

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«Башкирский государственный педагогический университет
им. М.Акмиллы»**

на правах рукописи

КАРИМОВ РАМИС ХАМИТОВИЧ

**ЭФФЕКТ САНЬЯКА В ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ ВРАЩАЮЩИХСЯ
ЧЕРНЫХ ДЫР**

Специальность 01.04.02 (1.3.3) — теоретическая физика

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
PhD, профессор
Нанди Камал Канти

Уфа – 2021

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
Глава 1. ЛИТЕРАТУРНЫЙ ОБЗОР	12
1.1. Эффект Саньяка	12
1.2. Эффект Саньяка в пространстве-времени Керра	17
1.2.1. Задержка Саньяка для негеодезических круговых экваториальных орбит	17
1.2.2. Задержка Саньяка для геодезических круговых экваториальных орбит	22
1.3. Наблюдаемые эксперименты эффекта Саньяка	23
1.3.1. Эксперимент Хафеле и Киттинга.....	23
1.3.2. Эксперимент Аллана, Вейса и Эшби.....	26
1.3.3. Метод двухсторонней передачи сигналов времени и частоты через спутники	28
Глава 2. ЭФФЕКТ САНЬЯКА В ОТО	32
2.1. Эффект Саньяка в пространстве-времени Керра-де Ситтера.	32
2.1.1. Задержка времени в пространстве-времени Минковского.....	32
2.1.2. Метрика Керра-де Ситтера	34
2.1.3. Задержка Саньяка для негеодезических круговых экваториальных орбит	35
2.1.5. Задержка Саньяка для геодезических круговых экваториальных орбит	38
2.1.6. Проверка эффекта Саньяка на соответствие принципу Маха	40
2.2. Эффект Саньяка в пространстве-времени Керра-Тауб-НУТ	42
2.2.1. Метрика Керра-Тауб-НУТ.....	43
2.2.2. Задержка Саньяка для негеодезических круговых экваториальных орбит	44
2.2.3. Задержка Саньяка для геодезических круговых экваториальных орбит	47
2.2.4. Применение эффекта Саньяка для ограничения заряда НУТ.....	49
2.3. Эффект Саньяка в пространстве-времени Йохансена-Псалтиса	54
2.3.1. Решение Йохансена-Псалтиса	56
2.3.2. Задержка Саньяка для негеодезических круговых экваториальных орбит	57
2.3.3. Задержка Саньяка для геодезических круговых экваториальных орбит	60
2.3.4. Применение эффекта Саньяка для ограничения параметра отклонения метрики Йохансена-Псалтиса	61
2.4. Эффект Саньяка в пространстве-времени Айон-Беато-Гарсия	62
2.4.1. Метрика Айон-Беато-Гарсия.....	63
2.4.2. Задержка Саньяка для негеодезических круговых экваториальных орбит	64
2.4.3. Задержка Саньяка для геодезических круговых экваториальных орбит	66
2.4.4. Применение эффекта Саньяка для ограничения нелинейного электрического заряда.....	67
2.5. Эффект Саньяка в пространстве-времени Бардина.....	68

2.5.1. Пространство-время черной дыры Бардина	68
2.5.2. Задержка Саньяка для негеодезических круговых экваториальных орбит	69
2.5.3. Задержка Саньяка для геодезических круговых экваториальных орбит	70
2.5.4. Численные оценки задержки Саньяка в пространстве-времени Бардина для Земли и Солнца	71
2.6. Выводы по главе	73
Глава 3. ЭФФЕКТ САНЬЯКА В ТЕОРИИ $f(\mathbf{R})$ -ГРАВИТАЦИИ	76
3.1. Теория $f(\mathbf{R})$ -гравитации	76
3.1. Решение Керра в теории $f(\mathbf{R})$ -гравитации	77
3.2. Задержка Саньяка для негеодезических круговых экваториальных орбит	79
3.3. Задержка Саньяка для геодезических круговых экваториальных орбит	82
3.4. Применение эффекта Саньяка для ограничения скаляра кривизны Риччи	83
3.5. Применение эффекта Саньяка к некоторым моделям $f(\mathbf{R})$ -гравитации	86
3.6. Выводы по главе	90
Глава 4. ЭФФЕКТ САНЬЯКА В СКАЛЯР-ТЕНЗОР-ВЕКТОРНОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ ..	92
4.1. Теория СТВГ	92
4.1. Решение Керра в теории СТВГ	93
4.2. Задержка Саньяка для негеодезических круговых экваториальных орбит	93
4.3. Задержка Саньяка для геодезических круговых экваториальных орбит	96
4.4. Применение эффекта Саньяка для ограничения параметра СТВГ	97
4.5. Выводы по главе	99
Глава 5. ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ЗАДЕРЖКА ВРЕМЕНИ В ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ КЕРРА-СЕНА	100
5.1. Пространство-время черной дыры Керра-Сена	103
5.2. Относительная задержка времени	105
5.3. Приближение тонкой линзы	107
5.4. Увеличение изображения и относительная задержка времени	112
5.5. Увеличение изображения и относительная задержка времени	115
5.5.1. Двойная система пульсар-черная дыра Лебедь X-1	115
5.5.2. Двойная система пульсар-черная дыра Стрелец A*	116
5.6. Выводы по главе	117
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	120
СПИСОК ОСНОВНЫХ ПУБЛИКАЦИЙ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ	122
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	125

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования и степень её разработанности. Эффект Саньяка [1,2], названный в честь первооткрывателя Жоржа Саньяка, является одним из фундаментальных открытий в физике, связанных с вращением. Эффект является наблюдаемым в лабораторных условиях и экспериментально подтверждается в масштабах Земли.

Эффект Саньяка может быть описан следующим образом. Пусть вокруг вращающегося объекта движется источник/приемник света (т.е. источник и приемник находятся в одной точке). Пучок света, разделенный на два в источнике/приемнике, следует по одному и тому же замкнутому пути вдоль обода в противоположных направлениях до момента их схождения в источнике/приемнике. Если диск не вращается, то пучки света одновременно прибывают к источнику/приемнику, и, следовательно, появляется интерференционная полоса. Если диск вращается с некоторой угловой скоростью, время прихода к источнику/приемнику будет разным для сонаправленного и противоположно-направленного пучков света: задержка будет больше в первом случае и меньше во втором. Получившаяся разница во времени называется эффектом Саньяка. Далее будет показано, что выражение для разности времен прохождения двух пучков света, полученное из СТО, не содержит ни вклада массы, ни энергии частиц. Таким образом, эффект Саньяка, является свойством самой геометрии пространства-времени и не зависит от физической природы интерферирующих пучков, то есть его можно рассматривать как «универсальный» эффект.

Проводимое в работе исследование расширяет применимость эффекта Саньяка далеко за пределы лабораторных масштабов и охватывает несколько важнейших решений модифицированных теорий и ОТО.

На сегодняшний день эффект Саньяка имеет множество применений. Современные Глобальные навигационные спутниковые системы (ГНСС), такие как GPS и ГЛОНАС, являются примером использования эффекта Саньяка, так как

для функционирования этих систем обязателен учет вращения при синхронизации часов с помощью радиосигналов. Это свойство было использовано Алланом, Вейсом и Эшби для получения более точных измерений задержки Саньяка [3]. Еще более точные измерения были получены методом двухсторонней передачи сигналов частоты и времени (ДПСЧВ) через ГНСС [4-8]. Аштекар и Магنون рассматривали эффект Саньяка в ОТО как гравитационный аналог эффекта Ааронова-Бома в электродинамике [9]. Тарталья рассчитал поправки к задержке, зависящие от массы и вращения, в метрике черной дыры Керра [10]. Также некоторые работы были сделаны для различных решений теории гравитации, например, для метрики Керра-Сена, вытекающей из теории струн [11] и теории Бранса-Дикке [12].

Одним из интересных решений ОТО Эйнштейна является решение Керра-Тауб-НУТ [13-17]. Помимо массы и параметра вращения, эта метрика дополнительно содержит заряд НУТ или гравитомагнитный монополь. Более подробный физический смысл заряда НУТ был рассмотрен в работе [17]. Кроме того, существует несколько решений с вращением принадлежащих модифицированным теориям гравитации, таких как скаляр-тензор-векторной гравитации (СТВГ) [18-25] и $f(R)$ -теории гравитации [26,32-34], где $f(R)$ является функцией скаляра Риччи, удовлетворяющей определенным условиям (условие Долгова-Кавасаки [35]). Каждая из рассматриваемых модифицированных теорий гравитации возникла из необходимости объяснения одного или более аспектов физических наблюдений, которые не могут быть удовлетворительно объяснены в рамках ОТО. Одним из таких наблюдений являются плоские кривые вращения, наблюдаемые в области гало спиральных галактик [19]. Для ОТО необходимо гипотетически огромное количество невидимой темной материи, которая, в свою очередь, не подтверждена ни одним независимым исследованием [36-39]. Схожим образом, $f(R)$ -теории предложены для объяснения сценария космологической инфляции и ускоренного расширения Вселенной [26]. Эти две категории модифицированной гравитации, СТВГ и $f(R)$, допускают решения с вращением, которые сводятся к решению Керра в ОТО при обнулении дополнительных

параметров. Все эти решения рассматриваются в данной работе как самосогласованные, они характеризуются набором параметров, исключая массу и вращение, однако попытка ограничить их экспериментальным путем практически отсутствует в литературе. Актуальность данного исследования подтверждается тем, что ограничение параметров вращающихся решений с использованием экспериментальных данных по эффекту Саньяка, ранее в литературе не проводилось.

Задержка Саньяка по существу измеряет вращение объектов, описываемых соответствующими решениями, в которых задержка вызвана эффектом увлечения инерциальных систем отсчета. В то же время новый эффект, называемый эффектом относительной задержки времени [27], также проверяет увлечение инерциальных систем отсчета. Хотя оба эффекта связаны с вращением, их природа совершенно различна. Поэтому в данной работе эти эффекты будут рассмотрены по отдельности.

Относительная задержка времени является новым потенциальным диагностическим инструментом для теорий гравитации, до сих пор слабо исследованным в литературе. Эффект можно описать следующим образом. Рассмотрим двойную систему, в которой переменный источник света вращается вокруг вращающегося компактного объекта (линзы). Предположим, что два световых луча исходят из-за вращающейся линзы, проходят по обе стороны от нее, чтобы достичь наблюдателя, скажем, на Земле. Пучки света достигнут наблюдателя в разное время, тогда разница во времени прибытия, вызванная эффектом увлечения инерциальных систем отсчета из-за промежуточной вращающейся линзы, называется относительной задержкой. Увлечение инерциальных систем отсчета приводит к тому, что длина светового пути по обе стороны от линзы будет отличаться: короче на стороне вращения и длиннее на стороне встречного вращения. Относительную задержку времени можно рассматривать как астрофизический аналог квантового эффекта Ааронова-Бома [28], хотя эта аналогия не слишком точна, поскольку световые лучи в любом случае проходят через слабое гравитационное поле, а не в вакууме. Отметим, что

относительная задержка времени полностью отличается от хорошо известной гравитационной временной задержки Шапиро [29]. В работе исследована относительная задержка времени в случае астрофизических двойных систем типа пульсар-черная дыра [30], таких как пульсар-Лебедь X-1 и пульсар-Стрелец A*, предполагая, что черная дыра Керра-Сена [31] является компаньоном вращающейся линзы.

Двойные системы представляют собой хорошую лабораторию для проверки предсказаний задержки времени. В подобных системах относительная задержка времени рассматривается до третьего порядка пост-постньютоновского разложения в приближении тонкой линзы. В работе также разработано обобщение формул для расчета относительной задержки времени, применяемых к экспериментально приемлемым масштабам линз с конечным расстоянием. Численные оценки, рассчитанные в работе для двух типичных линз двойных систем, показывают, что относительная задержка времени находится на уровне микросекунд в нулевом порядке, что согласуется с предсказаниями в литературе [27,30].

Цель работы состоит в исследовании эффекта Саньяка в пространстве-времени вращающихся черных дыр в случае геодезического и негеодезического движения источника/приемника света и ограничении свободных параметров некоторых решений ОТО и модифицированных теорий гравитации используя экспериментальные данные по эффекту Саньяка.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Исследовать влияние космологической константы на задержку Саньяка в пространстве-времени Керра-де Ситтера для геодезических и негеодезических орбит источника/приемника света и их соответствие принципу Маха.
2. Получить выражения для задержки Саньяка в пространстве-времени Керра-Тауб-НУТ для геодезических и негеодезических круговых орбит источника/приемника света и вычислить верхний предел заряда НУТ.

3. Получить выражения для задержки Саньяка в пространстве-времени Керра- $f(\mathbf{R})$ для геодезических и негеодезических круговых орбит источника/приемника света и получить ограничения скаляра Риччи \mathbf{R} для некоторых моделей $f(\mathbf{R})$ -гравитации.

4. Получить выражения для задержки Саньяка в пространстве-времени Керра-СТВГ для геодезических и негеодезических круговых орбит источника/приемника света и вычислить верхний предел параметра СТВГ.

5. Обобщить формулы для расчета относительной задержки времени, вызванной увлечением инерциальных систем отсчета, и применить для расчета относительной задержки времени в двойной системе с черной дырой, описываемой решением Керра-Сена.

Научная новизна работы.

1. Впервые получено выражение для задержки Саньяка в пространстве-времени вращающихся черных дыр, описываемых решениями Керра-де Ситтера, Керра-Тауб-НУТ, Йохансена-Псалтиса, Айон-Беато-Гарсия, Бардина, Керра- $f(\mathbf{R})$ и Керра-СТВГ для геодезических и негеодезических круговых орбит источника/приемника света.

2. Для ограничения заряда НУТ использовались данные эксперимента Алана, Вейса и Эшби (АВЭ) для негеодезического движения источника/приемника света и данные эксперимента по измерению задержки Саньяка методом ДПСВЧ для геодезического движения.

3. Получено ограничение скаляра кривизны Риччи двух моделей $f(\mathbf{R})$ -гравитации Сембраноса, используя условие сигнатуры метрики, данные эксперимента Хафеле и Киттинга для негеодезического движения источника/приемника света и данные эксперимента АВЭ для геодезического движения. Ограничение является более строгим, относительно полученных в других работах.

4. Для ограничения параметра СТВГ использовались данные эксперимента АВЭ для негеодезического движения источника/приемника света и данные

эксперимента по измерению задержки Саньяка методом ДПСВЧ через спутники для геодезического движения.

5. Получена обобщенная модель для расчета относительной задержки времени до третьего порядка, вызванной увлечением инерциальных систем отсчета.

Теоретическая и практическая значимость работы.

Теоретическая значимость результатов диссертационного исследования заключается в описании метода исследования эффекта Саньяка для вращающихся решений черных дыр и применении экспериментальных данных для ограничения свободных параметров решений для компактных объектов.

Обобщены формулы для расчета относительной задержки времени в двойных системах, вызванной увлечением инерциальных систем отсчета.

Практическая значимость диссертационного исследования определяется тем, что получены ограничения на заряд НУТ решения Керра-Тауб-НУТ, скаляр кривизны Риччи решения Керра- $f(\mathbf{R})$ и параметр СТВГ решения Керра-СТВГ.

Методология и методы исследования.

За основу взята работа Тарталья, в которой получена задержка Саньяка в пространстве-времени черной дыры Керра, на основе которой был разработан метод расчета задержки Саньяка для произвольных геометрий с вращением. Метод был применен к различным решениям в ОТО и модифицированных теориях гравитации. Для ограничения свободных параметров вращающихся черных дыр применялись данные остаточной ошибки эффекта Саньяка эксперимента Хафеле и Киттинга, эксперимента АВЭ и данные эксперимента по измерению задержки Саньяка методом ДПСВЧ через спутники для геодезического движения.

Положения, выносимые на защиту.

1. Метод ограничения свободных параметров решений, описывающих компактные объекты с вращением, основанный на применении эффекта Саньяка и экспериментальных данных.

2. Задержка Саньяка в пространстве-времени Керра-де Ситтера соответствует принципу Маха для геодезического движения и не соответствует принципу для негеодезического движения источника/приемника света.

3. Задержка Саньяка в пространстве-времени Керра-Тауб-НУТ для негеодезического движения источника/приемника света, которая показывает, что параметр НУТ может быть интерпретирован как имеющий «вращение» заряда НУТ.

4. Ограничение безразмерного скаляра кривизны Риччи для двух моделей $f(\mathbf{R})$ -гравитации, которое является более строгим в сравнении со значениями, полученными ранее в других работах.

5. Обобщение модели для расчета относительной задержки времени, вызванной увлечением инерциальных систем отсчета, в двойных системах в приближении тонкой линзы.

Достоверность полученных результатов.

Достоверность полученных результатов обеспечивается современными вычислительными методами, методами дифференциальной геометрии и применением современных методов обработки данных, согласованием результатов с работами других авторов и непротиворечивостью физическим моделям.

Апробация результатов работы. Материалы, вошедшие в диссертационную работу опубликованы в 19 работах, из которых 7 статей в журналах, рекомендованных ВАК, и 12 тезисов в сборниках докладов и трудов конференций. Результаты работы докладывались и обсуждались на следующих конференциях и симпозиумах: IV Всероссийская научно-практическая конференция «Математическое моделирование процессов и систем», Стерлитамак (2015); Всероссийская научно-методическая конференция «Проблемы современного физического образования», Уфа (2015); Международная зимняя школа-семинар по гравитации, космологии и астрофизике «Петровские чтения», Казань (2016, 2017, 2018); Ulyanovsk International School-Seminar «Problems of Theoretical and Observational Cosmology», Ульяновск (2016); Международная

школа-конференция «Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании», Уфа (2016, 2018, 2020); Всероссийская научно-практическая конференция (Наука 2020) «Актуальные проблемы математического, естественнонаучного и технического знания: приоритетные молодежные исследования XXI в», Уфа (2017, 2018, 2019); Международная научная конференция «Спектральная теория и смежные вопросы», Уфа (2018); Международная научная конференция «Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения», Банное (2019, 2020, 2021); Молодежная конференция по теоретической и экспериментальной физике «МКТЭФ-2019», Москва (2019); 3-й Симпозиум Ассоциации стран БРИКС по гравитации, астрофизике и космологии, Казань (2019).

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 16-32-00323 мол_а, грант 18-32-00377 мол_а), молодежного гранта БГПУ им. М.Акмуллы (№ 63/н от 07.06.2019 г.)

Личный вклад автора. Основные результаты работы были получены автором лично. Выбор направления исследований, обсуждение результатов и формулировка задач проводились совместно с научным руководителем профессором К.К. Нанди и доцентом Р.Н. Измаиловым.

Глава 1. ЛИТЕРАТУРНЫЙ ОБЗОР

1.1. Эффект Саньяка

Эффект был открыт Жоржем Саньяком в 1913 году в экспериментах с вращающимся кольцевым интерферометром, и его подход был полностью классическим. В своем опыте он рассматривал многоугольный интерферометр, установленный на диске. Он имел площадь поверхности 0.0860 м^2 и частоту вращения порядка 2 Гц. В результате эксперимента появлялся незначительный сдвиг полосы 0.07 ± 0.01 . Саньяк считал свой эксперимент прямым проявлением мирового эфира, но позднее это было быстро опровергнуто [40,41].

Более точным наблюдением эффекта Саньяка было более раннее наблюдение Харресса [42], в котором изучался коэффициент увлечения Френеля для стекла. В эксперименте Харресса было показано, что сдвиг полосы Саньяка не зависит от преломления, что позднее это было подтверждено Эйнштейном.

Майкельсон в 1904 году предложил идею о возможности измерения односторонней скорости света [43]. Однако задача по обнаружению вращения системы отсчета с помощью кольцевого интерферометра была поставлена О. Лоджем в 1893 г. [44]. Для этого один из интерферометров, площадь которого составляла один квадратный километр, использовался для измерения вращения Земли, другой использовался для измерения вращения Земли вокруг Солнца. Его площадь составляла 100 км^2 . Кроме того, в ходе эксперимента он использовался в качестве наземного интерферометрического инструмента, в основе было прохождение через экватор, в двух противоположных направлениях, лучей света. В 1925 году Майкельсон и др. фактически выполнили этот эксперимент на площади 1 км^2 ($0.6 \times 0,3 \text{ км}^2$ с периметром 1.2 1.9 км, что дает площадь около 0.21 км^2) в Клиринге [45]. Результатом эксперимента являлось измерение наблюдаемого сдвига интерференционной полосы в 0.230 ± 0.005 вызванного вращением Земли.

Эффект Саньяка в лабораторных условиях описывается следующим образом. Рассмотрим многоугольный кольцевой интерферометр с площадью поверхности S , которая определяется правильно расположенными зеркалами. Рассматриваемый интерферометр вращается с угловой частотой ω_0 в инерциальной системе отсчета. Тогда разница во времени прохождения сигнала (от источника света к приемнику) двух противоположно-направленных пучков света δt и их относительный фазовый сдвиг $\delta\phi$ равны, соответственно:

$$\delta t = \frac{4\omega_0 \cdot S}{v^2}, \quad \delta\phi = \frac{8\pi\omega_0 \cdot S}{\lambda v}, \quad (1.1)$$

где λ – длина волны и v – скорость сигнала без сопротивления (для света $v = c$). Формула (1.1) выводится для любых волн, включая волны материи, что придает ей универсальный характер.

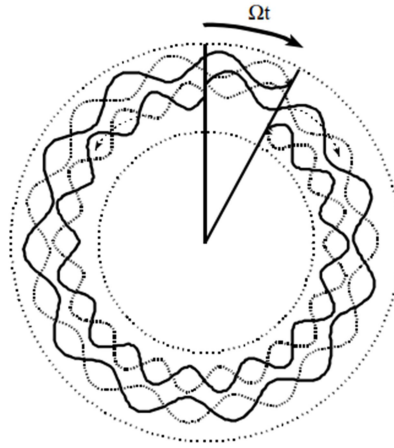


Рис. 1.1. Эффект Саньяка для двух встречных световых пучков, вращающихся по одной и той же круговой орбите.

Проще всего вывести формулу (1.1) для кольцевого интерферометра, изображенного на Рис. 1.1, радиуса R и площадью поверхности $S = \pi R^2$ соответственно. Пусть t_{\pm} – время, за которое сонаправленный (противоположно направленный) с вращением источника/приемника, пучок света проходит от источника к приемнику. Расстояние, пройденное источником/приемником в течение времени t_{\pm} , составляет

$$d_{\pm} = t_{\pm} \omega_0 R, \quad (1.2)$$

где $t_{\pm} = (P \pm d_{\pm})/v$ и P – периметр кольца.

Следовательно, разница времени прохождения противоположно-направленных пучков света имеет вид

$$\delta t = t_+ - t_-, \quad \delta\phi = 2\pi\nu\delta t/\lambda. \quad (1.3)$$

Разложение уравнения (1.3) в ряд Тейлора по $\omega_0 R/v$ дает уравнение (1.1).

Так же, для частного случая кольцевого интерферометра, уравнение (1.1) может быть записано в виде

$$\delta\phi = 4\pi \left(\frac{V}{v}\right) \left(\frac{P}{\lambda}\right), \quad (1.4)$$

где V – скорость вращения интерферометра. Для света $V \ll v$, что компенсируется условием $P \gg \lambda$. Формула (1.4) может быть переписана в виде

$$\delta\phi = 4\pi \left(\frac{F}{f}\right) \left(\frac{P}{\lambda}\right)^2, \quad (1.5)$$

где $F = \omega_0/2\pi$ – частота вращения. Следовательно, эффект усиливается для низких скоростей частиц и малых длин волн. Таким образом, большие относительные сдвиги полос дают малые длины волн; более низкие скорости приводят к большему разделению времени прибытия для данной скорости вращения.

Хотя эффект изначально изучался с использованием лабораторных поворотных кругов, позже этот эффект был подтвержден вне лабораторий, когда в роли поворотного круга выступает вращающаяся Земля. Первое подобное подтверждение было осуществлено Хафеле и Китингом [46,47] в их эксперименте с летающими часами вокруг Земли. В этом эксперименте использовались двое идентичных часов, вылетевших из одной точки и движущихся вдоль земного экватора, один в восточном направлении, другой в западном, на самолете. В соответствии с общепринятым мнением, ход часов не должен был быть связан с направлением движения, то есть часы должны были показывать одинаковое время и одинаковую энергию в системе координат, связанной с центром Земли независимо от того, в какую сторону двигаются часы. После того как часы прибыли в начальную точку ожидалось, что разница во времени будет соответствовать задержке времени согласно только замедлению времени Лоренца специальной теории относительности (СТО) $\sqrt{1 - v^2/c^2}$, но в реальности этого не

случилось. Пренебрегая высотой движения летающих часов, формула для разницы времени $\Delta t'$ между двумя часами была получена эмперическим путем Хафеле и Китингом в следующем виде

$$\Delta t' \approx \left(1 - \frac{v^2}{2c^2} - \frac{vR\omega_0}{c^2} \right) \Delta t, \quad (1.6),$$

где v – скорость часов, знак «+» показывает движение в восточном и знак «-» в западном направлении, Δt – временной интервал для покоящихся часов на Земле, $\Delta t'$ – временной интервал, измеренный летающими часами после облета Земли, ω_0 – осевая скорость вращения Земли и R – радиус Земли на экваторе. Последний член является противоречивым, так как нарушает закон замедления времени СТО $\Delta t' = \sqrt{1 - v^2/c^2} \Delta t \approx \left(1 - \frac{v^2}{2c^2} \right) \Delta t$, но именно этот последний член интерпретируется как вклад эффекта Саньяка в результате осевого вращения Земли. Эта интерпретация также рассматривается как проявление эффекта Саньяка.

Шлегель [48] показал другую интерпретацию эффекта представленную ниже. Двое часов находящихся на Земле на расстоянии Δx могут быть синхронизированы вдоль земного экватора через формулу синхронизации Эйнштейна $t_2 - t_1 = \Delta x/c$, где t_1 – время излучения света от часов «1» ко времени приема t_2 на часах «2». Как упоминалось ранее, эффект Саньяка означает, по определению, что для движения в одну сторону (например в восточном направлении) будет необходимо дополнительное время $2\omega_0 S/c^2$ для того, чтобы обогнуть Землю, сравнительно с часами на Земле, находящимися в покое, для которых разница времени представляется в виде $\Delta t = L/c$, так как для них не увеличивается длина пути света из-за вращения Земли. Поэтому часы, движущиеся в восточном направлении, отстанут на время Δt относительно часов, зафиксированных на Земле. Соответственно часы, движущиеся в западном направлении, получат добавку времени.

Относительно системы отсчета, связанной с Землей, когда движущиеся в восточном направлении часы проходят расстояние $\Delta x = v\Delta t$, они должны

потерять $\left(\frac{v^2}{2c^2} + \frac{vR\omega_0}{c^2}\right) \Delta t$ с. относительно покоящихся часов. Если использована процедура синхронизации Эйнштейна, тогда замена Δx дает добавочный член $\frac{\Delta x}{2\pi R}$ к потере Саньяка $\frac{2\omega_0 S}{c^2}$, то есть $\left(\frac{\omega_0 R}{c^2}\right) \Delta x = \left(\frac{vR\omega_0}{c^2}\right) \Delta t$. Эта потеря Саньяка $\left(\frac{vR}{c^2}\right) \Delta t$, возникающая для движущихся часов, в точности компенсирует последний член эмпирически проверенной формулы (1.6). Таким образом, наблюдатель в системе отсчета Земли не будет наблюдать никакой зависимости от направления (или зависимости от скорости v), а только кинетическую потерю, пропорциональную $\left(\frac{v^2}{2c^2}\right)$. Подобным образом для часов, движущихся в западном направлении, временная добавка $\left(+\frac{vR}{c^2}\right) \Delta t$ будет компенсирована добавкой Саньяка. Таким образом, наблюдатель в системе отсчета Земли наблюдает только релятивистскую потерю $\left(-\frac{v^2}{2c^2}\right)$, при этом будет существовать разрыв в $\left(\frac{vR\omega_0}{c^2}\right) \Delta t$ в одной и той же точке траектории часов, так как эффект Саньяка вносит потерю (добавку) в восточной (западной) синхронизации вокруг экватора. При $\Delta t = \frac{2\pi R}{v}$, для кругосветного путешествия вокруг Земли, мы имеем член $\left(\frac{vR\omega_0}{c^2}\right) \Delta t = \frac{2\pi R^2 \omega_0}{c^2} = \frac{2\omega_0 S}{c^2}$ в точном соответствии с разрывом, возникающим из-за эффекта Саньяка. Для движения вокруг Земли в противоположном направлении полная задержка времени между двумя часами в точке их пересечения будет составлять $\delta\tau_S = \frac{2\omega_0 S}{c^2}$. Данная поправка учитывает разрыв Хафеле-Киттинга [46,47] для корректировки линии перемены дат при использовании единой меры времени. Более того, учитывая данную поправку легко увидеть, что задержка времени, вытекающая из СТО, также подтверждается.

Эффект Саньяка нашел множество применений, как в фундаментальной физике, так и для практических целей после открытия и начала использования лазеров, в том числе и кольцевых лазеров в 1960-х годах в экспериментах [49,50]. Эффект обеспечивает беспрецедентную точность в интерферометрических измерениях и измерениях сдвига частоты. В подходе СТО, обычно, искали

решение проблемы поправок более высокого порядка к уравнению (1.1), возникающей из-за высокой точности измерений. Однако более целесообразным является подход, учитывающий также эффекты ОТО вследствие того, что «поворотный стол» является массивным или, другими словами, источник/приемник вращается вокруг компактного астрофизического объекта.

Эффект Саньяка был проверен для света, рентгеновских лучей [51] и различных типов волн вещества, таких как куперовские пары [52], нейтроны [53], атомы Ca40 [54] и электроны [55]. Различные выводы уравнения (1.1) [52,56-55] показывают универсальный характер явления. По сути, эффект Саньяка является следствием нарушения однозначности одновременности во вращающихся системах [61] и проявляется для любых волн, включая волны материи.

1.2. Эффект Саньяка в пространстве-времени Керра

В этом параграфе рассматривается задержка Саньяка в пространстве-времени Керра для геодезического и негеодезического движения источника/приемника, полученная Тартальей в 1998 году [10]. Это решение является фундаментальным при изучении эффектов различных теорий гравитации, поскольку любое решение должно сводиться к решению Керра при обнулении параметров модификации. Следовательно, любая рассматриваемая задержка Саньяка в ОТО или в модифицированных теориях гравитации должна сводиться к задержке Саньяка в пространстве-времени Керра.

1.2.1. Задержка Саньяка для негеодезических круговых экваториальных орбит

Рассмотрим вначале решение Керра. Это решение описывает вращающуюся черную дыру, обладающую массой M и параметром вращения a . Линейный элемент метрики Керра в пространственно-временных координатах Бойера Линдквиста имеет вид:

$$ds^2 = \frac{r^2 - 2Mr + a^2}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} (dt - a \sin^2 \theta d\phi)^2 - \frac{\sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} [(r^2 + a^2)d\phi - a dt]^2 - \frac{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}{r^2 - 2Mr + a^2} dr^2 - (r^2 + a^2 \cos^2 \theta) d\theta^2. \quad (1.7)$$

Здесь M - асимптотическая масса источника, a - отношение углового момента J к его массе $a = \frac{J}{M}$.

Все эффекты измеряются вдали от черной дыры, где пространство-время практически плоское.

Предполагается, что источник/приемник двух противоположно направленных пучков света движется вокруг вращающегося пространства-времени Керра на постоянной орбите, то есть $r = R = \text{const.}$, в экваториальной плоскости, то есть $\theta = \pi/2$. Тогда, линейный элемент (1.7) примет вид:

$$ds^2 = \frac{R^2 - 2MR + a^2}{R^2} (dt - ad\phi)^2 - \frac{1}{R^2} [(R^2 + a^2)d\phi - adt]^2. \quad (1.8)$$

Полагая, что вращение является равномерным, угол поворота источника/приемника будет равен:

$$\phi_0 = \omega_0 t. \quad (1.9)$$

Исходя из выше написанного равенства, метрика (1.8) сводится к следующему виду:

$$ds^2 = \left[\frac{R^2 - 2MR + a^2}{R^2} (1 - a\omega_0)^2 - \frac{1}{R^2} \{(R^2 + a^2)\omega_0 - a\}^2 \right] dt^2. \quad (1.10)$$

Для двух пучков света, движущихся по одной и той же круговой траектории должно выполняться равенство $ds=0$, которое, с учетом уравнения (1.10), переписется в следующем виде:

$$\frac{R^2 - 2MR + a^2}{R^2} (1 - a\omega_0)^2 - \frac{1}{R^2} \{(R^2 + a^2)\omega_0 - a\}^2 = 0. \quad (1.11)$$

Это уравнение является квадратным уравнением относительно неизвестной ω_0 .

Уравнение (1.11) имеет два решения, которые будут обозначены через Ω_{\pm} :

$$\Omega_{\pm} = \frac{2(M/R)a \pm \sqrt{R^2 - 2MR + a^2}}{R^2 + 2(M/R)a^2 + a^2}. \quad (1.12)$$

Угол поворота движущихся пучков света задается формулой

$$\phi_{\pm} = \Omega_{\pm} t, \quad (1.13)$$

где знак «+» означает, что пучок движется сонаправленно с вращением объекта в пространстве-времени Керра, «-» – пучок движется в противоположном направлении относительно вращающегося объекта.

