

На правах рукописи

**Расковалов Антон Александрович**

**Нелинейные возбуждения в магнетиках со спиральной  
и полосовой доменной структурой**

Специальность  
1.3.3. Теоретическая физика

Автореферат  
диссертации на соискание учёной степени  
доктора физико-математических наук

Екатеринбург — 2025

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте физики металлов имени М.Н. Михеева УрО РАН.

Научный консультант: **Киселёв Владимир Валерьевич**  
д.ф.-м.н., г.н.с. лаб. квантовой теории конденсированного состояния ФГБУН Института физики металлов имени М.Н. Михеева УрО РАН

Официальные оппоненты: **Алфимов Георгий Леонидович**,  
д.ф.-м.н., профессор, профессор кафедры «Высшая математика – 1» Национального исследовательского университета «МИЭТ»

**Белим Сергей Викторович**,  
д.ф.-м.н., профессор, профессор кафедры «Физика» ФГАОУ ВО «Омский государственный технический университет»

**Метлов Константин Леонидович**,  
д.ф.-м.н., в.н.с. отдела теории электронных и кинетических свойств нелинейных систем ФГБУН «Донецкий физико-технический институт имени А.А. Галкина»

Ведущая организация: ФГАОУ ВО «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина»

Защита состоится 14 ноября 2025 года в 12.00 на заседании диссертационного совета 24.2.431.01 при Челябинском государственном университете по адресу: 454001, г. Челябинск, ул. Братьев Кашириных, 129, конференц-зал. С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Челябинского государственного университета и на сайте <https://www.csu.ru>.

Отзывы на автореферат в двух экземплярах, заверенные печатью учреждения, просьба направлять по адресу: 454001, г. Челябинск, ул. Братьев Кашириных, 129, ученому секретарю диссертационного совета 24.2.431.01.

Автореферат разослан «\_\_» \_\_\_\_\_ 2025 года.

Телефон для справок: +7 (351) 799-71-17.

Ученый секретарь  
диссертационного совета  
24.2.431.01,  
кандидат физ.-мат. наук

Матюнина М.В.

## Общая характеристика работы

### Актуальность темы

В магнитных материалах часто встречаются всевозможные периодические структуры, такие как полосовые доменные структуры ферро- и антиферромагнетиков, а также спиральные магнитные структуры, которые теоретически описываются одномерной решеткой солитонов (кинков). Для некоторых кристаллов специальной симметрии (кристаллов без центра инверсии) формирование спиральных структур обусловлено взаимодействием Дзялошинского – Мории. Такого рода структуры обнаружены в металлах ( $\text{MnSi}$ ), диэлектриках ( $\text{CuB}_2\text{O}_4$ ) и полупроводниках ( $\text{Cr}_{1/3}\text{NbS}_2$ ). В последние годы открыты возможности синтеза молекулярных хиральных магнетиков со значительным вкладом взаимодействия Дзялошинского – Мории в магнитные свойства [1–5].

Несмотря на кажущуюся простоту феноменологического выражения для энергии магнетиков, в общем случае их изучение связано со значительными аналитическими трудностями [6–9]. Условие постоянства длины вектора намагниченности делает задачи теоретического описания больших отклонений намагниченности от основного состояния существенно нелинейными. Одной из характерных особенностей такого класса задач является наличие солитонов – пространственно локализованных частицеподобных волн, которые восстанавливают свою форму даже после взаимодействия с другими солитонами и нелинейными волнами. В нелинейной физике их роль подобна роли квазичастиц в линейной теории. Солитоны несут информацию о структуре и динамике нелинейной среды, определяют кинетические, термодинамические, магнитные, механические и другие свойства конденсированных сред в условиях значительного внешнего воздействия на систему.

В случае двумерных и трехмерных задач уравнения Ландау – Лифшица зачастую не могут быть решены точно. В связи с этим, в последние годы фокус внимания исследователей смещается в область численного моделирования динамики магнетиков с применением хорошо оснащенных вычислительных пакетов микромагнитного моделирования [10; 11].

Данная диссертационная работа посвящена исследованию магнитных солитонов в рамках интегрируемых моделей Ландау – Лифшица и sine-Gordon. К настоящему времени наиболее полно исследованы квазиодномерные солитоны на фоне однородного состояния конденсированных сред [9; 12]. Квазиодномерность означает, что учитывается зависимость только от одной пространственной координаты и времени. В указанном выше случае поиск новых точных решений соответствующих моделей во многом можно считать завершенным. Мотивацией работ, лежащих в основе данной диссертации, был поиск аналитических решений полностью

интегрируемых моделей магнетизма в двух ситуациях: когда они описывают взаимодействие солитонных возбуждений с доменными стенками и доменами периодической доменной структуры, представляющей основное состояние системы, либо с фиксированной границей образца.

Такие задачи представляют существенную математическую трудность, в связи с чем до сих пор имеется довольно мало работ на подобные темы. В первом из указанных случаев решалась задача для безграничного образца, но на существенно нелинейном неоднородном периодическом фоне. В рамках диссертации найдены новые точные солитонные решения уравнений Ландау – Лифшица для легкоосного и двухосного ферромагнетиков при наличии доменной структуры, а также детально изучены громоздкие и непростые для анализа солитоны и мультисолитоны в решетке кинков (доменных стенок) геликоидальных магнетиков без центра инверсии в рамках модели  $\text{sine-Gordon}$ .

Во втором случае строились решения уравнения Ландау – Лифшица на однородном фоне, но не в безграничном, а в полуограниченном образце, который в некоторой точке имеет фиксированную границу. Можно было искать соответствующие решения в разных системах: для изотропного ферромагнетика, ферромагнетика с легкоосной или легкоплоскостной анизотропией, двухосного ферромагнетика, ферримангнетика и т. д. Все соответствующие модели полностью интегрируемы, и для них известны соответствующие  $U - V$ -пары (1), (2) [9].

В рамках диссертационной работы более предпочтительным оказалось исследование солитонов полуограниченного одноосного ферромагнетика. Преимущество такой задачи состоит в том, что благодаря известному калибровочному преобразованию, по уже найденным решениям уравнений Ландау – Лифшица для одноосного ферромагнетика можно построить решения еще одной модели, – полубесконечного хирального ферромагнетика на фоне магнитной спирали, за формирование которой отвечает взаимодействие Дзялошинского. В общем случае, наличие оси легкого намагничивания, совпадающей с направлением вектора Дзялошинского, подавляет геликоидальное упорядочение и сохраняет спиральный разворот намагниченности только в локализованных областях внутри образца. Напротив, квадратичная по намагниченности легкоплоскостная анизотропия (базисная плоскость параллельна плоскости поворота спинов) сохраняет геликоидальную структуру на всем протяжении образца. Потому в диссертации исследованы солитоны не в легкоосном, а в полуограниченном легкоплоскостном ферромагнетике.

При построении решений применялся метод обратной задачи рассеяния – нелинейный аналог классического преобразования Фурье для интегрирования эволюционных уравнений в частных производных, которые содержат только одну пространственную координату  $\xi$  и время  $t$ .

Для возможности применения метода обратной задачи рассеяния исходное нелинейное уравнение необходимо представить в форме условия совместности:

$$[\partial_\xi - U(\lambda), \partial_t - V(\lambda)] \equiv \partial_t U(\lambda) - \partial_\xi V(\lambda) + [U(\lambda), V(\lambda)] = 0 \quad (1)$$

некоторой системы линейных дифференциальных уравнений для вектор-функции  $\chi(\lambda)$ :

$$\partial_\xi \chi = U(\lambda) \chi, \quad \partial_t \chi = V(\lambda) \chi. \quad (2)$$

Величины  $U, V, \chi$  зависят не только от координат  $\xi$  и  $t$ , но еще и от дополнительного комплексного параметра  $\lambda$ ;  $U(\lambda)$  и  $V(\lambda)$  являются мероморфными функциями от параметра  $\lambda$ , т. е. являются аналитическими всюду, за исключением конечного числа полюсов. Матричные функции  $U$  и  $V$  называют обобщенной парой Лакса, представлением Захарова – Шабата [13], или просто  $U$ - $V$ -парой [14; 15].

Представление (1), (2) используется для перехода от исходных динамических переменных (полей) к новым обобщенным переменным (данным рассеяния). В новых переменных нелинейное уравнение распадается на ряд не зацепляющихся линейных дифференциальных уравнений. После того как решение последних найдено, обращением замены переменных получают решение исходного нелинейного уравнения.

Данные рассеяния отвечают допустимым типам возмущений в системе и разбиваются на две группы: дискретный набор переменных, которым отвечают возмущения солитонного типа (в магнитных средах это доменные границы, уединенные домены, самолокализованные волны намагниченности и т. д.), и набор переменных, непрерывных по  $\lambda$ , которые описывают волны с преобладающим влиянием дисперсии, расплывающиеся с течением времени.

Классический вариант метода обратной задачи рассеяния связан с изучением свойств аналитичности частных решений вспомогательной линейной системы (1). Последнее представляет достаточно сложную задачу и возможно лишь для быстро убывающих при  $x \rightarrow \pm\infty$  решений исходного нелинейного уравнения. Между тем, для построения частных решений уравнений движения в полном исследовании спектральной задачи (2) нет необходимости. Были предложены прямые методы вычисления точных решений,  $U$ - $V$ -пара которых рациональным образом зависит от спектрального параметра  $\lambda$ : метод полиномиального замыкания, процедура «одевания» [16], метод Хироты [17], преобразования Бэклунда (Дарбу) и другие.

В данной диссертационной работе используется процедура «одевания». Она наиболее универсальна, технически прозрачна, и вместе с тем, наиболее близка к классической схеме метода обратной задачи. Процедура «одевания» основана на использовании матричной задачи Римана в

комплексной  $\lambda$ -плоскости и позволяет по известному частному решению исходного нелинейного уравнения (1) строить новые точные решения.

**Цель диссертационной работы:** получить аналитическое описание нелинейных коллективных возбуждений в доменных структурах ферромагнетиков с одноосной и двухосной анизотропией, в магнетиках без центра инверсии с несоизмеримой периодической структурой и мультиферроиках, а также выявить особенности взаимодействия солитонов с границей образца на примере ферромагнетика с анизотропией типа «легкая плоскость» с однородным основным состоянием и хирального ферромагнетика.

Поставленная цель включает в себя построение соответствующих точных решений в рамках интегрируемых моделей магнетизма, анализ полученных солитонных состояний и выявление способов их возбуждения, обнаружения и управления их свойствами посредством внешних полей.

Для достижения данной цели были поставлены следующие **задачи**:

1) Построить солитонные решения уравнений Ландау – Лифшица для безграничного легкоосного и двухосного ферромагнетиков с основным состоянием, представляющим доменную структуру. Для решения этой задачи была использована процедура «одевания» – модификация метода обратной задачи рассеяния. Метод «одевания» позволяет свести проблему интегрирования исходных сильно нелинейных вещественных уравнений к решению задачи Римана теории функций комплексной переменной. Ввиду наличия доменной структуры, задачу Римана пришлось решать не в комплексной плоскости, а на римановой поверхности, обусловленной периодичностью основного состояния.

