistical Mechanics / I. Sachs, S. Sen, J. Sexton. – Cambridge: Cambridge University Press, 2006. – 346 p.
- [59] Chandler D. Introduction to Modern Statistical Mechanics / D. Chandler. – Oxford: Oxford University Press, 1987. – 274 p.
- [60] Zwanzig R. Nonequilibrium statistical mechanics / R. Zwanzig. – Oxford: Oxford University Press, 2001. – 222 p.
- [61] Morozov A.N. Application of integral transforms to a description of the Brownian motion by a non-Markovian random process / A.N. Morozov, A.V. Skripkin // Russian Physics Journal. – 2009. – Vol. 52, № 2. – P. 184-195.
- [62] Голяницкий И.А. Оптимальная пространственно-временная обработка негауссовых полей и процессов / И.А. Голяницкий. – М.: МАИ, 1994. – 208 с.
- [63] Бочков Г.Н. Новое в исследованиях  $1/f$  - шума / Г.Н. Бочков, Ю.Е. Кузовлев // УФН. – 1983. – Т. 141, № 1. – С. 151-176.
- [64] Mori H. Transport, collective motion, and brownian motion / H. Mori // Prog. Theor. Phys. – 1965. – Vol. 33, № 3. – P. 423-455.
- [65] Lee M.H. Can the Velocity Autocorrelation Function Decay Exponentially? / M.H. Lee // Phys. Rev. Lett. – 1983. – Vol. 51, № 14. – P. 1227-1230.
- [66] Kubo R. The fluctuation-dissipation theorem / R. Kubo // Rep. Prog. Phys. – 1966. – Vol. 29. – P. 255-284.

- [67] Kawasaki K. Kinetic equations and time correlation functions of critical fluctuations / K. Kawasaki // *Ann. Phys.* – 1970. – Vol. 61, № 1. – P. 1-56.
- [68] Grabert H. Microdynamics and nonlinear stochastic processes of gross variables / H. Grabert, P. Hänggi, P. Talkner // *J. Stat. Phys.* – 1980. – Vol. 22. – P. 537-552.
- [69] Hänggi P. Stochastic Processes: Time-Evolution, Symmetries and Linear Response / P. Hänggi, H. Thomas // *Phys. Rep.* – 1982. – Vol. 88. – P. 207-319.
- [70] Mandelbrot B.B. The Fractal Geometry of Nature / B.B. Mandelbrot. – New York: W.H. Freeman and Comp., 1983. – 460 p.
- [71] Hurst H.E. Long-Term Storage: An Experimental Study / H.E. Hurst, R.P. Black, Y.M. Simaika. – London: Constable, 1965. – 145 p.
- [72] Бутаков В. Оценка уровня стохастичности временных рядов произвольного происхождения при помощи показателя Херста / В. Бутаков, А. Граковский // *Comput. Model. New Tech.* – 2005. – Т. 9, № 2. – С. 27-32.
- [73] Yulmetyev R.M. Possibility between earthquake and explosion seismogram differentiation by discrete stochastic non-Markov processes and local Hurst exponent analysis / R.M. Yulmetyev, F. Gafarov, P. Hänggi, R. Nigmatullin, Sh. Kayumov // *Phys. Rev. E.* – 2001. – Vol. 64. – P. 066132 (1-14).
- [74] Timashev S.F. Review of flicker noise spectroscopy in electrochemistry / S.F. Timashev, Yu.S. Polyakov // *Fluctuation and Noise Letters.* – 2007. – Vol. 7, № 2. – P. 15-47.
- [75] Kawasaki K. Theory of nonlinear transport processes: Nonlinear shear viscosity and normal stress effects / K. Kawasaki, J.D. Gunton // *Phys. Rev. A.* – 1973. – Vol. 8, № 4. – P. 2048-2064.