Выражая t в уравнениях (1.9) и (1.10) и приравнявая их между собой (таким образом сокращается t) выводится следующее равенство:

$$\phi_{\pm} = \frac{\Omega_{\pm}}{\omega_0} \phi_0. \quad (1.14)$$

Исходя из геометрических соображений 4-мерного пространства следует, что первое пересечение мировых линий двух пучков света испущенных от источника/приёмника в момент времени $t=0$, произойдет, когда углы для пучков света будут равны

$$\phi_+ = \phi_0 + 2\pi, \quad (1.15)$$

$$\phi_- = \phi_0 - 2\pi. \quad (1.16)$$

Подставляя уравнения (1.15) и (1.16) в уравнение (1.14), получим:

$$\frac{\Omega_{\pm}}{\omega_0} \phi_0 = \phi_0 \pm 2\pi.$$

Решение последнего уравнения относительно ϕ_0 будет иметь два корня, которые обозначатся как $\phi_{0\pm}$, имеющие вид

$$\phi_{0\pm} = \mp \frac{2\pi\omega_0}{\Omega_{\pm} - \omega_0}. \quad (1.17)$$

Подставляя (1.12) в (1.17), получим угол поворота пучков света, движущихся в пространстве-времени Керра:

$$\phi_{0\pm} = \mp \frac{2\pi\omega_0}{\{2(M/R)a \pm \sqrt{R^2 - 2MR + a^2}\} \{R^2 + 2(M/R)a^2 + a^2\}^{-1} - \omega_0}. \quad (1.18)$$

Собственное время вращающегося источника/приемника выводится из уравнения (1.10) с учетом уравнения (1.9):

$$d\tau = \sqrt{(R^2 - 2MR + a^2)(1 - a\omega_0)^2 - \{(R^2 + a^2)\omega_0 - a\}^2} \frac{d\phi_0}{R\omega_0}. \quad (1.19)$$

Интегрируя между ϕ_{0-} и ϕ_{0+} , получим формулу для задержки Саньяка:

$$d\tau = \sqrt{(R^2 - 2MR + a^2)(1 - a\omega_0)^2 - \{(R^2 + a^2)\omega_0 - a\}^2} \frac{\phi_{0+} - \phi_{0-}}{R\omega_0} \quad (1.20)$$

или точно (используя уравнение (1.18)):

$$\delta\tau_{\text{Kerr}} = \frac{4\pi}{R} \frac{(a^2R + 2Ma^2 + R^3)\omega_0 - 2Ma}{\sqrt{1 - 2(M/R) + 4(M/R)a\omega_0 - [a^2 + 2(M/R)a^2 + R^2]\omega_0^2}}. \quad (1.21)$$

В работе [10] было показано, что задержка Саньяка в пространстве-времени Керра сводится к нулю, когда угловая скорость орбитального источника/приемника равна:

$$\omega_n = \frac{2Ma}{a^2R+2Ma^2+R^3} = 2 \frac{(M/R)(a/R^2)}{1+2(M/R)(a^2/R^2)+a^2/R^2}, \quad (1.22)$$

при условии, что $a \neq 0$.

Задержка Саньяка (1.21) зачастую рассматривается как гравитационный аналог эффекта Ааронова-Бома [65], не смотря на то, что световые пучки движутся в не свободном от гравитации пространстве. Наилучшей интерпретацией, которая ближе подходит к эффекту Ааронова-Бома, может быть получена с пучками света, движущимися вдоль плоского пространства тора [66]. Руджеро показал [67], что выражение (1.21) полностью согласуется одной из гравито-электромагнитной интерпретации Ааронова-Бома [68].

И наоборот, когда наблюдатель сохраняет фиксированное положение относительно удаленных звезд (т.е. $\omega_0 = 0$), задержка Саньяка существует при условии $a \neq 0$ и равна

$$\delta\tau|_{\omega=0} = \delta\tau_0 = -\frac{8\pi M}{R\sqrt{1-2(M/R)}}. \quad (1.23)$$

В работе [64] Коэн и Мэшхун рассчитали задержку Саньяка для статичного источника/приемника света относительно удаленных неподвижных звезд, который посылал пару световых пучков в противоположных направлениях вдоль замкнутого треугольного контура. Они получили первый порядок приближения формулы (1.23). Следовательно, важна не форма орбиты, а её замкнутость.

Выразив уравнение (1.23) через угловой момент $J = Ma$, получим его в следующем виде:

$$\delta\tau_0 = -\frac{8\pi J}{R\sqrt{1-2(M/R)}}. \quad (1.24)$$

Скорость прецессии (эффект Лензе-Тирринга) для геометрии Керра была получена в работах [61,69] и для экваториального наблюдателя равна

$$\omega_{LT} = \frac{-J}{R^3}. \quad (1.25)$$

Таким образом, задержку Саньяка (1.24) можно переписать через скорости прецессии ω_{LT} в виде:

$$\delta\tau_0 = \frac{8\pi\omega_{LT}R^2}{\sqrt{1-2(M/R)}}. \quad (1.26)$$

Отсюда видно, что величина задержки Саньяка удваивается из-за прецессии Лензе-Тирринга, то есть из-за чистого сопротивления вращающейся массы.

Далее покажем, что многие члены разложения в уравнении (1.21) малы. Для этого точную задержку Саньяка необходимо разложить в ряд Тейлора и отбросить малые члены ряда не влияющие на основную задержку.

Разложим уравнение (1.21) в ряд Тейлора по $\beta = \omega_0 R \ll 1$ до второго порядка и получим

$$\delta\tau = -\frac{8\pi Ma}{R\sqrt{1-2(M/R)}} + \frac{4\pi R[1+a^2/R^2-2(M/R)]}{(1-2(M/R))^{3/2}}\beta - \frac{12\pi Ma(1+a^2/R^2-2(M/R))}{(1-2(M/R))^{5/2}}\beta^2. \quad (1.27)$$

Используя уравнение (1.23), перепишем уравнение (1.27) в виде:

$$\delta\tau = \delta\tau_0 + \frac{4\pi R[1+a^2/R^2-2(M/R)]}{(1-2(M/R))^{3/2}}\beta - \frac{12\pi Ma(1+a^2/R^2-2(M/R))}{(1-2(M/R))^{5/2}}\beta^2. \quad (1.28)$$

Далее, разложим уравнение (1.28) в ряд Тейлора по $\epsilon = M/R \ll 1$ также до второго порядка и получим

$$\begin{aligned} \delta\tau = & -8\pi a\epsilon + 4\pi R \left(1 + \frac{a^2}{R^2}\right)\beta + \left(4\pi R + \frac{12\pi a^2}{R}\right)\epsilon\beta \\ & - 12\pi a \left(1 + \frac{a^2}{R^2}\right)\epsilon\beta^2 - \frac{12\pi Ma}{R} \left(1 + \frac{a^2}{R^2}\right)\beta^2. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Т.к. величина a/R мала, то этим членом в разложении (1.29) можно пренебречь и, соответственно, получим

$$\delta\tau = -8\pi a\epsilon + 4\pi R(1 + \epsilon)\beta + -\frac{12\pi Ma}{R}\beta^2. \quad (1.30)$$

Восстановив величины G , c , подставив обратно $\epsilon = M/R$, $\beta = \omega_0 R$ и обозначив задержку Саньяка в плоском пространстве через $\delta\tau_S = 4\pi\omega_0 R^2$, из уравнения (1.30) получим

$$\delta\tau = \delta\tau_S - 8\pi a \frac{GM}{c^4 R} + 4\pi \frac{R}{c^2} \frac{GM}{c^2} \omega_0 - 12\pi R \frac{GM}{c^4} \frac{a}{c^2} \omega_0^2. \quad (1.31)$$

Уравнение (1.31) является постньютоновским разложением задержки Саньяка (1.21) для негеодезического движения источника/приемника света. В работе [10] показано, что основной вклад в задержку Саньяка вносит $\delta\tau_S$.

1.2.2. Задержка Саньяка для геодезических круговых экваториальных орбит

В предыдущем параграфе рассматривался случай негеодезического движения источника/приемника света, который имел заданную угловую скорость ω_0 . Далее рассматривается движение источника/приемника света по геодезическим круговым орбитам или по-другому находящегося в свободном падении. Теперь угловая скорость источника/приемника света будет удовлетворять третьему закону Кеплера.

Пусть u^μ – 4-вектор скорости и $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu$ – символы Кристоффеля. Уравнение геодезических будет иметь вид

$$\frac{\partial u^\mu}{\partial s} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu u^\nu u^\lambda = 0, \quad (1.32)$$

где аффинный параметр s совпадает с собственным временем наблюдателя τ . Предполагается, что источник/приемник света движется во вращающемся пространстве-времени на постоянной орбите, то есть $r = R = \text{const.}$, и, следовательно,

$$u^r = 0. \quad (1.33)$$

Из уравнений геодезических (1.32) и условия (1.33) легко получить угловую скорость движения источника/приемника света относительно оси симметрии $\omega = u^\phi / u^0$. Отметим, что угловая скорость ω может принимать два разных значения ω_\pm относительно ориентации углового момента источника. В общем случае ω_\pm является сложной функцией от θ и R . Однако, наиболее интересный случай представляется, когда рассматривается движение на экваториальной плоскости, т.е. $\theta = \text{const.}$, и, соответственно,

$$u^\theta = 0. \quad (1.34)$$

Применим выше написанные условия к пространству-времени Керра. Для этого вычислим символы Кристоффеля соответствующей метрики и найдем угловую скорость источника/приемника света, которая задается в виде:

$$\omega_{\pm} = \frac{2aM \pm c^2 \sqrt{3a^2 M^2 + MR^3}}{a^2 M - R^3}. \quad (1.35)$$

Разложив уравнение (1.35) в ряд Тейлора по a/R , получаем:

$$\omega_{\pm} \approx \mp \sqrt{\frac{M}{R^3}} - \frac{2Ma}{R^3}. \quad (1.36)$$

Подставив уравнение (1.36) в уравнение (1.30) и восстановив величины G , c можно найти выражение для задержки Саньяка в пространстве-времени Керра для геодезических круговых орбит источника/приемника света на экваториальной плоскости, получаем:

$$\delta\tau_{\pm} \approx 8\pi a \frac{GM}{c^4 R} \pm 4\pi \frac{R}{c} \left(1 + \frac{GM}{c^2 R}\right) \left(\sqrt{\frac{GM}{c^2 R}} + 2 \frac{GM}{c^2 R} \frac{a}{cR}\right) \approx \mp 4\pi \frac{R}{c} \sqrt{\frac{GM}{c^2 R}} + 16\pi a \frac{GM}{c^4 R}. \quad (1.37)$$

Тогда выражение для задержки Саньяка имеет вид:

$$\delta\tau_{\pm} \approx \delta\tau_{S\pm} + 16\pi a \frac{GM}{c^4 R}, \quad (1.38)$$

где $\delta\tau_{S\pm}$ задержка времени в пространстве-времени Шварцшильда, которая может быть выведена из (1.37) после подстановки $a = 0$ и равна

$$\delta\tau_{S\pm} = \pm \frac{4\pi}{c^2} \sqrt{GMR}. \quad (1.39)$$

1.3. Наблюдаемые эксперименты эффекта Саньяка

1.3.1. Эксперимент Хафеле и Киттинга

До эксперимента «вокруг света» Джозефа Хафеле и Ричарда Киттинга проводились только лабораторные эксперименты, нацеленные на подтверждение эффекта Саньяка. В 1971 году Дж. Хафеле и Р. Киттинг провели первый эксперимент вне лаборатории, в небе над Землей, суть которого заключалась в проверке ОТО Эйнштейна. Эксперимент заключался в следующем: реактивные самолеты с атомными цезиевыми часами на борту дважды облетели Землю, один раз в восточном и один раз в западном направлении. Вначале они рассчитали ход часов относительно остававшихся статичными на земле. В результате облета «летающие» часы, по сравнению с часами, принятыми за «эталонные» в Военно-морской обсерватории США, должны были идти медленнее на 40 ± 23

наносекунды во время полета на восток и должны были идти быстрее на 275+21 наносекунды во время полета на запад [46,47].

Из СТО следует, что стандартные движущиеся часы будут идти медленнее по сравнению с координатными часами, находящимися в покое в инерциальном эталонном пространстве. Для малых координатных скоростей ($u^2 \ll c^2$), течение времени движущихся часов связано коэффициентом $1 - u^2/(2c^2)$ с течением времени координатных часов, где u – скорость движущихся часов. Так как Земля вращается, то часы, находящиеся в покое на поверхности, не подходят в качестве координатных часов в инерциальном пространстве. Тем не менее, относительное хронометрирующее поведение земных часов может быть оценено путем обращения к гипотетическим координатным часам базового не вращающегося (инерциального) пространства.

Для устранения этой проблемы, проще всего рассмотреть наблюдателя смотрящего на Северный полюс с большого расстояния. Рассмотрим часы, находящиеся в статичном положении на поверхности Земли на экваторе. Часы имеют скорость $R\Omega$ относительно статичного пространства. Ход часов относительно гипотетических координатных часов этого пространства связан коэффициентом $1 - R^2\Omega^2/(2c^2)$, где R – радиус Земли, а Ω – ее угловая скорость.

С другой стороны, «летающие» часы, вращающиеся вокруг Земли вблизи поверхности на экваториальной плоскости со скоростью v относительно Земли, имеют координатную скорость $R\Omega + v$ и, следовательно, ход времени «летающих» часов относительно гипотетических координатных часов связан коэффициентом $1 - (R\Omega + v)^2/(2c^2)$. Разница времени между «летающими» и оставшимися неподвижными на Земле часами во время полного кругового движения в первом приближении равна

$$\tau - \tau_0 = -\frac{(2R\Omega + v)vt_0}{2c^2}. \quad (1.40)$$

Полет часов в направлении вращения Земли (на восток, $v > 0$) должен приводить к замедлению времени, тогда как полет против вращения Земли (на запад, $v < 0$) должен приводить к опережению времени для летающих часов, если $|v| \sim R\Omega$.

Для слабых гравитационных полей из ОТО следует, разница времени между «летающими» и оставшимися неподвижными на Земле часами во время полного кругового движения пропорциональна разности гравитационного потенциала и равна

$$\tau - \tau_0 = \left[\frac{gh}{c^2} - \frac{2R\Omega v + v^2}{2c^2} \right] \tau_0, \quad (1.41)$$

где g – поверхностное значение ускорения свободного падения на Земле, $h < R$ – высота «летающих» часов над поверхностью Земли, gh – разность потенциалов.

Член gh/c^2 , связанный с гравитационным «красным смещением», предсказывает ускорение времени для летающих часов независимо от направления движения. Гравитационные и кинематические части в формуле (1.41) для стандартных скоростей и высот самолета сопоставимы по абсолютной величине для типичных скоростей и высот самолета. Для кругового движения часов на запад ($v < 0$) обе части уравнения (1.41) положительны и вносят существенный вклад в течение времени, но для кругового движения часов на восток ($v > 0$) разница во времени может быть как положительной, так и отрицательной в зависимости от направления полета.

Если рассматривать безостановочное кругосветное путешествие, в приближении первого порядка время прохождения полного оборота имеет вид $\tau_0 = 2\pi R/|v|$. Подставив это значение в (1.41) получим

$$\tau - \tau_0 = \frac{2\pi R}{c^2} \left[\frac{gh}{|v|} - \frac{R\Omega v}{|v|} - \frac{|v|}{2} \right] \tau_0. \quad (1.41)$$

В работе [46] была использована модифицированная версия уравнения (1.41), так как коммерческие полеты, рассматриваемые в эксперименте, не следуют строго по экваториальным траекториям, не поддерживают постоянную высоту, постоянную скорость или широту, которая имеет вид

$$\tau - \tau_0 = \int \left[\frac{gh}{c^2} - \frac{2R\Omega v \cos \theta \cos \lambda + v^2}{2c^2} \right] d\tau. \quad (1.42)$$

Это выражение содержит слегка измененный в зависимости от направления член, который для неэкваториальных полетов становится пропорциональным как восточному компоненту путевой скорости $v \cos \theta$, так и косинусу широты $\cos \lambda$.

Таблица 1. Разность показаний путешествовавших и оставшихся на месте часов (в наносекундах).

Вид движения	Теоретические предсказания			Измеренная величина
	Гравитационный вклад (ОТО)	Кинематический вклад (СТО)	Общий вклад (ОТО+СТО)	
На восток	$+144 \pm 14$	-184 ± 18	-40 ± 23	-59 ± 10
На запад	$+179 \pm 18$	$+96 \pm 10$	$+275 \pm 21$	$+273 \pm 7$

Данные, полученные в ходе эксперимента, в полной мере совместимы с предсказаниями теории относительности. Средняя остаточная ошибка измерений составила 24 нс., что свидетельствует о высокой точности измерения наблюдавшихся положительной и отрицательной разности хода часов.

1.3.2. Эксперимент Аллана, Вейса и Эшби

Эксперимент Хафеле-Китинга основывался на «летающих» атомных цезиевых часах сначала на восток, а затем на запад вокруг света. В эксперименте АВЭ вместо «летающих» часов были использованы электромагнитные сигналы передаваемые спутниками. Система Глобального позиционирования передает сигналы, которые могут быть одновременно приняты на удаленных станциях на Земле; и, таким образом, эксперимент направленный на оценку эффекта Саньяка может быть выполнен с электромагнитными сигналами в любой точке на Земле. Средняя ошибка за 3-месячный эксперимент составила всего 5 наносекунд [11].

Для того чтобы синхронизировать часы с помощью электромагнитных сигналов или «летающих» часов на поверхности вращающейся земли необходимо учитывать поправку к показаниям времени, появляющуюся из-за эффекта Саньяка. Для получения синхронизированных часов на поверхности Земли на субнаносекундном уровне Консультативный комитет по определению Второго и Международного консультативного комитета по радиосвязи предложил использовать поправочный член, задаваемый в виде:

$$\Delta t = \frac{2\omega}{c^2} \times A_E = 1.6227 \times 10^{-2} \text{ сек/м}^2 A_E, \quad (1.43)$$

где A_E - проецируемая область на экваториальной плоскости Земли, охватываемая вектором, начало которого находится в центре земли, а конец находится в

положении «летающих» часов или импульса электромагнитного сигнала. A_E считается положительным, если конец вектора движется в восточном направлении и отрицательным для противоположного направления. Другими словами, если две пары часов, расположенных на поверхности земли, сравниваются с использованием портативных часов или электромагнитных сигналов во вращающейся системе координат Земли, то для синхронизации необходимо вычесть Δt из измеренной разности времени (показание времени восточных часов минус время западных часов) часов, поэтому они будут измерять координатное время на земле.

Алан, Вейс и Эшби [3] в своем эксперименте использовали сигналы, передаваемые от спутниковых транспортных средств Системы Глобального позиционирования с номерами «3», «4», «6» и «8» для одновременной связи с тремя центрами синхронизации на Земле для выполнения полного кругового движения. Они вычислили величину задержки Саньяка согласно уравнению (1.43), которая варьируется от 240 до 350 наносекунд в зависимости от местоположения спутников, используемых в круговом движении.

В течении 90 дней Аланом, Вейсом и Эшби было выполнено 90 независимых измерений кругового движения. Приемники, используемые в этом эксперименте, автоматически вычитают поправку Саньяка, следовательно, если добавить три пары измеренных временных разностей, результат должен исчезнуть. Фактическое среднее значение остатка ошибки задержки Саньяка за 90 дней наблюдения составило всего 5 нс, что составляет менее 2 процентов от величины рассчитанного суммарного эффекта Саньяка.

Чистая временная дисперсия для этого эксперимента, связанная с этими возмущениями на трех часах, составляет около 2.5 нс. Остальная часть ненулевого результата объясняется неопределенностью задержек распространения сигнала и эфемерид спутников GPS.

1.3.3. Метод двухсторонней передачи сигналов времени и частоты через спутники

Метод ДПСВЧ через спутники с использованием геостационарных телекоммуникационных спутников является одним из основных методов сравнения атомных временных шкал между лабораториями [8]. Точность метода сильно зависит от остаточных задержек несинхронности. Одна из них вызвана эффектом Саньяка.

Принцип метода ДПСВЧ через спутники показан на Рис. 1.2 [8]. Каждая из двух станций передачи времени передает сигнал другому через спутник, и каждая станция измеряет время прихода сигнала от другой станции со ссылкой на часы местной станции. Разница во времени между опорными часами двух станций может быть определена на основе разницы между результатами измерений двух станций.

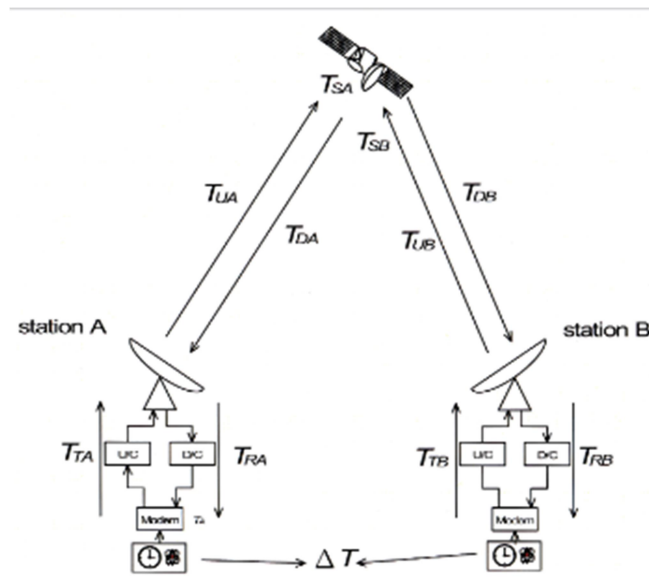


Рис. 1.2. Принцип метода двухсторонней передачи сигналов времени и частоты через спутники.

Формулу (1.1) можно представить в виде:

$$\Delta t_{\text{Sagnac}} = \pm \omega_0 (\mathbf{R}_s \times \mathbf{r}_e) / c^2, \quad (1.44)$$

где $\mathbf{R}_s(x_s, y_s, z_s)$ – точка расположения спутника, $\mathbf{r}_e(x_e, y_e, z_e)$ – точка станции на Земле. Знак величины задержки Саньяка, который определяется направлением распространения света, является положительным для нисходящей линии связи и отрицательным для восходящей линии связи.

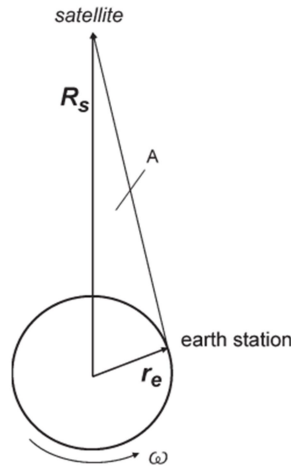


Рис. 1.3. Эффект Саньяка представлен в виде замкнутой области во вращающейся системе относительно системы отсчета связанной с центром Земли.

Предполагая, что направление движения ω_0 только вдоль оси z , эффект Саньяка (1.44) можно переписать в виде

$$\Delta t_{\text{Sagnac}} = \pm \omega_0 (x_s y_e - y_s x_e) / c^2, \quad (1.45)$$

или в сферических координатах с $\mathbf{R}_s(R_s, \psi_s, \lambda_s)$, где R_s – радиус, ψ_s – широта и λ_s – долгота орбиты спутника относительно центра вращения объекта, и $\mathbf{r}_e(R_e, \psi_e, \lambda_e)$, где R_e – радиус, ψ_e – широта и λ_e – долгота станции на Земле относительно центра Земли:

$$\Delta t_{\text{Sagnac}} = \pm \omega_0 R_s R_e \cos \psi_s \cos \psi_e \sin(\lambda_e - \lambda_s) / c^2. \quad (1.46)$$

Для пути распространения от удаленной станции «2» к спутнику и от спутника к локальной станции «1» общая поправка Саньяка равна

$$\Delta t_{\text{Sagnac}}^{(1,2)} = -\Delta t_{\text{Sagnac}}^{(1)} + \Delta t_{\text{Sagnac}}^{(2)}. \quad (1.47)$$

Таким образом, эффект Саньяка может быть рассчитан в соответствии с координатами земной станции и фактическими данными эфемерид спутника. На Рис. 1.3 эффект Саньяка показан в виде замкнутой области во вращающейся системе относительно системы отсчета связанной с центром Земли.

В работе [8] Тсенг и др. использовали модем Спутникового Времени и Оборудования измерения дальности (SATRE) и спутникового имитатора (SATSIM) для измерения задержки сигнала передачи в обоих направлениях от земной станции методом ДПСВЧ [69]. Они использовали три типа микросхем, которые работали при частотах 20, 2.5 и 1 МГц, для измерения задержки в обоих

направлениях. В результате было получено, что изменение данных было наименьшим для микросхемы, работавшей при частоте 20 МГц. Данные микросхемы работавшей при 2.5 МГц меньше примерно на 1,5–3 нс чем данные предыдущей микросхемы. Результаты микросхемы, работавшей при частоте 1 МГц, были аналогичны результатам микросхемы, работавшей при 2.5 МГц. Этот эксперимент продемонстрировал, что флуктуация может быть увеличена при использовании кодированных сигналов с более низкой скоростью передачи данных.

Скорость изменения суточной поправки пропорциональна остаточному эффекту Саньяка, а суточная поправка пропорциональна производной остаточного эффекта Саньяка по времени. В работе [8] вычислена прогнозируемая суточная поправка $X(t_i)$ в виде:

$$X(t_i) = 2m \frac{\Delta t_{\text{Sagnac}}^{(1,2)}(t_i + \tau/2) - \Delta t_{\text{Sagnac}}^{(1,2)}(t_i - \tau/2)}{\tau}, \quad (1.48)$$

где данные временного ряда разделены интервалом времени τ , а m - увеличенный интервал времени.

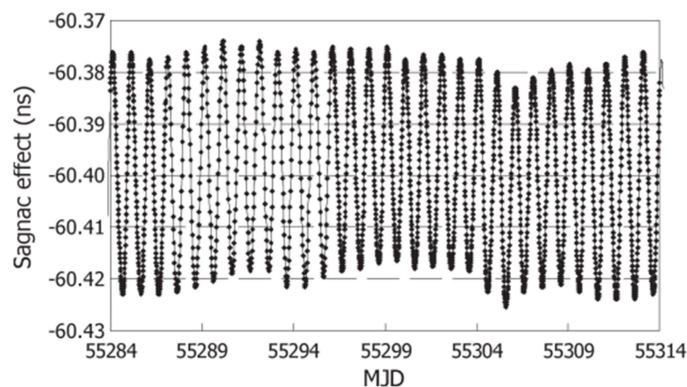


Рис. 1.4. Эффект Саньяка для канала НИИКТ – ТЛ через Интелсата-8.

Данные временных рядов поправки эффекта Саньяка были рассчитаны в соответствии с высотой, широтой и долготой спутника. Результаты были применены к фактическим данным метода ДПСВЧ для связи между Национальным институтом Информационных и Коммуникационных технологий (НИИКТ, NICT) в Японии и Телекоммуникационными лабораториями (ТЛ, TL) в Тайване. Данные эфемерид относительно системы отсчета связанной с центром Земли для спутника Интелсат-8 при 166° в.д. описаны в работе [70]. Опорные

часы обеих станций являются водородными мазерами и точно синхронизированы с всемирным координированным временем в пределах ± 20 нс.

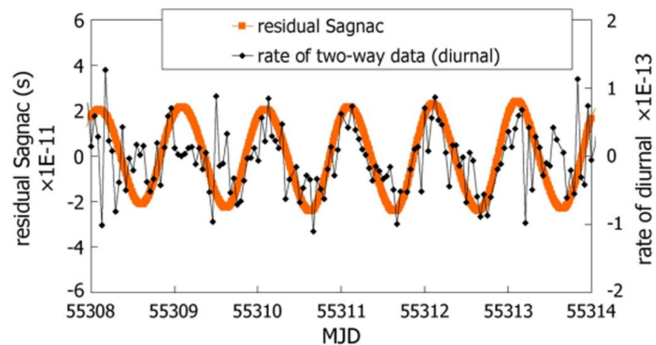


Рис. 1.5. Остаточный эффект Саньяка и скорость двусторонней передачи данных (суточных поправок) для канала НИИКТ – ТЛ.

Номинальная задержка Саньяка между НИИКТ и ТЛ через идеальный геостационарный спутник Интелсат-8 при 166° в.д. будет составлять 60,4 нс. На Рис. 1.4 показан рассчитанный эффект Саньяка между НИИКТ и ТЛ на основе данных эфемерид Интелсата-8. Эти значения не являются фиксированными, но показывают суточные колебания. Амплитуда изменения составляет около 48 пс во время MJD 55284 и MJD 55314. Суточные значения эффекта Саньяка намного меньше, чем у данных метода ДПСВЧ, и их фазы также не совпадают. На Рис. 1.5 представлен график остаточного эффекта Саньяка и скорости изменения данных двусторонней разности. Остаточный эффект Саньяка вычисляется из эффекта Саньяка путем вычитания его усредненного значения. Поскольку скорость изменения была рассчитана в соответствии с почасовыми данными метода ДПСВЧ, это фактически среднее изменение за 1-часовой период. Можно наблюдать, что скорость двусторонних результатов НИИКТ – ТЛ пропорциональна остаточному эффекту Саньяка. Обратите внимание, что масштаб остаточного эффекта Саньяка (левая ось) составляет примерно 300 раз по сравнению со скоростью суточного (правая вертикальная ось).

Таким образом, на сегодняшний день эксперимент по измерению задержки Саньяка методом ДПСВЧ через спутники является наиболее точным. Величина остаточной ошибки проведенного эксперимента составляет всего 0.25 нс, что является в 20 раз точнее чем в эксперименте Алана, Вейса и Эшби.

Глава 2. ЭФФЕКТ САНЬЯКА В ОТО

В этой главе будет рассматриваться пять метрик пространства-времени вращающихся черных дыр Керра-де Ситтера, Керра-Тауб-НУТ, Йохансена-Псалиса, Айон-Беато-Гарсия (АБГ) и Бардина из ОТО. Для каждого из решений будет получена задержка Саньяка для геодезических и негеодезических орбит источника/приемника и рассмотрена с различных точек зрения. Задержка Саньяка в пространстве-времени Керра-де Ситтера будет проверена на соответствие принципу Маха. С помощью задержки Саньяка в пространстве-времени Керр-Тауб-НУТ и экспериментальных данных эффекта Саньяка будет найден верхний предел заряда НУТ.

2.1. Эффект Саньяка в пространстве-времени Керра-де Ситтера.

Релятивистский парадокс близнецов может иметь важные применения к принципу Маха. Недавно, в работе [71] утверждалось, что неодинаковое течение времени (различное старение близнецов) между двумя движущимися часами по замкнутым круговым орбитам можно объяснить существованием абсолютного пространства-времени, что делает принцип Маха невыполнимым. В этом параграфе мы рассмотрим и подтвердим этот аргумент с другой точки зрения, используя задержку Саньяка в пространстве-времени Керра-де Ситтера. Это возможно, поскольку вышеупомянутая временная асинхронность, как известно, в точности совпадает с задержкой Саньяка между двумя противоположно направленными и движущимися по кругу пучками света, сходящимися на источнике/приемнике света. Для этого, сначала, будет подсчитана задержка Саньяка во вращающемся пространстве-времени Минковского. После чего будет подсчитана задержка Саньяка в пространстве-времени Керра-де Ситтера для геодезического и негеодезического движения источника/приемника света.

2.1.1. Задержка времени в пространстве-времени Минковского

Для вывода уравнения (1.1) в плоском пространстве рассмотрим метрику Минковского в цилиндрических координатах

$$ds^2 = c^2 dt^2 - (dr'^2 + r' d\phi'^2 + dz'^2) \quad (2.1)$$

и перейдем к равномерно вращающейся системе координат (t, r, ϕ, z) , воспользовавшись преобразованием

$$r' = r, \quad \phi' = \phi + \omega_0 t, \quad z' = z, \quad ct' = ct, \quad (2.2)$$

тогда метрика (2.1) перейдет в

$$ds^2 = (c^2 - \omega_0^2 r^2) dt^2 - 2\omega_0 r^2 d\phi dt - dr^2 - r d\phi^2 - dz^2, \quad (2.3)$$

где ω_0 – угловая скорость вращающейся системы относительно статичного пространства Минковского. Это хорошо известная плоская метрика с равномерным вращением (метрика на диске), в которой на тестовые частицы воздействуют искусственные силы. Эта метрика использовалась для иллюстрации таких понятий, как гравитационное красное смещение, увлечение инерциальных систем отсчета, эффект Лензе-Тирринга и т. д. [72-74]. Отметим, что метрика (2.3) действительна только для радиальных расстояний, удовлетворяющих условию $r < c/\omega_0$, после которых g_{00} становится отрицательным, что недопустимо.

Запишем общий вид метрики

$$ds^2 = g_{00} (dx^0)^2 + 2g_{0i} dx^0 dx^i + g_{ij} dx^i dx^j; \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.4)$$

и заметим, что во вращающейся системе координат задержка времени dx^0 между двумя одновременными событиями, разделенными бесконечно малым расстоянием dx^i равна

$$dx^0 = -\frac{g_{0i} dx^i}{g_{00}} \equiv g_i dx^i. \quad (2.5)$$

Следовательно, для замкнутой круговой траектории в метрике (2.4) следует, что

$$\Delta t = -\frac{1}{c} \oint \frac{g_{0i} dx^i}{g_{00}} = \frac{1}{c^2} \oint \frac{\omega_0 r^2}{1 - (\omega_0 r/c)^2} d\phi. \quad (2.6)$$

Предполагая, что $\omega_0 r/c \ll 1$, собственное время имеет вид

$$\Delta \tau = \Delta t \sqrt{1 - (\omega_0 r/c)^2} \approx \Delta t, \quad (2.7)$$

из выше написанного мы получаем

$$\Delta\tau \approx \frac{\omega_0}{c^2} \oint r^2 d\phi = \pm \frac{2\omega_0 S}{c^2}, \quad (2.8)$$

где $S(\equiv \pi R^2)$ – площадь, описанная круговой траекторией радиуса R , знак «+» означает движение вдоль вращения и знак «-» – движение против вращения, соответственно. Это и есть задержка Саньяка (1.1), которая также появляется в эмпирической формуле Хафеле и Китинга [46,47] (1.6), где пренебрегается эффект гравитационного потенциала Земли. Шлегель [48] показал, что при $\Delta t = 2\pi R/v$, третий член уравнения (1.6) дает промежуток времени

$$\pm \frac{vR\omega_0}{c^2} \Delta t = \pm \frac{2\pi\omega_0 R^2}{c^2} = \pm \frac{2\omega_0 S}{c^2}, \quad (2.9)$$

который в точности совпадает с уравнением (2.8). Когда этот член извлечен из уравнения (1.6), получается подтверждение формулы задержки времени в СТО.