2) Построить солитонные решения уравнения Ландау – Лифшица для полуограниченного легкоплоскостного ферромагнетика с однородным основным состоянием. Для выполнения этой задачи удалось использовать процедуру «одевания» в сочетании с методом изображений, используемым при решении краевых задач электростатики. Согласно идее метода изображений, поле намагниченности продолжено четным образом с полуоси, оканчивающейся границей образца, на всю вещественную ось. Это дает добавочные свойства симметрии, позволяющие встроить процедуру интегрирования уравнения Ландау – Лифшица на полуоси в традиционную схему метода обратной задачи рассеяния.

3) Провести анализ нелинейной динамики солитонов в легкоосном и двухосном ферромагнетиках и на фоне геликоидальной магнитной структуры, а также солитонных возбуждений в полуограниченном образце легкоплоскостного ферромагнетика на однородном фоне. По результатам анализа установить способы возбуждения полученных солитонов и подтвердить их численным экспериментом.

**Методология и методы исследования.** Отличительная особенность данной диссертационной работы – в том, что все исследуемые в ней магнитные солитоны построены аналитически – как точные решения интегрируемых моделей. Основным методом исследования служит модификация техники обратной задачи рассеяния – наиболее универсального метода современной нелинейной физики, – а именно, процедура «одевания» на основе классической задачи Римана теории функций комплексной переменной.

### **Положения и результаты, выносимые на защиту:**

1) Прецессионные солитоны в доменной структуре легкоосного ферромагнетика являются переносчиками макроскопических трансляций структуры. Колебания ядер неподвижных солитонов приводят к вращениям намагниченности в примыкающих к ним доменах и их продольным смещениям. При определенных условиях солитоны служат зародышами перемагничивания структуры.

2) Солитоны в доменной структуре можно генерировать импульсным перемагничиванием структуры внешним магнитным полем. Высота и ширина начального импульса определяют вызванные солитонами сдвиги структуры, которые обуславливают строение солитонов. Это позволяет генерировать в структуре неподвижные солитоны с необходимыми размерами и частотами прецессии.

3) Модуляционная неустойчивость доменной структуры легкоосного ферромагнетика не сказывается на свойствах прецессионных солитонов в структуре и проявляется только вблизи границы спин-волнового спектра, где солитоны трансформируются в протяженные модуляции, которые могут двигаться без ограничений на скорость. Данный результат подтверждает, что нелинейность может стабилизировать солитоны в интегрируемых системах с неустойчивым в линейном приближении основным состоянием.

4) При малом отличии постоянных легкоосной и двухосной анизотропии солитоны в доменных структурах легкоосного и двухосного ферромагнетиков качественно схожи. Они существенно различаются только вблизи границ спин-волнового спектра, где учет магнито-дипольных сил приводит к ограничению на скорость движения солитонов.

5) Спектральные разложения интегралов движения позволяют трактовать любое возбужденное состояние существенно нелинейной и неоднородной доменной структуры двухосного ферромагнетика в терминах идеального газа солитонов и магнонов.

6) В полугограниченном образце легкоплоскостного ферромагнетика с частично закрепленными краевыми спинами все солитоны являются движущимися и делятся на волны стационарного профиля (волны поворота намагниченности) и пульсирующие солитоны (бризеры). Отражение волн

поворота от границы пороговым образом зависит от величины поля поверхностной анизотропии, а направление поверхностного поля определяет четность или нечетность числа волн поворота в образце. Ядра солитонов при столкновении с границей претерпевают значительные изменения, не поддающиеся описанию в рамках нелинейной теории возмущений.

7) Импульсное перемагничивание одного из доменов геликоидальной магнитной структуры внешним магнитным полем позволяет генерировать в структуре неподвижный бризер требуемой частоты и амплитуды. Частота внутренних пульсаций неподвижного бризера лежит вне спектра стоячих спиновых волн. Бризер колеблется в пределах резонаторного домена, который больше по размеру, чем остальные домены структуры.

8) Движение бризера в геликоидальной структуре может сопровождаться ее сильными продольными модуляциями на переднем и заднем фронте бризера. Разрушение бризера происходит за счет неограниченного увеличения протяженности таких модуляций с ростом его скорости.

9) При добавочной закрутке части геликоидальной структуры (решетки  $2\pi$ -кинков) в ней возбуждаются два движущихся в противоположных направлениях одинаковых кинка той же хиральности, что и кинки структуры. Вызванные кинками и бризерами сдвиги структуры можно диагностировать магнитооптическими методами.

### **Соответствие диссертации паспорту специальности**

Диссертационная работа соответствует пункту 5 Паспорта специальности 1.3.3 «Теоретическая физика»: «Теория конденсированного состояния. Изучение различных состояний вещества и физических явлений в них. Статистическая физика. Теория фазовых переходов. Физическая кинетика».

### **Структура и объем диссертационной работы**

Диссертация состоит из Введения, четырех глав, Заключения и Приложения. Полный объем работы составляет 241 страницу, включая 45 рисунков и 125 наименований цитируемой литературы.

### **Апробация работы**

Основные результаты, изложенные в диссертационной работе, докладывались и обсуждались на XXII, XXIII, XXV Международных конференциях «Новое в магнетизме и магнитных материалах» (Астрахань, 2012 г.; Москва, 2018 г., 2024 г.); XXXIV, XXXV, XXXVI, XXXVII, XL Международных зимних школах физиков-теоретиков «Коуровка» (Новоуральск, 2012 г.; Верхняя Сысерть, 2014 г., 2016 г., 2018 г.; р. Башкортостан, с. Новоабзаково, 2024 г.); Научной сессии ИФМ УрО РАН по итогам 2016 г. (Екатеринбург, 2016 г.); VI, VIII Международной конференциях «Solitons, collapses and turbulence: Achievements, Developments and Perspectives»

(Новосибирск, Академгородок, 2012 г.; Москва, Черноголовка, 2017 г.); Международной конференции «Нелинейные уравнения и комплексный анализ 2013» (Уфа, 2013 г.); XXV Научной сессии Совета по нелинейной динамике (Москва, 2016 г.); XIV, XV, XIX, XX, XXIII Всероссийских школах-семинарах по проблемам конденсированного состояния вещества СПФКС (Екатеринбург, 2014 г., 2015 г., 2018 г., 2019 г., 2023 г.); Международной конференции «Фазовые переходы, критические и нелинейные явления в конденсированных средах» (Челябинск, 2015 г.); Конференции «Phycis and Mathematics of Nonlinear Phenomena. 50 years of IST» (Галлиполи, Лечче, Италия, 2017 г.); XVIII Научной школе «Нелинейные волны – 2018» (Нижний Новгород, 2018); VII Евро-азиатский симпозиум «Trends in MAGnetism» (Екатеринбург, 2019 г.), Всероссийской конференции с международным участием «Электронные, спиновые и квантовые процессы в молекулярных и кристаллических системах» (Уфа, 2024 г.).

Результаты работы были использованы при выполнении НИР, поддержанных Фондом «Династия» в рамках программы Президиума РАН «Фундаментальные проблемы нелинейной динамики» (2012-2013 гг.), Стипендией Президента РФ для молодых ученых СП-6342.2013.1. (2013-2015 гг.), проектом УрО РАН №15-8-2-7 «Локализованные структуры, солитоны и их возбуждение в конденсированных средах», грантом РФФИ для молодых ученых «Мой первый грант» №18-32-00143 (2018-2019 гг.), проектом РНФ 19-72-30028 «Турбулентность и когерентные структуры в интегрируемых и неинтегрируемых системах» (2024 г.).

**Публикации.** По результатам диссертации опубликована 21 статья в журналах, включенных ВАК в Перечень ведущих рецензируемых журналов и индексируемых в Российских и международных базах цитирования, 21 тезис докладов на Всероссийских и международных конференциях.

**Достоверность** полученных в диссертации результатов обеспечена использованием физически обоснованных теоретических моделей, применением для их исследования хорошо разработанного математического аппарата (метода обратной задачи рассеяния), наиболее полно выявляющего свойства симметрии решений; явным видом полученных решений, что позволяет убедиться в их справедливости непосредственной подстановкой в исходные уравнения (в простейших случаях – вручную, в общем случае – численно), корреляцией полученных решений с известными ранее результатами при соответствующих предельных переходах.

**Личный вклад соискателя.** Личный вклад автора заключается в постановке цели и задач исследований; все результаты диссертационной работы получены лично автором. Построение точных решений уравнения Ландау – Лифшица на фоне доменной структуры ферромагнетиков с легкоосной и двухосной анизотропией выполнено совместно с д.ф.-м.н. В.В.

Киселевым. Численный эксперимент по генерированию солитонов в доменной структуре легкоосного ферромагнетика проведен совместно с к.ф.-м.н. С.В. Баталовым. Научные результаты обсуждались автором с д.ф.-м.н. В.В. Киселевым и д.ф.-м.н., член-корр. РАН А.Б. Борисовым. В списке публикаций авторы указаны в алфавитном порядке, а не по значимости вкладов. Личный вклад автора диссертации является определяющим.

**Научная и практическая значимость.** Изученные в работе точные солитонные решения интегрируемых моделей магнетизма на нелинейном периодическом фоне представляют интерес как для развития общей теории интегрирования уравнений нелинейной математической физики, так и с точки зрения их применения в исследовании процессов перемангничивания доменной структуры при сильных внешних воздействиях.

Результаты диссертации важны для понимания закономерностей встраивания нелинейных возбуждений в периодическую доменную структуру, характера их взаимодействия с доменами и доменными стенками структуры, возможностей их возбуждения, делокализации и разрушения.

С практической точки зрения, результаты работы можно использовать для планирования экспериментов по обнаружению солитоноподобных возбуждений в доменных структурах одноосного и двухосного ферромагнетиков (главы 1, 2), в геликоидальной структуре магнетиков без центра инверсии и циклоидальной структуре мультиферроиков (глава 4) и управлению их свойствами с помощью внешних полей. Солитоны в геликоидальной магнитной структуре могут служить базовыми элементами при обработке информации в наноустройствах микросистемной техники и в информационно-телекоммуникационных системах. Солитоны в мультиферроиках могут найти применение при конструировании приборов и устройств, работающих без потерь энергии из-за протекания токов.

Результаты главы 3 могут быть использованы для постановки эксперимента по исследованию взаимодействия нелинейных волн намагниченности с границей легкоплоскостного ферромагнетика, а также хирального ферромагнетика с легкоплоскостной анизотропией. Рассчитанный спектр поглощения мощности внешней накачки на частотах стоячих спиновых волн в геликоидальной магнитной структуре (глава 4) имеет практическое значение при постановке экспериментов о возбуждении в геликоидальной структуре солитонов и спиновых волн.