- [76] Robertson B. Equation of motion in nonequilibrium statistical mechanics / B. Robertson // *Phys. Rev.* – 1966. – Vol. 144, № 1. – P. 151-161.
- [77] Мокшин А.В. Микроскопическая динамика простых жидкостей / А.В. Мокшин, Р.М. Юльметьев. – Казань: Центр инновационных технологий, 2006. – 152 с.
- [78] Рид М. Методы современной математической физики. Т. 1 / М. Рид, Б. Саймон. – М.: Мир, 1997. – 357 с.
- [79] Hoheisel C. Memory functions and the calculation of dynamical properties of atomic liquids / C. Hoheisel // *Comp. Phys. Rep.* – 1990. – Vol. 12, № 2. – P. 31-66.
- [80] Götze W. Liquids, Freezing, and the Glass Transition / W. Götze. – Amsterdam: North-Holland, 1991. – 287 p.
- [81] Юльметьев Р.М. Описание магнитной релаксации спинов в жидкостях на основе идеи Боголюбова об иерархии времен релаксации / Р.М. Юльметьев // *ТМФ.* – 1977. – Т. 30, № 2. – С. 264-281.
- [82] Боголюбов Н.Н. Проблемы динамической теории в статистической физике / Н.Н. Боголюбов. – М.-Л.: Гостехиздат, 1946. – 120 с.
- [83] Yulmetyev R.M. Stochastic dynamics of time correlation in complex systems with discrete current time / R. Yulmetyev, P. Hänggi, F. Gafarov // *Phys. Rev. E.* – 2000. – Vol. 62, № 5. – P. 6178–6194.
- [84] Учайкин В.В. Метод дробных производных / В.В. Учайкин. – Ульяновск: Артишок, 2008. – 512 с.
- [85] Учайкин В.В. Фрактальные блуждания и блуждания на фракталах / В.В. Учайкин // *Журнал технической физики.* – 2004. – Т. 74, № 4. – С. 123-126.

- [86] Yulmetyev R.M. Universal approach to overcoming nonstationarity, unsteadiness and non-Markovity of stochastic processes in complex systems / R.M. Yulmetyev, A.V. Mokshin, P. Hänggi // *Physica A*. – 2005. – Vol. 345. – P. 303-325.
- [87] Boyarsky A. Energy and information of chaotic dynamical system / A. Boyarsky, P. Góra // *Chaos, Solitons and Fractals*. – 2001. – Vol. 12. – P. 1611-1618.
- [88] Shurygin V.Yu. Physical criterion of the degree of non-Markovity of relaxation processes in liquids / V.Yu. Shurygin, R.M. Yulmetyev, V.V. Vorobjev // *Phys. Lett. A*. – 1990. – Vol. 148. – P. 199-203.
- [89] Shurygin V.Yu. The spectrum of the non-Markovity parameter for relaxation processes in liquids / V.Yu. Shurygin, R.M. Yulmetyev // *Phys. Lett. A*. – 1993. – Vol. 174. – P. 433-436.
- [90] Mokshin A.V. Simple Measure of Memory for Dynamical Processes Described by a Generalized Langevin Equation / A.V. Mokshin, R.M. Yulmetyev, P. Hänggi // *Phys. Rev. Lett.* – 2005. – Vol. 95. – P. 200601 (1-4).
- [91] Yulmetyev R. Fluctuations and Noise in Stochastic Spread of Respiratory Infection Epidemics in Social Networks / R. Yulmetyev, N. Emelyanova, S. Demin, F. Gafarov, P. Hänggi, D. Yulmetyeva // *Unsolved Problems of Noise and Fluctuations in Physics, Biology, and High Technology* / ed. by S. Bezrukov. – American Institute of Physics, Melville, New York. – 2003. – Vol. 665. – P. 408-417.
- [92] Bhattacharya J. Nonlinear dynamics of evoked neuromagnetic responses signifies potential defensive mechanisms against photosensitivity / J.