2.1.2. Метрика Керра-де Ситтера

Метрика Керра-де Ситтера [34,75,76] является решением с вращением уравнений поля Эйнштейна

$$R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}, \quad (2.10)$$

где $\Lambda > 0$ – космологическая постоянная, рассматривается как отрицательная (отталкивающая) плотность темной энергии. Полная метрика задается в виде

$$d\tau^2 = \frac{\Delta_r}{\rho^2 \Xi^2} [dt - a \sin^2 \theta d\phi]^2 - \frac{\Delta_\theta \sin^2 \theta}{\rho^2 \Xi^2} [(r^2 + a^2)d\phi - a dt]^2 - \frac{\rho^2}{\Delta_r} dr^2 - \frac{\rho^2}{\Delta_\theta} d\theta^2, \quad (2.11)$$

где для удобства мы переопределяем $\Lambda \equiv b\gamma$ так, чтобы

$$\Delta_r = (r^2 + a^2)(1 - \gamma r^2) - 2Mr, \quad (2.12)$$

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad (2.13)$$

$$\Delta_\theta = 1 + \gamma a^2 \cos^2 \theta, \quad (2.14)$$

$$\Xi = 1 + \gamma a^2, \quad (2.15)$$

где M – (асимптотическая) масса источника, a – отношение углового момента J к массе M , определенное в виде

$$a = \frac{J}{M}. \quad (2.16)$$

При $\gamma = 0$ получаем обычное решение Керра в координатах Бойера-Линдквиста. Далее будет вычислена задержка Саньяка для двух типов экваториальных орбит и рассмотрены только эффекты слабого поля, позволяющие сделать соответствующие приближения.

2.1.3. Задержка Саньяка для негеодезических круговых экваториальных орбит

Далее в работе будет использован метод Тарталья [9]. Согласно методу, рассматривается источник/приемник света, который движется по круговой орбите вокруг пространства-времени Керра-де Ситтера (2.11) на экваториальной плоскости $\theta = \pi/2$, как показано на Рис. 2.1.а. Источник/приемник света отправляет два противоположно направленных пучка света, которые также движутся по замкнутым круговым орбитам (Рис. 2.1.б). После кругового обхода оба пучка возвращаются к источнику/приемнику света с помощью подходящим образом расположенных зеркал. Предполагается так же, что источник/приемник света движется по орбите на некотором постоянном радиусе $r = R = const$ с равномерной угловой скоростью ω_0 от центрального вращающегося источника. Тогда метрика (2.11-2.15) сводится к

$$d\tau^2 = \frac{R^2 - 2MR + a^2 - \gamma R^2(R^2 + a^2)}{R^2(1 + a^2\gamma)^2} (dt - ad\phi)^2 - \frac{1}{R^2(1 + a^2\gamma)^2} [(R^2 + a^2)d\phi - adt]^2. \quad (2.17)$$

Подставив угол поворота ϕ_0 источника/приемника света (1.9) в выше написанное уравнение, получим

$$d\tau^2 = \frac{R^2 [1 - (R^2 + a^2) \{ \omega_0^2 + (1 - a\omega_0)^2 \gamma \}] - 2MR(1 - a\omega_0)^2}{R^2(1 + a^2\gamma)^2} dt^2. \quad (2.18)$$

Для двух пучков света, движущихся по одной той же круговой траектории, должно выполняться равенство $d\tau = 0$. Обозначив угловую скорость пучков света вдоль пути как Ω , получим

$$R^2 [1 - (R^2 + a^2) \{ \Omega^2 + (1 - a\Omega)^2 \gamma \}] - 2MR(1 - a\Omega)^2 = 0, \quad a^2\gamma \neq -1. \quad (2.19)$$

$$\delta\tau = \frac{4\pi}{R} \left[\{R^3 + 2Ma^2 + a^2R + a^2R(R^2 + a^2)\gamma\} \omega_0 - 2Ma - aR(R^2 + a^2)\gamma \right] / [(1 + a^2\gamma)] \quad (2.24)$$

$$\left[1 - 2M/R + 4a(M/R)\omega_0 - (R^2 + 2Ma^2/R + a^2)\omega_0^2 - (1 - a\omega_0)^2(R^2 + a^2)\gamma \right]^{1/2}.$$

Для источника/приемника, сохраняющего фиксированное положение в системе координат, определяемой удаленными неподвижными звездами (т.е. $\omega_0 = 0$), задержка Саньяка, при условии, что $a \neq 0$, сохраняется

$$\delta\tau_0 = - \frac{8\pi a \{M + \gamma R(a^2 + R^2)/2\}}{R(1 + a^2\gamma) \sqrt{1 - 2M/R - (a^2 + R^2)\gamma}}. \quad (2.25)$$

Уравнение (2.25) является первым порядком постньютоновского приближения для статичного источника/приемника света.

Уравнение (2.24) является точным результатом задержки Саньяка для экваториального движения. В большинстве случаев многие члены в этом уравнении очень малы, что позволяет приближать ряды, что и будет сделано далее. Предположим, что $\beta = \omega_0 R \ll 1$, и перепишем уравнение (2.24) в виде ряда разложенного по β до второго порядка

$$\delta\tau = - \frac{8\pi a \{M + \gamma R(a^2 + R^2)/2\}}{R(1 + a^2\gamma) \sqrt{1 - 2M/R - (a^2 + R^2)\gamma}} + \frac{4\pi \{R^2 - 2MR + a^2 - R^2(a^2 + R^2)\gamma\}}{R(1 + a^2\gamma) \{1 - 2M/R - (a^2 + R^2)\gamma\}^{3/2}} \beta$$

$$- \frac{12\pi a \left[\{M + \gamma R(a^2 + R^2)/2\} \{1 - 2M/R + a^2/R^2 - (a^2 + R^2)\gamma\} \right]}{R(1 + a^2\gamma) \{1 - 2M/R - (a^2 + R^2)\gamma\}^{5/2}} \beta^2. \quad (2.26)$$

Из этого уравнения очевидно, что член нулевого порядка точно такой же, как и $\delta\tau_0$ из уравнения (2.25), как и предполагалось. Теперь, выполним последовательное постньютоновское приближение по $\varepsilon = M/R \ll 1$ и по $a/R \ll 1$, и, используя выражение $\delta\tau_s = 4\omega_0 S = 4\omega_0 \pi R^2 = 4\pi \beta R$, получим конечный результат

$$\delta\tau \approx \delta\tau_s \left\{ 1 + \frac{\gamma R^2}{2} - \gamma a^2 \left(1 + \frac{\gamma R^2}{2} \right) \right\} + 4\pi R M \omega_0 \left\{ 1 + \frac{3\gamma R^2}{2} - \gamma a^2 \left(1 + \frac{3\gamma R^2}{2} \right) \right\}$$

$$- \frac{8\pi a M}{R} \left\{ 1 + \gamma R^2 - \gamma a^2 (1 + \gamma R^2) \right\}. \quad (2.27)$$

Эффект Саньяка в плоском пространстве $\delta\tau_s$ восстанавливается не полностью, даже если поправочные члены, содержащие M и a , пренебрежимо малы из-за появления дополнительного нелокального члена $\gamma R^2/2$, появляющегося из-за параметра γ , а именно:

$$\delta\tau \approx \delta\tau_s \left\{ 1 + \frac{\gamma R^2}{2} \right\}. \quad (2.28)$$

Отметим, что при $\gamma = \Lambda/6 \rightarrow 0$ восстанавливается задержка Саньяка нулевого порядка, которая совпадает с задержкой в пространстве-времени Минковского (2.8).

2.1.5. Задержка Саньяка для геодезических круговых экваториальных орбит

Экваториальная орбита, рассмотренная в предыдущих пунктах, была не геодезической или не находилась в свободном падении, так как источник/приемник двигался с угловой скоростью ω_0 , для которой не требовалось удовлетворение третьего закона Кеплера. Здесь мы рассматриваем круговую геодезическую орбиту источника/приемника света (возможно, спутника в свободном падении) на некотором произвольном радиусе на экваториальной плоскости, т.е. $\theta = \pi/2$, отправляющего пучки света, движущиеся вокруг Земли. Скорость вращения спутника ω_{\pm} теперь определяется самой круговой геодезической.

Определяя 4-вектор скорости, как $\dot{x}^v = \frac{dx^v}{d\tau}$, лагранжиан может быть записан

в виде

$$L = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \quad (2.29)$$

и уравнение Эйлера-Лагранжа для координаты r имеет вид

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) = \frac{\partial L}{\partial r}. \quad (2.30)$$

Так как в метрике (2.11)-(2.15) все компоненты $g_{r\mu} = 0$ при $r \neq \mu$, уравнение (2.40) можно переписать в упрощенном виде:

$$\frac{d}{d\tau}(g_{rr}\dot{r}) = \frac{1}{2} g_{\mu\nu,r} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu. \quad (2.31)$$

Круговые орбиты определяются из условий

$$\dot{r} = \ddot{r} = 0, \quad (2.32)$$

так, что уравнение (2.31) переходит в

$$g_{tt}\dot{t}^2 + 2g_{t\phi,r}\dot{t}\dot{\phi} + g_{\phi\phi,r}\dot{\phi}^2 = 0. \quad (2.33)$$

Определяя угловую скорость в виде $\omega = \dot{\phi}/\dot{t}$, это уравнение переходит в квадратичную форму

$$g_{\phi\phi,r}\omega^2 + 2g_{t\phi,r}\omega + g_{tt,r} = 0. \quad (2.34)$$

Подставляя $dr = 0$, так как предполагается, что $r = R = const$ и $d\theta = 0$ и из предположения $\theta = \pi/2$, в уравнение для метрики (2.11)-(2.15), находим

$$d\tau^2 = g_{tt}dt^2 + 2g_{t\phi}dtd\phi + g_{\phi\phi}d\phi^2,$$

где

$$g_{tt} = 1 - \frac{2M}{R} - \gamma(a^2 + R^2), \quad g_{t\phi} = \frac{2aM}{R} + \gamma a(a^2 + R^2),$$

$$g_{\phi\phi} = \frac{2aM}{R} + \gamma a(a^2 + R^2) \quad (2.35)$$

Угловая скорость источника/приемника определяется двумя корнями уравнения (2.34), подставляя в них метрические функции из (2.35), получим

$$\omega_{\pm} = \frac{(aM/R^2 - \gamma aR) \pm \sqrt{M/R - \gamma R^2}}{a^2 M/R^2 - R - \gamma a^2 R}. \quad (2.36)$$

Точное выражение для задержки Саньяка получим, подставив найденную угловую скорость в

$$\delta\tau_{s_{\pm}} = 4\pi R^2 \omega_{\pm}. \quad (2.37)$$

Полученный результат можно рассматривать как представление влияния космологической константы Λ на задержку Саньяка. При $a = 0$ и $\gamma = 0$ из уравнения (2.36) получаем $\omega_{\pm} = \mp \sqrt{M/R^3}$, которое, как и ожидалось, является третьим законом Кеплера. Теперь, разложим уравнение (2.36) в ряд Тейлора по (a/R) до первого порядка и получим

$$\omega_{\pm} = \left(\gamma R - \frac{M}{R^2} \right) \left(\frac{a}{R} \right) \pm \frac{1}{R} \sqrt{\frac{M}{R} - \gamma R^2}. \quad (2.38)$$

Отмечая, что $\omega_{\pm} = const$ (так как для круговых орбит $r = R = const$), мы можем вставить его в уравнение (2.37) так что

$$\delta\tau_{s\pm} = \pm 4\pi R^2 \left[\sqrt{MR - \gamma R^4} \mp \left(\frac{a}{R} \right) (M - \gamma R^3) \right]. \quad (2.39)$$

Члены разложения метрики Керра получаются при подстановке $\gamma = 0$, тогда мы приходим к формуле, полученной Лихтенеггером и Иорио [71].

2.1.6. Проверка эффекта Саньяка на соответствие принципу Маха

Принцип Маха интерпретировался столь многочисленными эквивалентными способами, что в зависимости от интерпретации можно было бы сделать даже противоположные выводы. Мах выступал против концепции Ньютона об абстрактном абсолютном пространстве, определяемом «неподвижными звездами», но выступал за то, что силы инерции должны быть вызваны ускорениями относительно всех других «тел» во вселенной (реляционная программа). Это одна из версий принципа Маха. Другой вариант заключается в том, что статичные источники должны вызывать статичные пространства-времена. Однако эта версия не была должным образом включена в ОТО Эйнштейна: вселенная Гёделя вращается, даже если тензор энергии-импульса источника является статичным, это показало, что принцип Маха не сохраняется в ОТО. Подлинно теория гравитации Маха была разработана Брансом и Дикке (БД) в 1961 году, но, по наблюдениям, есть небольшая разница с ОТО Эйнштейна, по крайней мере, в тестах солнечной системы в слабом поле, поскольку параметр связи БД довольно велик.

Недавно, Лихтенеггер и Иорио [71] в контексте парадокса близнецов и принципа Маха утверждали, что различное старение близнецов не обязательно должно соответствовать идеям Маха, а конечная причина поведения часов должна объясняться независимым статусом пространства-времени. Идея Маха относительности движения требует, чтобы пространство-время утратило свои

метрические свойства во вселенной, лишенной всей массы-энергии. Они утверждали, что в пределе нулевой массы-энергии пространство-время не растворяется в пустоту, а становится Минковским, производящим наблюдаемые эффекты, что делает нереализуемой реляционную программу Маха. Наш анализ усилит этот аргумент с другой точки зрения.

Различное старение близнецов – не парадокс, а результат абсолютной неоднородности синхронизации, которая возникает между двумя часами, летящими по замкнутым круговым орбитам вокруг вращающейся массы, скажем, Земли.

В работе вычислена точная задержка Саньяка в общем релятивистском пространстве-времени Керра-де Ситтера, предполагая, что в асимптотическом пределе она адекватно описывает пространство-время любого компактного вращающегося объекта, не обязательно черной дыры. Это позволило нам сделать постньютоновское разложение точной задержки для негеодезического и геодезического круговых движений источника/наблюдателя. Постньютоновское приближение нулевого порядка (2.28) было подтверждено экспериментом Хафеле и Китинга в работах [46,47] в эксперименте с часами, облетающими Землю. Эту величину можно вычислить, используя значения угловой скорости и радиуса для Земли, т.е. $\omega_0 = \omega_{\oplus} = 7.30 \times 10^{-5}$ рад/с и $R_{\oplus} = 6\,378\,137$ м, тогда, подставляя их в (2.28), получим известный результат $\delta\tau_s \approx 2 \times 207.4$ нс. Этот измеримый эффект нулевого порядка подтверждает вывод Лихтенеггера и Иорио [71], что конечная причина поведения часов (различное старение близнецов) должна быть приписана абсолютному положению пространства-времени (здесь Минковского), что противоречит реляционной программе Маха.

Показано, что два типа замкнутых круговых движений приводят к совершенно разным типам поведения задержки Саньяка. Для негеодезического кругового движения источника/приемника света в метрике Керра-де Ситтера точная задержка Саньяка в уравнении (2.24) показывает влияние Λ на него (движение называется негеодезическим, поскольку угловая скорость ω_0 не

подчиняется третьему закону Кеплера). Это согласуется с другими аналогичными работами в литературе, где было получено влияние Λ на орбитальные эффекты, появляющиеся на траектории пробной частицы [77], отклонение света [78] и прецессию перигелия [79], задержку во времени и другие эффекты [80]. Показано, что уравнения (2.27) в пределе $M \rightarrow 0$, $a \rightarrow 0$ и $\Lambda \rightarrow 0$, дают только задержку в пространстве-времени Минковского. Это означает, что по приходу к источнику/приемнику света после полного оборота вокруг пространства-времени часы будут демонстрировать разрыв синхронизации или различное старение близнецов, то есть часы не будут идти с одинаковой частотой. Этот наблюдаемый разрыв синхронизации (как и международная линия дат) является абсолютным свойством только вращающейся метрики Минковского, что противоречит принципу Маха.

Для геодезического кругового движения мы рассчитали в разд. 6 угловые скорости ω_{\pm} источника/наблюдателя, который дал закон Кеплера $\omega_{\pm} = \sqrt{M/R^3}$ в пределе $a \rightarrow 0$, $\Lambda \rightarrow 0$ (предел Шварцшильда). В отличие от уравнения (2.27) для геодезического кругового движения уравнение (2.39) теперь содержит гравитирующую массу M в ведущем порядке и в пределе $M \rightarrow 0$, $a \rightarrow 0$ и $\Lambda \rightarrow 0$ просто дает $\delta\tau_{S\pm} = 0$ в пространстве-времени Минковского. Это происходит потому, что $\omega_{\pm} = 0$ или, по-другому это объясняется тем, что кругового движения не существует. В этом случае, по крайней мере, эффект Саньяка не проявляется как наблюдаемый в пределе Минковского, и принцип Маха может быть выполнен. Приведенные выше результаты показывают интересный эффект различного поведения задержки Саньяка в зависимости от типа движения источника/приемника света, которая, насколько известно, в литературе до сих пор не обсуждался.

2.2. Эффект Саньяка в пространстве-времени Керра-Тауб-НУТ

Пространство-время Керра-Тауб-НУТ является осесимметричным стационарным решением уравнений вакуумного поля Эйнштейна с массой M , параметром вращения a и зарядом НУТ n . Заряд НУТ является дополнительной

характеристикой общей теории относительности, которая в электродинамике интерпретируется как двойная масса или гравитационный аналог магнитного монополя [81]. Далее заряд НУТ будет выражаться в релятивистских единицах как его гравитационный радиус Gn/c^2 для сравнения с гравитационным радиусом массы Земли GM/c^2 .

В работе [82] рассматривалась динамика частиц, взаимодействующих с монополями, и эта работа является первой, в которой провели исследование наблюдательных возможностей заряда НУТ. Чакраборти и Мажумдар [81] исследовали влияние заряда НУТ на частоту прецессии Лензе-Тирринга и показали, что она остается ненулевой даже в пределе $a \rightarrow 0$, этот факт они связывают с существованием «системы координат Коперника» (фиксированная ньютоновская система). Каграманова и др. [83] рассчитали фазовый сдвиг для эксперимента с интерференцией заряженных частиц в более общем пространстве-времени черной дыры Плебанского-Демянского. В том же пространстве-времени Хакманн и Ламмерцаль [84] в линейном приближении вывели верхний предел для параметра НУТ, используя (колеблющиеся орбитальные элементы) наблюдаемое смещение перигелия орбиты Меркурия [85]. Они использовали границу конусности, полученную из погрешности наклона орбиты Меркурия вокруг Солнца, что дало в безразмерных единицах предел $|n| < 0.032$.

Далее будет подсчитана задержка Саньяка в пространстве-времени Керр-Тауб-НУТ для геодезического и негеодезического движения источника/приемника света. С помощью задержки Саньяка в пространстве-времени Керр-Тауб-НУТ и экспериментальных данных эффекта Саньяка будет найден верхний предел заряда НУТ.

2.2.1. Метрика Керра-Тауб-НУТ

Метрика пространства-времени Керра-Тауб-НУТ в координатах Бойера-Линквиста ($x^0 = t$, $x^1 = r$, $x^2 = \theta$, $x^3 = \phi$) задается в виде:

$$ds^2 = \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} dt^2 - \frac{2\{\Delta A - a(\Sigma + aA) \sin^2 \theta\}}{\Sigma} dt d\phi$$

$$-\frac{(\Sigma+aA)^2 \sin^2 \theta - A^2 \Delta}{\Sigma} d\phi^2 - \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 - \Sigma d\theta^2 \quad (2.40)$$

Здесь функции Σ , Δ и A определены равенствами

$$\Sigma = r^2 + (n + a \cos^2 \theta)^2,$$

$$\Delta = r^2 - 2Mr - n^2 + a^2,$$

$$A = a \sin^2 \theta - 2n \cos \theta.$$

Параметры M , a и n имеют одинаковую размерность длины в относительных единицах. Источник гравитационного поля имеет массу M , полный момент импульса $J = Ma$ вдоль направления оси z и заряд НУТ n . Два решения $r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2 + n^2}$ уравнения $\Delta = 0$ определяют радиусы внутреннего (-) и внешнего (+) горизонтов событий, при $a^2 < M^2 + n^2$. Наше внимание будет ограничено областью за пределами внешнего горизонта: $r \geq r_+$.

2.2.2. Задержка Саньяка для негеодезических круговых экваториальных орбит

К метрике Керра-Тауб-НУТ (2.40) будет использован метод Тарталья. Согласно методу, рассматривается источник/приемник света, который движется по круговой орбите вокруг пространства-времени Керра-Тауб-НУТ (2.40) на экваториальной плоскости $\theta = \pi/2$, как показано на Рис. 2.2.а. Источник/приемник света отправляет два противоположно направленных пучка света, которые также движутся по замкнутым круговым орбитам (Рис. 2.1.б). После кругового обхода оба пучка возвращаются к источнику/приемнику света с помощью подходящим образом расположенных зеркал. Предполагается так же, что источник/приемник света движется по орбите на некотором постоянном радиусе $r = R = const$ с равномерной угловой скоростью ω_0 от центрального вращающегося источника. Тогда метрика (2.40) сводится к

$$d\tau^2 = \frac{R^2 \left(1 - \frac{2M}{R}\right) - n^2}{R^2 + n^2} dt^2 + \frac{4a(MR + n^2)}{R^2 + n^2} dt d\phi - \frac{(R^2 + n^2)^2 + a^2(R^2 + 2MR + 3n^2)}{R^2 + n^2} d\phi^2. \quad (2.41)$$

Предполагая, что осевая скорость вращения ω_0 черной дыры Керра-Тауб-НУТ постоянна, угол вращения ϕ_0 спутника задается уравнением (1.9). Подставляя (1.9) в (2.41) получим

$$d\tau^2 = \frac{R^2(1-a^2\omega_0^2-R^2\omega_0^2)-2MR(1-a\omega_0)^2}{R^2+n^2} dt^2 - \frac{n^2(1-4a\omega_0+3a^2\omega_0^2+2R^2\omega_0^2)+n^4\omega_0^2}{R^2+n^2} dt^2. \quad (2.42)$$

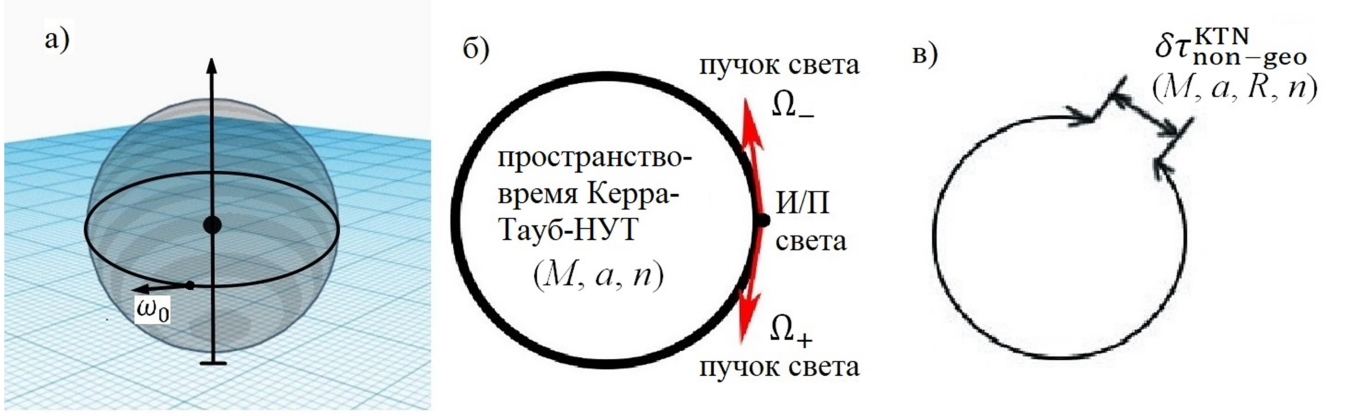


Рис. 2.2. Схематичное изображение эффекта Саньяка в пространстве-времени Керра-Тауб-НУТ. Для света, движущегося по одним и тем же круговым орбитам, должно выполняться условие $d\tau = 0$. Полагая Ω угловой скоростью движения света по траекториям, получим

$$-R^2 + 2MR + n^2 - 4a(MR + n^2)\Omega + [(R^2 + n^2)^2 + a^2(R^2 + 2MR + 3n^2)]\Omega^2 = 0. \quad (2.43)$$

Решая квадратное уравнение (2.43) относительно Ω , можно найти два корня, которые представляют угловую скорость Ω_{\pm} света для сонаправленно вращающегося с черной дырой Керра-Тауб-НУТ (+) и противоположно направленно (-), определяемого как

$$\Omega_{\pm} = \frac{2a(MR+n^2) \pm (R^2+n^2)\sqrt{R^2-2MR+a^2-n^2}}{(R^2+n^2)^2+a^2(R^2+2MR+3n^2)}. \quad (2.44)$$

Подставив в (1.17) уравнение (2.44) получим угол вращения источника/приемника вокруг черной дыры Керра-Тауб-НУТ

$$\phi_{0\pm} = \mp 2\pi\omega_0 / \left[\frac{2a(MR+n^2) \pm (R^2+n^2)\sqrt{R^2-2MR+a^2-n^2}}{(R^2+n^2)^2+a^2(R^2+2MR+3n^2)} \right]. \quad (2.45)$$

Собственное время вращающегося источника/приемника, выведенное из уравнения (2.42) с использованием (1.9), равно

$$\delta\tau = \left[\frac{R^2-2MR-n^2+4a(MR+n^2)\omega_0 - \{(R^2+n^2)^2+a^2(R^2+2MR+3n^2)\}\omega_0^2}{R^2+n^2} \right]^{1/2} \frac{d\phi_0}{\omega_0}. \quad (2.46)$$

Интегрируя между ϕ_{0-} и ϕ_{0+} , мы получаем точную задержку Саньяка

$$\delta\tau_S^{KTN} = -\left(\frac{4\pi}{R}\right) [2a(MR + n^2) - (R^2 + n^2)^2\omega_0 - a^2(R^2 + 2MR + 3n^2)\omega_0^2]/$$

$$[(1 + n^2/R^2)\{R^2 - 2MR - n^2 + 4a(MR + n^2)\omega_0 - \{(R^2 + n^2)^2 + a^2R(R + 2M) + 3n^2a^2\}\omega_0^2\}^{1/2}] \quad (2.47)$$

$$= \delta\tau_S + \text{поправочные члены зависящие от } n. \quad (2.48)$$

Уравнение (2.47) – формула для задержки Саньяка в пространстве-времени вращающейся черной дыры Керра-Тауб-НУТ для негеодезического движения источника/приемника света. Первый член, полученный после подстановки $M = 0$, $a = 0$ и $n = 0$ является членом плоского пространства $\delta\tau_S = 4\pi R^2\omega_0$ как в уравнении (1.1), который интерпретируется как гравитационный аналог эффекта Ааронова-Бома.

Статичное пространство-время Тауб-НУТ, полученное в пределе $a \rightarrow 0$ достаточно хорошо исследовано. Например, геодезические структуры в этом пространстве-времени были детально проанализированы в работе [86]. Интересно, что уравнение (2.47) в этом же пределе не обращается в нуль

$$\delta\tau^{TN} = \delta\tau_S^{KTN}|_{a=0} = \frac{4\pi(R^2+n^2)^{3/2}\omega_0}{\sqrt{R^2-2MR-n^2-(R^2+n^2)^2\omega_0^2}}. \quad (2.49)$$

Это задержка, измеряемая источником/приемником, движущимся с угловой скоростью ω_0 вокруг статического источника с зарядом НУТ n . Как объясняли Чакраборти и Мажумдар [81], пространство-время Тауба-НУТ не является инвариантным относительно обращения времени $t \rightarrow -t$, указывая на какое-то «вращение», аналогичное электродинамическому магнитному монополю. Они утверждают, что именно это аналоговое вращение ответственно за исчезновение прецессии Лензе-Тирринга. Интересно, что те же аргументы применимы к исчезающей задержке Саньяка при $a \rightarrow 0$ даже если эффекты имеют совершенно различное физическое происхождение – прецессия Лензе-Тирринга вызвана увлечением системы отсчета, а задержка Саньяка – асинхронностью времени.

Квадратное уравнение относительно n^2 под знаком корня в знаменателе уравнения (2.49) дает два точных корня

$$n_{\pm}^2 = \frac{\{1-4a\omega_0+(3a^2+2R^2)\omega_0^2\}}{2\omega_0^2} \mp \frac{(1-a\omega_0)\sqrt{1-6a\omega_0+(9a^2-8MR+8R^2)\omega_0^2}}{2\omega_0^2}. \quad (2.50)$$

Необходимо, чтобы знаменатель в уравнении (2.49) не был мнимым (который мы, таким образом, называем «ограничением реальности») должно выполняться неравенство $n^2 < n_{\pm}^2$.

При $a = 0$ и $n = 0$ метрика КТН сводится к черной дырой Шварцшильда, и из уравнения (2.47) задержка Саньяка так же не исчезает, и принимает вид:

$$\begin{aligned} \delta\tau^{Sch} &= \delta\tau_S^{KTN}|_{a=n=0} = \frac{4\pi R^2 \omega_0}{\sqrt{1 - \frac{2M}{R} - R^2 \omega_0^2}} \\ &\approx 4\pi R^2 \omega_0 + 4\pi MR \omega_0 + 2\pi R^4 \omega_0^3. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Второе слагаемое представляет собой поправку, обусловленную исключительно массой. При $M \rightarrow 0$ можно легко восстановить в ведущем порядке задержку плоского пространства, т.е. $\delta\tau_S = 4\pi R^2 \omega_0$.

При $a = 0$, $M = 0$ и $n \neq 0$ в уравнении (2.47), мы находим, что существует поправка к $\delta\tau_S$ исключительно за счет параметра НУТ, которая не зависит от радиуса R , определяемая выражением

$$\delta\tau|_{a=M=0} = 4\pi R^2 \omega_0 + 6\pi n^2 \omega_0. \quad (2.52)$$

Однако этот термин по-прежнему зависит от «радиуса» заряда НУТ n , который равен уменьшенному горизонту событий черной дыры $r_{\pm} = \pm n$, и, конечно, от угловой скорости ω_0 источника/приемника света.

2.2.3. Задержка Саньяка для геодезических круговых экваториальных орбит

В этом разделе рассматриваются круговые геодезические орбиты источника/приемника света (спутников в свободном падении) на некотором произвольном радиусе на экваторе ($\theta = \pi/2$), посылающего световые сигналы, движущиеся вокруг Земли. Отметим, так же, что скорость движения источника/приемника света, рассматриваемая в этом пункте, будет удовлетворять третьему закону Кеплера.

Подставляя $dr = 0$, т.к. $r = R = const.$ и $d\theta = 0$, т.к. $\theta = \pi/2$, метрика (2.40) может быть переписана в виде

$$d\tau^2 = g_{tt}dt^2 + 2g_{t\phi}dtd\phi + g_{\phi\phi}d\phi^2$$

где

$$g_{tt} = 1 - \frac{2(MR+n^2)}{R^2+n^2}, \quad g_{t\phi} = \frac{2a(MR+n^2)}{R^2+n^2}, \quad (2.53)$$

$$g_{\phi\phi} = -\frac{(R^2+n^2)^2+a^2(R^2+2MR+3n^2)}{R^2+n^2}. \quad (2.54)$$

Тогда орбитальные скорости спутника ω_{\pm} следуют из двух корней квадратного уравнения (2.33). Используя уравнения (2.53) и (2.54), получим

$$\omega_{\pm} = \left[\frac{an^2(M-2R)-aMR^2 \pm P}{Q} \right], \quad (2.55)$$

где

$$P = \sqrt{MR^7 + n^2R^5(M + 2R) + n^4R^3(4R - M) + n^6R(2R - M)},$$

$$Q = R^5 + Ma^2R^2 + n^2(2R^3 + n^2R - 2a^2R + Ma^2),$$

что показывает, что угловая скорость спутника ω_{\pm} определяется самой метрикой, которая теперь включает не только M , но также a и n .