**Все представленные в диссертации результаты являются новыми. Новизна работы определяется следующим:**

1) Получены новые точные решения одной из базовых моделей магнетизма – модели Ландау – Лифшица для ферромагнетика с анизотропией

типа «легкая ось», описывающие солитонные возбуждения на фоне периодического основного состояния – полосовой доменной структуры. Для построения решений приспособлена модификация метода обратной задачи рассеяния – процедура «одевания» частного решения модели, соответствующего доменной структуре. Принципиальная новизна данного подхода состоит в том, что лежащая в его основе задача Римана формулируется не в комплексной плоскости спектрального параметра, как это было в случае однородного основного состояния среды, а на двулистной римановой поверхности, топологически эквивалентной тору. Наличие римановой поверхности обусловлено периодическим основным состоянием. Необходимость его учета приводит к существенным математическим трудностям, связанным с возникновением добавочных «блоховских» множителей при сдвиге решений задачи Римана по пространственной координате или в областях периодичности спектрального параметра задачи рассеяния. Успешное преодоление этих трудностей позволило получить полное решение задачи в терминах хорошо изученных и табулированных эллиптических функций Якоби, допускающих подробный анализ (глава 1).

2) На основе полученных решений впервые представлен детальный анализ прецессионных солитонов в доменной структуре легкоосного ферромагнетика. Выявлено два типа неподвижных солитонов в структуре, которые служат обобщением классических солитонов легкоосного ферромагнетика на фоне однородного основного состояния среды. На примере одного из них обнаружен неочевидный сценарий взаимодействия встроенного в структуру солитона с его периодическим окружением: колебания ядра солитона приводят к продольным смещениям доменной структуры с формированием в ней узлов – выделенных точек, в которых смещения отсутствуют. Установлено, что наличие солитонов приводит к макроскопическим сдвигам структуры. Величина сдвига задается нулями задачи Римана, определяющими физические характеристики солитонов, и тесно связана со строением ядер солитонов (глава 1).

3) Предложен способ возбуждения неподвижного солитона в доменной структуре. Для этого нужно посредством внешнего магнитного поля удлинить и возмутить один из доменов структуры так, чтобы он стал резонатором для ядра солитона. Соответствующая возможность подтверждена численно. Установлены характерные интервалы длины и ширины резонаторного домена, допускающие формирование из него солитона в численном эксперименте (глава 1).

4) Впервые исследован характер вырождения солитонов в доменной структуре легкоосного ферромагнетика вблизи границ области их существования. Выявлено два выделенных случая, в которых солитоны трансформируются в неподвижные аperiodические модуляции структуры – аналоги «солитонов Перегринна» в оптоволокне и волн-убийц на воде.

Указанные модуляции имеют значительную протяженность и могут охватывать несколько периодов структуры (глава 1).

5) Развита процедура интегрирования уравнения Ландау – Лифшица для легкоосного ферромагнетика распространена на физически выделенный случай двухосного ферромагнетика с доменной структурой. На основе модификации метода обратной задачи рассеяния впервые получены новые точные решения, описывающие солитоны в доменной структуре двухосного ферромагнетика, а также сингулярное интегральное уравнение для диспергирующих спиновых волн в отсутствие солитонов. Найдены законы сохранения (энергия и импульс) для солитонов и нелинейных спиновых волн на фоне структуры. Проведен сравнительный анализ солитонов легкоосного и двухосного ферромагнетиков. Установлено, что неподвижные солитоны обеих моделей мало отличаются друг от друга, в то время как сценарии вырождения солитонных возбуждений в легкоосном и двухосном ферромагнетиках и соответствующие им аналоги «солитонов Перегринна», напротив, качественно различны (глава 2).

6) Найдены новые точные решения, описывающие отражение движущихся солитонов от границы ферромагнетика с анизотропией типа «легкая плоскость». Взаимодействие солитонов с границей образца перспективно с точки зрения приложений и постановки эксперимента, однако до сих пор практически нет работ, в которых бы предпринимались попытки построить соответствующие точные решения в магнитных средах. Для поиска решений применена техника метода обратной задачи рассеяния в совокупности с «методом изображений», применяемым при решении задач электростатики. Ввиду сложности математического аппарата, цель состояла в том, чтобы построить соответствующие решения хотя бы на однородном фоне и в полубесконечном ферромагнетике - при учете только одной границы. Аналитическое исследование солитонов в конечных образцах (с учетом двух границ) пока что представляется недостижимым (глава 3).

7) На основе полученных решений представлен анализ взаимодействия с границей легкоплоскостного ферромагнетика движущихся волн поворота и бризеров при полном, либо частичном закреплении спинов на границе образца. Показано, что легкоплоскостная анизотропия исключает формирование неподвижных приграничных солитонов. Все полученные солитоны оказываются движущимися. Найдены законы сохранения для солитонов и нелинейных волн в полуграниченном образце (глава 3).

8) Полученные результаты использованы для аналитического описания солитонов в хиральном полубезграничном ферромагнетике с легкоплоскостной анизотропией в рамках модели Ландау – Лифшица, функционал действия которой связан с функционалом действия исходной модели калибровочным преобразованием. Впервые найдены и

проанализированы точные решения модели полубезграничного хирального ферромагнетика, описывающие взаимодействие солитонов с его границей (глава 3).

9) На основе метода обратной задачи рассеяния впервые представлен анализ бризеров и комплекса из двух кинков, встроенных в периодическую решетку доменных стенок (кинков) геликоидальной магнитной структуры в рамках модели sine-Gordon. Исследовано взаимодействие двух движущихся кинков друг с другом и с доменными стенками структуры в зависимости от соотношения направлений их закруток (хиральностей). Выявлены особенности взаимодействия неподвижного пульсирующего бризера в структуре с прилегающими к нему доменами и доменными стенками. Как и в случае прецессионного солитона легкоплоскостного ферромагнетика, пульсации бризера приводят к осцилляциям участков доменной структуры между выделенными точками – узлами, в которых намагниченность оказывается прикреплена к структуре (глава 4).

10) При анализе движения бризера в решетке кинков выявлен специфический сценарий его разрушения при условии, когда скорость движения бризера как целого превышает фазовую скорость распространения его пульсаций. Установлено, что на переднем и заднем фронтах бризера поочередно формируются протяженные участки модуляций структуры, которые периодически втягиваются в ядро бризера, а затем образуются вновь. С ростом поступательной скорости движения бризера протяженность таких участков неограниченно возрастает (глава 4).

11) Предложен способ возбуждения бризеров и движущихся кинков в решетке кинков геликоидальной структуры. Для возбуждения неподвижного бризера необходимо предварительно закрутить один из доменов структуры внешним полем, а затем дополнительно удлинить его на фронте закрутки. Два движущихся кинка той же хиральности, что и кинки решетки, возбуждаются из удлиненного домена, по одну из сторон которого магнитная спираль дополнительно закручена на угол  $4\pi$  (два оборота спирали). Возможности генерирования неподвижного бризера и комплекса из двух кинков подтверждены численным счетом (глава 4).

12) Вычислен спектр поглощения мощности внешней накачки на частотах стоячих спиновых волн в геликоидальной структуре в постоянном магнитном поле, направленном перпендикулярно оси магнитной спирали. Получены приближенные выражения для резонансных частот поглощения в зависимости от внешнего магнитного поля. Показано, что частоты неподвижного бризера лежат ниже дискретного спектра частот стоячих спиновых волн почти при всех значениях поля (глава 4).

## Краткое содержание работы

Во Введении сформулированы цель и задачи работы, обоснована актуальность темы диссертации, приведены основные положения и результаты, выносимые на защиту. Также данный раздел содержит обсуждение научной и практической значимости работы и ее новизны, описание методологии исследования, список конференций, на которых были представлены основные результаты диссертации.

В первой главе получены и детально проанализированы новые точные решения уравнения Ландау – Лифшица для ферромагнетика с анизотропией типа «легкая ось», которые описывают солитонные возбуждения на существенно нелинейном фоне полосовой доменной структуры.

В безразмерных переменных уравнение Ландау – Лифшица для легкоосного ферромагнетика имеет вид:

$$\partial_t \mathbf{S} = [\mathbf{S} \times \partial_x^2 \mathbf{S}] + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{S}) [\mathbf{S} \times \mathbf{n}], \quad \mathbf{S}^2 = 1. \quad (3)$$

Вектор  $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$  задает ось анизотропии. Образец считаем бесконечно протяженным вдоль оси  $Ox$ . Намагниченность  $\mathbf{S}(x, t)$  зависит от одной пространственной координаты  $x$  и времени  $t$ .

Модель (3) учитывает основные взаимодействия, приводящие к образованию доменных стенок в ферромагнетиках. В параметризации

$$\mathbf{S} = (\sin \theta \cos \Phi, \sin \theta \sin \Phi, \cos \theta) \quad (4)$$

полосовой доменной структуре отвечает решение  $\mathbf{S}^{(0)}(\chi)$  уравнения (3) вида:

$$\begin{aligned} \Phi = \varphi_0 = \text{const}, \quad \theta(\chi) = \theta_0 = \pi/2 - \text{am}(\chi, k); \quad \chi = x/k; \\ \sin \theta_0 = \text{cn}(\chi, k), \quad \cos \theta_0 = \text{sn}(\chi, k), \quad k \partial_x \theta_0 = \partial_\chi \theta_0 = -\text{dn}(\chi, k). \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь  $\text{am}(\chi, k)$  – эллиптическая амплитуда Якоби,  $\text{sn}(\chi, k)$ ,  $\text{cn}(\chi, k)$ ,  $\text{dn}(\chi, k)$  – эллиптические функции Якоби с модулем  $0 \leq k \leq 1$ . Величина  $k$  задает период  $4Kk$  доменной структуры;  $K = K(k)$  – полный эллиптический интеграл первого рода. Решение (5) описывает последовательность протяженных доменов шириной  $L_0 = 2Kk$ , разделенных узкими доменными стенками толщиной  $l_0 = 2K'k/\pi \ll L_0$  (рис. 1);  $k' = \sqrt{1 - k^2}$ ,  $K' = K(k')$ . Угол  $\varphi_0$  задает геометрию поворота. Модель (3) не учитывает магнитостатическое взаимодействие, а потому лучше описывает структуру с блоховским типом распределения намагниченности ( $\varphi_0 = \pm\pi/2$ ).

В разделе 1.1 показано, что доменная структура (5) неустойчива по линейному приближению. Однако, инкремент неустойчивости  $\delta$  чрезвычайно мал (при  $L_0/l_0 \approx 9.5$ :  $\delta \sim 6 \cdot 10^{-4} \ll 1$ ). По мере развития неустойчивости линейное приближение нарушается. Становятся важными эффекты взаимодействия разных мод. Нелинейные взаимодействия могут

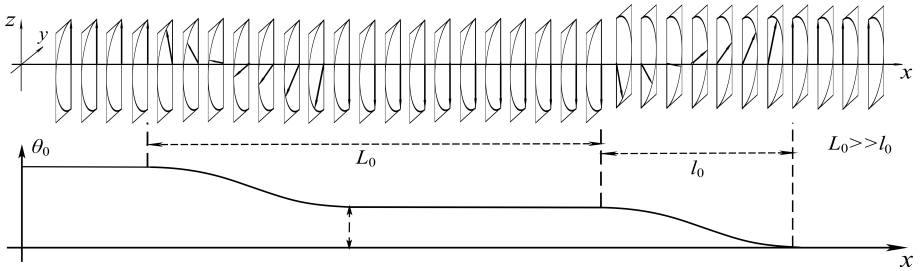


Рисунок 1 — Полосовая доменная структура и угол  $\theta_0$  разворота намагниченности.