- Bhattacharya, K. Watanabe, S. Shimojo // *Int. J. Bifur. Chaos.* – 2004. – Vol. 14. – P. 2701-2720.
- [93] Panishev O.Yu. Cross-correlation markers in stochastic dynamics of complex systems / O.Yu. Panishev, S.A. Demin, J. Bhattacharya // *Physica A.* – 2010. – Vol. 389. – P. 4958-4969.
- [94] Юльметьев Р.М. Корреляционные и релаксационные особенности в физиологических сигналах нервно-мышечной активности человека / Р.М. Юльметьев, Э.М. Зинатуллин, С.А. Демин, О.Ю. Панищев, Д.Е. Vaillancourt // *Нелинейный мир.* – 2008. – Т. 6, № 7. – С. 329-339.
- [95] Юльметьев Р.М. Подавление статистической памяти в физиологических сигналах нервно-мышечной системы человека при старении / Р.М. Юльметьев, А.В. Яценко, С.А. Демин, Д.Е. Vaillancourt // *Нелинейный мир.* – 2008. – Т. 6, № 8. – С. 464-472.
- [96] Зинатуллин Э.М. Корреляционные и релаксационные особенности нервно-мышечной системы человека при старении / Э.М. Зинатуллин, С.А. Демин, А.В. Яценко, О.Ю. Панищев // *Вестник СПбГУ ИТМО.* – 2008. – Т. 47. – С. 8-18.
- [97] Iyengar N. Age-related alterations in the fractal scaling of cardiac interbeat interval dynamics / N. Iyengar, C.-K. Peng, R. Morin, A.L. Goldberger, L.A. Lipsitz // *American Journal of Physiology.* – 1996. – Vol. 271. – P. R1078-R1084.
- [98] Titcombe M.S. Dynamics of Parkinsonian tremor during deep brain stimulation / M.S. Titcombe, L. Glass, D. Guehl, A. Beuter // *Chaos.* – 2001. – Vol. 11, № 4. – P. 766-773.
- [99] The National Aeronautics and Space Administration (NASA) Website.  
URL: <http://www.nasa.gov>

- [100] The Rossi X-Ray Timing Explorer Project, Kavli Institute for Astrophysics and Space Research.  
URL: [http:// xte.mit.edu](http://xte.mit.edu)
- [101] Levine A.M. First results from the All-Sky Monitor on the *Rossi X-Ray Timing Explorer* / A.M. Levine, H. Bradt, W. Cui, J.G. Jernigan, E.H. Morgan, R. Remillard, R.E. Shirey, D.A. Smith // *ApJ*. – 1996. – Vol. 469. – P. L33-L36.
- [102] Castro-Tirado A.J. XTE J1550-564 / A.J. Castro-Tirado, H.W. Duerbeck, I. Hook, L. Yan // *IAU Circ.* – 1999. – P. 7013.
- [103] Smith D.A. XTE J1550-564 / D.A. Smith // *IAU Circ.* – 1998. – P. 7008.
- [104] Finger M.H. XTE J1550-564 / M.H. Finger, S.W. Dieters, R.B. Wilson // *IAU Circ.* – 1998. – P. 7010.
- [105] Homan J. XTE J1550-564 / J. Homan, R. Wijnands, M. van der Klis // *IAU Circ.* – 1999. – P. 7121.
- [106] Dubath P. XTE J1550-564 / P. Dubath, M. Revnivtsev, P. Goldoni, A. von Kienlin, N. Lund, S. Grebenev, E. Kuulkers // *IAU Circ.* – 2003. – P. 8100.
- [107] Sturmer S.J. XTE J1550-564: INTEGRAL Observations of a Failed Outburst / S.J. Sturmer, C.R. Shrader // *ApJ*. – 2005. – Vol. 625, № 2. – P. 923-930.
- [108] Александрович Н.Л. Мягкие рентгеновские новые, кандидаты в черные дыры XTE J2012+381 и XTE J1550-564 / Н.Л. Александрович, В.А. Арефьев // *Письма в астрономический журнал*. – 2002. – Т. 28, № 10. – С. 732-740.