Для того, чтобы зафиксировать геодезический радиус R , перейдем к слабому статическому ньютоновскому пределу слабого поля, т.е. рассмотрим угловую скорость источника/приемника света при $a = 0$, $n = 0$ и определим $\omega_{\pm} = \Omega_{\oplus}$, $M = M_{\oplus}$ для Земли. В этом пределе из (2.55) восстанавливается ньютоновское уравнение баланса сил

$$\Omega_{\oplus} = \sqrt{GM_{\oplus}/R^3}, \quad (2.56)$$

что дает $R = R_{geost} = 6.62R_{\oplus}$. Однако это не удивительно, поскольку мы уже рассматриваем общие релятивистские геодезические или свободные от силы орбиты. В дальнейшем обозначение R следует понимать как R_{geost} . Точная задержка Саньяка для геодезического движения тогда равна $\delta\tau_{S_{\pm}geo}^{KTN} = 4\pi\omega_{\pm}R^2$, что может быть записано в следующем виде:

$$\delta\tau_{S_{\pm}geo}^{KTN} = \pm 4\pi \left[\frac{-aMR^2 \pm \sqrt{MR^7}}{R^3 - a^2M} + \frac{n^2S}{2MR^2(R^3 - a^2M)^2} + O(n^4) \right], \quad (2.57)$$

где

$$S = 6aM^2R^5 - 4aMR^6 \mp \sqrt{MR^7(3a^2M^2 - 2a^2MR + 3MR^3 - 2R^4)}.$$

Когда параметр вращения Керра $a = 0$, но $n \neq 0$ (случай решения Тауб-НУТ), мы получаем задержку Саньяка в виде

$$\delta\tau_{S\pm geo}^{TN} = \pm 4\pi R^2 \left[\pm \frac{\sqrt{MR^7 + n^2R^5(M+2R) + n^4R^3(4R-M) + n^6R(2R-M)}}{R^5 + 2R^3n^2 + Rn^4} \right]. \quad (2.58)$$

Термины Керра следуют из разложения (2.57) при $n = 0$ при слабых полевых условиях $a^2/R^2 \ll 1$, $M/R \ll 1$, в результате чего получаемый результат совпадает с ведущим порядком с формулой, полученной Лихтенеггером и Иорио (1.38) и при $a = 0$ мы получаем значение Шварцшильда (1.39).

2.2.4. Применение эффекта Саньяка для ограничение заряда НУТ

(a) Эксперимент АВЭ.

Для ограничения заряда НУТ рассматривается результат точности эксперимента АВЭ [12], в котором была измерена земная задержка Саньяка. Остаточная ошибка задержки Саньяка их эксперимента составила всего 5 нс. Они использовали спутники GPS вокруг Земли, движущиеся с угловой скоростью ω_0 .

Найдем, сначала, эквивалентный радиус R_{eq} . Для этого используем одно из измеренных значений эксперимента, скажем, $\frac{1}{2}\delta\tau_S = 240$ нс, при условии обычной круговой навигации, после чего подставим все данные в уравнение (1.1). Для расчетов будут использованы следующие данные Земли:

$$R \rightarrow R_{eq} = 7 \times 10^6 \text{ м}, \quad (2.59)$$

$$\omega_0 = \Omega_{\oplus} = 7.3 \times 10^{-5} \text{ рад/с} \rightarrow \frac{2\omega_0}{c^2} = 1.622 \times 10^{-21} \text{ рад(с м}^{-2}\text{)}, \quad (2.60)$$

$$M \rightarrow \frac{GM_{\oplus}}{c^2} = 4.4 \times 10^{-3} \text{ м}, \quad (2.61)$$

$$a = a_{\oplus} = 9.81 \times 10^6 \text{ м}^2 \text{ с}^{-1}, \quad (2.62)$$

$$c = 3 \times 10^8 \text{ м с}^{-1}. \quad (2.63)$$

Нулевой порядок задержки Саньяка в плоском пространстве $\delta\tau_S = 4\pi\omega_0 R^2/c^2$, при $\omega_0 = \Omega_{\oplus}$ и $R = R_{\oplus} = 6.371 \times 10^6$ м, из-за экваториального движения бортовых атомных часов на восток и запад

$$\delta\tau_S = 2 \times \frac{2\Omega_{\oplus}}{c^2} \times \pi R_{\oplus}^2 = 4.148 \times 10^{-7} \text{ с} = 2 \times 207.4 \text{ нс}. \quad (2.64)$$

Как известно, это величина $\frac{1}{2}\delta\tau_S (= 207.4 \text{ нс})$ односторонняя задержка, измеренная Хафеле и Киттингом с остаточной ошибкой 10 нс в их эксперименте [46,47].

Подставим вышеуказанные земные данные (2.59)-(2.63) в $\frac{1}{2}\delta\tau_S$ точного уравнения (2.47), восстановив $\omega_0 = \omega_0/c^2$, $a = a_{\oplus}/c^2$ и преобразовав шкалу из секунд в наносекунды, $\frac{1}{2}\delta\tau = \frac{1}{2}\delta\tau \times 10^9 \text{ нс}$. Затем, разлагая в ряд Тейлора уравнение (2.47) по n , находим

$$\frac{1}{2}\delta\tau \times 10^9 = (239.718 + 7.30 \times 10^{-12}n^2\text{м}^{-2} + 8.75 \times 10^{-26}n^4\text{м}^{-4} + \dots) \text{ нс}, \quad (2.65)$$

где n имеет размерность длины. Это разложение здесь предназначено только для того, чтобы показать, что первое слагаемое является экспериментально наблюдаемым при пространственном значении $\frac{1}{2}\delta\tau_S^{flat} (= 239.718 \text{ нс})$ при эквивалентном радиусе (2.59), а остальные слагаемые являются поправками, обусловленными n . Если мы вычтем $\frac{1}{2}\delta\tau_S$ из общего числа $\frac{1}{2}\delta\tau$ в (2.65), то останется только суммарный поправочный член из-за M , a и n .

Поскольку земные значения M и a уже включены в уравнение (2.65) до разложения, в этом уравнении остается неизвестной только n . Используя предположение, что суммарный поправочный член меньше или равен среднему остатку ошибки 5 нс, получаем

$$n \leq 8.24 \times 10^5 \text{ м}. \quad (2.66)$$

Аналогично может быть получено подобное ограничение с использованием другого конечного значения эксперимента АВЭ $\frac{1}{2}\delta\tau_S^{flat} (= 350 \text{ нс})$.

С другой стороны, из ограничения «действительности заряда НУТ» $n^2 < n_{\pm}^2$ получаем

$$n_{+}^2 = -1.52 \times 10^{42} \text{ м}, \quad n_{-}^2 = 4.9 \times 10^{13} \text{ м}, \quad (2.67)$$

откуда n_{+} исключается из-за того, что ограничение получается мнимым, но

$$n < n_{-} = 7 \times 10^6 \text{ м}. \quad (2.68)$$

Пределы в (2.66) и (2.68) гравитационного радиуса заряда НУТ намного превышают гравитационную массу Земли ($= 4,40 \times 10^{-3}$ м) и никогда не наблюдались ни в одном наземном эксперименте. В принципе, пределы допускают значения $n \sim 0$, но нет никакого известного физического критерия, по которому они могли бы быть достигнуты. Таким образом, нет никакой надежды, ограничить земным экспериментом задержки Саньяка для негеодезических круговых орбит до значения, близкого к нулю, даже если уровень точности повышен с наносекунды до маловероятного уровня фемтосекунды.

(б) Метод двусторонней передачи сигналов времени и частоты через спутники.

Доступны обновленные данные синхронизации часов с использованием метода ДПСВЧ через спутники и свободно падающим (геодезическим движением) спутником в работе ГНСС [4,5]. Спутниковые системы оснащены точными, стабильными атомными часами на борту, в то время как на земле установлены точные часы, обеспечивающие всемирный доступ к местоположению, скорости и времени всех событий. Эшби в недавней работе [4] перечислил различные релятивистские факторы, которые необходимо учитывать для хорошей работы системы. Эти факторы включают в себя релятивистские принципы, концепции и эффекты, такие как постоянство скорости света, относительность синхронизации, координатное время, собственное время, замедление времени, эффект Саньяка, принцип слабой эквивалентности и гравитационные сдвиги частоты. Кроме того, временная задержка Шапиро и приливные эффекты, вызванные луной и солнцем, также должны быть учтены в будущих экспериментах для хорошей работы системы.

Для ограничения заряда НУТ будет использоваться не сама задержка Саньяка, а неустойчивость задержки, наблюдаемая в системе часов ГНСС после кругового облета вдоль экваториального геостационарного радиуса $R = R_{geost}$. Неустойчивость вызвана колебательным движением спутника вокруг экватора. Основная задержка Саньяка постоянна, когда положение земных станций фиксировано и спутник движется строго по экватору. В действительности,

фактическое положение геостационарного спутника слегка меняется в течение 24-часового периода. Исследование показало, что изменяющиеся во времени неустойчивость задержки из-за колебания спутника могут добавить более 0,5 нс к постоянному базовому значению.

Отметим, что в предыдущем разделе угловая скорость $\omega_0 = \Omega_{\oplus} = 7.27 \times 10^{-5}$ рад/с в уравнении (2.60) не была связана с геодезическим уравнением, следовательно, не удовлетворяло третьему закону Кеплера. Геодезическое уравнением угловой скорости определяется как

$$\Omega_{\oplus} = \sqrt{G M_{\oplus} / R_{geost}^3}, \quad (2.69)$$

откуда и получаем уникальный наблюдаемый геостационарный радиус

$$R_{geost} = 6.62 R_{\oplus} = 4.222 \times 10^7 \text{ м}. \quad (2.70)$$

Эта не связанность оставила свободный выбор радиуса орбитальных часов, в который входят негеодезические орбиты ($R = R_{\oplus}$), использовавшиеся в эксперименте Хафеле и Китинга, где часы двигались вокруг Земли на самолетах с двигателями. С другой стороны, часы ГНСС обязательно следуют геодезической орбите, возникающей на экваториальном геостационарном радиусе $R = R_{geost}$.

Нетривиальные изменения в двухсторонней задержке Саньяка из-за перехода с негеодезической на геодезическую орбиту на самом деле могут быть довольно большими:

$$\delta\tau_{Snongeo}^{HK} = \frac{4\pi\Omega_{\oplus}R_{\oplus}^2}{c^2} = 414.8 \text{ нс}, \quad (\omega_0 = \Omega_{\oplus}, R = R_{\oplus}), \quad (2.71)$$

$$\delta\tau_{Sgeo}^{Sch} = \frac{4\pi\Omega_{\oplus}R_{geost}^2}{c^2} = 18179.1 \text{ нс}, \quad (\omega_0 = \Omega_{\oplus}, R = R_{geost}). \quad (2.72)$$

Это показывает, что задержка от геодезического движения (2.72) будет в 43,7 раза больше, чем от негеодезического движения (2.71). Подставляя более точное значение Ω_{\oplus} из уравнения (2.69) в уравнение (2.72), можно получить

$$\delta\tau_S^{geo} = 4\pi\sqrt{M_{\oplus}R_{geost}}, \quad (2.73)$$

которая является переопределенным Ньютоновским выражением для задержки Саньяка. Этот член будет отображаться в ведущем порядке в разложении точной

задержки Саньяка (2.57) для геодезического движения в метрике КТН. Предполагая, что параметры $a = a_{\oplus}$, $M = M_{\oplus}$ принимают земные значения $a = a_{\oplus}$, $M = M_{\oplus}$ и геодезическую орбиту $R = R_{geost}$ в уравнении (2.57), и, преобразовав секунды в наносекунды, как и в предыдущем пункте, получим (оставляя только положительный знак внутри квадратной скобки):

$$\begin{aligned} |\delta\tau_{S\pm geo}^{KTN}| &= \delta\tau_{S\pm geo}^{Kerr} + corrections\ O(n^2) \\ &= [(\pm 1.80 \times 10^4 \mp 1.43 \times 10^{-10}) + 7.74 \times 10^{-3}n^2 + \dots] \text{ нс}, \end{aligned} \quad (2.74)$$

где из уравнения (2.57), $\delta\tau_{S\pm geo}^{Kerr} = \pm 1.80 \times 10^4 \mp 1.43 \times 10^{-10}$ нс, первый член является вкладом массы M_{\oplus} и второй обусловлен параметром вращения a_{\oplus} . Последнее слагаемое $7.74 \times 10^{-3}n^2$ нс в уравнении (2.74) выражает поправку в ведущем порядке, вызванную зарядом НУТ.

Тсенг и др. [69] показали, что задержка Саньяка может быть рассчитана с использованием координат земной станции и фактических данных эфемерид. В своем эксперименте они измеряли временную задержку Саньяка, называемой суточной поправкой, а так же они предсказали, что погрешность эксперимента $\Delta(\delta\tau_S)$ составляет $\pm 0,25$ нс, что намного точнее чем 5 нс, полученное Алланом, Вайсом и Эшби [3]. Это значение из метода ДПСВЧ через спутники обеспечивает верхнюю границу для поправочного члена в уравнении (2.74). Таким образом, поправочный член в ведущем порядке из-за заряда НУТ также должен быть меньше или равен суточному $\Delta(\delta\tau_S)$ нс, откуда получаем

$$n < \sqrt{\frac{\Delta(\delta\tau_S)}{7.74 \times 10^{-3}}} \text{ м} = 5.68 \text{ м}, \quad (2.75)$$

что намного меньше, чем полученный предел в уравнении (2.66), но все же в тысячу раз больше гравитационного радиуса массы Земли. Такое огромное количество заряда НУТ Земли не было обнаружено наблюдениями, и поэтому его существование практически исключено.

В пределе плоского пространства из уравнения (2.47) следует, что $\delta\tau_S^{KTN}|_{M=0, a=0, n=0} = \frac{4\pi R^2 \omega_0}{c^2} \approx 240$ нс, тогда как из уравнения (2.57) следует $\delta\tau_{S\pm geo}^{KTN}|_{M=0, a=0, n=0} = 0$. Следовательно, мы утверждаем, что ненулевая задержка

$\frac{4\pi R^2 \omega_0}{c^2}$ или разрыв синхронизации вызваны земными инерционными силами, действующими на часы летающих спутников из-за их негеодезического движения, поскольку такие силы не уравновешены силой тяжести Земли. Это наблюдение имеет значение для хорошо известного «парадокса близнецов», который является не парадоксом, а подлинным предсказанием СТО. Разрыв синхронности между летающими часами, вызванный силами инерции, является разницей в возрасте между кругосветными близнецами (пренебрегая эффектами скорости) [71]. С другой стороны, близнецы или часы, совершающие круговые геодезические измерения в плоском пространстве ($M = 0, a = 0, n = 0$), не будут иметь никакой разницы в возрасте после воссоединения.

2.3. Эффект Саньяка в пространстве-времени Йохансена-Псалтиса

Из теоремы «об отсутствии волос» [87,88] следует, что все черные дыры, которые являются решением уравнений Эйнштейна-Максвелла в ОТО, характеризуются только тремя параметрами: массой, электрическим зарядом и угловым моментом, а остальная информация исчезает за горизонтом событий. В работе [89] показано, что электрически заряженная черная дыра будет накапливать заряды противоположного знака и быстро нейтрализоваться. Следовательно, единственными физически значимыми параметрами астрофизических черных дыр являются их масса и момент импульса. Метрика Керра - это единственное стационарное, осесимметричное, асимптотически плоское вакуумное пространство-время в ОТО, которое обладает горизонтом событий.

В то время, как ОТО хорошо изучена в масштабах Солнечной системы [90], теория только недавно была подвергнута испытаниям в сильных гравитационных полях. Открытие излучения гравитационных волн [91] от слияния двух черных дыр обеспечило первые тесты ОТО в сильном гравитационном поле. Определение метрик для астрофизических черных дыр позволяет проверить ОТО в режиме сильного гравитационного поля. Альтернативные теории гравитации могут допускать пространства-времени черных дыр, которые не соответствуют теореме

«об отсутствии волос». Наблюдаемые нарушения теоремы «об отсутствии волос» подразумевают модификацию ОТО.

Учитывая появление гравитационно-волновой астрономии, а также предстоящих дополнительных наблюдений за черными дырами и нейтронными звездами в электромагнитном спектре, тесты теорий гравитации в сильном гравитационном поле становятся возможными [92, 93]. На сегодняшний день предложено большое количество модифицированных теорий гравитации, удовлетворяющих наблюдениям в сильном гравитационном поле.

Модифицированные теории гравитации могут быть проверены путем решения связанных с ними уравнений поля для получения решений для черных дыр и сравнивая их наблюдаемые свойства с предсказанными ОТО. С помощью достаточно точных астрономических данных можно, в принципе, различить конкурирующие гравитационные теории. В качестве альтернативы можно разработать независимый от модели тест ОТО, построив пространство-время черной дыры с параметрическими отклонениями от решения Керра. Эти пространства-времени черной дыры являются общими в том смысле, что они разработаны без обращения к конкретной теории гравитации. Нулевые измерения этих дополнительных параметров ознаменовали бы успешную проверку теоремы «об отсутствии волос».

Метрика Йоханнсена-Псалтиса [94] облегчает модельно-независимые тесты теорий гравитации. Эта метрика описывает пространство-время стационарной осесимметричной черной дыры, которая по построению нарушает теорему «об отсутствии волос». Примечательно, что метрика Йоханнсена-Псалтиса не возникает как решение полевых уравнений какой-либо конкретной теории гравитации. Принимая во внимание любую теорию гравитации, которая нарушает теорему «об отсутствии волос» должна быть возможна параметризация отклонений от метрики Керра. В принципе эти отклонения могут быть связаны с дополнительными параметрами метрики Йоханнсена-Псалтиса. Метрика Йоханнсена-Псалтиса была не первым предложенным общим пространством-временем черной дыры. Более ранние попытки, например в работе [95] имели

такие проблемы, как наличие сингулярностей и замкнутых времениподобных кривых за горизонтом событий. Метрика Йоханнсена-Псалтиса является хорошим примером альтернативы для параметризации поправок модифицированных теорий гравитации к решению Керра, поскольку это решение не содержит сингулярности.

Далее будет подсчитана задержка Саньяка в пространстве-времени Йоханнсена-Псалтиса для геодезического и негеодезического движения источника/приемника света. С помощью задержки Саньяка в пространстве-времени Йоханнсена-Псалтиса и экспериментальных данных эффекта Саньяка будет найден верхний предел параметра отклонения метрики Йоханнсена-Псалтиса.

2.3.1. Решение Йоханнсена-Псалтиса

Метрика Йоханнсена-Псалтиса в координатах Бойера-Лингквиста имеет вид:

$$\begin{aligned}
 ds^2 = & -[1 + h(r, \theta)] \left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma}\right) dt^2 - \frac{4aMr \sin^2 \theta}{\Sigma} [1 + h(r, \theta)] dt d\phi \\
 & + \frac{\Sigma[1+h(r,\theta)]}{\Delta+a^2 h(r,\theta) \sin^2 \theta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 \\
 & + \left[\left(r^2 + a^2 + \frac{2a^2 Mr \sin^2 \theta}{\Sigma}\right) \sin^2 \theta + h(r, \theta) \frac{a^2(\Sigma+2Mr) \sin^4 \theta}{\Sigma} \right] d\phi^2, \quad (2.76)
 \end{aligned}$$

где

$$\Sigma := r^2 + a^2 \cos^2 \theta,$$

$$\Delta := r^2 - 2Mr + a^2,$$

где M и a асимптотическая масса черной дыры Йоханнсена-Псалтиса и параметр вращения, соответственно. Метрика (2.76) сводится к метрике Керра в координатах Бойера-Линдквиста при $h(r, \theta) = 0$ и метрике Шварцшильда при $a = 0$. Здесь $h(r, \theta)$ представляет параметрическое отклонение от пространства-времени Керра и задается в виде ряда:

$$h(r, \theta) := \sum_{k=0}^{\infty} \left(\epsilon_{2k} + \epsilon_{2k+1} \frac{Mr}{\Sigma} \right) \left(\frac{M^2}{\Sigma} \right)^k, \quad (2.77)$$

где ϵ_n – безразмерные коэффициенты ряда (2.77).

Существует ряд наблюдательных ограничений на величину коэффициентов ϵ_n [94]. В общей теории относительности стационарные и асимптотически плоские пространства-времена должны сходиться как $1/r$ или быстрее. Пространство-время с более медленными скоростями схождения будет включать гравитационное излучение и поэтому не может быть стационарным. Аналогичные аргументы верны для пространств-времен, которые не являются решениями полевых уравнений Эйнштейна. Таким образом, функция $h(r, \theta)$ должна иметь порядок $O(r^{-n})$, где $n \geq 2$, и, следовательно, это условие приводит к $\epsilon_0 = \epsilon_1 = 0$. Параметры отклонения в слабом гравитационном поле из ОТО можно определить с помощью параметризованного пост-постньютоновского разложения. Из эксперимента по лазерной локации Луны [90] следует, что $|\epsilon_2| \leq 4.6 \times 10^{-4}$. Таким образом, ϵ_3 является первым неограниченным параметром в $h(r, \theta)$. В литературе для пространства-времени Йоханнсена-Псалтиса, рассматриваемого в экваториальной плоскости, часто рассматривают только главный не исчезающий вклад в $h(r, \theta)$, то есть «скалярные волосы» аппроксимируются через

$$h\left(r, \frac{\pi}{2}\right) = h(r) = \epsilon_3 \left(\frac{M}{r}\right)^3, \quad (2.78)$$

Параметр ϵ_3 еще не ограничен текущими наблюдательными тестами ОТО и ограничение этого параметра является интересной задачей в физике.

2.3.2. Задержка Саньяка для негеодезических круговых экваториальных орбит

Далее будет применен методу Тартальи [10]. Согласно методу рассматривается источник/приемник света, который посылает два противоположно направленных пучка света по орбите в экваториальной плоскости, то есть $\theta = \pi/2$, вокруг вращающейся черной дыры Йоханнсена-Псалтиса, описываемой метрикой (2.76) с функцией $h(r)$ заданной в виде (2.78) (как показано на Рис.2.3а и 2.3б). Соответственно расположенные зеркала возвращают оба луча в исходное положение после их кругового перемещения вокруг черной дыры Йоханнсена-Псалтиса. Предположим далее, что источник/приемник света вращается вокруг черной дыры Йоханнсена-Псалтиса

на постоянном радиусе далеко от горизонта, $r = R = \text{const.}$ соответственно. Тогда метрика (2.76) сводится к

$$d\tau^2 = \frac{-4a(R+M\epsilon_3)dtd\phi - (2M-R)(R+M\epsilon_3)dt^2 + (R^4+a^2(2M+R)(R+M\epsilon_3))d\phi^2}{R^2}. \quad (2.79)$$

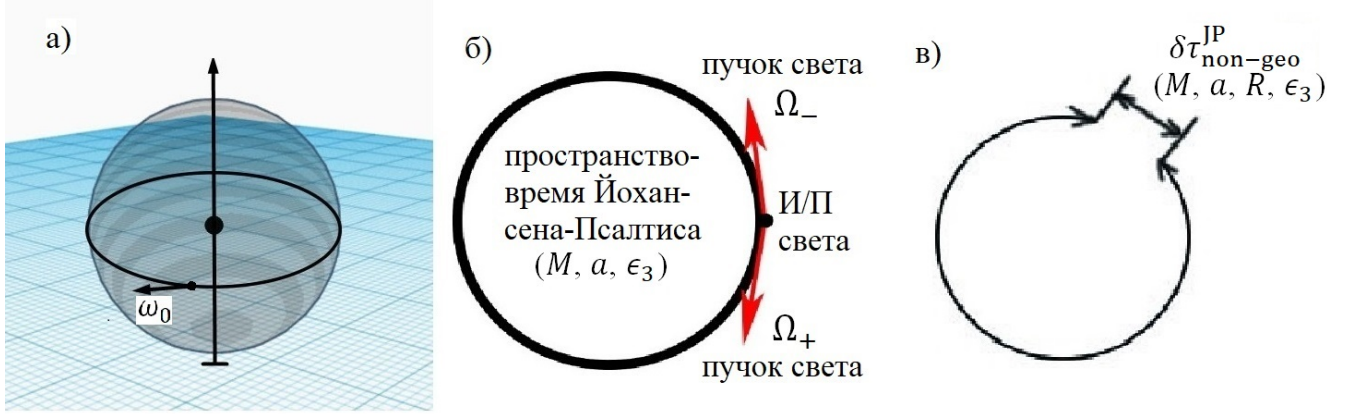


Рис. 2.3. Схематичное изображение эффекта Саньяка в пространстве-времени Йохансена-Псалтиса.

Предполагая, что осевая скорость вращения ω_0 черной дыры Йоханнсена-Псалтиса постоянна, угол вращения ϕ_0 источника/приемника света задается уравнением (1.9). Подставляя (1.9) в (2.79) получим

$$d\tau^2 = \frac{-(2M-R)(R+M\epsilon_3) + 4aM(R+M\epsilon_3)\omega_0 - \{R^4 + a^2(2M+R)(R+M\epsilon_3)\}\omega_0^2}{R^2} dt^2. \quad (2.80)$$

Для света, движущегося по одним и тем же круговым орбитам, должно выполняться условие $d\tau = 0$. Полагая Ω угловой скоростью движения света по траекториям, получим

$$\begin{aligned} & -(2M-R)(R+M\epsilon_3) + 4aM(R+M\epsilon_3)\omega_0 \\ & - (R^4 + a^2(2M+R)(R+M\epsilon_3))\omega_0^2 = 0 \end{aligned} \quad (2.81)$$

Решая квадратное уравнение (2.81) относительно Ω , можно найти два корня, которые представляют угловую скорость Ω_{\pm} света, определяемые как

$$\Omega_{\pm} = \frac{2aMR + 2aM^2\epsilon_3 \pm \sqrt{a^2R^4 - 2MR^5 + R^6 + 2a^2MR^3\epsilon_3 - 2M^2R^4\epsilon_3 + MR^5\epsilon_3 + a^2M^2R^2\epsilon_3^2}}{2a^2MR + a^2R^2 + R^4 + 2a^2M^2\epsilon_3 + a^2MR\epsilon_3}. \quad (2.82)$$

Подставив в (1.17) уравнение (2.82) получим угол вращения источника/приемника вокруг черной дыры Йоханнсена-Псалтиса

$$\phi_{\pm} = \mp 2\pi\omega_0 / \left[\pm \frac{\sqrt{a^2R^4 - 2MR^5 + R^6 + 2a^2MR^3\epsilon_3 - 2M^2R^4\epsilon_3 + MR^5\epsilon_3 + a^2M^2R^2\epsilon_3^2}}{2a^2MR + a^2R^2 + R^4 + 2a^2M^2\epsilon_3 + a^2MR\epsilon_3} - \omega_0 \right]. \quad (2.83)$$

Собственное время вращающегося источника/приемника, выведенное из уравнения (2.80) с использованием (1.9), равно,

$$d\tau = \frac{\sqrt{-(2M-R)(R+M\epsilon_3)+4aM(R+M\epsilon_3)\omega_0-(R^4+a^2(2M+R)(R+M\epsilon_3))\omega_0^2}}{R} \frac{d\phi_0}{\omega_0}. \quad (2.84)$$

Наконец, интегрируя между ϕ_{0-} и ϕ_{0+} , получаем

$$d\tau = \frac{\sqrt{-(2M-R)(R+M\epsilon_3)+4aM(R+M\epsilon_3)\omega_0-(R^4+a^2(2M+R)(R+M\epsilon_3))\omega_0^2}}{R} \frac{\phi_{0+}-\phi_{0-}}{\omega_0}. \quad (2.85)$$

Используя пределы интегрирования из уравнения (2.83), находим точную задержку Саньяка в пространстве-времени Йоханнсена-Псалтиса для негеодезических круговых орбит источника/приемника света

$$\delta\tau = \frac{4(-2aM(R+M\epsilon_3)+R^4\omega_0+a^2(2M+R)(R+M\epsilon_3)\omega_0)\pi}{R\sqrt{(-2M+R)(R+M\epsilon_3)+4aM(R+M\epsilon_3)\omega_0-(R^4+a^2(2M+R)(R+M\epsilon_3))\omega_0^2}}. \quad (2.86)$$

Далее, будет рассмотрен случай, когда источник/приемник света находится в статичном положении в системе координат, определяемой удаленными неподвижными звездами ($\omega_0 = 0$). В этом случае задержка Саньяка также существует при условии, что $a \neq 0$, и имеет вид:

$$\delta\tau_0 = \frac{-8aM(R+M\epsilon_3)\pi}{R\sqrt{(-2M+R)(R+M\epsilon_3)}}. \quad (2.87)$$

В большинстве случаев многие члены в уравнении (2.86) очень малы, что позволяет использовать постньютоновское приближение. Предположим, что $\beta = \omega_0 R_1 \ll 1$, и применив разложение уравнения (2.86) в ряд Тэйлора по β до второго порядка, получим:

$$\begin{aligned} \delta\tau \approx & -\frac{8\pi aM(R+M\epsilon_3)}{R\sqrt{(-2M+R)(R+M\epsilon_3)}} + \frac{4\pi(R+M\epsilon_3)\{R^2(-2M+R)+a^2(R+M\epsilon_3)\}}{\{(-2M+R)(R+M\epsilon_3)\}^{3/2}} \beta \\ & - \frac{12\pi aM\{R^2(-2M+R)+a^2(R+M\epsilon_3)\}}{R(-2M+R)^2\sqrt{(-2M+R)(R+M\epsilon_3)}} \beta^2, \end{aligned} \quad (2.88)$$

где первый член разложения совпадает с $\delta\tau_0$, полученном в уравнении (2.87). Далее, выполняется последовательное постньютоновское приближение $M/R \ll 1$ и $a/R \ll 1$ получаем

$$\delta\tau \approx \delta\tau_S - \frac{8\pi aM}{R} + 2\pi\omega_0 MR(2 - \epsilon_3), \quad (2.89)$$

где $\delta\tau_S = 4\omega_0 R^2 = 4\pi\omega_0 R^2 = 4\pi\beta R$. Из (2.89) видно, что параметр отклонения метрики Йоханнсена-Псалтиса появляется только в третьем члене разложения.

2.3.3. Задержка Саньяка для геодезических круговых экваториальных орбит

В этом разделе рассматриваются круговые геодезические орбиты источника/приемника света на некотором произвольном радиусе на экваторе ($\theta = \pi/2$), посылающего световые сигналы, движущиеся вокруг Земли. Отметим, так же, что скорость движения источника/приемника света рассматриваемая в этом пункте будет удовлетворять третьему закону Кеплера.

Подставляя $dr = 0$, т.к. $r = R = const.$ и $d\theta = 0$, т.к. $\theta = \pi/2$, метрика (2.76) может быть переписана в виде

$$d\tau^2 = g_{tt}dt^2 + 2g_{t\phi}dtd\phi + g_{\phi\phi}d\phi^2,$$

где

$$g_{tt} = \left(1 - \frac{2M}{R}\right) \left(1 + \frac{\epsilon_3 M}{R}\right), \quad g_{t\phi} = \frac{2aM}{R} \left(1 + \frac{\epsilon_3 M}{R}\right),$$

$$g_{\phi\phi} = -a^2 - \frac{2a^2 M}{R} - R^2 - \frac{a^2 M \left(1 + \frac{2M}{R}\right) \epsilon_3}{R}. \quad (2.90)$$

Тогда орбитальные скорости спутника ω_{\pm} следуют из двух корней квадратного уравнения (2.33). Используя уравнения (2.90) и (2.54), получим

$$\omega_{\pm} = \frac{2aMR + 4aM^2\epsilon_3 \pm \sqrt{4MR^5 + 8M^2R^4\epsilon_3 - 2MR^5\epsilon_3 + a^2M^2R^2\epsilon_3^2}}{2a^2MR - 2R^4 + 4a^2M^2\epsilon_3 + a^2MR}. \quad (2.91)$$

Задержка Саньяка для геодезического движения определяется уравнением $\delta\tau_{S\pm} = 4\pi R^2 \omega_{\pm}$ и подставляя (2.91), получаем

$$\delta\tau_{S\pm} = \pm 4\pi R^2 \left[\frac{2aMR + 4aM^2\epsilon_3 \pm \sqrt{4MR^5 + 8M^2R^4\epsilon_3 - 2MR^5\epsilon_3 + a^2M^2R^2\epsilon_3^2}}{2a^2MR - 2R^4 + 4a^2M^2\epsilon_3 + a^2MR\epsilon_3} \right]. \quad (2.92)$$

Полученное выше $\delta\tau_{S\pm}$ является точной задержкой Саньяка в пространстве-времени Йоханнсена-Псалтиса для геодезического движения источника/приемника света. Этот результат можно рассматривать как представление влияния параметра отклонения ϵ_3 на задержку Саньяка.

Легко проверить, что подставив $a = 0$ и $\epsilon_3 = 0$ в уравнение (2.91), угловая скорость сводится к $\omega_{\pm} = \mp \sqrt{\frac{M}{R^3}}$, что является третьим законом Кеплера. Разложим теперь уравнение (2.92) до первого порядка в (a/R) и получим:

$$\delta\tau_{S\pm} = 4\pi R^2 \left[\pm \frac{\sqrt{MR^4(2R+4M\epsilon_3-R\epsilon_3)}}{\sqrt{2}R^4} + \frac{(-MR-2M^2\epsilon_3)}{R^3} \left(\frac{a}{R}\right) \right]. \quad (2.93)$$

2.3.4. Применение эффекта Саньяка для ограничения параметра отклонения метрики Йоханнсена-Псалтиса

Предположим, что источник/приемник движется по круговой траектории, близкой к Земле, таким образом, что гравитация Земли вблизи ее поверхности (слабое гравитационное поле) описывается метрикой Йоханнсена-Псалтиса (2.76). Гравитационное поле Земли уже было описано в слабом поле метрикой Керра, ведущей, например, к прецессии Лензе-Тирринга, проверенной в наблюдениях LAGEOS, LAGEOS II [96], Gravity Probe-A, Gravity Probe-B [97].

Для получения верхнего предела для параметра искажения ϵ_3 по земной задержке Саньяка, мы рассмотрим соответствующие данные Земли (2.59)-(2.63). Подставим вышеуказанные земные данные в уравнение (2.86), которое описывает точную задержку Саньяка в пространстве-времени Йоханнсена-Псалтиса, и разложим его в ряд Тэйлора по параметру ϵ_3 и в результате получим:

$$\frac{1}{2} \delta\tau \times 10^9 = (239.459 - 7.686 \times 10^{-1} \epsilon_3 + 3.697 \times 10^{-26} \epsilon_3^2 + \dots) \text{нс.} \quad (2.94)$$

Это разложение записано для того, чтобы показать, что первый член - это экспериментально наблюдаемое значение задержки Саньяка при пространственном значении $\frac{1}{2} \delta\tau_S = 239.459$ нс, а остальные члены являются поправками, обусловленными параметром отклонения метрики Йоханнсена-Псалтиса ϵ_3 .