приводить к локализации возмущений и стабилизации доменной структуры.

В разделе 1.2 приведена постановка задачи аналитического описания солитонных возбуждений в полосовой доменной структуре и план ее решения. Солитонам модели (3) отвечают граничные условия:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(x, t) &\rightarrow \mathbf{S}^{(0)}(\chi), & \chi &\rightarrow +\infty, \\ \mathbf{S}(x, t) &\rightarrow \mathbf{S}^{(0)}(\chi + \Delta), & \chi &\rightarrow -\infty. \end{aligned} \quad (6)$$

Наличие солитонов приводит к макроскопическому сдвигу  $0 < \Delta < 4K$  структуры (с точностью до ее периода). Для построения солитонов на фоне структуры используется модификация метода обратной задачи рассеяния (МОЗР) – процедура «одевания» частных решений уравнения Ландау – Лифшица (3) с помощью задачи Римана теории функций комплексной переменной в терминах дополнительного спектрального параметра. Наличие полосовой структуры проявляется в том, что задача Римана формулируется не в комплексной плоскости спектрального параметра, как это было в случае однородного основного состояния среды, а на римановой поверхности, топологически эквивалентной тору. При сдвигах на периоды по спектральному параметру и/или пространственной координате функции задачи Римана приобретают дополнительные множители. Это осложняет процедуру их построения.

Решение задачи Римана получено в разделе 1.3. Вычислены законы сохранения – энергия и импульс солитонов в структуре. Путем качественного анализа показано, что столкновение солитонов в структуре является упругим: приводит к сдвигу центров солитонов и изменяет начальную фазу их прецессии, оставляя неизменным строение их ядер.

В разделе 1.4 проведен детальный анализ движущихся и неподвижных прецессионных солитонов в полосовой доменной структуре. Макроскопический сдвиг структуры  $\Delta = 4\rho$  оказывается связан с нулем  $\mu = -\rho + i\theta$  задачи Римана, определяющим строение и скорость отдельно взятого солитона;  $0 < \rho < K$ ,  $|\theta| < K'$ . Большая часть сдвига локализована

вблизи центра солитона – в его ядре шириной  $d < 4K$ . При  $0.1K \leq \rho \leq 0.4K$  солитоны являются внутридоменными: колебания проекции намагниченности  $S_3$  локализованы в конечной области, ширина которой (по переменной  $\chi$ ) меньше длины  $2K$  отдельного домена структуры:  $d \approx 2l_0 < L_0$ . При  $0.4K \leq \rho \leq 0.6K$  ( $\theta \neq \pm K'$ ) ширина ядер солитонов  $0.8K \leq d \approx 2\rho \leq 1.8K$  линейно растет с ростом  $\rho$ , а скорость и частота солитонов достигают минимальных значений. Такие солитоны можно трактовать как зародыши перемагничивания (см. рис. 2).

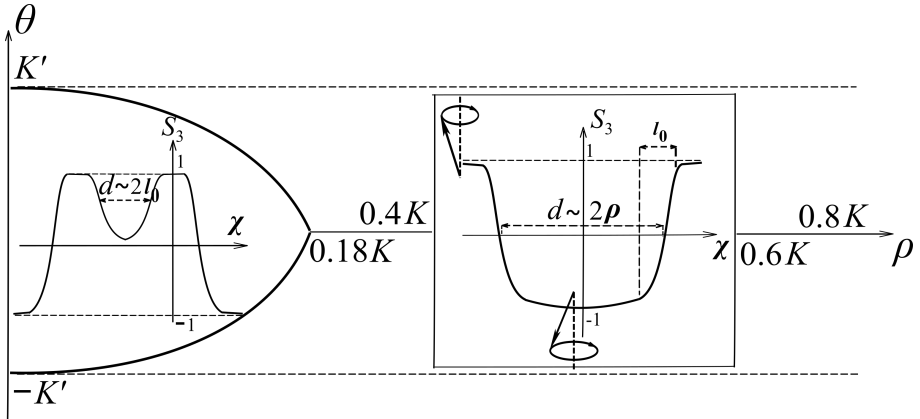


Рисунок 2 — Компонента  $S_3$  прецессионных солитонов при разных значениях  $\rho$ .

При  $\rho \geq 0.8K$  ядра солитонов вызывают сильные протяженные модуляции доменной структуры, которые могут распространяться на большие расстояния, превышающие период структуры. В общем случае такие модуляции неустойчивы и движутся с большой скоростью. При значениях  $\mu = \mu_1 = -K$  и  $\mu = \mu_2 = -K + iK'$  модуляции структуры неподвижны. Им соответствуют вырожденные эллиптически-полиномиальные решения. Установлено, что в малых окрестностях точек  $\mu_{1,2}$  неустойчивость имеет место только на начальном временном этапе, а затем система возвращается в изначальное состояние. В этом отношении такие возбуждения можно назвать аналогами «солитонов Перегринна» на модуляционно неустойчивом фоне, которые наблюдаются в экспериментах по изучению экстремальных модуляций в оптоволокне и волн-убийц на воде.

В разделе 1.5 выявлены возможности генерирования неподвижных внутридоменных солитонов в доменной структуре. Для их возбуждения нужно удлинить и возмутить один из доменов структуры так, чтобы он

стал резонатором для ядра солитона. Это можно сделать, прилагая локальное магнитное поле вдоль направления

$$\mathbf{n} = (\sin \gamma \cos \varphi_0, \sin \gamma \sin \varphi_0, \cos \gamma), \quad (7)$$

где параметр  $\gamma = \text{const}$  задает компоненту  $S_3$  намагниченности, а угол  $\varphi_0$  – ориентацию проекции вектора  $\mathbf{S}$  в плоскости  $Oxy$ .

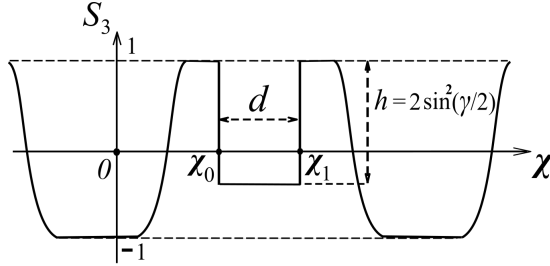


Рисунок 3 — Начальный импульс (7).

Результаты численного счета говорят о том, что локализованное возмущение (7) малой ширины  $d \leq 0.8K$  расплывается на диспергирующие спиновые волны при  $0 < \gamma \leq \pi/2$ , а при  $\pi/2 < \gamma \leq \pi$  – порождает два или более попарно одинаковых малоамплитудных солитона, движущихся в противоположных направлениях. Хорошо локализованный неподвижный солитон формируется из начального импульса (7) шириной  $d > K$  и высотой  $h = 2 \sin^2(\gamma/2) \geq 0.3$  (см. рис. 3). При значениях  $d \geq 2K$ ,  $h \geq 1$  формирование неподвижного солитона сопровождается образованием одной или более пар малоамплитудных движущихся солитонов. Число движущихся солитонов увеличивается с ростом ширины, либо высоты начального распределения (7). При  $d > 4K$  начальная ступенька (7) порождает комплекс многосолитонных возбуждений.

В конце главы приведены основные результаты.

**Во второй главе** с помощью процедуры «одевания» построены и детально проанализированы нелинейные возбуждения в физически выделенной полосовой доменной структуре двухосного ферромагнетика. Проведен сравнительный анализ физических характеристик новых неподвижных и движущихся солитонов в доменной структуре двухосного и легкоосного ферромагнетиков.

Рассмотрено уравнение Ландау – Лифшица для двухосного ферромагнетика вида:

$$\partial_t \mathbf{S} = [\mathbf{S} \times (\partial_x^2 + J) \mathbf{S}]; \quad \mathbf{S}^2 = 1, \quad J = \text{diag}(J_1, J_2, J_3) = K^{\text{eff}} / (K_3 - K_1). \quad (8)$$

Образец считается бесконечно протяженным вдоль оси  $Ox$ . Намагниченность  $\mathbf{S} = \mathbf{S}(x, t)$ , где  $x$  – пространственная координата,  $t$  – время. Эффективная плотность магнитной анизотропии  $K^{\text{eff}} = \text{diag}(K_1, K_2, K_3)$ ,  $K_1 = \tilde{K}_1 - 4\pi$ ,  $K_{2,3} = \tilde{K}_{2,3}$  объединяет вклады энергии магнитной анизотропии  $\tilde{K}_a = \text{diag}(\tilde{K}_1, \tilde{K}_2, \tilde{K}_3)$  и размагничивающего поля в приближении Винтера. Мы полагаем, что  $K_1 < K_2 < K_3$ , а потому  $J_1 < J_2 < J_3$ .

Модель (8) допускает формирование статичной доменной структуры. В параметризации (4) полосовой доменной структуре с «блеховскими» доменными стенками соответствует следующее решение уравнения (8):

$$\begin{aligned} \Phi &= \nu \pi/2 = \text{const}, \quad \nu = \pm 1; & \theta(\chi) &= \theta_0 = \pi/2 - \text{am}(\chi, k); & (9) \\ \chi &= x\sqrt{J_3 - J_2}/k; & \sin \theta_0 &= \text{cn}(\chi, k), & \cos \theta_0 &= \text{sn}(\chi, k), & \partial_\chi \theta_0 &= -\text{dn}(\chi, k) \end{aligned}$$

(см. рис. 1). Величина  $k$  задает период  $4Kk/\sqrt{J_3 - J_2}$  доменной структуры. Доменные стенки полосовой структуры представляют узкие области шириной  $l_0 = 2K'k/[\pi\sqrt{J_3 - J_2}]$ , в пределах которых вектор намагниченности совершает разворот от одного равновесного положения  $\mathbf{S} = (0, 0, 1)$  к другому  $\mathbf{S} = (0, 0, -1)$ .

В разделе 2.1 приведены формулировка модели (8), а также спектр линейных мод доменной структуры (9). При выборе  $k = \sqrt{J_3 - J_2}$  ( $\chi = x$ ) доменная структура (9) устойчива относительно возбуждения в ней спиновых волн. В отличие от легкоосного ферромагнетика, линейный спектр полосовой структуры двухосного ферромагнетика с периодом  $4K$  имеет две нейтрально устойчивые ветви. Одна из них соответствует активационным (внутридоменным), а вторая – бесщелевым (внутриграничным) колебаниям доменной структуры. Важно, что период  $4K(k)$  структуры фиксируется магнитостатическим взаимодействием. В этом случае солитоны в доменной структуре двухосного ферромагнетика выражаются в терминах хорошо изученных и табулированных эллиптических функций и допускают детальный анализ.

В разделе 2.2 развита процедура «одевания» для интегрирования модели (8) двухосного ферромагнетика на фоне доменной структуры при добавочном условии  $k = \sqrt{J_3 - J_2}$  и граничных условиях:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(x, t) &\rightarrow \mathbf{S}_2^{(0)} = (0, \nu \sin \theta_0, \cos \theta_0), & x &\rightarrow +\infty, \\ \mathbf{S}(x, t) &\rightarrow \mathbf{S}_1^{(0)} = (0, \nu \sin \theta_\Delta, \cos \theta_\Delta), & x &\rightarrow -\infty, \end{aligned} \quad (10)$$

$\theta_\Delta = \pi/2 - \text{am}(\chi + \Delta, k)$ , которые учитывают наличие макроскопического сдвига  $\Delta$  вследствие образования солитонов. Построены точные решения модели, описывающие солитоны в доменной структуре. Найдены интегралы движения – импульс и энергия нелинейных возбуждений. Получено линейное интегральное уравнение для расчета нелинейных диспергирующих волн в отсутствие солитонов.

Энергия нелинейных возбуждений в структуре записывается в виде:

$$H = \int_{-K'}^{K'} [n_1(v) \omega(iv) + n_2(v) \omega(iv + K)] dv + 4 \sum_{s=1}^N \operatorname{Re} \left[ Z(\mu_s) + \frac{\eta_1 \mu_s}{K} \right], \quad (11)$$

где  $\omega(u) = \operatorname{dn}^2(u, k)$ ,  $Z(\mu, k)$  – зета-функция Якоби,  $\eta_1 = \zeta(2K)$  – дзета-функция Вейерштрасса,  $\mu_s$  – нули задачи Римана.

Дискретные слагаемые в спектральном разложении (11) соответствуют вкладам  $N$  солитонов. Интеграл отвечает двум типам спин-волновых мод доменной структуры. Величина  $n_1(v) dv$  ( $n_2(v) dv$ ) дает число «внутридоменных» («внутриграницных») спин-волновых мод со значениями спектрального параметра в интервале от  $v$  до  $v + dv$ . Выражения  $\omega(iv)$ ,  $\omega(iv + K)$  определяют соответствующие частоты колебаний.

В разделе 2.3 проведен детальный анализ прецессионных солитонов в физически выделенной доменной структуре двухосного ферромагнетика. При  $k \sim 1$  солитон в доменной структуре двухосного ферромагнетика наследует многие черты солитона в доменной структуре легкоосного ферромагнетика. В полосовых структурах обоих ферромагнетиков строение ядра солитона определяется величиной  $\Delta = 4\rho$ , где параметр  $0 < \rho < K$ . Допустимая ширина солитонных ядер не превышает периода  $4K(k)$  доменной структуры. При  $\rho < K/2$  размер ядра солитона оказывается меньше длины домена  $L_0 = 2K(k)$ . При  $\rho \geq 0.8K$  размер ядра солитона приближается к размеру домена или превышает его, и пульсации ядра порождают локализованные на солитоне колебания соседних доменных стенок полосовой структуры.

При  $\rho \rightarrow K$  солитонные возбуждения представляют протяженные модуляции и перемагничивания доменной структуры. В легкоосном и двухосном ферромагнетиках они качественно различны. Учет магнитодипольных сил в модели (8) приводит к конечности скорости движения солитонов во всей области их существования в доменной структуре, включая ближайшие окрестности спин-волнового спектра.

В конце главы приведены основные результаты.

**В третьей главе** решена задача аналитического описания нелинейных коллективных возбуждений в полубесконечном ферромагнетике с анизотропией типа «легкая плоскость».

В разделе 3.1 приведена постановка задачи. Возможным нелинейным возбуждениям в полубесконечном ферромагнетике с анизотропией типа «легкая плоскость» (плоскость  $Oxy$ ) соответствуют решения уравнения Ландау – Лифшица:

$$\partial_t \mathbf{m} = [\mathbf{m} \times \partial_z^2 \mathbf{m}] - (\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{m})[\mathbf{m} \times \mathbf{e}_3], \quad \mathbf{m}^2 = 1, \quad 0 \leq z < \infty, \quad (12)$$

с интегрируемыми краевыми условиями:

$$[\mathbf{m} \times (\partial_z \mathbf{m} + \mathbf{e}_1 h)]|_{z=0} = 0, \quad (13)$$

$$\mathbf{m} \rightarrow (1, 0, 0), \quad \partial_z \mathbf{m} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad z \rightarrow +\infty, \quad (14)$$

и начальным распределением намагниченности:  $\mathbf{m}(z, t = 0) = \mathbf{m}_0(z)$ . Здесь  $\mathbf{m}(z, t)$  – безразмерная намагниченность на единицу длины вдоль оси  $Oz$  ( $\mathbf{m}^2 = 1$ );  $z, t$  – пространственные координата и время. Параметр  $h$  представляет эффективное поле однонаправленной поверхностной анизотропии, обусловленное нанесением слоя антиферромагнетика на поверхность ферромагнитного образца. Единичные векторы  $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$  и  $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ , соответственно, задают направления поверхностного поля и оси легкоплоскостной анизотропии. Краевое условие (13) отвечает частичному, либо полному закреплению спинов на границе  $z = 0$  образца. При  $h = 0$  спины на границе полностью свободны, в пределе  $|h| \rightarrow \infty$  – полностью закреплены.

Для интегрирования модели (12)–(14) использован метод обратной задачи рассеяния в совокупности с «методом изображений», который применяется в электростатике при решении краевых задач с определенной пространственной симметрией. Соответствующая процедура изложена в разделе 3.2. С ее помощью построены решения задачи Римана, отвечающие двум возможным типам солитонов в полуограниченном образце – так называемым волнам поворота и бризерам. Установлено, что учет легкоплоскостной анизотропии препятствует формированию неподвижных приграничных солитонов, – все найденные солитоны являются движущимися. Вычислены интегралы движения для солитонов и спиновых волн в системе. Получено сингулярное интегральное уравнение, описывающее нелинейную динамику спиновых волн в отсутствие солитонов.

В разделе 3.3 детально исследовано взаимодействие волн поворота и бризеров с границей легкоплоскостного ферромагнетика. При столкновении с границей образца их ядра сильно деформируются, а затем солитоны отражаются от границы и уходят вглубь образца, принимая форму хорошо изученных солитонных возбуждений: волн 180-градусного поворота намагниченности и пульсирующих солитонов (бризеров) неограниченной среды.

Характер взаимодействия солитонов с границей существенно зависит от величины поверхностного поля  $h$ . В слабых (сильных) полях в момент  $t = t_0$  столкновения волн поворота с границей образца все спины в области их локализации ложатся в плоскость  $Oxz$  ( $Oxy$ ), – распределение намагниченности во всем образце становится неелевским (блоховским). При  $h > 0$  компонента намагниченности  $m_1(z, t_0)$  имеет экстремум в некоторой точке  $z = z_0$  вблизи границы. В точке экстремума происходит полное перемагничивание среды (рис. 4). После отражения от границы волна поворота становится локализована в области шириной  $l_0 = \text{ch}\rho > 1$  и движется

со скоростью  $V = \text{th}\rho$ , где  $\rho > 0$  – вещественный параметр. Фаза  $\delta$  комплексного поля  $m_3 + im_2$  в центре волны поворота в результате отражения сдвигается на величину  $\Delta\delta = 2 \arctg \text{sh}\rho$  при  $|h| < \text{ch}^{-1}\rho$ , а при  $|h| > \text{ch}^{-1}\rho$  – также приобретает добавочный сдвиг на  $\pi$  – по аналогии с изменением фазы световой волны при ее отражении от границы менее или более оптически плотной среды.

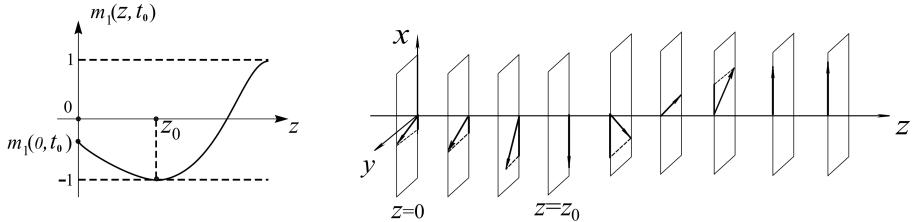


Рисунок 4 — Компонента намагниченности  $m_1(z, t_0)$  волны поворота и распределение спинов в момент времени  $t = t_0$  при значениях поля  $h > 0$ .

В разделе 3.4 показано, что найденные аналитические выражения для солитонов модели (12)–(14) удастся использовать для построения и анализа солитонных возбуждений и в другой модели – полуограниченного хирального ферромагнетика с легкоплоскостной анизотропией (ось анизотропии параллельна вектору Дзялошинского), – благодаря тому, что решения рассмотренных моделей связаны между собой калибровочным преобразованием. Хиральный ферромагнетик имеет выделенное направление закрутки, в связи с чем встроенные в него волны поворота противоположных закруток отличаются по энергии. Столкновения хиральных солитонов с поверхностью образца сопровождаются существенным изменением их внутренней структуры и динамических свойств, а также процессами перемагничивания среды на величину порядка намагниченности насыщения.

В конце главы приведены основные результаты.

**В главе 4** приведены результаты аналитического описания бризеров и комплекса из двух кинков в спиральной магнитной структуре.

В разделе 4.1 рассмотрена бесконечно протяженная (вдоль оси  $Oz$ ) спиральная структура ферромагнетика без центра инверсии с анизотропией типа «легкая плоскость» (плоскость  $Oxy$ ) в постоянном внешнем магнитном поле  $\mathbf{H} = (H, 0, 0)$  ( $H > 0$ ). В условиях преобладающей легкоплоскостной анизотропии и остаточной анизотропии в базисной плоскости распределение намагниченности описывается интегрируемым уравнением sine–Gordon:

$$\partial_t^2 \Phi - \partial_z^2 \Phi + \sin \Phi = 0 \quad (15)$$

относительно угла  $\Phi$ , характеризующего разворот намагниченности в плоскости, перпендикулярной оси магнитной спирали. В безразмерных переменных соответствующая плотность энергии описывается выражением:

$$w = \frac{1}{2} \left[ (\partial_z \Phi)^2 + (\partial_t \Phi)^2 \right] + q \partial_z \Phi + (1 - \cos \Phi), \quad (16)$$

$q = \kappa \sqrt{M_0 / (\alpha H)}$ . Здесь  $M_0$  – номинальная намагниченность,  $\alpha, \kappa > 0$ , – соответственно, постоянные обменного взаимодействия и взаимодействия Дзялошинского. В зависимости от величины  $q$ , минимуму энергии (16) отвечает либо однородное распределение намагниченности  $\Phi = 0 \pmod{2\pi}$ , либо периодическая структура, для которой:

$$\Phi = \varphi_0(\chi) = \pi - 2 \operatorname{am}(\chi, k), \quad \chi \equiv z/k; \quad (17)$$

где  $\operatorname{am}(\chi, k)$  – эллиптическая амплитуда Якоби с модулем  $k$  ( $k^2 \leq 1$ ). Выражение (17) определяет одномерную решетку  $2\pi$ -кинков (перегибов) шириной  $l_0 \sim 2K'/k/\pi$ , разделенных широкими областями – доменами протяженностью  $L_0 = 2Kk \gg l_0$  (рис. 5).