Если вычтем $\frac{1}{2} \delta\tau_S$ из общего выражения $\frac{1}{2} \delta\tau$, то останется только суммарный поправочный член из-за M , a и ϵ_3 . Предполагая, что суммарный поправочный член меньше или равен средней остаточной ошибке эксперимента АВЭ 5 нс, получаем

$$\epsilon_3 \leq 6.5 \times 10^7. \quad (2.95)$$

Несмотря на то, что в работе был получен довольно большой предел на параметр отклонения метрики Йоханнсена-Псалтиса, он является первым экспериментальным ограничением.

2.4. Эффект Саньяка в пространстве-времени Айон-Беато-Гарсия

В общей теории относительности существование сингулярностей представляется свойством большинства физически релевантных решений уравнений Эйнштейна, в частности всех известных современных точных решений черных дыр [98]. Гипотеза о космической цензуре Пенроуза утверждает, что эти сингулярности должны быть охвачены горизонтами событий; между внутренней частью черной дыры и внешними полями не может быть причинно-следственной связи, поэтому патологии, возникающие в сингулярной области, не будут влиять на внешнюю область, где физические законы не нарушаются [99]. Однако, внутренняя часть черной дыры до горизонта событий так же входит в полное пространство-время. На сегодняшний день нет хорошего описания процесса падения физических объектов внутрь черной дыры и истолковано как нарушение ОТО.

Для решения этого вопроса в литературе были предложены регулярные модели черных дыр [100-103]. Бардин первым предложил модель несингулярной черной дыры. Впоследствии все подобные модели были названы «черными дырами Бардина» [104]. Однако, все эти модели не являются точными решениями уравнений Эйнштейна. Для того, чтобы убрать сингулярность в решениях были предложены теории гравитации обобщающие ОТО.

Наилучшим кандидатом для создания моделей черных дыр без сингулярностей является теория струн [105]. Есть примеры в других контекстах, например, в $N = 1$ решениях супергравитационной доменной стенки с горизонтами, но никаких особенностей не найдено [106], другой пример - в теории точного конформного поля [107].

В работах [108-110] были найдены регулярные решения черных дыр уравнений Эйнштейна связанные с нелинейным электродинамическим полем, которые были названы в честь первооткрывателей Айон-Беато и Гарсия.

2.4.1. Метрика Айон-Беато-Гарсия

Действие в пространстве-времени АБГ задается в виде [111]

$$S = \int dv \left(\frac{1}{16\pi} R - \frac{1}{4\pi} (2PH_P - H) \right), \quad (2.96)$$

где R – скаляр кривизны Риччи, $P = \frac{1}{4} P_{\mu\nu} P^{\mu\nu}$,

$$H(P) = \frac{P e^{-s \sqrt{-2Q^2 P}}}{(1 + \sqrt{-2Q^2 P})^{5/2}} \left(1 + \sqrt{-2Q^2 P} + \frac{3}{s} \sqrt[4]{-2Q^2 P} \right) \quad (2.97)$$

это функция описывающая источник и $H_P \equiv \partial H / \partial P$. В уравнении (2.97) $s = |Q|/M$, Q и M являются свободными параметрами, которые будут связаны с зарядом и массой. Из уравнения (2.97) видно, что функция $H(P)$ нелинейно-электромагнитной модели сводится к теории Максвелла, т.е. $H \approx P$, для слабых полей ($P \ll 1$). В этом описании обычная электромагнитная сила определяется выражением $F_{\mu\nu} = H_P P_{\mu\nu}$.

Регулярное сферически-симметричное пространство-время черной дыры АБГ в стандартных координатах имеет вид

$$ds^2 = \left[1 - \frac{2Mr^2}{(r^2+Q^2)^{3/2}} + \frac{Q^2 r^2}{(r^2+Q^2)^2} \right] dt^2 - \left[1 - \frac{2Mr^2}{(r^2+Q^2)^{3/2}} + \frac{Q^2 r^2}{(r^2+Q^2)^2} \right]^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (2.98)$$

Электрическое поле задается в виде

$$E_r = Qr^4 \left[\frac{r^2 - 5Q^2}{(r^2 + Q^2)^4} + \frac{15}{2} \frac{M}{(r^2 + Q^2)^{7/2}} \right]. \quad (2.99)$$

В работе [112] был применен алгоритм Ньюмена-Яниса к метрике АБГ (2.98) и в результате получено решение с вращением

$$ds^2 = -f(r, \theta) dt^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 - 2a \sin^2 \theta (1 - f(r, \theta)) d\phi dt + \Sigma d\theta^2 + \sin^2 \theta [\Sigma - a^2 (f(r, \theta) - 2) \sin^2 \theta] d\phi^2, \quad (2.100)$$

где a – параметр вращения,

$$f(r, \theta) = 1 - \frac{2Mr^2}{(r^2+Q^2)^{3/2}} + \frac{Q^2 r^2}{(r^2+Q^2)^2}, \quad (2.101)$$

$$\Delta = \Sigma f(r, \theta) + a^2 \sin^2 \theta, \quad (2.102)$$

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta. \quad (2.103)$$

2.4.2. Задержка Саньяка для негеодезических круговых экваториальных орбит

Далее будет применен метод Тартальи [10] к метрике АБГ (2.100)-(2.103). Согласно методу рассматривается источник/приемник света, который посылает два противоположно направленных пучка света по орбите в экваториальной плоскости, то есть $\theta = \pi/2$, вокруг вращающейся черной дыры Йоханнсена-Псалтиса, описываемой метрикой АБГ (как показано на Рис.2.4а и 2.4б). Соответственно расположенные зеркала возвращают в исходное положение оба пучка после их кругового перемещения. Предполагается также, что источник/приемник света вращается вокруг черной дыры АБГ на постоянном радиусе $r = R = const$. Тогда метрика (2.100)-(2.103) сводится к

$$d\tau^2 = \left[1 - \frac{2MR^2}{(Q^2+R^2)^{3/2}} + \frac{Q^2R^2}{(Q^2+R^2)^2} \right] dt^2 - 2aR^2 \left[\frac{Q^2}{(Q^2+R^2)^2} - \frac{2M}{(Q^2+R^2)^{3/2}} \right] dt d\phi - \left[R^2 + a^2 \left\{ 1 - \frac{Q^2R^2}{(Q^2+R^2)^2} + \frac{2MR^2}{(Q^2+R^2)^{3/2}} \right\} \right] d\phi^2. \quad (2.104)$$

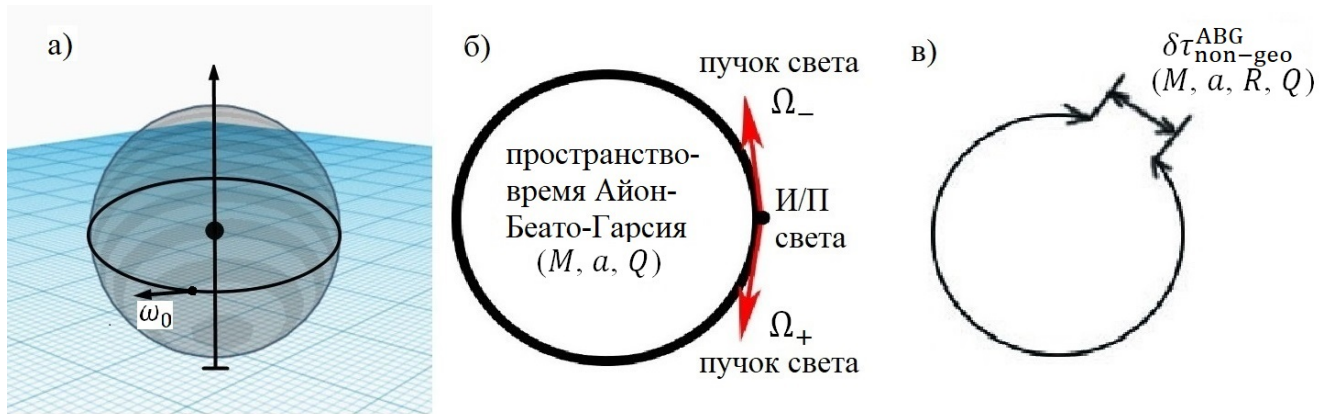


Рис. 2.4. Схематичное изображение эффекта Саньяка в пространстве-времени Айон-Беато-Гарсия.

Из предположения, что осевая скорость вращения ω_0 черной дыры АБГ постоянна, угол вращения источника/приемника задается уравнением (1.9). Подставив (1.9) в (2.104) получим

$$d\tau^2 = \frac{R^4 \{ 1 - (a^2 + R^2) \omega_0^2 \} + Q^2 R^2 \{ 3 - 2a\omega_0 - (a^2 + 2R^2) \omega_0^2 \} + Q^4 \{ 1 - (a^2 + R^2) \omega_0^2 \}}{(Q^2 + R^2)^2} dt^2 + \frac{2MR^2(1 - a\omega_0)^2}{(Q^2 + R^2)^{3/2}} dt^2. \quad (2.105)$$

Пучки света, движущиеся по одинаковым круговым траекториям, должны подчиняться условию $d\tau = 0$. Полагая Ω угловой скоростью движения пучков света по траектории, получим

$$R^4\{1 - (a^2 + R^2)\Omega^2\} + Q^2R^2\{3 - 2a\omega_0 - (a^2 + 2R^2)\Omega^2\} + Q^4\{1 - (a^2 + R^2)\Omega^2\} - 2MR^2\sqrt{Q^2 + R^2}(1 - a\Omega)^2 = 0. \quad (2.106)$$

Решая уравнение (2.106) относительно переменной Ω , можно найти два корня, которые представляют угловую скорость Ω_{\pm} пучков света вращающихся вокруг черной дыры АБГ, которые определяются как

$$\Omega_{\pm} = \frac{4aMR^2\sqrt{Q^2+R^2}-2aQ^2R^2}{2N_{ABG}} \pm \frac{\sqrt{\{2aQ^2R^2-4aMR^2\sqrt{Q^2+R^2}\}^2+4(Q^4+3Q^2R^2+R^4-2MR^2\sqrt{Q^2+R^2})N_{ABG}}}{2N_{ABG}}, \quad (2.107)$$

где

$$N_{ABG} = R^6 + 2a^2MR^2\sqrt{Q^2 + R^2} + a^2R^4 + Q^2R^2(a^2 + 2R^2) + Q^4(a^2 + R^2).$$

Подставив найденную величину в уравнение (1.17) получим, что угол вращения источника/приемника вокруг черной дыры АБГ определяется как

$$\phi_{0\pm} = \mp 2\pi\omega_0 / \left[\pm \frac{\sqrt{\{2aQ^2R^2-4aMR^2\sqrt{Q^2+R^2}\}^2+4(Q^4+3Q^2R^2+R^4-2MR^2\sqrt{Q^2+R^2})N_{ABG}}}{2N_{ABG}} + \frac{4aMR^2\sqrt{Q^2+R^2}-2aQ^2R^2}{2N_{ABG}} - \omega_0 \right] \quad (2.108)$$

Собственное время вращающегося источника/приемника света, выведенное из уравнения. (2.105) с использованием уравнения. (1.6), является

$$d\tau = \left[\frac{R^4\{1-(a^2+R^2)\omega_0^2\}+Q^2R^2\{3-2a\omega_0-(a^2+2R^2)\omega_0^2\}+Q^4\{1-(a^2+R^2)\omega_0^2\}}{(Q^2+R^2)^2} + \frac{2MR^2(1-a\omega_0)^2}{(Q^2+R^2)^{3/2}} \right] \frac{d\phi_0}{\omega_0}. \quad (2.109)$$

Интегрируя между ϕ_{0-} и ϕ_{0+} , получаем задержку Саньяка в пространстве-времени вращающейся черной дыры АБГ для негеодезического движения источника/приемника света, которая во втором порядке по Q имеет вид

$$\delta\tau = \delta\tau_{\text{Kerr}} - 2\pi(R + 3M)(1 - a\omega_0)[R^3\omega_0 + a^2(R - 4M) + a^3(R + 2M)\omega_0^2]$$

$$-a(2R - 2M - R^3\omega_0^2)]Q^2/[R^{5/2}\{R(1 - (R^2 + a^2)\omega_0^2) - 2M(1 - a\omega_0)^2\}^{3/2}].(2.110)$$

В большинстве случаев, многие члены этого уравнения очень малы, что позволяет использовать постньютоновское приближение. В постньютоновском приближении уравнении (2.110) имеет вид

$$\delta\tau = \delta\tau_S \left(1 - \frac{Q^2}{2R^2}\right) + 4\pi RM\omega_0 \left(1 - \frac{3Q^2}{R^2}\right) - \frac{8\pi aM}{R} \left(1 - \frac{5Q^2}{2R^2}\right). \quad (2.111)$$

2.4.3. Задержка Саньяка для геодезических круговых экваториальных орбит

В этом разделе рассматривается круговая геодезическая орбита источника/приемника света на некотором произвольном радиусе на экваториальной плоскости ($\theta=\pi/2$), который посылает два пучка света, которые облетают Землю. В этом случае угловая скорость спутника ω_{\pm} определяется самой круговой геодезической, которая удовлетворяет третьему закону Кеплера.

Подставляя $dr = 0$ при $r = R = const.$ и $d\theta = 0$ при $\theta = \pi/2$, метрика (2.100)-(2.103) может быть переписана в виде

$$d\tau^2 = g_{tt}dt^2 + 2g_{t\phi}dtd\phi + g_{\phi\phi}d\phi^2, \quad (2.112)$$

где

$$g_{tt} = 1 - \frac{2MR^2}{(Q^2+R^2)^{3/2}} + \frac{Q^2R^2}{(Q^2+R^2)^2}, \quad g_{t\phi} = 2a \left\{ \frac{2MR^2}{(Q^2+R^2)^{3/2}} - \frac{Q^2R^2}{(Q^2+R^2)^2} \right\}, \quad (2.113)$$

$$g_{\phi\phi} = -R^2 - a^2 \left\{ 1 + \frac{2MR^2}{(Q^2+R^2)^{3/2}} - \frac{Q^2R^2}{(Q^2+R^2)^2} \right\}. \quad (2.114)$$

Тогда орбитальные скорости спутника ω_{\pm} следуют из двух корней квадратного уравнения (1.19). Используя уравнения (2.112)-(2.114), после разложения по Q , получим

$$\omega_{\pm} = \frac{-2aM \pm \sqrt{M(3a^2M+R^3)}}{-a^2M+R^3} \mp \frac{Q^2R(9M+2R)(7a^2M+R^3-4a\sqrt{M(3a^2M+R^3)})}{4(-a^2M+R^3)^2\sqrt{M(3a^2M+R^3)}} \quad (2.115)$$

Точная задержка Саньяка для геодезического движения источника/приемника света будет равна $\delta\tau_{S\pm geo}^{ABG} = 4\pi\omega_{\pm}R^2$, что может быть записано в явном виде, после подстановки ω_{\pm} из уравнения (2.115):

$$\delta\tau_{S\pm geo}^{ABG} = \pm 4\pi R^2 \left[\frac{-2aM \pm \sqrt{M(3a^2M+R^3)}}{-a^2M+R^3} \mp \frac{Q^2R(9M+2R)(7a^2M+R^3-4a\sqrt{M(3a^2M+R^3)})}{4(-a^2M+R^3)^2\sqrt{M(3a^2M+R^3)}} \right]. \quad (2.116)$$

Отметим, что при $a = 0$ и $Q = 0$ угловая скорость сводится к $\omega_{\pm} = \mp \sqrt{\frac{M}{R^3}}$, которая удовлетворяет третьему закону Кеплера.

2.4.4. Применение эффекта Саньяка для ограничения нелинейного электрического заряда

Далее будет использоваться данные полученные в эксперименте АВЖ для нахождения ограничения параметра теории СТВГ.

Для этого, подставим данные Земли (2.60)-(2.63) и эквивалентный радиус Земли R_{eq} вместо R в уравнение (2.111) для $\frac{1}{2}\delta\tau$, восстановив при этом $\omega_0 \rightarrow \Omega_{\oplus}/c$, $a \rightarrow a_{\oplus}/c$ и преобразовав секунды в наносекунды (нс), $\frac{1}{2}\delta\tau \text{ с} \rightarrow \frac{1}{2}\delta\tau \times 10^9 \text{ нс}$, найдем значение каждой поправки:

$$\frac{1}{2}\delta\tau_S^{AWA} = 2 \times \frac{2\Omega_{\oplus}}{c^2} \times \pi R_{eq}^2 \times 10^9 = 240 \text{ нс}, \quad (2.117)$$

$$\frac{2\Omega_{\oplus}}{c^2} \times \pi Q^2 \times 10^9 \rightarrow \frac{1}{2}\delta\tau_{S,Q} \times 10^9 = 2.45 \times 10^{-12} Q^2 \text{ нс} \cdot \text{м}^{-2}, \quad (2.118)$$

$$\left(\frac{1}{2}\right) \frac{8\pi a_{\oplus} M}{c^2 R_{eq}} \rightarrow \frac{1}{2}\delta\tau_{M,a_{\oplus}} \times 10^9 = 8.68 \times 10^{-1} \text{ нс}, \quad (2.119)$$

$$\left(\frac{1}{2}\right) \frac{20\pi a_{\oplus} M}{c^2 R_{eq}^3} Q^2 \rightarrow \frac{1}{2}\delta\tau_{Q,M,a_{\oplus}} \times 10^9 = 4.43 \times 10^{-2} Q^2 \text{ нс} \cdot \text{м}^{-2}, \quad (2.120)$$

$$\left(\frac{1}{2}\right) \frac{4\pi R_{eq} M \Omega_{\oplus}}{c^2} \rightarrow \frac{1}{2}\delta\tau_{M,\Omega_{\oplus}} \times 10^9 = 1.52 \times 10^{-25} \text{ нс}, \quad (2.121)$$

$$\left(\frac{1}{2}\right) \frac{12\pi M_{\oplus} Q^2}{c^2 R_{eq}} \rightarrow \frac{1}{2}\delta\tau_{Q,M,\Omega_{\oplus}} \times 10^9 = 9.30 \times 10^{-39} \times Q^2 \text{ нс} \cdot \text{м}^{-2}. \quad (2.122)$$

Так как вклад от величин в уравнениях (2.119)-(2.122) намного меньше, чем наблюдаемый остаток ошибки 5 нс, уравнение (2.111) можно переписать в виде:

$$\frac{1}{2}\delta\tau \times 10^9 \approx \frac{1}{2}\delta\tau_S^{AWA} - 2.45 \times 10^{-12} Q^2 \text{ нс} \cdot \text{м}^{-2}. \quad (2.123)$$

Используя предположение, что поправка в односторонней задержки Саньяка должна быть меньше или равна среднему остатку ошибки 5 нс, получаем верхнюю границу параметра Q

$$2.45 \times 10^{-12} Q^2 \text{ нс} \cdot \text{м}^{-2} \leq 5 \text{ нс} \Rightarrow Q \leq 2.35 \times 10^5. \quad (2.124)$$

Таким образом получен верхний предел нелинейного электрического заряда пространства-времени АБГ [А15].

2.5. Эффект Саньяка в пространстве-времени Бардина

Еще одним примером из класса регулярных решений черных дыр является метрика Бардина [100]. Бардин получил решение для регулярной черной дыры, в котором действие Эйнштейна-Гильберта связано с нелинейной электродинамикой. Вращающийся аналог этого решения получен в работе [102]. Свойства регулярных решений для черных дыр связанных с нелинейной электродинамикой изучались в работах [110-112]. В этом параграфе будет исследован эффект Саньяка в пространстве-времени вращающейся черной дыры Бардина для негеодезических и геодезических орбит источника/приемника света.

2.5.1. Пространство-время черной дыры Бардина

Действие регулярной черной дыры Бардина [100] может быть задано следующим образом:

$$s = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} [R - 4\mathcal{L}(F)], \quad (2.125)$$

где R – скаляр кривизны Риччи, g – определитель метрики и $\mathcal{L}(F)$ – функция от $F = \frac{1}{4} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$, которая имеет вид:

$$\mathcal{L}(F) = \frac{3}{2sq^2} \left(\frac{\sqrt{2q^2F}}{1+\sqrt{2q^2F}} \right)^{5/2}. \quad (2.126)$$

Параметр s из выше написанного уравнения определен как $|q|/2M$, где q и M – магнитный заряд и масса черной дыры, соответственно.

Элемент линии вращающейся черной дыры Бардина [102] задается в виде

$$ds^2 = - \left[1 - \frac{2m(r)r}{\Sigma} \right] dt^2 - \frac{4am(r)r \sin^2 \theta}{\Sigma} dt d\phi + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \left[r^2 + a^2 + \frac{4a^2m(r)r \sin^2 \theta}{\Sigma} \right] \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (2.127)$$

где

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad \Delta = r^2 + a^2 - 2m(r)r.$$

Следуя анзацу тензора Максвелла

$$F_{\mu\nu} = 2\delta_{[\mu}^{\theta} \delta_{\nu]}^{\phi} g(r) \sin \theta$$

и используя условие $dF = g'(r) \sin \theta dr \wedge d\theta \wedge d\varphi = 0$, следует, что $g(r) = \text{const.} = g$. Следовательно, напряженность поля равна $F_{\theta\varphi} = -F_{\varphi\theta} = q \sin \theta$ при $F = \frac{g^2}{2r^4}$. В работе [100] показано, что функция $m(r)$ имеет вид

$$m(r) = M * \left(\frac{r^2}{r^2 + g^2} \right)^{3/2}. \quad (2.128)$$

2.5.2. Задержка Саньяка для негеодезических круговых экваториальных орбит

Предположим, что источник/приемник света (геостационарный спутник), отправляющий два противоположно направленных пучка света, движется по орбите вокруг вращающейся черной дыры Бардина, описываемой метрикой (2.127), на экваториальной плоскости (т.е. $\theta = \pi/2$). Подходящим образом расположенные зеркала возвращают оба пучка в исходное положение после кругового обхода черной дыры. Пусть источник/приемник света движется вокруг черной дыры на некотором постоянном радиусе (т.е. $r = R$). Тогда метрика (2.127) сводится к

$$ds^2 = - \left[1 - \frac{2M}{R} \left(\frac{R^2}{R^2 + g^2} \right)^{3/2} \right] dt^2 - \frac{4aM}{R} \left(\frac{R^2}{R^2 + g^2} \right)^{3/2} dt d\phi + \left[R^2 + a^2 \left\{ 1 + \frac{2MR^2}{(R^2 + g^2)^{3/2}} \right\} \right] d\phi^2. \quad (2.129)$$

Предполагая, что осевая скорость вращения ω_0 черной дыры Керра-Тауб-НУТ постоянна, угол вращения спутника задается уравнением (1.9). Тогда уравнение (2.129) сводится к

$$ds^2 = \left[1 - (R^2 + a^2)\omega_0^2 - \frac{2MR^2}{(R^2 + g^2)^{3/2}} (1 - a^2\omega_0^2)^2 \right] dt^2. \quad (2.130)$$

Для двух пучков света, движущихся по одной и той же круговой траектории, должно выполняться равенство $ds = 0$, которое, с учетом уравнения (2.130), переписется в следующем виде:

$$1 - (R^2 + a^2)\omega_0^2 - \frac{2MR^2}{(R^2 + g^2)^{3/2}} (1 - a^2\omega_0^2)^2 = 0. \quad (2.131)$$

Решая уравнение (2.131) относительно ω_0 найдем два корня

$$\Omega_{\pm} = \frac{2aMR^2 \pm \sqrt{(R^2+a^2)(R^2+g^2)^3 - 2MR^4(R^2+g^2)^{3/2}}}{2a^2MR^2 + (R^2+a^2)(R^2+g^2)^{3/2}}, \quad (2.132)$$

которые представляют собой угловую скорость пучка света Ω_{\pm} для движущегося вдоль (индекс «+») и против (индекс «-») направления вращения источника. Следовательно, угол поворота движущихся пучков света задается формулой (1.13).

Первое пересечение мировых линий двух пучков света, имеющих движущийся по орбите источник/приемник, после их испускания в момент времени $t = 0$ происходит, когда ϕ_+ и ϕ_- задаются уравнениями (1.15) и (1.16).

Собственное время вращающегося источника/приемника света выводится из уравнения (2.130) с учетом уравнения (1.9):

$$d\tau = \sqrt{1 - (R^2 + a^2)\omega_0^2 - \frac{2MR^2}{(R^2+g^2)^{3/2}}(1 - a^2\omega_0^2)^2} \left(\frac{d\phi_0}{\omega_0} \right). \quad (2.133)$$

Таким образом, интегрируя между ϕ_{0-} и ϕ_{0+} и разлагая выражение в постньютоновский ряд по M/R и ω_0/R , получаем задержку Саньяка в виде

$$\delta\tau_{\text{Бард}}^{\text{негеод}} = \delta\tau_S + 4\pi RM\omega_0 \left(1 - \frac{g^2}{R^2+g^2}\right)^{3/2} - \frac{8\pi aM}{R} \left(1 - \frac{g^2}{R^2+g^2}\right)^{3/2}, \quad (2.134)$$

где $\delta\tau_S$ – задержка Саньяка в плоском пространстве.

2.5.3. Задержка Саньяка для геодезических круговых экваториальных орбит

В предыдущем разделе рассматривался случай негеодезического движения источника/приемника света, который имел заданную угловую скорость ω_0 . Далее рассматривается движение источника/приемника света по геодезическим круговым орбитам или по-другому находящегося в свободном падении, т.е. угловая скорость источника/приемника света будет удовлетворять третьему закону Кеплера. Угловая скорость источника/приемника света (спутника в свободном падении) ω_{\pm} в этом случае определяется самой круговой геодезической.

Подставляя $dr = 0$ (поскольку $r = R = const.$) и $d\theta = 0$ (поскольку $\theta = \pi/2$), метрика (2.127) может быть переписана в виде

$$d\tau^2 = g_{tt}dt^2 + 2g_{t\phi}dtd\phi + g_{\phi\phi}d\phi^2, \quad (2.135)$$

где

$$g_{tt} = 1 - \frac{2M}{R} \left(1 - \frac{g^2}{R^2+g^2}\right)^{3/2}, \quad g_{t\phi} = \frac{2aM}{R} \left(1 - \frac{g^2}{R^2+g^2}\right)^{3/2}, \quad (2.136)$$

$$g_{\phi\phi} = R^2 + a^2 + \frac{2a^2M}{R} \left(1 - \frac{g^2}{R^2+g^2}\right)^{3/2}. \quad (2.137)$$

Тогда орбитальные скорости спутника ω_{\pm} следуют из двух корней квадратного уравнения (1.19). Подставив уравнения (2.135)-(2.137) в (1.19), найдем угловую скорость источника/приемника света, которая задается в виде:

$$\omega_{\pm} = \frac{aM_{\pm} \sqrt{M\{(R^2+g^2)^{5/2}/(R^2-2g^2) - 2a^2M\}}}{a^2M + (R^2+g^2)^{5/2}/(R^2-2g^2)}. \quad (2.138)$$

Подставив выражение для угловой скорости (2.138) в

$$\delta\tau_{\text{Бард}\pm}^{\text{геод}} = 4\pi R^2 \omega_{\pm} \quad (2.139)$$

можно найти выражение для задержки Саньяка в пространстве-времени Керра для геодезических круговых орбит источника/приемника света на экваториальной плоскости.

Разложив уравнение (2.139) в ряд Тейлора по a/R , получаем:

$$\delta\tau_{\text{Бард}\pm}^{\text{геод}} = 4\pi R^2 \left[-\frac{MR(R^2-2g^2)}{(R^2+g^2)^{5/2}} \left(\frac{a}{R}\right) + \sqrt{\frac{M(R^2-2g^2)}{(R^2+g^2)^{5/2}}} \right]. \quad (2.140)$$

2.5.4. Численные оценки задержки Саньяка в пространстве-времени Бардина для Земли и Солнца

Предположим, что источник/приемник света движется по замкнутой круговой траектории вокруг вращающейся Земли, предполагая, что гравитация Земли (Солнца) вблизи ее поверхности (слабое гравитационное поле) описывается метрикой Бардина. Гравитационное поле Земли уже было описано метрикой Керра в слабом поле, например, в прецессии Лензе-Тирринга, уже хорошо испытанной спутниками LAGEOS, LAGEOS II [96] и миссиями Gravity Probe и Gravity Probe-B [97].

Для исследования влияния магнитного заряда g на задержку Саньяка в пространстве-времени Бардина для негеодезических круговых орбит источника/приемника света рассматриваются следующие данные Земли: $\omega_0 = \Omega_{\oplus} = 7.3 \times 10^{-5}$ рад/с, $r_g = GM_{\oplus}/c^2 = 4.35 \times 10^{-3}$ м, $a = a_{\oplus} = 9.81 \times 10^6$ м²/с, $c = 3 \times 10^8$ м/с.

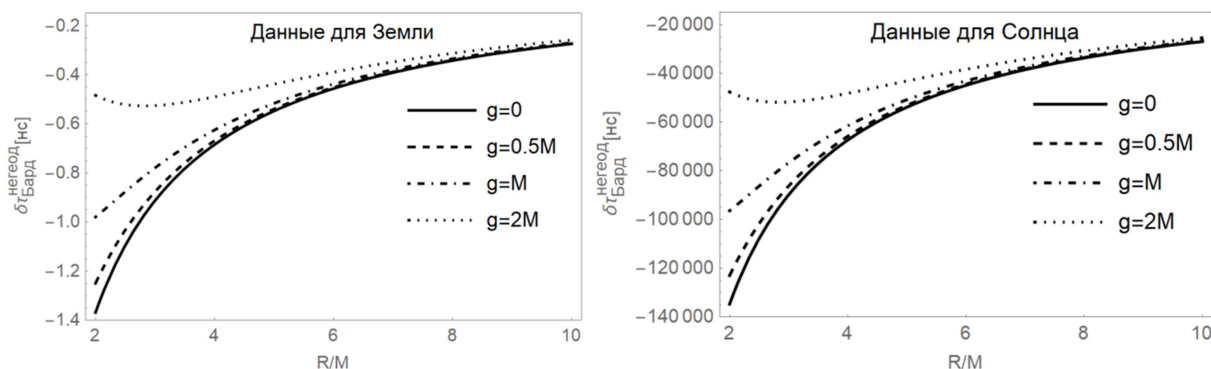


Рис. 2.5. График зависимости задержки Саньяка в пространстве-времени Бардина для негеодезических круговых орбит источника/приемника света в зависимости от радиуса орбиты источника/приемника света.

На рис. 2.5 представлен график зависимости задержки Саньяка для негеодезических круговых орбит источника/приемника света в зависимости от радиуса орбиты источника/приемника света (спутника) для различных значений магнитного заряда: $g = 0$ (случай черной дыры Керра), $0.5M$, M и $2M$. Из рисунка видно, что наибольшее влияние магнитного заряда проявляется при малых радиусах, близких к горизонту событий. Отметим, что с увеличением магнитного заряда отклонение задержки Саньяка от незаряженной задержки увеличивается, и, таким образом, наибольшее отличие достигается при $g = 2M$. При малых R величина задержки составляет от -1.4 нс до -0.4 нс. С учетом современных технологий такая величина является измеримой на экспериментах, и, следовательно может быть измерена и применена к спутникам. С увеличением радиуса орбиты источника/приемника света, влияние магнитного заряда на задержку Саньяка уменьшается. Подобное поведение задержки наблюдается для Солнца с данными: $\omega_0 = \Omega_{\odot} = 2.692 \times 10^{-6}$ рад/с, $r_g = GM_{\odot}/c^2 = 1.48 \times 10^3$ м, $a = a_{\odot} = 3.217 \times 10^3$ м²/с.

Отметим, что задержка Саньяка в случае Солнца в 10^5 больше чем в случае Земли. В первую очередь это связано с тем, что масса Солнца $\sim 10^6$ чем масса Земли.

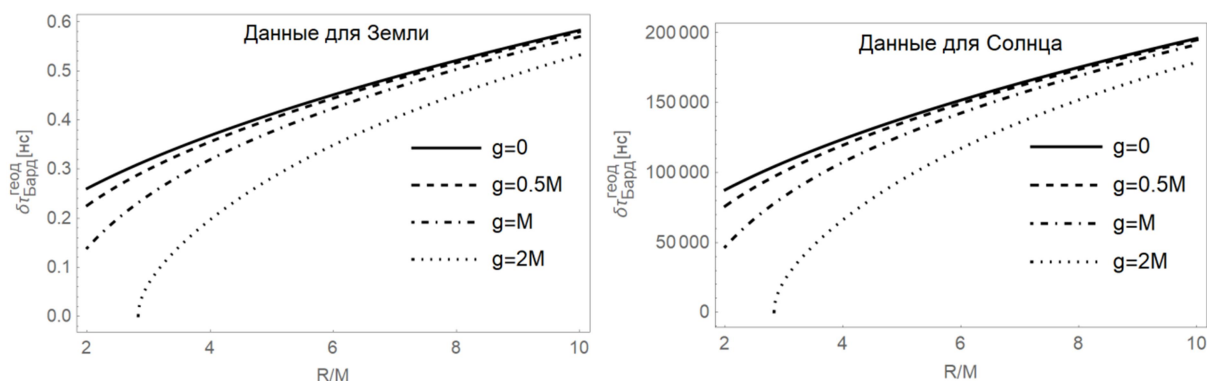


Рис. 2.6. График зависимости задержки Саньяка в пространстве-времени Бардина для геодезических круговых орбит источника/приемника света в зависимости от радиуса орбиты источника/приемника света.