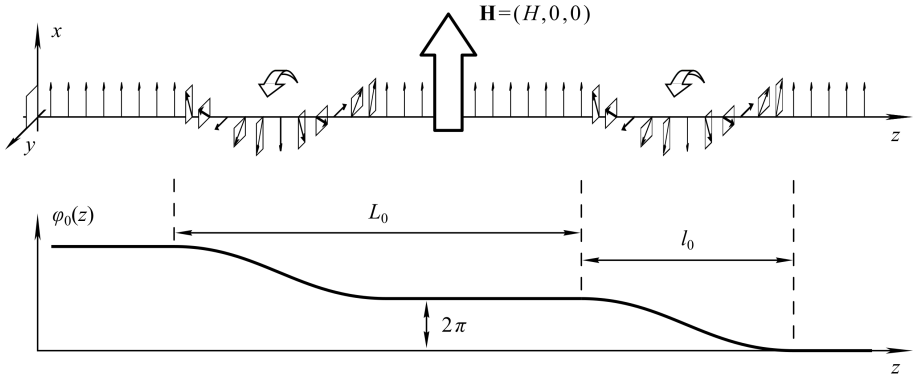


Рисунок 5 — Геликоидальная структура и решетка кинков  $\varphi_0(\chi)$ .

Процедура «одевания» позволяет построить всевозможные солитонные состояния: простейшие добавочные кинки и антикинки и бризеры, а также мультисолитоны в структуре (двухбризерное, двухкинковое возбуждения). Раздел 4.2 посвящен анализу нелинейной динамики комплекса, описывающего взаимодействие двух дополнительных кинков на фоне решетки кинков (17). Соответствующее решение имеет асимптотики:

$$\begin{aligned} \Phi(\chi, t) &\rightarrow \varphi_0(\chi), & z &\rightarrow +\infty, \\ \Phi(\chi, t) &\rightarrow \varphi_0(\chi + \Delta_1 + \Delta_2) + 2\pi(s_1 + s_2), & z &\rightarrow -\infty. \end{aligned} \quad (18)$$

Хиральности (направления закруток) двух кинков задаются параметрами  $s_{1,2}$ , которые независимо могут принимать значения  $\pm 1$ . Наличие кинка с номером  $j = 1, 2$  приводит к макроскопическому сдвигу магнитной спирали  $\Delta_j$ . Дополнительные кинки в структуре не могут быть неподвижны. Их скорости:  $V_j = \varepsilon_j \operatorname{ch}^{-1}(\Delta_j/2)$ ,  $\varepsilon_j = \pm 1$ .

В зависимости от соотношения хиральностей  $s_j$  и фиксированной хиральности  $s_0 = +1$  геликоидальной структуры возможны 9 различных вариантов взаимодействия первого и второго кинков. Каждый из этих случаев проанализирован детально. Среди них выделен случай двух кинков одинаковой хиральности ( $s_1 = s_2 = s_0$ ) как наиболее пригодный для воспроизведения в численном эксперименте.

В разделе 4.3 проведен детальный анализ однобризерного возбуждения. Образование бризера сопровождается макроскопическим сдвигом структуры на величину  $\Delta = 4\rho$ :

$$\begin{aligned} \Phi(\chi, t) &\rightarrow \varphi_0(\chi) && \text{при } z \rightarrow +\infty, \\ \Phi(\chi, t) &\rightarrow \varphi_0(\chi + \Delta) && \text{при } z \rightarrow -\infty. \end{aligned} \quad (19)$$

Решение параметризуется комплексным нулем  $\mu$  задачи Римана,  $\rho = -\operatorname{Re}\mu$ .

При малых  $\rho \leq 0.2K$  неподвижный бризер представляет собой протяженную область малоамплитудных колебаний поля  $\Phi$  около равновесных положений слабо деформированной геликоидальной структуры:

$$\Phi(\chi, t) \simeq \varphi_0(\chi + 2\rho[1 - \operatorname{th}y]) + \frac{4\rho k}{\operatorname{ch}y} \operatorname{sn}\chi \cos\gamma. \quad (20)$$

Здесь  $\gamma = tk^{-1} - \gamma_0$ ,  $y = (1 - EK^{-1})\rho\chi - y_0$ ,  $\gamma_0, y_0$  – вещественные постоянные,  $E$  – полный эллиптический интеграл второго рода. Первое слагаемое в (20) характеризует малую неоднородную трансляцию исходной структуры из-за образования бризера. Второй член описывает слаболокализованные колебания на фоне сдвинутой структуры. Они имеют вид «обрезанной» стоячей малоамплитудной волны. Функция  $\operatorname{sn}\chi$  удовлетворяет уравнению Ламе:

$$[\partial_\chi^2 + k^2(1 - 2\operatorname{sn}^2\chi) + 1] \operatorname{sn}\chi = 0,$$

которое определяет активационную линейную моду с нулевым квазиимпульсом и частотой  $\omega = 1/k$  на фоне геликоидальной структуры.

При  $0.2K < \rho < K$  пульсации неподвижного бризера локализуются в конечной области – в его ядре. Наличие бризера в одном из доменов приводит к его удлинению и вызывает продольные колебания прилегающих к нему доменов и доменных стенок структуры. На рис. 6 сплошной, штриховой и пунктирной линиями отмечены положения бризера в различные моменты времени. В точках  $\chi = -3\rho, -3\rho - 2K, 2K - \rho, 4K - \rho \dots$  имеются выделенные узлы, – в них колебания отсутствуют. Все четные (нечетные)

доменные стенки колеблются в фазе по отношению друг к другу и в противофазе по отношению к нечетным (четным) стенкам. Амплитуда колебаний экспоненциально падает с ростом номера стенки. При  $\rho \rightarrow K$  бризер на рис. 6 делокализуется и превращается в нелинейную стоячую волну, прилегающую к выделенному ядру шириной порядка периода структуры.

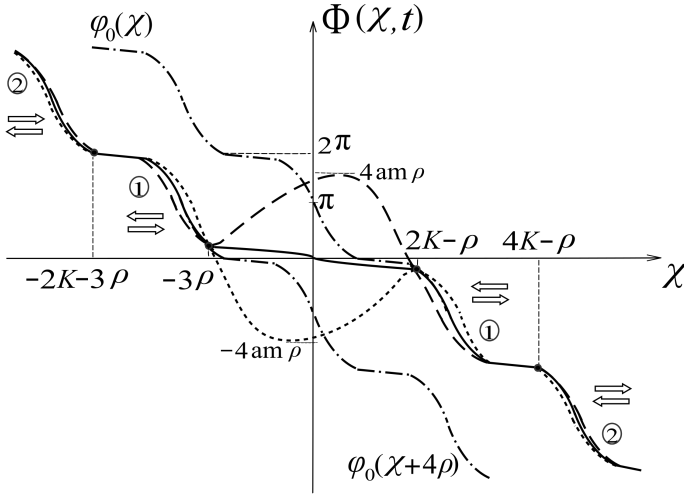


Рисунок 6 — Неподвижный бризер на фоне спиральной структуры. В асимптотике при  $\chi \rightarrow \pm\infty$  бризер выходит на фоновую структуру (19), изображенную штрих-пунктиром. Цифры в кружочках нумеруют доменные стенки.

Строение и свойства движущегося бризера существенно зависят от отношения его поступательной скорости  $V$  и фазовой скорости  $V_{ph} = \omega/p$  ( $p$  и  $\omega$  – волновое число и частота пульсаций бризера). При  $V > V_{ph}$  вызванные наличием бризера продольные деформации геликоидальной структуры происходят медленнее изменений периодических пульсаций намагниченности в его ядре. Это проявляется в том, что к ядру периодически добавляются вытянутые участки сильных квазистатических деформаций структуры, которые возникают альтернативно: либо как «предвестники», либо как «хвосты» движущегося солитона. С дальнейшим ростом скорости  $V$  бризер становится апериодичен, а его «предвестники» и «хвосты» растягиваются до нескольких доменов структуры.

В разделе 4.4 решена задача о поглощении решеткой кинков (17) мощности однородной накачки на стоячих спиновых волнах в решетке при условии, что магнитное поле накачки  $h = h(t)$  направлено вдоль оси  $Oz$  структуры. Установлено, что полоса частот внутренних колебаний неподвижного бризера в геликоидальной структуре находится в щели

дискретных спектра резонансных частот стоячих спиновых волн, что облегчает обнаружение бризера в структуре по поглощению СВЧ-мощности на частоте его внутренних колебаний.

В разделе 4.5 выявлены возможные способы формирования солитонов (движущихся кинков и неподвижных бризеров) в геликоидальной структуре. В численном счете начальное возмущение структуры задавалось в виде протяженного участка со ступенькой  $\Phi = \text{const}$  прямоугольной формы. Определены значения высоты и ширины ступеньки, в пределах которых формируется хорошо различимый неподвижный бризер. Показано, что при дополнительной закрутке части магнитной спирали на  $4\pi$  ступенчатое распределение поля  $\Phi$  шириной  $0 < d = \Delta < 4K$  порождает два движущихся в противоположных направлениях кинка шириной  $\Delta/2$ , хиральность которых совпадает с хиральностью неподвижных кинков геликоидальной структуры.

В разделе 4.6 установлена возможность использования полученных результатов для аналитического исследования солитонов электрической поляризации в циклоидальной структуре мультиферроиков, которые также описываются уравнением sine-Gordon. В мультиферроиках с циклоидальной структурой посредством комбинации электрического и магнитного полей можно создавать условия, благоприятные для наблюдения солитонов, и эффективно управлять возможностями их генерирования. В частности, удлинение домена вследствие наличия в нем ядра бризера можно обнаружить посредством фиксации локальных электрических полей от стенок структуры.

В конце главы приведены основные результаты.

В **Заключении** приведены основные результаты работы.

В Приложении обсуждается техника работы с эллиптическими функциями, используемыми в главах 1, 2 и 4 настоящей диссертации.

## Основные результаты и выводы

1) Получены новые аналитические решения уравнения Ландау – Лифшица для ферромагнетика с анизотропией типа «легкая ось», которые описывают солитоны, сильно связанные с периодической полосовой доменной структурой. Для построения решений приспособлена модификация метода обратной задачи рассеяния – процедура «одевания» частного решения вспомогательной линейной системы дифференциальных уравнений с последующим решением задачи Римана теории функций комплексной переменной. Успешно преодолены две основные трудности рассматриваемой задачи. Первая трудность – принципиальная – состояла в том, что задача Римана формулируется не в комплексной плоскости спектрального параметра задачи рассеяния, как это было при интегрировании уравнения Ландау – Лифшица на однородном фоне, а на двулистной

римановой поверхности, возникновение которой обусловлено наличием периодического основного состояния – доменной структуры. Это препятствие удалось преодолеть униформизацией спектрального параметра в терминах двоякопериодических эллиптических функций Якоби с последующим использованием теории эллиптических функций. Вторая трудность – техническая – была связана с тем, что матричные решения задачи Римана являются не периодическими, а квазипериодическими: при сдвиге пространственной координаты или переносе спектрального параметра задачи из одного параллелограмма периодичности в другой они приобретают дополнительные множители блоховского типа. Эту проблему удалось решить путем подбора комбинаций эллиптических функций, обеспечивающих верные трансформационные свойства решений.

2) Развитая техника интегрирования уравнения Ландау – Лифшица для легкоосного ферромагнетика на нелинейном периодическом фоне успешно использована для построения и анализа нелинейных коллективных возбуждений в более реалистичной модели двухосного ферромагнетика на фоне периодической доменной структуры блоховского типа. В общем случае, метод обратной задачи рассеяния сталкивается с существенными затруднениями в применении к данной модели. Операторы вспомогательной линейной системы сами аналитичны на римановой поверхности, отличной от той, которая вызвана наличием доменной структуры. В работах диссертации интегрирование модели проведено для выделенного случая доменной структуры, риманова поверхность которой конгруэнтна римановой поверхности операторов вспомогательной линейной системы. Это позволило построить новые солитонные решения модели в терминах хорошо изученных эллиптических функций.

3) Получены новые точные решения уравнения Ландау – Лифшица для ферромагнетика с анизотропией типа «легкая плоскость», которые описывают отражение солитонных возбуждений от границы ферромагнетика при краевых условиях, отвечающих произвольной степени закрепления спинов на границе. Для решения этой задачи использована модификация метода обратной задачи рассеяния в совокупности с методом изображений, применяемым в электростатике. В контексте метода изображений, поле намагниченности, заданное на полуоси (в полубесконечном образце) четным образом продолжается на всю ось. Это ведет к видоизменению схемы обратной задачи. Задача Римана приобретает новые редукции, а число нулей задачи Римана удваивается. Это связано с тем, что каждая группа нулей задачи Римана отвечает не только за действительный солитон, присутствующий в образце, но и за фиктивный «солитон изображения», который с математической точки зрения расположен зеркально симметрично по отношению к границе образца, но по другую сторону от границы. Используемая схема позволила получить полное решение задачи

и впервые провести аналитическое описание взаимодействия солитонов с границей легкоплоскостного ферромагнетика.

4) Представлен полный анализ неподвижных и движущихся прецессионных солитонов в полосовой доменной структуре легкоосного ферромагнетика. Движущиеся солитоны служат элементарными переносчиками макроскопических трансляций структуры, которые могут быть зафиксированы методами магнитооптики. Неподвижные солитоны делятся на два типа. Оба они представляют обобщение солитонов на фоне однородного основного состояния среды. Отличие первого неподвижного солитона состоит в том, что фазы вращения намагниченности правее и левее его центра различаются на  $\pi$ . Ядро солитона периодически меняет свой размер. Его колебания передаются соседним доменам, вызывая их синфазные смещения. В центре второго неподвижного солитона намагниченность никогда не достигает насыщения. Частота его прецессии конечна, а размер ядра всегда удовлетворяет континуальному приближению. Эллиптичность и неоднородность прецессии намагниченности в ядре солитона приводит к колебаниям доменных стенок структуры. Несмотря на сложность решения, характер таких колебаний удалось проанализировать детально. Вдали от центра солитона имеются выделенные точки – узлы, в которых колебания отсутствуют. Положения узлов найдены аналитически, соседние узлы по обе стороны от центра отстоят друг от друга на полпериода структуры. Части доменов, расположенные между соседними узлами, периодически смещаются вдоль структуры, причем направления смещений соседних доменов противоположны друг другу. Возможность формирования такого солитона в структуре подтверждена численным экспериментом.

5) Исследовано поведение солитонов в доменной структуре легкоосного ферромагнетика вблизи границ области их существования. В областях неустойчивости структуры по линейному приближению солитоны превращаются в протяженные модуляции структуры, которые движутся с большой скоростью. Среди них найдено два выделенных случая, когда модуляции структуры остаются неподвижны. В обоих случаях солитоны вырождаются в аperiodические слабо локализованные эллиптически-полиномиальные возбуждения. Их поведение специфично. В первом из них намагниченность на протяжении двух центральных доменов не меняется со временем, однако, удаленные от центра доменные стенки с четными номерами с течением времени сдвигаются по направлению к центру возбуждения, а затем возвращаются в исходные положения. В ядре второго возбуждения намагниченность меняется интенсивно: продольные смещения областей доменной структуры сопровождаются разворотом намагниченности на  $360$  градусов в плоскости, перпендикулярной оси анизотропии. Конец вектора намагниченности движется по сердцевидной траектории с выколотой угловой точкой, которой соответствуют бесконечно удаленные моменты времени. Изменения намагниченности в ядре

передаются прилегающим к нему областям структуры, которые притягиваются к ядру, а затем отталкиваются обратно. Рассмотренные слабо локализованные состояния служат аналогами «солитонов Перегринна» на модуляционно неустойчивом фоне, которые наблюдаются в оптоволокне экспериментально.

6) Представлен полный анализ неподвижных и движущихся прецессионных солитонов в физически выделенной доменной структуре двухосного ферромагнетика и сравнительный анализ солитонов двухосного ферромагнетика с солитонами легкоосного ферромагнетика в доменной структуре, а также двухосного ферромагнетика на фоне однородного основного состояния среды. Показано, что наличие двухосной анизотропии слабо сказывается на свойствах неподвижных солитонов: их строение и качественные особенности остаются теми же, что и в доменной структуре легкоосного ферромагнетика. В обоих случаях наличие солитонов приводит к макроскопическому сдвигу структуры, а допустимая ширина ядер солитонов не превышает периода структуры. Установлены возможности формирования в доменной структуре двухосного ферромагнетика внутридоменных солитонов, а также солитонных возбуждений, которые можно трактовать как зародыши перемагничивания материала. Изучены особенности поведения солитонов вблизи границы спектра бесщелевых мод доменной структуры. Тогда солитоны преобразуются в аperiodические протяженные модуляции структуры – аналоги «солитонов Перегринна». В отличие от случая легкоосного ферромагнетика, такие модуляции, хотя и имеют большую амплитуду, но сохраняют конечную скорость. Рассмотрены два особых случая, когда модуляции структуры становятся неподвижны. Установлено, что они отличаются от таковых в случае легкоосного ферромагнетика траекторией, описываемой вектором намагниченности в их центрах и характером смещений прилегающих к центру доменных стенок. Найдены спектральные разложения импульса и энергии локализованных возбуждений доменной структуры двухосного ферромагнетика, учитывающие вклады солитонов и спиновых волн. Анализ нелинейной динамики диспергирующих спиновых волн в доменной структуре сведен к решению линейного интегрального уравнения.

7) Проведен детальный анализ взаимодействия солитонов с границей полубесконечного ферромагнетика с анизотропией типа «легкая плоскость». Показано, что солитоны в полубесконечном ферромагнетике делятся на два типа: волны поворота намагниченности и солитоны, имеющие собственную частоту пульсаций – бризеры. Оба типа солитонов могут быть только движущимися, – наличие легкоплоскостной анизотропии исключает формирование вблизи границы образца неподвижных солитонов. Вдали от границы образца солитоны (волны поворота и бризеры) приобретают форму, характерную для локализованных возбуждений неограниченной среды. Характер взаимодействия волн поворота

с границей существенно определяется величиной эффективного поля однонаправленной поверхностной анизотропии, определяющего степень закрепления спинов на границе. В зависимости от соотношения величины поверхностного поля и физических параметров волны поворота, при столкновении с границей образца распределение спинов в ней становится блоховским, либо неелевским. При положительных значениях поля разворот намагниченности в момент столкновения сопровождается частичным перемагничиванием среды вблизи границы. Выявлена аналогия между отражением волны поворота от границы легкоплоскостного ферромагнетика в случаях слабого и сильного поверхностных полей и отражением света от границы менее или более оптически плотной среды: а именно, в сильном поле намагниченность в центре волны поворота приобретает дополнительный разворот на  $\pi$ . Установлено, что при взаимодействии бризеров с границей образца их ядра сильно деформируются, а в случае сильно закрепленных спинов намагниченность вблизи границы за время взаимодействия меняется на величину порядка намагниченности насыщения. Вычислены интегралы движения, гарантирующие стабильность солитонов и выполнение ими верных краевых условий при взаимодействии с границей образца. Получено сингулярное интегральное уравнение для описания нелинейной динамики спиновых волн в полубесконечном образце в отсутствие солитонов.

8) Полученные явные решения модели Ландау – Лифшица для полубесконечного легкоплоскостного ферромагнетика использованы для аналитического описания нелинейных возмущений в полубезграничном хиральном ферромагнетике с легкоплоскостной анизотропией при краевых условиях, соответствующих полному, либо частичному закреплению магнитной спирали на границе поверхностным полем. Обе модели связаны калибровочным преобразованием, что позволяет воспроизвести солитонные решения одной модели, исходя из уже найденных солитонов другой модели. Показано, что хиральные солитоны наследуют основные динамические свойства солитонов легкоплоскостного ферромагнетика. Формирование локализованных вблизи границы образца неподвижных хиральных солитонов, как и в случае легкоплоскостного ферромагнетика, оказывается невозможным.

9) Представлен анализ комплекса из двух кинков, встроенных в одномерную решетку доменных стенок ( $2\pi$ -кинков) геликоидальной магнитной структуры без центра инверсии в рамках модели sine-Gordon. Движущиеся кинки в структуре могут обладать произвольными направлениями закрутки (хиральностями). Соотношение хиральностей кинков определяет характер их взаимодействия при столкновении. В ходе анализа поочередно описан каждый из 9-и возможных вариантов сочетания хиральностей кинков основного состояния (решетки кинков) и движущихся кинков,

добавленных в решетку. Исследованы возможности возбуждения двух кинков в структуре из локализованного начального возмущения. Наиболее пригодным для этой цели оказалось возмущение, полученное закруткой части спирали на угол  $4\pi$ , кратный периоду спирали, и дополнительным удлинением одного из ее доменов. Численное моделирование подтвердило, что из полученного таким образом начального условия формируются два движущихся в противоположных направлениях одинаковых кинка той же хиральности, что и кинки структуры.

10) Исследованы строение и свойства движущегося бризера в геликоидальной структуре. Показано, что характер его взаимодействия со структурой определяется соотношением скорости движения бризера как целого и фазовой скорости пульсаций в его ядре. Когда поступательная скорость движения бризера превышает фазовую, его ядро сохраняет фиксированный размер, в то время как полная ширина бризера периодически меняется от размеров ядра до нескольких периодов структуры. В системе отсчета, связанной с движущимся бризером, к его ядру периодически добавляются вытянутые участки квазистатических деформаций структуры – «хвосты» и «предвестники» движущегося солитона. Вблизи границ своей области существования бризер превращается в аperiodическую модуляцию структуры. При этом протяженность его «хвостов» и «предвестников» неограниченно возрастает.