На рис. 2.6 представлен график зависимости задержки Саньяка для геодезических круговых орбит источника/приемника света в зависимости от радиуса орбиты источника/приемника света (спутника) для различных значений магнитного заряда: $g = 0, 0.5M, M$ и $2M$. Отметим, что в отличие от задержки Саньяка для негеодезических орбит, здесь, с увеличением магнитного заряда отклонение задержки Саньяка от незаряженной задержки уменьшается.

Таким образом, для двух типов круговых орбит источника/приемника света наблюдается противоположное влияние на задержку Саньяка: в случае негеодезических круговых орбит при увеличении магнитного заряда задержка увеличивается, а в случае геодезических круговых орбит задержка уменьшается.

2.6. Выводы по главе

Основываясь на полученных результатах, можно сделать следующие выводы:

- получено точное выражение задержки Саньяка в метрике Керра-де Ситтера как для негеодезических, так и для геодезических круговых орбит источника/приемника света. Путем разложения задержки Саньяка в ряд Тейлора,

показано, что космологическая константа влияет на базовую задержку Саньяка [A1,A14];

- измеряемый эффект нулевого порядка задержки Саньяка для негеодезического кругового движения источника/приемника света в метрике Керра-де Ситтера подтверждает заключение Лихтенегера и Иорио, что основной причиной поведения часов (различное старение близнецов) должно быть свойством абсолютного статуса пространства-времени Минковского, что противоречит принципу Маха. Геодезическое круговое движение дает просто $\delta\tau_{S\pm} = 0$ в пространстве времени Минковского в пределе $M \rightarrow 0$, $a \rightarrow 0$ и $\Lambda \rightarrow 0$. Это происходит так как в этих пределах $\omega_{\pm} = 0$, то есть нет кругового движения. В этом случае, по крайней мере, эффект Саньяка не возникает в качестве наблюдаемой величины в пределе Минковского и принцип Маха может быть выполнен. Таким образом, два типа движения источника/приемника света по замкнутым круговым траекториям демонстрирует принципиально разные типы поведения задержки Саньяка [A1];

- получено точное выражение задержки Саньяка в пространстве-времени Керра-Тауб-НУТ, а так же путем разложения в ряд Тейлора показано, что заряд НУТ влияет на базовую задержку Саньяка [A3,A9];

- подтверждено, что параметр НУТ может быть интерпретирован как имеющий «вращение» заряда НУТ, что согласуется с результатами Чакраборти и Мажумдара, в которых они показали, что метрика Тауб-НУТ неинвариантна относительно временной перестановки $t \rightarrow -t$ [A3];

- получен верхний предел заряда НУТ. Для ограничения заряда НУТ использовалось условие $\left(\frac{1}{2}\delta\tau^{KTN} - \frac{1}{2}\delta\tau_S\right) \leq \Delta_{AWA}$, где $\delta\tau^{KTN}$ – величина задержки Саньяка в пространстве-времени Керра-Тауб-НУТ для негеодезических круговых орбит источника/приемника света, а $\Delta_{AWA} = 5$ нс величина остаточной ошибки эксперимента АВЭ. Однако, более сильное ограничение параметра НУТ получилось в результате использования условия $\left(\delta\tau_{geo\pm}^{KTN} - \delta\tau_{geo\pm}^{Kerr}\right) \leq \Delta_{geo}$, где $\delta\tau_{geo\pm}^{KTN}$ – величина задержки Саньяка в пространстве-времени Керр-Тауб-НУТ для

геодезических круговых орбит источника/приемника света, $\delta\tau_{\text{geo}\pm}^{\text{Kerr}}$ – задержка Саньяка в пространстве-времени Керра, а $\Delta_{\text{geo}} = 0.25$ нс величина остаточной ошибки эксперимента по измерению задержки Саньяка методом ДСПВЧ [A3,A11];

- получено точное выражение задержки Саньяка в пространстве-времени Йоханнсена-Псалтиса, а так же путем разложения в ряд Тейлора показано, что параметр отклонения метрики Йоханнсена-Псалтиса появляется только в третьем порядке постньютоновского приближения задержки Саньяка для негеодезических круговых орбит [A5,A12];
- впервые было получено экспериментальное ограничение параметра отклонения метрики Йоханнсена-Псалтиса ϵ_3 . Для этого использовалось условие $\left(\frac{1}{2}\delta\tau^{JP} - \frac{1}{2}\delta\tau_S\right) \leq \Delta_{\text{AWA}}$, где $\delta\tau^{JP}$ – величина задержки Саньяка в пространстве-времени Йоханнсена-Псалтиса для негеодезических круговых орбит источника/приемника света [A5];
- получено точное выражение задержки Саньяка в пространстве-времени регулярных черных дыр АБГ и Бардина [A5,A1] для геодезических и негеодезических орбит источника/приемника света. Согласно постньютоновскому разложению показано, что нелинейный электрический заряд метрики АБГ появляется во всех членах ряда [A5,A1]. Однако, в случае метрики Бардина магнитный заряд не влияет на задержку Саньяка в плоском пространстве, а появляется только во втором члене разложения [A5,A1];
- получено экспериментальное ограничение нелинейный электрический заряд метрики АБГ [A5,A1], используя условие: поправка в односторонней задержки Саньяка должна быть меньше или равна среднему остатку ошибки 5 нс;
- полагая, что гравитация Земли (Солнца) вблизи ее поверхности описывается метрикой Бардина, исследовано влияния магнитного заряда на задержку Саньяка. Показано, что задержка Саньяка увеличивается с увеличением магнитного заряда в случае негеодезических круговых орбит и уменьшается в случае геодезических круговых орбит [A5,A1]. Таким образом, два типа движений источника/приемника света приводит к противоположным результатам.

Глава 3. ЭФФЕКТ САНЬЯКА В ТЕОРИИ $f(\mathbf{R})$ -ГРАВИТАЦИИ

В этой главе будет рассматриваться метрика пространства-времени вращающейся черной дыры Керра в теории $f(\mathbf{R})$ -гравитации (Керра- $f(\mathbf{R})$). Для этого решения будет получена задержка Саньяка для геодезических и негеодезических орбит источника/приемника света. С помощью экспериментальных данных эффекта Саньяка будет наложено ограничение на скаляр кривизны Риччи. Затем это ограничение будет применено к безразмерным параметрам двух моделей теории $f(\mathbf{R})$ -гравитации.

3.1. Теория $f(\mathbf{R})$ -гравитации

Одной из основных проблем ОТО является то, что предсказанное теорией значение плотности энергии приблизительно на 120 порядков выше значения астрономических наблюдений [26,113]. На сегодняшний день существует множество методов решения этой проблемы. Одним из наиболее разработанных является модификация уравнений гравитационного поля таким образом, чтобы в низкоэнергетическом пределе модифицированная теория отличалась от ОТО. Модифицированные теории гравитации могут быть сформулированы с использованием нелинейных функций скаляра Риччи \mathbf{R} , поскольку нет фундаментальной причины ограничивать гравитационный лагранжиан. Рассматриваемые в работе $f(\mathbf{R})$ -теории гравитации [26] были впервые введены для моделирования предполагаемого ускоренного расширения Вселенной [114]. В настоящее время в литературе имеется несколько $f(\mathbf{R})$ -моделей в соответствии с имеющимися космологическими данными [115].

Статические и сферически симметричные решения черных дыр были получены с помощью теории возмущений де ла Крузом-Домбризом и соавт. [121], в то время как черные дыры с этими симметриями были изучены с помощью анализа близкого горизонта [122]. Наконец, решения $f(\mathbf{R})$ черных дыр Керра-Ньюмана с постоянным скаляром Риччи были недавно изучены Сембраносом и соавт. [123].

Работа Перез и др. [27] является первой в направлении ограничения моделей $f(\mathbf{R})$ -теории с использованием эффекта сильного поля аккреционных дисков во вращающихся черных дырах звездного размера, характеризуемого гравитационным решением черной дыры Керра в теории $f(\mathbf{R})$ -гравитации с постоянной кривизной Риччи. Это решение является беззарядным случаем более общей черной дыры Керра–Ньюмана, для которой проанализированы термодинамические и устойчивые свойства в работе [33]. Гравитационное решение Керра в теории $f(\mathbf{R}_0)$ -гравитации формально напоминает решение Картера [34] из ОТО, но физически сильно отличается от него. Постоянная кривизна Риччи \mathbf{R}_0 , появляющаяся в метрике Картера, не имеет ничего общего с общей релятивистской космологической постоянной ($\Lambda \approx 10^{-56} \text{ см}^{-2}$), но может принимать любое действительное значение. Действительно, диапазон реальных значений для кривизны Риччи \mathbf{R}_0 может быть получен из различных теоретических соображений, таких как горизонт событий или устойчивость круговых орбит [27], или из экспериментальных фактов, которые будут рассмотрены далее в этой главе.

3.1. Решение Керра в теории $f(\mathbf{R})$ -гравитации

Действие теории $f(\mathbf{R})$ -гравитации обобщает действие Эйнштейна-Гильберта

$$S[g] = \int \mathbf{R} \sqrt{-g} d^4x \quad (3.1)$$

к виду

$$S[g] = \int [\mathbf{R} + f(\mathbf{R}) + L_{\text{matt}}] \sqrt{-g} d^4x, \quad (3.2)$$

где g – определитель метрического тензора, а $f(\mathbf{R})$ – произвольная функция от \mathbf{R} . В метрическом формализме уравнения поля могут быть получены путем изменения метрики, что дает (см., например, [32,33]):

$$\mathbf{R}_{\mu\nu} [\mathbf{R} + f'(\mathbf{R})] - \frac{1}{2} [\mathbf{R} + f(\mathbf{R})] g_{\mu\nu} + [\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \square] f'(\mathbf{R}) + \mathbf{T}_{\mu\nu} = 0, \quad (3.3)$$

где $\mathbf{R}_{\mu\nu}$ – тензор кривизны Риччи, $\square = \nabla_\beta \nabla^\beta$ – оператор Даламбера, $f'(\mathbf{R}) = df(\mathbf{R})/d\mathbf{R}$ и тензор энергии-импульса определяется равенством

$$\mathbf{T}_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} L_{\text{matt}})}{\delta g_{\mu\nu}}, \quad (3.4)$$

где L_{matt} – Лагранжиан материи. Из следа уравнения (3.3) получим

$$\mathbf{R}[1 + f'(\mathbf{R})] - 2[\mathbf{R} + f(\mathbf{R})] - 3 \square f'(\mathbf{R}) + \mathbf{T} = 0. \quad (3.5)$$

Уравнение (3.3) представляет собой систему нелинейных уравнений четвертого порядка $g_{\mu\nu}$. В случае, когда скаляр Риччи является константой, т.е. $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0$ и $\mathbf{T}_{\mu\nu} = 0$, уравнение (3.3) сводится к

$$\mathbf{R}_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}, \quad (3.6)$$

$$\Lambda = \frac{f(\mathbf{R}_0)}{f'(\mathbf{R}_0) - 1}, \quad (3.7)$$

и из уравнения (3.5) следует

$$\mathbf{R}_0 = \frac{f(\mathbf{R}_0)}{f'(\mathbf{R}_0) - 1}. \quad (3.8)$$

Уравнение (3.6) похоже на уравнение ОТО с постоянной космологической константой, но это подобие является просто обозначением. Как подчеркивалось ранее, в настоящем контексте кривизна \mathbf{R}_0 и, следовательно, Λ может принимать произвольные действительные значения в зависимости от введенных локальных физических критериев.

Учитывая уравнения (3.6)-(3.8) и задавая $\Lambda = \mathbf{R}_0/2$, вращающееся решение Картера [34] может быть представлено как решение Керра в теории $f(\mathbf{R}_0)$ -гравитации с постоянным скаляром Риччи, которое задается в виде

$$d\tau^2 = \frac{\Delta_r}{\rho^2 \Xi^2} [dt - a \sin^2 \theta d\phi]^2 - \frac{\Delta_\theta \sin^2 \theta}{\rho^2 \Xi^2} [(r^2 + a^2)d\phi - a dt]^2 - \frac{\rho^2}{\Delta_r} dr^2 - \frac{\rho^2}{\Delta_\theta} d\theta^2, \quad (3.9)$$

где

$$\Delta_r = (r^2 + a^2) \left(1 - \frac{\mathbf{R}_0 r^2}{12}\right) - 2Mr, \quad (3.10)$$

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad (3.11)$$

$$\Delta_\theta = 1 + \frac{\mathbf{R}_0 a^2 \cos^2 \theta}{12}, \quad (3.12)$$

$$\Xi = 1 + \frac{\mathbf{R}_0 a^2}{12}, \quad (3.13)$$

где M – асимптотическая масса источника, a это отношение углового момента J к массе

$$a = \frac{J}{M}. \quad (3.14)$$

При $R_0 = 0$ восстанавливается обычное решение Керра в ОТО.

3.2. Задержка Саньяка для негеодезических круговых экваториальных орбит

Следуя методу Тарталли [10], предполагается, что источник/приемник света, посылающий два противоположно направленных пучка света, движется по замкнутой траектории в экваториальной плоскости $\theta = \pi/2$ вокруг вращающейся черной дыры Керр- $f(R)$ (Рис. 3.1а и 3.1б). Соответственно расположенные зеркала возвращают в исходное положение оба пучка после их кругового перемещения. Предполагается также, что источник/приемник света вращается вокруг черной дыры Керр- $f(R)$ на постоянном радиусе $r = R = const$. Тогда метрика (3.9)-(3.13) сводится к

$$d\tau^2 = \frac{R^2 - 2MR + a^2 - \frac{R_0 R^2 (R^2 + a^2)}{12}}{R^2 \left(1 + \frac{R_0 a^2}{12}\right)^2} (dt - a d\phi)^2 - \frac{1}{R^2 \left(1 + \frac{R_0 a^2}{12}\right)^2} [(R^2 + a^2) d\phi - a dt]^2. \quad (3.15)$$

Из предположения, что осевая скорость вращения ω_0 черной дыры Керр- $f(R)$ постоянна, угол вращения источника/приемника задается уравнением (1.9).

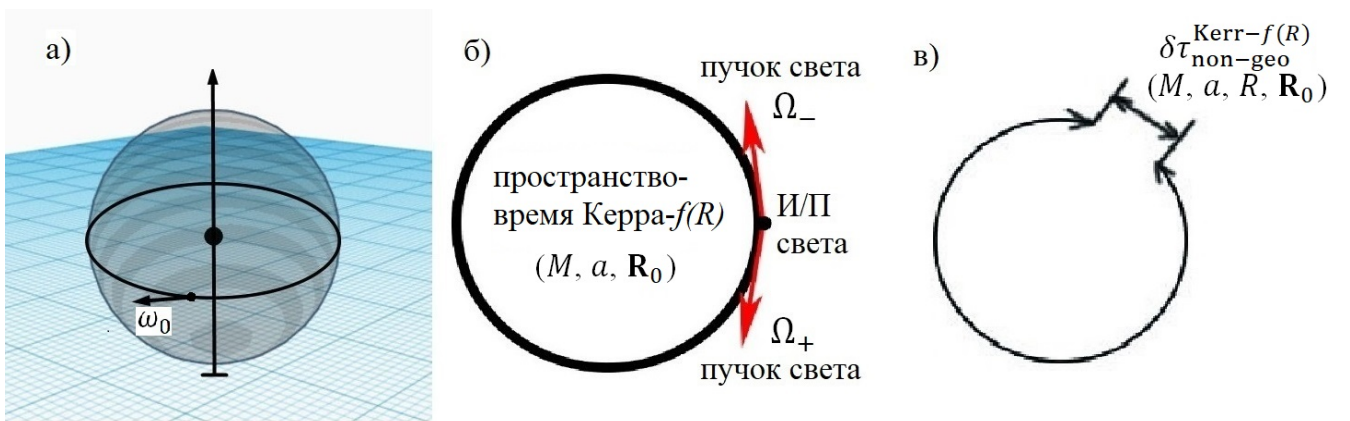


Рис. 3.1. Схематичное изображение эффекта Саньяка в пространстве-времени Керра- $f(R)$.

Подставив (1.9) в (3.15) получим

$$d\tau^2 = \frac{R^2 [1 - (R^2 + a^2) \{\omega_0^2 + (1 - a\omega_0)^2 R_0 / 12\}] - 2MR(1 - a\omega_0)^2}{R^2 (1 + R_0 a^2 / 12)^2} dt^2. \quad (3.16)$$

Пучки света, движущиеся по одинаковым круговым траекториям, должны подчиняться условию $d\tau = 0$. Полагая Ω угловой скоростью движения пучков света по траектории, получим

$$R^2[1 - (R^2 + a^2)\{\Omega^2 + (1 - a\Omega)^2\mathbf{R}_0/12\}] - 2MR(1 - a\Omega)^2 = 0, \quad \frac{\mathbf{R}_0 a^2}{12} \neq -1. \quad (3.17)$$

Решая уравнение (3.17) относительно переменной Ω , можно найти два корня, которые представляют угловую скорость Ω_{\pm} пучков света вращающихся вокруг черной дыры Керр- $f(R)$, которые определяются как

$$\Omega_{\pm} = \frac{\frac{2aM}{R} + \frac{a(R^2+a^2)\mathbf{R}_0}{12} \pm \sqrt{R^2 - 2MR + a^2 - \frac{R^2(R^2+a^2)\mathbf{R}_0}{12}}}{R^2 + \frac{2Ma^2}{R} + a^2 \left\{1 + \frac{(R^2+a^2)\mathbf{R}_0}{12}\right\}}. \quad (3.18)$$

Подставив найденную величину в уравнение (1.17) получим, что угол вращения источника/приемника вокруг черной дыры Керр- $f(R)$ определяется как

$$\phi_{0\pm} = \mp 2\pi\omega_0 / \left[\frac{\frac{2aM}{R} + \frac{a(R^2+a^2)\mathbf{R}_0}{12} \pm \sqrt{R^2 - 2MR + a^2 - \frac{R^2(R^2+a^2)\mathbf{R}_0}{12}}}{R^2 + \frac{2Ma^2}{R} + a^2 \left\{1 + \frac{(R^2+a^2)\mathbf{R}_0}{12}\right\}} \right]. \quad (3.19)$$

Собственное время вращающегося источника/приемника света, выведенное из уравнения. (3.16) с использованием уравнения. (1.6), является

$$d\tau = \sqrt{R^2 \left[1 - (R^2 + a^2) \left\{ \omega_0^2 + \frac{(1 - a\omega_0)^2 \mathbf{R}_0}{12} \right\} \right] - 2MR(1 - a\omega_0)^2 \times \left\{ R \left(1 + \frac{a^2 \mathbf{R}_0}{12} \right) \right\}^{-1} \frac{d\phi_0}{\omega_0}}. \quad (3.20)$$

Интегрируя между ϕ_{0-} и ϕ_{0+} , получаем точную задержку Саньяка в пространстве-времени вращающейся черной дыры Керр- $f(R)$ для негеодезического движения источника/приемника света

$$\delta\tau = \frac{4\pi}{R} \left[\left\{ R^3 + 2Ma^2 + a^2R + \frac{a^2R(R^2 + a^2)\mathbf{R}_0}{12} \right\} \omega_0 - 2Ma - \frac{aR(R^2 + a^2)\mathbf{R}_0}{12} \right] / \left[\left(1 + \frac{a^2 \mathbf{R}_0}{12} \right) \left\{ \left(R^2 + \frac{2Ma^2}{R} + a^2 \right) \omega_0^2 - \frac{(1 - a\omega_0)^2 (R^2 + a^2) \mathbf{R}_0}{12} \right\}^{1/2} \right]. \quad (3.21)$$

Далее рассмотрим случай статического источника/приемника света, т.е. сохраняющего фиксированное положение в системе координат, определяемой удаленными неподвижными звездами (или $\omega_0 = 0$). В этом случае задержка Саньяка не равна нулю при условии, что $a \neq 0$, и задается в виде

$$\delta\tau_0 = -\frac{8\pi a\left(M + \frac{R(R^2+a^2)\mathbf{R}_0}{24}\right)}{R\left(1 + \frac{a^2\mathbf{R}_0}{12}\right)\sqrt{1 - \frac{2M}{R} - \frac{(R^2+a^2)\mathbf{R}_0}{12}}}. \quad (3.22)$$

Эта формула является первым порядком постньютоновского приближения для статического наблюдателя, посылающего пару световых пучков в противоположных направлениях вдоль замкнутого круга.

В большинстве случаев, многие члены в уравнении (3.21) очень малы, что позволяет использовать постньютоновское приближение. Обозначим вначале $\beta = \omega_0 R$ и разложим уравнение (3.21) по степеням β до второго порядка. В результате получим:

$$\begin{aligned} \delta\tau = & -\frac{8\pi a\left(M + \frac{R(R^2+a^2)\mathbf{R}_0}{24}\right)}{R\left(1 + \frac{a^2\mathbf{R}_0}{12}\right)\sqrt{1 - \frac{2M}{R} - \frac{(R^2+a^2)\mathbf{R}_0}{12}}} + \frac{4\pi\left\{R^2 + 2MR + a^2 - \frac{R^2(R^2+a^2)\mathbf{R}_0}{12}\right\}}{R\left(1 + \frac{a^2\mathbf{R}_0}{12}\right)\left\{1 - \frac{2M}{R} - \frac{(R^2+a^2)\mathbf{R}_0}{12}\right\}^{3/2}}\beta \\ & - \frac{12\pi a\left[\left\{M + \frac{R(R^2+a^2)\mathbf{R}_0}{24}\right\}\left\{1 - \frac{2M}{R} + \frac{a^2}{R^2} - \frac{(R^2+a^2)\mathbf{R}_0}{12}\right\}\right]}{R\left(1 + \frac{a^2\mathbf{R}_0}{12}\right)\left\{1 - \frac{2M}{R} - \frac{(R^2+a^2)\mathbf{R}_0}{12}\right\}^{5/2}}\beta^2, \end{aligned} \quad (3.23)$$

из уравнения видно, что первый член ряда равен $\delta\tau_0$ уравнения (3.22). Далее, выполнив последовательное постньютоновское приближение по $\varepsilon = M/R \ll 1$ и по $a/R \ll 1$, получим конечный результат

$$\begin{aligned} \delta\tau = & \delta\tau_S \left\{1 + \frac{R^2\mathbf{R}_0}{24} - \left(1 + \frac{R^2\mathbf{R}_0}{24}\right)\frac{a^2\mathbf{R}_0}{12}\right\} + 4\pi RM\omega_0 \left\{1 + \frac{R^2\mathbf{R}_0}{8} - \left(1 + \frac{R^2\mathbf{R}_0}{8}\right)\frac{a^2\mathbf{R}_0}{12}\right\} \\ & - \frac{8\pi aM}{R} \left\{1 + \frac{R^2\mathbf{R}_0}{12} - \left(1 + \frac{R^2\mathbf{R}_0}{12}\right)\frac{a^2\mathbf{R}_0}{12}\right\}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

где $\delta\tau_S = 4\omega_0 S = 4\pi\omega_0 R^2 = 4\pi\beta R$ – базовая задержка Саньяка в плоском пространстве. При $\mathbf{R}_0 = 0$ это (3.24) сводится к соответствующему выражению (1.30), полученном Тарталья [10]. Уравнение (3.24) может быть переписано в виде

$$\delta\tau = \left(\delta\tau_S + 4\pi RM\omega_0 - \frac{8\pi aM}{R}\right) + \text{члены зависящие от } \mathbf{R}_0. \quad (3.25)$$

Из уравнения (3.24) видно, что поправки к $\delta\tau_S$ имеются до второго порядка. Однако эффект Саньяка в плоском пространстве $\delta\tau_S$ восстанавливается не полностью, даже когда поправочные члены, содержащие M и a , пренебрежимо малы из-за появления дополнительного члена $\left(\frac{R^2\mathbf{R}_0}{24}\right)$, который появляется как

вклад скаляра кривизны \mathbf{R}_0 . Члены, пропорциональные $\left(\frac{R^2\mathbf{R}_0}{24}\right)$ можно интерпретировать как вклад теории $f(\mathbf{R}_0)$ -гравитации, если \mathbf{R}_0 не обращается в нуль.

3.3. Задержка Саньяка для геодезических круговых экваториальных орбит

Экваториальная орбита, рассмотренная в предыдущем параграфе, не была геодезической или находящейся в свободном падении, поскольку источник/приемник света находился на некотором постоянном расстоянии от Земли и вращался с постоянной скоростью $\omega_0 = \Omega_{\oplus} = 7.30 \times 10^{-5}$ рад/с, но для его вращения не требовалось удовлетворение третьего закона Кеплера. В этом параграфе будет рассмотрена круговая геодезическая орбита источника/приемника света на некотором произвольном радиусе на экваторе ($\theta = \pi/2$), отправляющего пучки света, движущиеся вокруг Земли. Скорость вращения ω_{\pm} спутника теперь определяется самой геодезической.

Подставляя $dr = 0$ при $r = R = \text{const.}$ и $d\theta = 0$ при $\theta = \pi/2$, метрика (3.9) может быть переписана в виде

$$d\tau^2 = g_{tt}dt^2 + 2g_{t\phi}dtd\phi + g_{\phi\phi}d\phi^2, \quad (3.26)$$

где

$$g_{tt} = 1 - \frac{2M}{R} - \frac{(R^2+a^2)\mathbf{R}_0}{12}, \quad g_{t\phi} = \frac{2aM}{R} + \frac{a(R^2+a^2)\mathbf{R}_0}{12}, \quad (3.27)$$

$$g_{\phi\phi} = -\frac{2a^2M}{R} - (R^2 + a^2) \left(1 + \frac{a^2\mathbf{R}_0}{12}\right). \quad (3.28)$$

Орбитальные скорости источника/приемника света ω_{\pm} , могут быть выведены из квадратного уравнения (1.19) с использованием (3.27)-(3.28),

$$\omega_{\pm} = \frac{\left(\frac{aM}{R^2} - \frac{aR\mathbf{R}_0}{12}\right)_{\pm} \pm \sqrt{\frac{M}{R} - \frac{R^2\mathbf{R}_0}{12}}}{\frac{a^2M}{R^2} - R - \frac{a^2R\mathbf{R}_0}{12}}. \quad (3.29)$$

Тогда, точная задержка Саньяка для геодезического движения источника/приемника света отправляющего два противоположно-направленных пучка света имеет вид

$$\delta\tau_{S\pm} = 4\pi \left[\frac{\left(\frac{aM}{R^2} - \frac{aR\mathbf{R}_0}{12}\right) \pm \sqrt{\frac{M}{R} - \frac{R^2\mathbf{R}_0}{12}}}{\frac{a^2M}{R^2} - R - \frac{a^2R\mathbf{R}_0}{12}} \right] R^2. \quad (3.30)$$

Полученный результат можно рассматривать как представление влияния скаляра кривизны Риччи \mathbf{R}_0 на задержку Саньяка. При $a = 0$ и $\mathbf{R}_0 = 0$ получим, что угловая скорость источника/приемника сводится к $\omega_{\pm} = \mp \sqrt{\frac{M}{R^3}}$, что удовлетворяет третьему закону Кеплера. Теперь разложим уравнение (3.29) до первого порядка по a/R и получим

$$\omega_{\pm} = \left(\frac{R\mathbf{R}_0}{12} - \frac{M}{R^2}\right) \left(\frac{a}{R}\right) \pm \frac{1}{R} \sqrt{\frac{M}{R} - \frac{R^2\mathbf{R}_0}{12}}. \quad (3.31)$$

Отмечая, что $\omega_{\pm} = \text{const.}$ (поскольку $r = R = \text{const.}$ для круговых орбит), мы можем вставить ее в задержку первого порядка, чтобы получить $\delta\tau_{S\pm}$, так что

$$\delta\tau_{S\pm}^{\text{geod}} = \pm 4\pi \left[\sqrt{MR - \frac{R^4\mathbf{R}_0}{12}} \mp \left(\frac{a}{R}\right) \left(M - \frac{R^3\mathbf{R}_0}{12}\right) \right]. \quad (3.32)$$

При $\mathbf{R}_0 = 0$, восстанавливаются члены задержки Саньяка пространства-времени Керра (1.38).

3.4. Применение эффекта Саньяка для ограничения скаляра кривизны Риччи

Предполагается, что источник/приемник движется по круговой траектории, близкой к вращающейся Земле и гравитация вблизи ее поверхности (слабое гравитационное поле) описывается метрикой Керра- f(\mathbf{R}) (Картера).

Основная задержка Саньяка $\delta\tau_S = 4\pi\omega_0 R^2/c^2$, при $\omega_0 = \Omega_{\oplus}$ и $R = R_{\oplus}$, обусловленная экваториальным движением источника/приемника на восток и запад, рассчитывается следующим образом:

$$\delta\tau_S = 2 \times \frac{2\Omega_{\oplus}}{c^2} \times \pi R_{\oplus}^2 = 4.148 \times 10^{-7} \text{ s} = 2 \times 207.4 \text{ нс}. \quad (3.33)$$

Это значение $\frac{1}{2}\delta\tau_S (= 207.4 \text{ нс})$ является односторонней задержкой Саньяка движущихся часов по сравнению с часами, оставшимися в состоянии покоя на Земле, которое было измерено (исключая факторы скорости и высоты) Хафеле и

Китингом в их знаменитом эксперименте с атомными часами на борту самолета [46,47].

(а) Эксперимент Хафеле и Киттинга

В эксперименте «вокруг света» Хафеле-Киттинга использовались портативные атомные часы, которые подвергались негеодезическому экваториальному движению, поскольку они приводились в движение двигателем самолета. Следовательно, уравнение (3.24) для общей наблюдаемой задержки $\delta\tau$ применимо, и поправки, внесенные M , ω_0 , \mathbf{R}_0 и a в одностороннюю базовую задержку Саньяка $\frac{1}{2}\delta\tau_S$, могут быть получены путем вычисления $\frac{1}{2}(\delta\tau - \delta\tau_S)$. Подставляя соответствующие значения Земли (2.60)-(2.63) в выражении (3.24) для $\delta\tau$ и используя $\delta\tau_S = 4.148 \times 10^{-7}$ с, получим

$$\Delta\tau_{non-g}^{cor} = \frac{1}{2}(\delta\tau - \delta\tau_S) = 6.98 \times 10^{14}\mathbf{R}_0 - 6.22 \times 10^{-14}\mathbf{R}_0^2. \quad (3.34)$$

Зависимость поправки от скаляра кривизны Риччи \mathbf{R}_0 очевидна. Для того, чтобы найти численный диапазон возможных значений, рассмотрим сигнатуру метрики (3.9), подставив в нее $a = 0$. Тогда из метрики получим $\Delta_r = r^2 \left(1 - \frac{\mathbf{R}_0 r^2}{12}\right) - 2Mr$. Величина $\Delta_r < 0$ при $\frac{\mathbf{R}_0 r^2}{12} \geq 1$, что означает нарушение сигнатуры метрики $(t, r, \theta, \phi) \rightarrow (-, +, -, -)$. Следовательно, должно выполняться условие

$$0 \leq \frac{\mathbf{R}_0 r^2}{12} < 1 \quad (3.35)$$

для получения правильной сигнатуры $(t, r, \theta, \phi) \rightarrow (+, -, -, -)$. Эта сигнатура должна сохраняться в течение всего времени, а неравенство (3.35) должно быть каноническим. Из (3.35) следует, что

$$0 \leq \mathbf{R}_0 < \frac{12}{R_\oplus^2}. \quad (3.36)$$

Используя вышеупомянутое неравенство с R_\oplus , мы получаем следующий диапазон значений $0 \leq \mathbf{R}_0 < 2.95 \times 10^{-13} \text{ м}^{-2}$, который не должен нарушаться.

Предположим, что поправка $\Delta\tau_{non-g}^{cor}$ в (3.34) не должна превышать значение наблюдаемой максимальной остаточной ошибки ~ 10 нс [46,47], т.е.

$$10^9 \times \Delta\tau_{non-geo}^{cor} = 10 \text{ нс}, \quad (3.37)$$

откуда получаем два корня уравнения $\mathbf{R}_0^{(1)} = 1.43 \times 10^{-14} \text{ м}^{-2}$ и $\mathbf{R}_0^{(2)} = 1.22 \times 10^{28} \text{ м}^{-2}$. Последний корень отбрасывается, так как мы рассматриваем эксперимент в пределе слабого гравитационного поля в окрестности земной поверхности, где ожидается, что кривизна будет чрезвычайно низкой. Таким образом, мы получаем немного более узкий диапазон для скаляра Риччи, заданный в виде

$$0 \leq \mathbf{R}_0 < 1.43 \times 10^{-1} \text{ м}^{-2}. \quad (3.38)$$

(б) Эксперимент Алана, Вейса и Эшби

Здесь мы вычислим задержку, когда источник/приемник и электромагнитные сигналы испытывают геодезическое (спутники свободного падения) движение, в отличие от эксперимента «вокруг света» Хафеле-Китинга.

Для того чтобы задержка не была мнимой (ограничение «реальности»), из (3.32) следует, что скаляр кривизны Риччи ограничен следующим диапазоном

$$0 \leq \mathbf{R}_0 < \frac{12G_{\oplus}}{c^2 R_{geo}^3}, \quad (3.39)$$

что характерно для геодезического движения. Выберем приблизительный радиус орбиты вокруг Земли, $R_{geo} = 7 \times 10^6 \text{ м}$ [10], тогда из условия ограничения «реальности» (3.39) получаем диапазон значений, принимает вид $0 \leq \mathbf{R}_0 < 1.54 \times 10^{-2} \text{ м}^{-2}$.

Теперь найдем диапазон значений \mathbf{R}_0 по поправочному члену: восстановив G , c и $R = R_{geo}$ в формуле (3.32), мы получаем одностороннюю задержку в виде

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}\right) \delta\tau_{S\pm}^{\text{geod}} &= \pm \frac{2\pi}{c} \sqrt{\frac{GM_{\oplus} R_{geo}}{c^2}} \left[1 + \frac{c^2 \mathbf{R}_0 R_{geo}^3}{24GM_{\oplus}}\right] \\ &= 3670 \times [1 + 3.25 \times 10^{21} \mathbf{R}_0 \text{ м}^2] \text{ нс}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Предполагается, что спутник, передающий свет в геодезическом движении в обоих направлениях на радиусе R_{geo} , измерит основную двустороннюю задержку (двусторонняя задержка для решения Керра $2 \times 3670 \text{ нс} = 7.34 \times 10^{-6} \text{ с}$). Именно это значение и было получено Тарталья [10]. Как и в (3.34), мы ограничиваем поправочный член $\Delta\tau_{geo}^{\text{cor}}$, то есть поправочный член в формуле (3.40), с помощью $0 \leq \Delta\tau_{geo}^{\text{cor}} \leq \text{наблюдаемого остатка ошибки}$, откуда находим

$$\Delta\tau_{geo}^{cor} = 1.2 \times 10^{25} \mathbf{R}_0 \text{ м}^2 \text{нс} \rightarrow \mathbf{R}_0 = \frac{\Delta\tau_{geo}^{cor}}{1.2} \times 10^{-25} \text{ м}^{-2} \text{нс}^{-1}. \quad (3.41)$$

С учетом остатка ошибки 5 нс, полученного в эксперименте АВЭ [3], соответствующий диапазон \mathbf{R}_0 принимает вид:

$$\Delta\tau_{geo}^{cor} = 1.2 \times 10^{25} \mathbf{R}_0 \text{ м}^2 \text{нс} \rightarrow 0 \leq \mathbf{R}_0 < 4.16 \times 10^{-25} \text{ м}^{-2}. \quad (3.42)$$

Полученный диапазон, связанный с геодезическим движением спутника в свободном падении, который намного уже, чем предыдущий диапазон (3.38), более чем на десять порядков. Точность, достигнутая в эксперименте Gravity-Probe-B [97], завершеном несколько лет назад, составляет 7,2 миллисекунды/год, и в результате эксперимента была получена оценка $|k| \leq 10^{-26} \text{ м}^{-2}$ (где $k = \mathbf{R}_0/4$), что довольно близко к верхнему пределу, полученному в (3.42).

3.5. Применение эффекта Саньяка к некоторым моделям $f(\mathbf{R})$ -гравитации

Примеры конкретных моделей $f(\mathbf{R})$ -гравитации и их анализ приведены по образцу, приведенному в работе Перез и др. [32]. Поскольку задержка Саньяка допускает только положительный диапазон значений скаляра Риччи \mathbf{R}_0 , как в (3.42), мы не будем рассматривать отрицательные значения \mathbf{R}_0 в дальнейшем.

(1) Модель $f(\mathbf{R}) = \alpha \mathbf{R}^\beta$.

Эта модель широко изучается, поскольку член $\alpha \mathbf{R}^2$ при $\alpha > 0$ может объяснить ускоренное расширение Вселенной. Рассматриваемая модель также хорошо объясняет анизотропию температуры, наблюдаемую в реликтовом излучении. Модель $f(\mathbf{R}) = \alpha \mathbf{R}^\beta$ может стать жизнеспособной альтернативой инфляционным моделям скалярного поля и повторный нагрев после инфляции имел бы свое происхождение от образования частиц во время фазы колебаний скаляра Риччи [33].

Рассмотрим модель вида

$$f(\mathbf{R}) = \alpha \mathbf{R}^\beta, \quad (3.43)$$

где константы α , β и скаляр Риччи \mathbf{R}_0 связаны формулой (3.8) как

$$\mathbf{R}_0 = \left[\frac{1}{\alpha(\beta-2)} \right]^{\frac{1}{\beta-1}}. \quad (3.44)$$

Отметим, что условия $\beta > 0$ и небольшие положительные значения $\alpha > 0$ являются необходимыми, для того, чтобы теория $f(\mathbf{R})$ -гравитации сводилась к ОТО при малых значениях скаляра кривизны Риччи \mathbf{R} . При $r_g = GM_{\oplus}/c^2 = 4.35 \times 10^{-3}$ м, начальная кривизна определяется как

$$\mathbb{R}_0 = \mathbf{R}_0 r_g^2, \quad (3.45)$$

где \mathbb{R}_0 теперь безразмерный параметр скаляра Риччи. Диапазон (3.42) теперь перейдет в

$$0 \leq \mathbb{R}_0 < 7.87 \times 10^{-3}. \quad (3.46)$$

Кроме того, при $R_g = r_g^2$ параметр α переопределяется как $\alpha' = \alpha R_g^{\beta-1}$, так что можно переписать уравнение (3.43) в виде

$$\mathbb{R}_0 = \left[\frac{1}{\alpha'(\beta-2)} \right]^{\frac{1}{\beta-1}} \rightarrow (\beta, \mathbb{R}_0) = \frac{1}{\mathbb{R}_0^{\beta-1}} \left[\frac{1}{\beta-2} \right]. \quad (3.47)$$

Из полученного уравнения следует, что значение $\beta = 2$ исключается, т.к. в этом случае уравнение (3.47) принимает значение бесконечности. Значения $\beta > 2$ так же исключаются, поскольку это приводит к очень большим значениям параметра α' , а следовательно, и α , тем самым нарушая переход к ОТО.

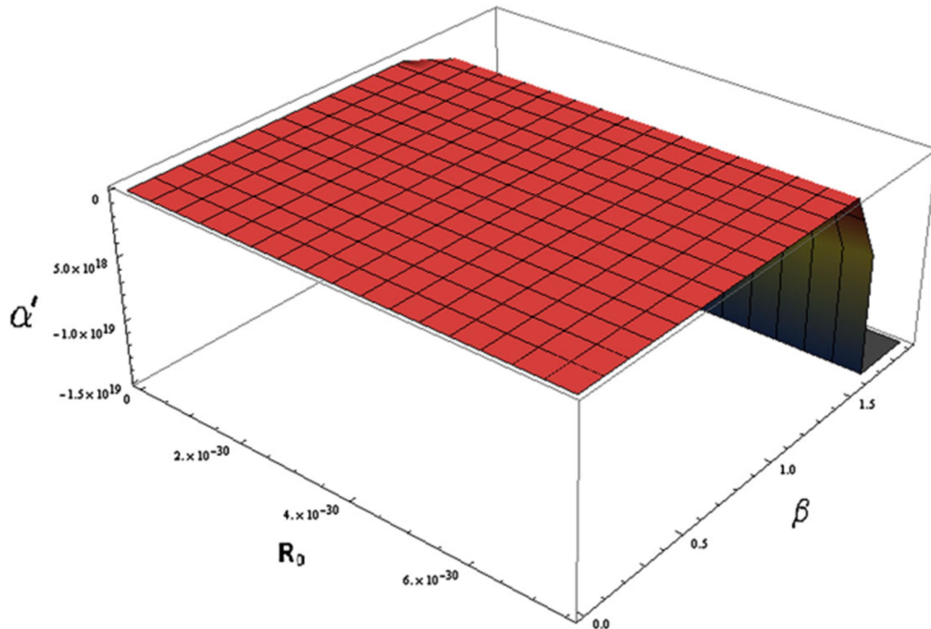


Рис. 3.2. Поверхность $\alpha'(\beta, \mathbb{R}_0)$ как функция от $\beta > 0$ и \mathbb{R}_0 .

Из Рис.3.2 в интервале $\beta \in (0,2)$ мы находим, что $\alpha' \in (-\infty, 0)$ для диапазона $0 \leq \mathbb{R}_0 < 7.87 \times 10^{-30}$, что приводит к следующим ограничениям на параметры модели

$$\alpha' \in (-\infty, 0), \beta \in (0,2), \mathbb{R}_0 \in (0, 7.87 \times 10^{-30}]. \quad (3.48)$$

Эти ограничения дополнительно усиливаются, когда накладываются общие условия валидности $f(\mathbf{R})$ -гравитации [26]

$$-1 < f'(\mathbf{R}_0) < 0, \quad (3.49)$$

$$f''(\mathbf{R}_0) > 0. \quad (3.50)$$

Первое условие обеспечивает эффективную положительную гравитационную постоянную, а второе условие необходимо, чтобы нейтрализовать неустойчивость Долгова-Кавасаки [35] для скаляра Риччи. Из этих условий для первой модели получаем

$$-1 < \alpha\beta\mathbf{R}_0^{\beta-1} < 0, \quad (3.51)$$

$$\alpha\beta(\beta-1)\mathbf{R}_0^{\beta-2} > 0. \quad (3.52)$$

Ввиду второй части (3.51), дающей $\alpha < 0$, неравенство (3.52) дает

$$0 < \beta < 1. \quad (3.53)$$

Из неравенства (3.52), используя первую часть (3.51), получим еще одно справедливое неравенство:

$$\alpha\mathbf{R}_0^{\beta-1} > -1 \rightarrow \alpha > -\frac{1}{\mathbf{R}_0^{\beta-1}}. \quad (3.54)$$

Ниже приведены ограничения на α , вызванные двумя предельными значениями β . Если $\beta = 0$, $\alpha > -\mathbf{R}_0$, а для $\beta = 1$, $\alpha > -1$. Вместе с $\alpha < 0$ из (3.51) диапазон для α равен $\alpha \in (-\mathbf{R}_0, 0)$. Таким образом, окончательный диапазон параметров первой модели, в конечном итоге ограниченный условиями валидности/нестабильности, является

$$\alpha \in (-\mathbf{R}_0, 0), \beta \in (0,1), \mathbb{R}_0 \in (0, 7.87 \times 10^{-30}]. \quad (3.55)$$

Первые два интервала такие же, как и в работе [32], в то время как интервал кривизны намного меньше.

(2) Модель $f(\mathbf{R}) = \epsilon\mathbf{R} \ln \frac{\mathbf{R}}{\alpha}$.

Теперь рассмотрим модель вида

$$f(\mathbf{R}) = \epsilon \mathbf{R} \ln \frac{\mathbf{R}}{\alpha}, \quad (3.56)$$

где параметры ϵ , α и скаляр Риччи \mathbf{R}_0 связаны формулой. (3.8) следующим образом

$$\alpha = \mathbf{R}_0 e^{\frac{1}{\epsilon}-1}. \quad (3.57)$$

Сделав параметры безразмерными, как и в случае первой модели, получим

$$\alpha'(\epsilon, \mathbb{R}_0) = \mathbb{R}_0 e^{\frac{1}{\epsilon}-1}. \quad (3.58)$$

Из уравнения (3.56) и как показано на Рис.3.3 и Рис.3.4 следует, что для $\mathbf{R}_0 > 0$ возможны два случая:

$$\epsilon \in (-\infty, 0) \rightarrow \alpha' \in (0, e^{-1}\mathbb{R}_0), \quad (3.59)$$

$$\epsilon \in (0, \infty) \rightarrow \alpha' \in (e^{-1}\mathbb{R}_0, \infty). \quad (3.60)$$

Тогда из условия валидности (3.49) и условия устойчивости (3.50), соответственно, получаем

$$-1 < \epsilon \left(1 + \ln \frac{\mathbb{R}_0}{\alpha'}\right) < 0, \quad (3.61)$$

$$\mathbf{R}_0 > 0. \quad (3.62)$$

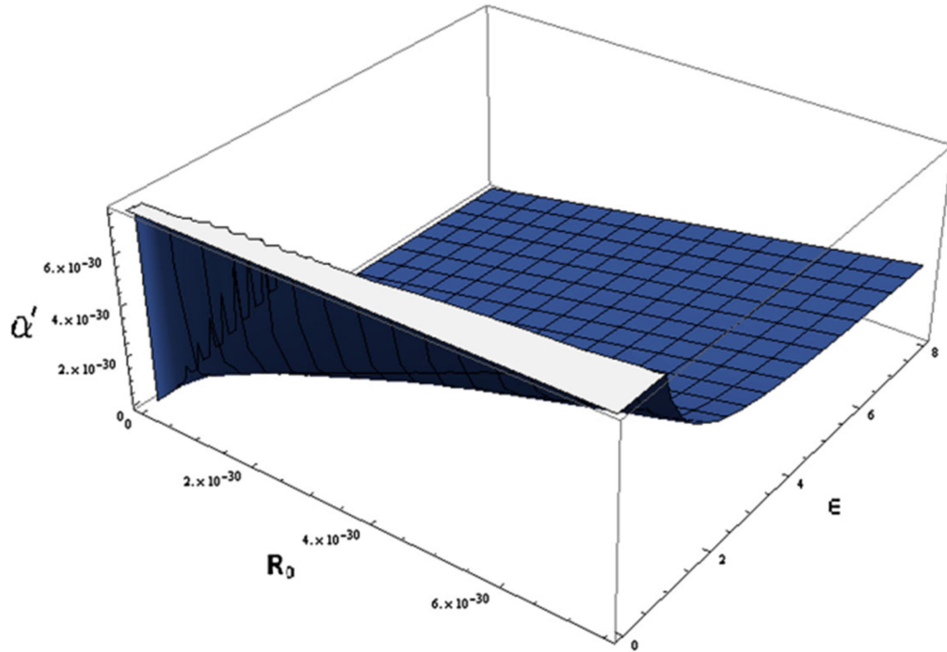


Рис. 3.3. Поверхность $\alpha'(\epsilon, \mathbf{R}_0)$ как функция от $\epsilon \in (0,8)$ и \mathbf{R}_0 .

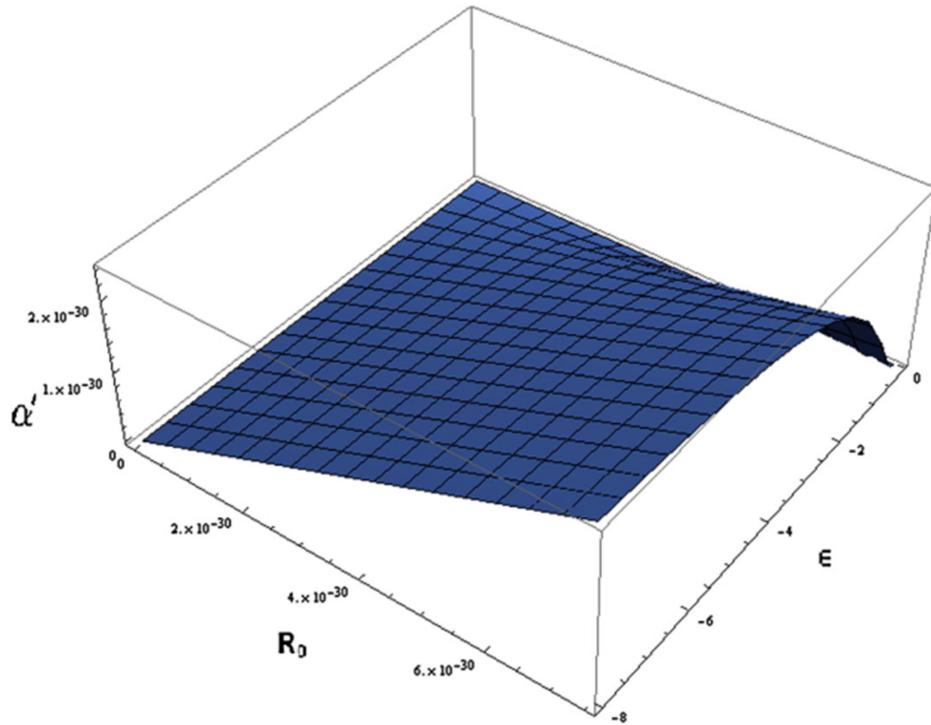


Рис. 3.4. Поверхность $\alpha'(\epsilon, \mathbb{R}_0)$ как функция от $\epsilon \in (-8, 0)$ и \mathbb{R}_0 .

Исходя из диапазонов полученных используя эффект Саньяка, а именно $\mathbb{R}_0 > 0$, единственно возможный вариант из последнего неравенства является $\epsilon > 0$, а из неравенства (3.61) следует, что $\alpha' \in (e^{-1}\mathbb{R}_0, \infty)$. Подводя итог, ограничения на параметры этой модели следующие:

$$\epsilon > 0, \alpha' \in (e^{-1}\mathbb{R}_0, \infty), \mathbb{R}_0 \in (0, 7.87 \times 10^{-3}]. \quad (3.63)$$

Вышеприведенные два примера показывают, что свободные параметры моделей ограничиваются тем же интервалом, хотя интервал для кривизны значительно меньше, чем полученный ранее из свойств аккреционного диска сильной кривизны [32], который равен $\mathbb{R}_0 \in [-1.2 \times 10^{-3}, 6.67 \times 10^{-4}]$.

3.6. Выводы по главе

Три основных вывода по третьей главе следующие:

1. Уравнения (3.21) и (3.30) для точной задержки Саньяка решения Керра в теории $f(\mathbf{R})$ -гравитации являются основными результатами исследования проведенного в этой главе. Разложения были сделаны, чтобы получить, в уравнениях (3.24) и (3.32) поправки ведущего порядка, обусловленные M, a, ω_0 и

\mathbf{R}_0 , к плоскому пространственному значению $\delta\tau_S$, измеренному в экспериментах [A2,A8].

2. Для ограничения скаляра Риччи не требуется величина точной задержки, а нужна только величина поправки к нему. Используя более точный остаток ошибки, вместе с входным допущением, что поправка $\Delta\tau_{geo}^{cor}$ содержится в остатке ошибки, а именно, $0 \leq \Delta\tau_{geo}^{cor} \leq \text{остаток ошибки} \sim 5$ нс, мы получили диапазон (3.42), а именно $0 \leq \mathbf{R}_0 < 4.16 \times 10^{-2} \text{ м}^{-2}$. Поскольку он уже, чем для случая негеодезического движения источника/приемника света, он используется для определения диапазонов безразмерных параметров конкретных моделей $f(\mathbf{R})$ -гравитации [A2].

3. Перес и соавт [32] получили диапазон для \mathbb{R}_0 , используя свойства аккреционных дисков в сильном гравитационном поле рентгеновской черной дыры Лебедь X-1 входящей в двойную систему, который в безразмерных единицах имеет вид $\mathbb{R}_0 \in [-1.2 \times 10^{-3}, 6.67 \times 10^{-4}]$. Полученный в ходе исследования диапазон (3.42), а именно, $\mathbb{R}_0 \in (0, 7.87 \times 10^{-30}]$, из экспериментальных данных задержки Саньяка, значительно меньше, поскольку в окрестности поверхности Земли гравитация слабая. После их анализа параметры тех же моделей $f(\mathbf{R})$ -гравитации были ограничены (3.55) и (3.63), которые оказались такими же, как в работе Перес и др. [32], несмотря на то, что наши круговые орбиты лежат в слабом поле вращающейся Земли [A2].

Глава 4. ЭФФЕКТ САНЬЯКА В СКАЛЯР-ТЕНЗОР-ВЕКТОРНОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

В этой главе будет рассматриваться метрика пространства-времени вращающейся черной дыры Керра в теории СТВГ (Kerr-СТВГ). Для этого решения будет получена задержка Саньяка для геодезических и негеодезических орбит источника/приемника света. С помощью экспериментальных данных эффекта Саньяка будет наложено ограничение на параметр метрики СТВГ.

4.1. Теория СТВГ

Для объяснения астрономических наблюдений, таких как кривые вращения ближайших галактик [125,126], профили масс скоплений галактик [127], некоторые эффекты гравитационного линзирования [128] и космологические данные [129], ОТО модифицируется путем добавления космологической постоянной в уравнения поля, и следовательно, постулируется существование темной материи. Однако, все проведенные эксперименты, направленные на измерение свойств такого вещества, потерпели неудачу в своем поиске [36-39].

Другим подходом объяснения астрономических данных состоит в разработке более радикальной модификации теории гравитации. Следуя этому подходу, Моффатом в 2005 году была предложена скаляр-тензор-векторная теория гравитации (теория СТВГ) [18]. В этой теории, в дополнение к тензорному метрическому полю, вводится векторное поле, а универсальная гравитационная постоянная G вместе с массой векторного поля μ рассматриваются как динамические скалярные поля. В частности, для слабого гравитационного поля теория СТВГ приводит к измененному закону ускорения, который имеет две ключевые особенности: во-первых, расширенный закон ускорения Ньютона, количественно определяемый как $G = G_N(1 + \alpha)$, где $\alpha > 0$, успешно объясняет кривые вращения многих галактик [130], динамику скоплений галактик [21,131] и космологические наблюдения [132] без привлечения темной материи. Во-вторых, член отталкивающей силы Юкавы противодействует расширенному закону

ускорения Ньютона в определенных масштабах таким образом, что предсказания теории СТВГ согласуются с предсказаниями ОТО для Солнечной системы. В работе [25] Моффатом было найдено решение уравнений поля теории СТВГ, которое представляет осесимметричную черную дыру.

4.1. Решение Керра в теории СТВГ

Линейный элемент метрики пространства-времени черной дыры с массой M и моментом импульса $J = aM$ в теории СТВГ имеет вид [25]:

$$ds^2 = c^2(\Delta - a^2 \sin^2 \theta) \frac{dt^2}{\rho^2} + \frac{2acs \sin^2 \theta}{\rho^2} [(r^2 + a^2) - \Delta] dt d\phi - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\theta^2 - [(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta] \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} d\phi^2 \quad (4.1)$$

$$\Delta = r^2 - \frac{2GMr}{c^2} + a^2 + \frac{\alpha G_N G M^2}{c^4} = r^2 - \frac{2G_N(1+\alpha)Mr}{c^2} + a^2 + \frac{\alpha(1+\alpha)G_N^2 M^2}{c^4}, \quad (4.2)$$

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta. \quad (4.3)$$

Гравитационная постоянная выражается в виде

$$G = G_N(1 + \alpha), \quad (4.4)$$

где G_N – Ньютоновская гравитационная постоянная. Безразмерный параметр $\alpha > 0$ определяется как отношение заряда гравитационного источника q векторного поля φ^μ к массе частицы m :

$$\frac{q}{m} = \sqrt{\alpha G_N}. \quad (4.5)$$

Если безразмерный параметр α теории СТВГ равен нулю, решение (4.1)-(4.3) сводится к решению Керра в ОТО.

Два корня уравнения $\Delta = 0$ дают радиусы внутреннего r_- и внешнего r_+ горизонтов событий:

$$r_{\pm} = \frac{G_N(1+\alpha)M}{c^2} \left\{ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{a^2 c^4}{G_N^2(1+\alpha)M^2} - \frac{\alpha}{(1+\alpha)}} \right\}. \quad (4.6)$$

4.2. Задержка Саньяка для негеодезических круговых экваториальных орбит

Далее будет использован метод Тарталья [9]. Согласно методу, рассматривается источник/приемник света, который движется по круговой орбите вокруг пространства-времени Керра-СТВГ (14) на экваториальной плоскости

$\theta = \pi/2$, как показано на Рис. 4.1.а. Источник/приемник света отправляет два противоположно направленных пучка света, которые также движутся по замкнутым круговым орбитам (Рис. 4.1.б). После кругового обхода оба пучка возвращаются к источнику/приемнику света с помощью подходящим образом расположенных зеркал. Предполагается так же, что источник/приемник света движется по орбите на некотором постоянном радиусе $r = R = const$ с равномерной угловой скоростью ω_0 от центрального вращающегося источника. Тогда метрика (4.1)-(4.3) сводится к

$$d\tau^2 = \left[1 - \frac{2(1+\alpha)M}{R} + \frac{\alpha(1+\alpha)M^2}{R^2} \right] dt^2 + \frac{2\alpha(1+\alpha)M}{R} \left(2 - \frac{\alpha M}{R} \right) dt d\phi - \left[R^2 + a^2 \left\{ 1 + \frac{2(1+\alpha)M}{R} - \frac{\alpha(1+\alpha)M^2}{R^2} \right\} \right] d\phi^2. \quad (4.9)$$

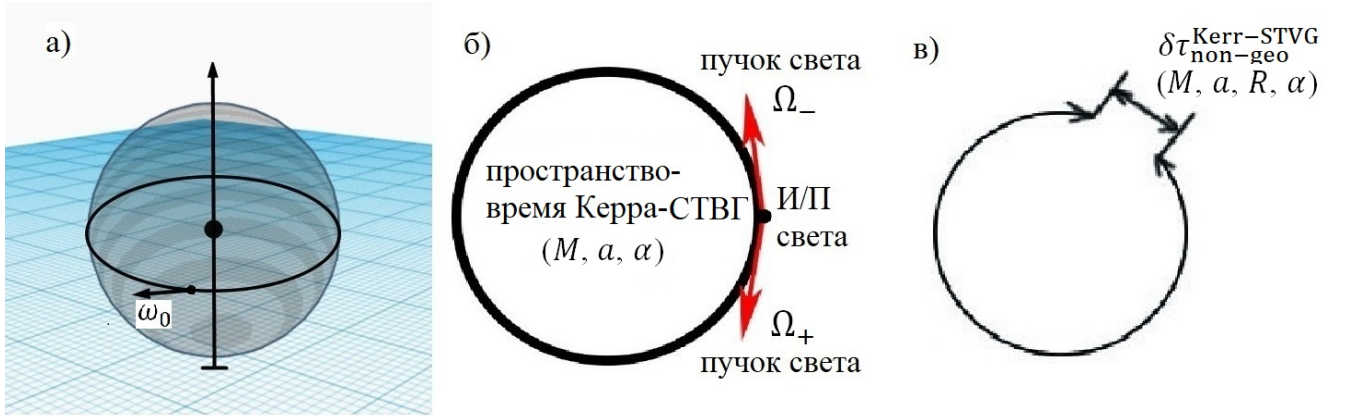


Рис. 4.1. Схематичное изображение эффекта Саньяка в пространстве-времени Керра-СТВГ. Из предположения, что осевая скорость вращения ω_0 черной дыры Керра в теории СТВГ постоянна, угол вращения источника/приемника задается уравнением (1.9). Подставив (1.9) и $d\phi = d\phi_0 = \omega_0 dt$ в (4.9) получим

$$d\tau^2 = \left[1 - (a^2 + R^2)\omega_0^2 - \left(2 - \frac{\alpha M}{R} \right) \frac{(1+\alpha)M(1+\alpha\omega_0)^2}{R} \right] dt^2. \quad (4.10)$$

Пучки света, движущиеся по одинаковым круговым траекториям, должны подчиняться условию $d\tau = 0$. Полагая Ω угловой скоростью движения пучков света по траектории, получим

$$R^2\{1 - \Omega^2(a^2 + R^2)\} + (\alpha M - 2R)(1 + \alpha)M(1 + \alpha\Omega)^2 = 0. \quad (4.11)$$

Решая уравнение (4.11) относительно переменной Ω , можно найти два корня, которые представляют угловую скорость Ω_{\pm} пучков света вращающихся в одном

направлении с вращением объекта (+) и противоположном направлении (-), которые определяются как

$$\Omega_{\pm} = \frac{\alpha(1+\alpha)M(2R-\alpha M) \pm R^2\{R^2+a^2-2(1+\alpha)MR+\alpha(1+\alpha)M^2\}^{\frac{1}{2}}}{R^4+a^2\{R^2+2(1+\alpha)MR-\alpha(1+\alpha)M^2\}}. \quad (4.12)$$

Подставив найденную величину в уравнение (1.17) получим, что угол вращения источника/приемника вокруг черной дыры Керр-СТВГ определяется как

$$\phi_{0\pm} = \mp 2\pi\omega_0 / \left[\frac{\alpha(1+\alpha)M(2R-\alpha M) \pm R^2\{R^2+a^2-2(1+\alpha)MR+\alpha(1+\alpha)M^2\}^{\frac{1}{2}}}{R^4+a^2\{R^2+2(1+\alpha)MR-\alpha(1+\alpha)M^2\}} - \omega_0 \right]. \quad (4.13)$$

Собственное время вращающегося источника/приемника, выведенное из уравнения (3.16) с использованием уравнения (1.6), является

$$d\tau = \left[1 - \left(1 + \frac{R^2}{a^2} \right) a^2 \omega_0^2 - \left(2 - \frac{\alpha M}{R} \right) \frac{(1+\alpha)M^{1/2}}{R} \right] \frac{d\phi_0}{\omega_0}. \quad (4.14)$$

Наконец, интегрируя между ϕ_{0-} и ϕ_{0+} , мы получаем точную задержку Саньяка в пространстве-времени вращающейся черной дыры Керр-СТВГ для негеодезического движения источника/приемника света

$$\delta\tau = \frac{4\pi}{R} \left[\left\{ R(R^2 + a^2) + 2a^2(1 + \alpha)M - \frac{a^2\alpha(1+\alpha)M^2}{R} \right\} \omega_0 - \alpha(1 + \alpha)M \left(2 - \frac{\alpha M}{R} \right) \right] / \left[1 - \frac{(1+\alpha)M(1-2\alpha\omega_0)}{R} \left(2 - \frac{\alpha M}{R} \right) - \left\{ R^2 + a^2 + \frac{a^2(1+\alpha)M}{R} \left(2 - \frac{\alpha M}{R} \right) \omega_0^2 \right\} \right]^{1/2} \quad (4.15)$$

Для того чтобы исследовать влияние и в дальнейшем ограничить параметр СТВГ, разложим точную задержку Саньяка в ряд по α :

$$\delta\tau = \frac{4\pi[\{R(R^2 + a^2) + 2a^2M\}\omega_0 - 2aM]}{R\sqrt{1 - 2M(1 - 2a\omega_0) - \{R^2 + a^2 + 2a^2M/R\}\omega_0^2}} \left[2\pi M(2R - M)(1 - a\omega_0)\{2a(M - R) + (R^3 - 4Ma^2R)\omega_0 + (R^3 + 2Ma^2 + a^2R)a\omega_0^2\} \alpha / [R\{R - 2M + 2aM\omega_0 - (R^3 + a^2R + 2Ma^2)\omega_0^2\}]^{\frac{3}{2}} + O(\alpha^2) \right]. \quad (4.16)$$

Задержка Саньяка (4.16) в случае, когда источник/приемник света сохраняет фиксированное положение в системе координат, определяемой удаленными неподвижными звездами (т.е. $\omega_0 = 0$), не обращается в нуль при $a \neq 0$:

$$\delta\tau_0 = \frac{4aM(1+\alpha)(-2R+M)\pi}{R\sqrt{R^2-2MR(1+\alpha)+M^2\alpha(1+\alpha)}}. \quad (4.17)$$

Эта формула является первым порядком постньютоновского приближения для статического источника/приемника света.

Уравнение (4.15) является итоговым результатом задержки Саньяка для экваториального движения. В большинстве случаев многие члены в этом уравнении очень малы и, следовательно, эту величину можно разложить в ряд. Разложим уравнение (4.15) в ряд Тейлора по $\beta = \omega_0 R \ll 1$ до первого порядка

$$\delta\tau \approx \frac{4akR(1+\alpha)(-2+k\alpha)\pi}{\sqrt{R^2(1+k(1+\alpha)(-2+k\alpha))}} + \frac{4R^2(a^2+R^2(1+k(1+\alpha)(-2+k\alpha)))\pi\beta}{(R^2(1+k(1+\alpha)(-2+k\alpha)))^{3/2}}. \quad (4.18)$$

Первое слагаемое в этом разложении равно $\delta\tau_0$ из уравнения (4.17). Далее, выполним постньютоновское приближение по степеням $\epsilon = M/R \ll 1$ до первого порядка и предполагая, что $a/R \ll 1$ малая величина, получим

$$\delta\tau \approx \delta\tau_S - 8\pi a(1+\alpha)\epsilon + 4\pi R(1+\alpha)\epsilon\beta. \quad (4.19)$$

Подставив обратно ϵ и β получим

$$\delta\tau \approx \delta\tau_S - \frac{8\pi(1+\alpha)M}{R} + 4\pi R(1+\alpha)M\omega_0. \quad (4.20)$$

Уравнение (4.20) и есть постньютоновское приближение задержки Саньяка в пространстве-времени вращающейся черной дыры Керр-СТВГ для негеодезического движения источника/приемника света. Из уравнения (4.20) видно, что параметр СТВГ появляется только со второго порядка, и следовательно не влияет на задержку Саньяка в плоском пространстве $\delta\tau_S$.

4.3. Задержка Саньяка для геодезических круговых экваториальных орбит

В этом разделе рассматривается круговая геодезическая орбита источника/приемника света на некотором произвольном радиусе на экваториальной плоскости ($\theta=\pi/2$), который посылает два пучка света, которые облетают Землю. В этом случае угловая скорость спутника ω_{\pm} определяется самой круговой геодезической, которая удовлетворяет третьему закону Кеплера.