11) Детально исследованы строение и свойства неподвижного бризера в геликоидальной магнитной структуре. Наличие солитонов приводит к макроскопическому сдвигу структуры. Ядро неподвижного бризера отодвигает от себя ближайшие к нему  $2\pi$ -кинки и колеблется в пределах протяженного домена, ширина которого может достигать двух периодов структуры. Колебания ядра бризера приводят к смещениям прилегающих к нему доменных стенок вдоль оси магнитной спирали. Соседние доменные стенки смещаются в противофазе по отношению друг к другу. Характер этих смещений таков, что домены структуры оказываются поделены на равные участки. На границах этих участков образуются узловые точки, в которых колебания структуры отсутствуют. Положения узлов найдены аналитически, расстояние между соседними узлами по обе стороны от ядра бризера равно периоду структуры. Неподвижный бризер с указанным строением получен численным моделированием. Для его формирования намагниченность в пределах одного из доменов была локально закручена на постоянный угол, а сам домен был удлинён для учета макроскопического сдвига структуры, сопутствующего образованию бризера.

12) Решена задача о поглощении мощности продольной внешней накачки на частотах стоячих спиновых волн в геликоидальной структуре при наличии постоянного внешнего поля, перпендикулярного оси магнитной спирали. Показано, что диапазон частот пульсаций неподвижных бризеров

лежит в щели спектра стоячих спиновых волн, что облегчает его обнаружение в структуре.

Отметим, что ввиду универсальности модели sine-Gordon, результаты 9)-11) подходят для описания не только магнитных солитонов в геликоидальной структуре, но и солитонов электрической поляризации в циклоидальной структуре мультиферроиков.

## Публикации автора по теме диссертации

- A1. *Киселев, В. В.* Солитоны в доменной структуре ферромагнетика / В. В. Киселев, А. А. Расковалов // Теоретическая и математическая физика. — 2018. — Т. 197, № 1. — С. 89–107.
- A2. *Borisov, A. B.* Precessing solitons in the stripe domain structure / A. B. Borisov, V. V. Kiselev, A. A. Raskovalov // Low Temperature Physics. — 2018. — Vol. 44, no. 8. — P. 765–774.
- A3. *Киселев, В. В.* Локализованные нелинейные возбуждения доменной структуры ферромагнетика / В. В. Киселев, А. А. Расковалов // Физика металлов и металловедение. — 2019. — Т. 120, № 2. — С. 115–129.
- A4. *Kiselev, V. V.* Solitons in the stripe domain structure of an easy-axis ferromagnet / V. V. Kiselev, A. A. Raskovalov // Chaos, Solitons and Fractals. — 2019. — Vol. 127. — P. 302–311.
- A5. *Баталов, С. В.* Генерирование солитонов в доменной структуре ферромагнетика / С. В. Баталов, В. В. Киселев, А. А. Расковалов // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2019. — Т. 59, № 8. — С. 117–126.
- A6. *Расковалов, А. А.* Резонансное взаимодействие бризеров в системе Манакова / А. А. Расковалов, А. А. Гелаш // Теоретическая и математическая физика. — 2022. — Т. 213, № 3. — С. 418–436.
- A7. *Киселев, В. В.* Нелинейная динамика квазиодномерной спиральной структуры / В. В. Киселев, А. А. Расковалов // Теоретическая и математическая физика. — 2012. — Т. 173, № 2. — С. 268–292.
- A8. *Kiselev, V. V.* Solitons and nonlinear waves in the spiral magnetic structures / V. V. Kiselev, A. A. Raskovalov // Chaos, Solitons and Fractals. — 2016. — Vol. 84. — P. 88–103.
- A9. *Киселев, В. В.* Нелинейные коллективные возбуждения в геликоидальных магнитных структурах / В. В. Киселев, А. А. Расковалов // Физика металлов и металловедение. — 2012. — Т. 113, № 12. — С. 1180–1192.

- A10. *Kiselev, V. V. Solitons in the domain structure of a two-axis ferromagnet / V. V. Kiselev, A. A. Raskovalov // Chaos, Solitons and Fractals. — 2020. — Vol. 135. — P. 109803.*
- A11. *Kiselev, V. V. Soliton dynamics in the domain structure of a biaxial ferromagnet / V. V. Kiselev, A. A. Raskovalov // Low Temperature Physics. — 2020. — Vol. 46, no. 11. — 1098 (1—10).*
- A12. *Киселев, В. В. Нелинейная динамика бризеров в спиральных структурах магнетиков / В. В. Киселев, А. А. Расковалов // Журнал экспериментальной и теоретической физики. — 2016. — Т. 149, № 6. — С. 1260—1269.*
- A13. *Киселев, В. В. Солитоны в полубесконечном ферромагнетике с анизотропией типа «легкая плоскость» / В. В. Киселев, А. А. Расковалов // Известия РАН. Серия физическая. — 2024. — Т. 88, № 9. — С. 36—41.*
- A14. *Kiselev, V. V. Nonlinear dynamics of the semi-infinite ferromagnetic samples with an easy-plane anisotropy / V. V. Kiselev, A. A. Raskovalov // Chaos, Solitons and Fractals. — 2024. — Vol. 188. — P. 115500.*
- A15. *Kiselev, V. V. Solitons in the semi-infinite ferromagnets with the different types of anisotropy / V. V. Kiselev, A. A. Raskovalov // Annals of Physics. — 2025. — Vol. 475. — P. 169933.*
- A16. *Киселев, В. В. Нелинейная динамика полубесконечного ферромагнетика с геликоидальной структурой / В. В. Киселев, А. А. Расковалов // Физика твердого тела. — 2024. — Т. 66, № 10. — С. 1742—1753.*
- A17. *Kiselev, V. V. Twokink excitation in a spiral magnetic structure / V. V. Kiselev, A. A. Raskovalov // Low Temperature Physics. — 2016. — Vol. 42, no. 1. — P. 50—56.*
- A18. *Киселев, В. В. Нелинейная динамика квазиодномерной спиральной структуры / В. В. Киселев, А. А. Расковалов // Известия РАН. Серия физическая. — 2014. — Т. 78, № 2. — С. 151—154.*
- A19. *Киселев, В. В. Аналитическое описание солитонов и волн на фоне квазиодномерной магнитной спирали / В. В. Киселев, А. А. Расковалов // Фундаментальные проблемы современного материаловедения. — 2016. — Т. 13. — С. 19—31.*
- A20. *Киселев, В. В. Стоячие спиновые волны и солитоны в квазиодномерной спиральной структуре / В. В. Киселев, А. А. Расковалов // Журнал экспериментальной и теоретической физики. — 2013. — Т. 143, № 2. — С. 313—321.*

- A21. *Киселев, В. В.* Солитоны электрической поляризации в мультиферроиках / В. В. Киселев, А. А. Расковалов // Физика твердого тела. — 2016. — Т. 58, № 3. — С. 485—490.

## Список литературы

1. Formation of a magnetic soliton lattice in copper metaborate / D. Roessli, J. Schefer, G. A. Petrakovskii, B. Ouladdiaf, M. Boehm, U. Staub, A. Vorotinov, L. Bezmaternikh // Phys. Rev. Lett. — 2001. — Vol. 86. — P. 1885—1888.
2. Field-induced commensurate-incommensurate phase transition in a Dzyaloshinskii – Moriya spiral antiferromagnet / A. Zheludev, S. Maslov, G. Shirane, Y. Sasago, N. Koide, K. Uchinokura // Phys. Rev. Lett. — 1997. — Vol. 78, no. 25. — P. 4857—4860.
3. An approach to chiral magnets using  $\alpha$ -hydroxycarboxylates / A. Beghidja, G. Rogez, A. Rabu, R. Welter, M. Drillon // J. Mater. Chem. — 2006. — Vol. 16, no. 26. — P. 2715—2728.
4. *Kishine, J.* Synthesis, structure and magnetic properties of chiral molecule-based magnets / J. Kishine, K. Inoue, Y. Yoshida // Progr. Theor. Phys. Supplement. — 2005. — Vol. 159. — P. 82—85.
5. Magnetism: molecules to materials. V / Edited by J. S. Miller and M. Drillon. — Weinheim : Wiley – VCH Verlag GmbH, Co. KGaA, 2005. — 395 p.
6. *Туров, Е. А.* Физические свойства магнитоупорядоченных кристаллов / Е. А. Туров. — Москва : Издательство АН СССР, 1963. — 224 с.
7. *Ахиезер, А. И.* Спиновые волны / А. И. Ахиезер, В. Г. Барьяхтар, С. В. Пелетминский. — Москва : Наука, 1967. — 368 с.
8. Симметрия и физические свойства антиферромагнетиков / Е. А. Туров, А. В. Колчанов, В. В. Меньшенин, И. Ф. Мирсаев, В. В. Николаев. — Москва : Физматлит, 2001. — 560 с.
9. *Борисов, А. Б.* Квазиодномерные магнитные солитоны / А. Б. Борисов, В. В. Киселев. — Москва : Физматлит, 2014. — 520 с.
10. Fast micromagnetic simulations on GPU – recent advances made with mumax3 / J. Leliaert, M. Dvornik, J. Mulkers, J. de Clercq, M. V. Milosevic, B. van Waeyenberge // J. Phys. D.: Appl. Phys. — 2018. — Vol. 51. — P. 123002.
11. *Leliaert, J.* Tomorrow’s micromagnetic simulations / J. Leliaert, J. Mulkers // J. Appl. Phys. — 2019. — Vol. 125. — P. 180901.

12. *Косевич, А. М.* Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны / А. М. Косевич, Б. А. Иванов, А. С. Ковалев. — Киев : Наукова думка, 1983. — 192 с.
13. *Захаров, В. Е.* Схема интегрирования нелинейных эволюционных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния. I / В. Е. Захаров, А. Б. Шабат // Функциональный анализ и его приложения. — 1974. — Т. 8, № 3. — С. 43–53.
14. *Абловитц, М.* Солитоны и метод обратной задачи рассеяния / М. Абловитц, Х. Сигур. — Москва : Мир, 1987. — 479 с.
15. Солитоны и нелинейные волновые уравнения / Р. Додд, Д. Эйлбек, Д. Гиббон, Х. Моррис. — Москва : Мир, 1988. — 694 с.
16. Теория солитонов: Метод обратной задачи / В. Е. Захаров, С. В. Маннаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский. — Москва : Наука, 1980. — 320 с.
17. *Хирота, Р.* Прямые методы в теории солитонов. — В кн.: Солитоны — под ред. Р. Буллафа, Ф. Кодри / Р. Хирота. — Москва : Мир, 1983. — 408 с.

*Расковалов Антон Александрович*

Нелинейные возбуждения в магнетиках со спиральной и полосовой доменной структурой

Автореф. дис. на соискание ученой степени докт. физ.-мат. наук

Подписано в печать \_\_\_\_\_.\_\_\_\_\_.\_\_\_\_\_. Заказ № \_\_\_\_\_

Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз.

Типография \_\_\_\_\_