Подставляя $dr = 0$ при $r = R = const.$ и $d\theta = 0$ при $\theta = \pi/2$, метрика (3.9) может быть переписана в виде

$$d\tau^2 = g_{tt}dt^2 + 2g_{t\phi}dtd\phi + g_{\phi\phi}d\phi^2, \quad (4.21)$$

где

$$g_{tt} = 1 - \frac{2(1-\alpha)M}{R} + \frac{\alpha(1+\alpha)M^2}{R^2}, \quad g_{t\phi} = \frac{\alpha(1+\alpha)M(2R-\alpha M)}{R^2}, \quad (4.22)$$

$$g_{\phi\phi} = -R^2 - a^2 \left\{ 1 + \frac{2(1+\alpha)M}{R} - \frac{\alpha(1+\alpha)M^2}{R^2} \right\}. \quad (4.23)$$

Тогда орбитальные скорости спутника ω_{\pm} следуют из двух корней квадратного уравнения (1.19). Используя уравнения (4.21)-(4.23), получим

$$\omega_{\pm} = \frac{-aMR + \sqrt{2\alpha - aMR\alpha + aM^2\alpha^2 \pm \sqrt{MR^5 - M^2R^4\alpha + MR^5\alpha - M^2R^4\alpha^2}}}{-a^2MR + R^4 + a^2M^2\alpha - a^2MR\alpha + a^2M^2\alpha^2}. \quad (4.24)$$

Точная задержка Саньяка для геодезического движения источника/приемника света будет равна $\delta\tau_{S\pm geo}^{KerrSTVG} = 4\pi\omega_{\pm}R^2$, что может быть записано в явном виде, после подстановки ω_{\pm} из уравнения (4.24):

$$\delta\tau_{S\pm geo}^{KerrSTVG} = \pm 4\pi R^2 \left[\frac{-aMR + \sqrt{2\alpha - aMR\alpha + aM^2\alpha^2 \pm \sqrt{MR^5 - M^2R^4\alpha + MR^5\alpha - M^2R^4\alpha^2}}}{-a^2MR + R^4 + a^2M^2\alpha - a^2MR\alpha + a^2M^2\alpha^2} \right]. \quad (4.25)$$

Отметим, что при $a = 0$ и $\alpha = 0$ угловая скорость сводится к $\omega_{\pm} = \mp \sqrt{\frac{M}{R^3}}$, которая удовлетворяет третьему закону Кеплера. Теперь разложим уравнение (4.25) до первого порядка по α и получим

$$\delta\tau_{S\pm geo}^{KerrSTVG} = \pm 4\pi R^2 \left[\frac{-aMR - \sqrt{MR^5}}{-a^2MR + R^4} + \left\{ \frac{(-a^2M^2 + a^2MR)(-aMR - \sqrt{MR^5})}{R^2(a^2M - R^3)^2} + \frac{aM^2 - aMR + \frac{(M-R)\sqrt{MR^5}}{2R}}{-a^2MR + R^4} \right\} \alpha + O(\alpha^2) \right]. \quad (4.26)$$

В пределе слабого поля, то есть при $\frac{a^2}{R^2} \ll 1, \frac{M}{R} \ll 1$, уравнение (4.26) переписывается в виде:

$$\delta\tau_{S\pm geo}^{KerrSTVG} = \pm 4\pi\sqrt{MR} \mp 4\pi \left(\frac{M}{R} \right) a \pm 4\pi \left[\frac{\sqrt{MR^5}(M-R)(R^3 + a^2M)}{2(R^3 + a^2M)^2} \pm \frac{2aMR^4(R-M)}{2(R^3 - a^2M)^2} \right] \alpha. \quad (4.27)$$

откуда видно, что первые два выражения ниже совпадают с формулой, полученной в работе [10] для решения Керра, а вот остальная часть показывает влияние параметра СТВГ.

4.4. Применение эффекта Саньяка для ограничения параметра СТВГ

а) эксперимент АВЭ

Далее будет использоваться данные полученные в эксперименте АВЭ для нахождения ограничения параметра теории СТВГ.

Для этого, подставим данные Земли (2.60)-(2.63) и эквивалентный радиус Земли R_{eq} вместо R в уравнение (4.20) для $\frac{1}{2}\delta\tau$, восстановив при этом $\omega_0 \rightarrow \Omega_{\oplus}/c$, $a \rightarrow a_{\oplus}/c$ и преобразовав секунды в наносекунды (нс), $\frac{1}{2}\delta\tau \text{ с} \rightarrow \frac{1}{2}\delta\tau \times 10^9 \text{ нс}$, найдем значение каждой поправки:

$$\delta\tau \approx \delta\tau_S^{AWA} - \frac{8\pi a(1+\alpha)M}{R} + 4\pi R(1+\alpha)M\omega_0,$$

$$\frac{1}{2}\delta\tau_S^{AWA} = 2 \times \frac{2\Omega_{\oplus}}{c^2} \times \pi R_{eq}^2 \times 10^9 = 240 \text{ нс}, \quad (4.28)$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)\delta\tau_{a_{\oplus}} = \left(\frac{1}{2}\right)\frac{8\pi aM}{R} = \left(\frac{1}{2}\right)\frac{8\pi a_{\oplus}M}{c^2 R_{eq}} \rightarrow \frac{1}{2}\delta\tau_{M,a_{\oplus}} \times 10^9 = 8.68 \times 10^{-10} \text{ нс}, \quad (4.29)$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)\frac{8\pi \alpha aM}{R} = \left(\frac{1}{2}\right)\frac{8\pi \alpha a_{\oplus}M}{c^2 R_{eq}} \rightarrow \frac{1}{2}\delta\tau_{\alpha,M,a_{\oplus}} \times 10^9 = 8.68 \times 10^{-10} \times \alpha \text{ нс}, \quad (4.30)$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)4\pi RM\omega_0 = \left(\frac{1}{2}\right)\frac{4\pi R_{eq}M\Omega_{\oplus}}{c^2} \rightarrow \frac{1}{2}\delta\tau_{M,\Omega_{\oplus}} \times 10^9 = 1.52 \times 10^{-2} \text{ нс}, \quad (4.31)$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)4\pi RM\omega_0 = \left(\frac{1}{2}\right)\frac{4\pi R_{eq}M\Omega_{\oplus}\alpha}{c^2} \rightarrow \frac{1}{2}\delta\tau_{\alpha,M,\Omega_{\oplus}} \times 10^9 = 1.52 \times 10^{-25} \times \alpha \text{ нс}. \quad (4.32)$$

Так как вклад от величин $8,68 \times 10^{-10}$ нс и $1,52 \times 10^{-25}$ нс намного меньше, чем наблюдаемый остаток ошибки 5 нс, уравнение (4.20) можно переписать в виде:

$$\frac{1}{2}\delta\tau \times 10^9 \approx \frac{1}{2}\delta\tau_S^{AWA} + 8.68 \times 10^{-1} \alpha. \quad (4.33)$$

Используя предположение, что поправка в односторонней задержки Саньяка должна быть меньше или равна среднему остатку ошибки 5 нс, получаем верхнюю границу параметра α

$$8.68 \times 10^{-10} \alpha \leq 5 \Rightarrow \alpha \leq 5.76 \times 10^9. \quad (4.34)$$

б) метод ДПСВЧ через спутники

Предполагая, что параметр вращения и массы принимают значения $a = a_{\oplus}$ и $M = M_{\oplus}$. Геодезическая орбита будет выбрана в виде $R = R_{geost}$. Подставив эти значения в уравнение (4.27), и, преобразовав секунды в наносекунды, получим

$$\begin{aligned} |\delta\tau_{Sgeo}^{KerrSTVG}| &= \delta\tau_{Sgeo}^{Sc} + \text{поправка из-за вращения } a_{\oplus} + \text{поправка из-за } \alpha \\ &= |1.79 \times 10^4 + 4.23 \times 10^{-2} + 2.14 \times 10^2 \alpha| \text{ нс}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Последнее слагаемое $2.14 \times 10^2 \alpha$ нс в уравнении (4.35) показывает поправку параметра СТВГ α к ведущим порядкам задержки Саньяка.

Таким образом, используя то же предположение, что и в пункте 2.2.4, что поправочный член в ведущем порядке из-за α должен быть меньше или равен суточной поправке $\Delta(\delta\tau_S)$ нс, получим

$$\alpha < \frac{\Delta(\delta\tau_S)}{2.14 \times 10^2} = 1.166 \times 10^{-3}, \quad (4.36)$$

что ограничивает α гораздо сильнее, чем полученное в уравнении (4.34).

4.5. Выводы по главе

Основываясь на полученных результатах, можно сделать следующие выводы:

- получено точное выражение задержки Саньяка в пространстве-времени Керр-СТВГ, а так же путем разложения в ряд Тейлора показано, что параметр СТВГ не влияет на базовую задержку Саньяка [А6, А13];

- получен верхний предел параметра СТВГ. Для ограничения параметра СТВГ использовалось условие $\left(\frac{1}{2}\delta\tau^{STVG} - \frac{1}{2}\delta\tau_S\right) \leq \Delta_{AWA}$, где $\delta\tau^{STVG}$ – величина задержки Саньяка в пространстве-времени Керр-СТВГ для негеодезических круговых орбит источника/приемника света, условие $\left(\delta\tau_{geo\pm}^{STVG} - \delta\tau_{geo\pm}^{Kerr}\right) \leq \Delta_{geo}$, где $\delta\tau_{geo\pm}^{STVG}$ – величина задержки Саньяка в пространстве-времени Керр-СТВГ для геодезических круговых орбит источника/приемника света. В результате получен предел $\alpha < 1.166 \times 10^{-3}$ [А6], соответствующий массе Земли, что согласуется с верхней границей $\alpha < 0.1$, предложенной Лопесом Арменголом и Ромеро для источников звездной величины [134].

Глава 5. ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ЗАДЕРЖКА ВРЕМЕНИ В ПРОСТРАНСТВЕ- ВРЕМЕНИ КЕРРА-СЕНА

В этой главе будет описан другой метод определения задержки времени, который называется относительной задержкой времени.

Четырехмерным решением для черных дыр, вытекающих из теории струн, является асимптотически плоская вращающаяся черная дыра Керра-Сена, характеризующаяся параметром струны $\xi = Q^2/2M$, где Q – дилатонный заряд и M – масса источника [31]. Интерес к изучению черной дыры Керра-Сена появился с момента его открытия Сенем [135]. К названию рассматриваемого решения так же добавляют «Керра», поскольку оно сводится к решению Керра из ОТО при $\xi = 0$. Тогда возникает естественный вопрос: как ξ влияет на различные наблюдаемые физические свойства и явления, чтобы можно было различить черные дыры двух теорий. В работе [135] исследовано такое явление как угол отклонения света в пространстве-времени черной дыры Керра-Сена и показано влияние параметра ξ на него. В недавней работе Ли и Дэн [136] рассматривается взаимодействие фотонов с тензором Вейля и изучено его влияние в Солнечной системе на отклонение света, гравитационную временную задержку и эксперимент Кассини. Еще одним физическим наблюдаемым явлением является новая диагностика относительной задержки времени сигналов, обозначенная здесь как Δt , вызванная увлечением инерциальных систем отсчета вращающейся линзы, которая является объектом исследования в данной главе [27]. Основа для поиска эффекта относительной задержки времени заложена недавними предположениями о различных системах двойных линз, в которых предполагается, что черная дыра Керра-Сена является партнером вращающихся линз.

Идея относительной задержки времени заключается в следующем: рассмотрим двойную систему, в которой переменный источник света S вращается вокруг вращающегося компактного объекта (линзы черной дыры) [30,137]. Предполагается, что два световых луча исходят из S и проходят по обе стороны от

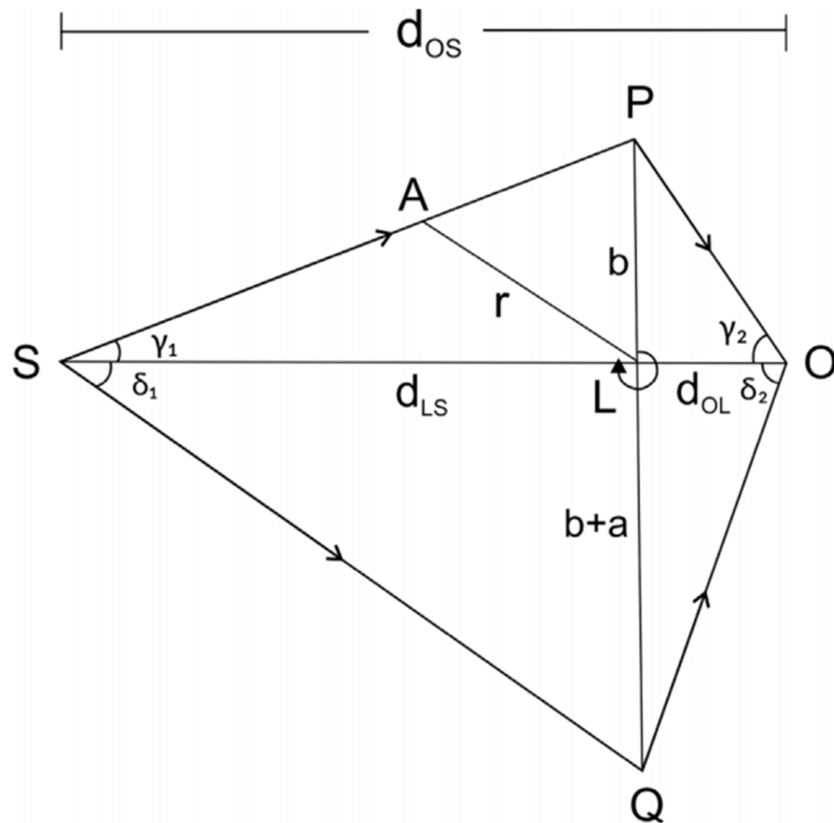


Рис. 5.1. Схематичное изображение относительной задержки времени (углы здесь преувеличены). S , L и O - источник, линза и наблюдатель, соответственно, расположенные на одной прямой ($\beta = 0$), b - прицельный параметр, a - параметр вращения. Произвольные углы такие, как показано.

вращающейся линзы L (с массой M и параметром вращения a), чтобы достичь наблюдателя в точке O , скажем, на Земле. Очевидно, что лучи света достигнут наблюдателя в точке O в разное время, и эта разница во времени прихода вызвана эффектом увлечения инерциальных систем отсчета из-за промежуточной вращающейся линзы. Увлечение инерциальных систем отсчета приводит к тому, что длина пути света по обе стороны от линзы будет отличаться: короче для сонаправленного с вращением линзы луча и длиннее для противоположно-направленного вращению линзы луча (см. Рис. 5.1). Относительную задержку времени можно рассматривать как астрофизический аналог квантового эффекта Бома-Ааронова [28], хотя аналогия не слишком точна, поскольку световые лучи в любом случае проходят через слабое гравитационное поле. Разница во времени прихода импульсов в нулевом порядке была вычислена Лагуной и Вольщаном для метрики Керра для некоторых гипотетических двойных систем [30]. Аналогичной

эффект, хотя и не совсем такой же природы, был изучен Даттой и Капуром [138], где предполагалось, что свет исходит не из единого переменного источника за линзой, а из двух диаметрально противоположных точек от вращающегося компактного объекта, достигающих наблюдателя на Земле. Потенциальным примером относительной задержки времени может быть раннее наблюдение чрезвычайно быстрых флуктуаций яркости квазара $1525 + 227$ с характерным временным масштабом ~ 200 сек, предположительно вызванных вращающейся черной дырой с массой $M \sim 5 \times 10^8 M_{\odot}$ расположенной между квазаром и наблюдателем [139]. Несмотря на то, что пока нет конкретных экспериментальных данных по относительной задержке времени, очень точные данные могут в принципе ограничить значения ξ , которые будут иметь значение для теории струн.

Следующая концепция, используемая в расчетах – приближение тонкой линзы [140], где источник, линза и наблюдатель рассматриваются как точки, а отклонение света происходит только в линзе, в то время как в других местах предполагается, что лучи движутся по прямым линиям. Это приближение очень точно описывает ситуацию, когда лучи проходят огромные расстояния по сравнению с размером линзы, а прицельный параметр намного больше, чем размер линзы. Поэтому соответствующие углы малы по сравнению с оптической осью $S - L - O$, что делает четырехугольник на рис. 5.1 тонким. Отметим, что более точный расчет относительной задержки времени должен учитывать точные нулевые геодезические вокруг вращающейся линзы, а их численное интегрирование должно выполняться между двумя конечными точками на оптической оси. Тем не менее, тонкая линза и последующее пост-постньютоновское приближение обеспечивают простое и элегантное описание многих реалистичных ситуаций линзирования [140] и достаточно зафиксировать значения ведущего порядка наблюдаемой относительной задержки времени, как обычные наблюдаемые пост-постньютоновские приближения в пространстве-времени Шварцшильда.

Далее будет проведено теоретическое исследование влияния параметра ξ на относительную задержку времени в системах двойных линз при условии совмещения источника, линзы и наблюдателя. В частности, будет показано, как Δt отличается по величине от значения Керра ($\xi = 0$) для данной линзы, когда ее масса M и параметр вращения a заданы независимо. Так же будут обобщены компоненты Δt , включая известный закон нулевого порядка, на масштабы линзы конечного расстояния, которые практически осуществимы. В работе [141] утверждается, что вращающуюся линзу можно рассматривать как эквивалент «эффективной» статической линзы, который предоставляет возможность измерить относительную задержку времени нулевого порядка с точки зрения наблюдаемого коэффициента увеличения изображения. Численные значения будут сведены в таблицу для двух предполагаемых систем двойных линз.

5.1. Пространство-время черной дыры Керра-Сена

Четырехмерное эффективное действие теории струн имеет вид:

$$S = - \int d^4x \sqrt{-g} e^{-\Phi} \left(-\mathcal{R} + \frac{1}{12} \mathcal{H}_{\mu\nu\rho} \mathcal{H}^{\mu\nu\rho} - g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi + \frac{1}{12} \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu} \right), \quad (5.1)$$

где $g_{\mu\nu}$ – метрика в картине струн, \mathcal{R} – скаляр Риччи, $\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ – напряженность поля, соответствующая электромагнитному полю Максвелла A_μ , Φ – дилатонное поле и

$$\mathcal{H}_{\mu\nu\rho} = \partial_\mu \mathcal{B}_{\nu\rho} + \partial_\nu \mathcal{B}_{\mu\rho} + \partial_\rho \mathcal{B}_{\mu\nu} - [\Omega_3(A)]_{\mu\nu\rho},$$

где $\mathcal{B}_{\mu\nu}$ – антисимметричное калибровочное тензорное поле и

$$[\Omega_3(A)]_{\mu\nu\rho} = \frac{1}{4} (A_\mu \mathcal{F}_{\nu\rho} + A_\nu \mathcal{F}_{\mu\rho} + A_\rho \mathcal{F}_{\mu\nu})$$

– калибровочный член Черна-Саймонса. Метрика в картине Эйнштейна может быть получена из соотношения

$$g_{\mu\nu} = e^{-\Phi} g_{\mu\nu}.$$

Решение черной дыры Керра-Сена с вращением в координатах Бойера-Линдквиста (t, r, θ, φ) в картине Эйнштейна имеет вид [31]:

$$ds^2 = g_{tt} dt^2 + g_{rr} dr^2 + g_{\theta\theta} d\theta^2 + g_{\phi\phi} d\phi^2 + 2g_{t\phi} dt d\phi, \quad (5.2)$$

где

$$g_{tt} = -\left(\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma}\right), \quad (5.3)$$

$$g_{rr} = \frac{\Sigma}{\Delta}, \quad (5.4)$$

$$g_{\theta\theta} = \Sigma, \quad (5.5)$$

$$g_{\phi\phi} = \left(\frac{\Xi}{\Sigma}\right) \sin^2 \theta, \quad (5.6)$$

$$g_{t\phi} = -\frac{2m a r \cosh^2(\alpha) \sin^2(\theta)}{\Sigma}, \quad (5.7)$$

$$A_t = \frac{m r \sinh(2\alpha)}{\sqrt{2}\Sigma}, \quad A_\phi = \frac{m a r \sinh(2\alpha) \sin^2(\theta)}{\sqrt{2}\Sigma},$$

$$\mathcal{B}_{t\phi} = \frac{2a^2 m r \sinh^2(\alpha) \sin^2(\theta)}{\Sigma},$$

$$\Phi = -\frac{1}{2} \ln \left[\frac{\Sigma}{r^2 + a^2 \cos^2(\theta)} \right],$$

где

$$\Delta = r^2 + a^2 - 2mr,$$

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2(\theta) + 2mr \sinh^2(\alpha),$$

$$\Xi = [r^2 + a^2 + 2mr \sinh^2(\alpha)]^2 - a^2 \Delta \sin^2(\theta).$$

Параметры m , α и a связаны с массой черной дыры M , дилатонным зарядом Q и угловым моментом J следующим образом [135]:

$$M = \frac{m}{2} [1 + \cosh(2\alpha)], \quad (5.8)$$

$$Q = \frac{m}{\sqrt{2}} \sinh(2\alpha), \quad (5.9)$$

$$J = \frac{am}{2} [1 + \cosh(2\alpha)]. \quad (5.9)$$

Далее используется преобразование

$$\xi \equiv m \sinh^2(\alpha), \quad (5.10)$$

$$m \equiv M - \xi, \quad (5.11)$$

к решению (5.2)-(5.7). В результате получено решение черной дыры Керра-Сена в стандартном виде

$$g_{tt} = -\left(1 - \frac{2M}{\Sigma}\right), \quad (5.12)$$

$$g_{rr} = \frac{\Sigma}{\Delta}, \quad (5.13)$$

$$g_{\theta\theta} = \Sigma, \quad (5.14)$$

$$g_{\phi\phi} = \left[r(r + 2\xi) + a^2 + \frac{2Mra^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \right] \sin^2 \theta, \quad (5.15)$$

$$g_{t\phi} = -\frac{2Mra \sin^2 \theta}{\Sigma}, \quad (5.16)$$

где

$$\Delta = r(r + 2\xi) + a^2 - 2Mr,$$

$$\Sigma = r(r + 2\xi) + a^2 \cos^2(\theta),$$

$$\xi = \frac{Q^2}{2M}.$$

Внешний и внутренний горизонты событий могут быть получены из решения уравнения $\Delta = 0$ и имеют вид

$$r_{\pm} = (M - \xi) \pm \sqrt{(M - \xi)^2 - a^2}, \quad (5.17)$$

которые являются действительными при условии, когда $a \leq M - \xi$. Следовательно, на параметр ξ (дилатонный заряд Q) накладывается ограничение в виде:

$$\xi \leq M(1 - a_*), \quad (5.18)$$

где $a_*(\equiv a/M)$ – безразмерный параметр вращения. Отсюда следует, если независимо измерены масса и параметр вращения для данной черной дыры, то автоматически следует ограничение и на параметр ξ . Например, используя максимальное значение параметра вращения, полученное при исследовании свойств аккреционных модели Пейджа-Торна [142], $a_* = 0.998$, ограничение на параметр ξ имеет вид

$$\xi \leq 0.002M. \quad (5.19)$$

Из выше написанного неравенства следует экстремальное значение параметра ξ . Только очень точные данные пикосекундного уровня могут ограничить ξ строже, не исключая даже значения $\xi = 0$. Одним из таких экспериментов может быть измерение относительной задержки времени, описанное далее в работе.

5.2. Относительная задержка времени

Для того, чтобы вывести уравнение относительной задержки времени, рассмотрим нулевую геодезическую траекторию на экваториальной плоскости ($\theta = \pi/2$), заданную уравнением $d\tau^2 = 0$, так что координатное время,

необходимое для световых лучей вдоль бесконечно малой нулевой мировой линии, определяется как:

$$dt_{\pm} = \frac{d\phi}{g_{tt}} [-g_{t\theta} \pm h(r, \phi)], \quad (5.20)$$

где

$$h(r, \phi) = \sqrt{g_{t\phi}^2 - g_{tt} \left\{ g_{rr} \left(\frac{dr}{d\phi} \right)^2 + g_{\phi\phi}^2 \right\}}. \quad (5.21)$$

Предполагается так же, что координатное время будет положительным для обеих сторон линзы (\pm), которое определяет, что $d\phi > 0$ для световых лучей проходящих через линзу в одинаковом с вращением линзы направлении и $d\phi < 0$ для лучей проходящих через линзу в противоположном вращению линзы направлении, так, что оба значения dt_+ и dt_- положительны. Конечная разница времени прибытия к наблюдателю между двумя лучами, движущимися по нулевым геодезическим, также положительна и выражается как:

$$dt = dt_- - dt_+ = \frac{|d\phi|}{g_{tt}} [g_{t\phi} + h(r, \phi)] - \frac{|d\phi|}{g_{tt}} [g_{t\phi} - h(r, \phi)] = \frac{2g_{t\phi}}{g_{tt}} [d\phi]. \quad (5.22)$$

Эта задержка dt связана с эффектом увлечения инерциальных систем отсчета, характеризуемым членом $\frac{2g_{t\phi}}{g_{tt}}$, который будет вычислен в этой главе.

Предполагается, что источник, вращающаяся линза и наблюдатель расположены на одной прямой линии, как показано на рис. 5.1. Если линза не будет вращаться, то длина пути световых лучей с обеих сторон линзы будет одинаковой, и не будет разницы во времени прибытия к наблюдателю. Однако, если линза вращается, длина пути двух лучей будет отличаться – длиннее для сонаправленного с вращением линзы луча и короче для противоположно-направленного вращению линзы луча, что приводит к появлению относительной задержки времени. Лучи на экваториальной плоскости проходят через слабое поле, так что справедливо приближение тонкой линзы, то есть расстояние наименьшего сближения $r \gg r_{ph}^{\pm}$ по обе стороны от линзы. Выбор большого r гарантирует, что для заданной линзы с массой M и параметром вращения a выполняется условие $(M/r) \ll 1$.

Применим обобщенную формулу (5.22) к черной дыре Керра-Сена (5.2), (5.12)-(5.16) и разложим $\left(\frac{2g_{t\phi}}{g_{tt}}\right)$ в ряд Тейлора по a до первого порядка и до третьего порядка пост-постньютоновского приближения по (M/r) . В результате, получим:

$$|dt| = |d\phi| \left(\frac{1}{c}\right) \left[\frac{4aM}{r} \left\{1 + \frac{2M}{r} \lambda_1 + \frac{M^2}{2r^2} \lambda_2 + \dots\right\}\right], \quad (5.23)$$

где

$$\lambda_1 = 1 - \frac{Q^2}{2M^2} = 1 - \frac{\xi}{M}, \quad (5.24)$$

$$\lambda_2 = 8 - \frac{8Q^2}{M^2} + \frac{2Q^4}{M^4} = 1 - \frac{2\xi}{M} + \frac{\xi^2}{M^2} = 8 \left(1 - \frac{\xi}{M}\right)^2, \quad (5.25)$$

являются параметрами, показывающими отклонения от черной дыры Керра, которое имеет значения $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 8$. Отметим, что множитель $4aM/r$, умноженный на фигурную скобку в уравнении (5.23) не обязательно должен быть маленьким. Влияние ξ очевидно из уравнений (5.23)-(5.25), и для данных массы M и параметра вращения a измеренные данные dt в принципе будут ограничивать параметр ξ .

Общее время задержки Δt между двумя световыми лучами, идущими от источника к наблюдателю вдоль двух противоположных сторон промежуточной вращающейся линзы, составляет

$$\Delta t = \left(\frac{1}{c}\right) \int_0^\pi d\phi \left[\frac{4aM}{r} \left\{1 + \frac{2M}{r} \lambda_1 + \frac{M^2}{2r^2} \lambda_2 + \dots\right\}\right] \quad (5.26)$$

$$\equiv \left(\frac{1}{c}\right) (I_1 + I_2 + I_3) = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3. \quad (5.27)$$

В работе будет рассчитан интеграл, определяющий положение вращающейся линзы в начале полярной системы координат на экваториальной плоскости ($\theta=\pi/2$). Как видно, параметры отклонения не влияют на вклад задержки в ведущем порядке Δt_1 . Далее будут получены явные выражения для Δt_1 , Δt_2 и Δt_3 в приближении тонкой линзы.

5.3. Приближение тонкой линзы

В реалистичных конфигурациях линз, радиус, на котором происходит изгиб света, порядка радиуса Шварцшильда, что намного меньше типичных расстояний

d_{OL} , d_{OS} , d_{LS} , по которым распространяется свет. Тогда, в лучшем приближении, можно предположить, что световые лучи распространяются вдоль прямых линий, когда они находятся далеко от линзы, с изгибом, происходящим только в точечной линзе [140]. В случае вращающейся линзы мы утверждаем, что приближение требует выполнения трех дополнительных нетривиальных условий, перечисленных ниже.

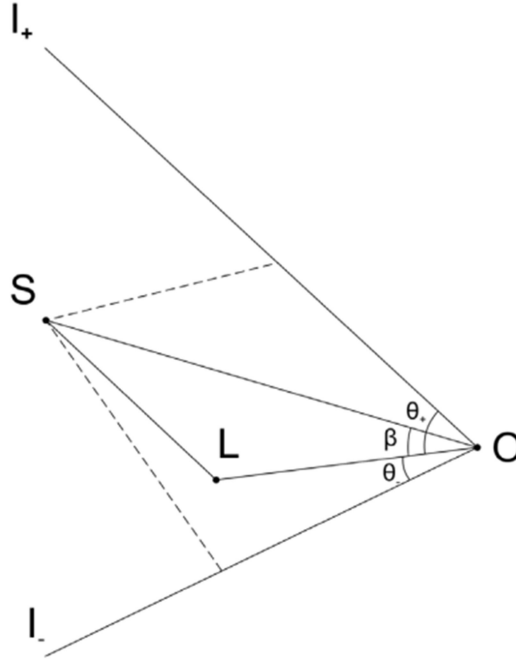


Рис. 5.2. «Эффективная» не выровненная статическая линза при $\beta \neq 0$ эквивалентна выровненной вращающейся линзе на рис. 5.1 с $\beta = 0$. Изображения появляются в точках I_{\pm} с двумя угловыми положениями θ_{\pm} .

(а) Первое условие состоит в том, что лучи, испущенные из источника S , после прохождения прямых отрезков по обе стороны от вращающейся линзы L в экваториальной плоскости, должны встретиться в точке O , образуя четырехугольник $SPOQ$ на рис. 1. Это возможно только исходя из предположения, что $(a/b) \ll 1$ так, что порядками $(a/b)^2$ и выше можно пренебречь. На рис.1 углы связаны соотношением:

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \angle OPS = \pi = \angle OPS + \theta_1 \Rightarrow \gamma_1 + \gamma_2 = \theta_1, \quad (5.28)$$

$$\delta_1 + \delta_2 + \angle OPS = \pi = \angle OPS + \theta_2 \Rightarrow \delta_1 + \delta_2 = \theta_2. \quad (5.29)$$

В приближении тонкой линзы соответствующие углы, указанные ниже

$$\gamma_1 = \frac{b}{d_{LS}}, \gamma_2 = \frac{b}{d_{OL}}, \delta_1 = \frac{b+\chi}{d_{LS}}, \delta_2 = \frac{b+\chi}{d_{OL}} \quad (5.30)$$

должны быть небольшими, где $\chi(a, b)$ – неизвестная функция, которую необходимо определить. Для данного d_{OL} прицельный параметр b и отношение $\chi(= d_{LS}/d_{OL})$ таковы, что углы $\gamma_1, \gamma_2, \delta_1, \delta_2 \ll 1$.

Следуя формуле Бойера-Линдквиста [143] для угла отклонения света в точках P и Q , получим

$$\theta_1 = \frac{4M}{b} \left(1 - \frac{a}{b}\right), \text{ (для сонаправленного луча света)} \quad (5.31)$$

$$\theta_2 = \frac{4M}{b} \left(1 + \frac{a}{b+\chi}\right). \text{ (для противоположно направленного луча света)} \quad (5.32)$$

С другой стороны, исходя из рис. 1, получим

$$b \left(\frac{1}{d_{LS}} + \frac{1}{d_{OL}}\right) = \theta_1, \quad (5.33)$$

$$(b + \chi) \left(\frac{1}{d_{LS}} + \frac{1}{d_{OL}}\right) = \theta_2. \quad (5.34)$$

Из отношения (5.34) на (5.33) следует

$$\frac{b}{b+\chi} = \frac{1-a/b}{1+a/(b+\chi)} = \frac{\theta_1}{\theta_2}. \quad (5.35)$$

Из первого равенства уравнения (5.35) следует

$$\frac{(\chi+2b)[-b\chi(\chi+b)+a(b^2+b\chi+\chi^2)]}{b^2(b+\chi)(a+b+\chi)} = 0. \quad (5.36)$$

Это уравнение определено при $\chi \neq b$ и $-(a+b)$. Одним из решений уравнения (5.36) является $\chi = -2b$. Однако, расстояние наибольшего сближения при этом корне получается отрицательным $b + \chi = -b$. Таким образом это решение исключается, поскольку расстояние не может быть отрицательным. Следовательно, в уравнении (5.36) остается квадратное уравнение относительно $\chi(a, b)$, которое имеет вид

$$-b\chi(\chi + b) + a(b^2 + b\chi + \chi^2) = 0. \quad (5.37)$$

Решая уравнение при условии, что $\chi(a, b) = 0$ при $a = 0$, находим, что единственный корень, который удовлетворяет этому условию, имеет вид

$$\chi_1 = \frac{(-ab+b^2)-b\sqrt{b^2+2ab-3a^2}}{2(a-b)} = a \left[1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2 - \left(\frac{a}{b}\right)^3 + \dots\right]. \quad (5.38)$$

Пренебрегая в этом уравнении членами $(a/b)^2$ и более высоких порядков, получаем решение в виде $\chi_1 = a$, которое дает прицельные параметры b и $b + a$, как показано на рис.1.

(б) Второе условие – лучи света должны проходить далеко от вращающейся линзы, чтобы их траектории можно было приближать прямыми линиями. Чтобы определить, насколько далеко они должны проходить от линзы, нужно знать либо критические значения расстояний наименьшего сближения r_{cr}^{\pm} , либо радиусы фотонных сфер r_{ph}^{\pm} , появляющихся для сонаправленной стороны (+) и противоположно-направленной стороны (-), соответственно. В работе [135] было получено выражение для радиуса фотонной сферы пространства-времени черной дыры Керра-Сена:

$$r_{ph}^{\pm} = \xi + \frac{2}{3}(3M - \xi) \left[1 + \cos \left\{ \frac{2}{3} \arccos \left(\mp \frac{3a}{3M - \xi} \sqrt{\frac{3M}{3M - \xi}} \right) \right\} \right]. \quad (5.39)$$

Известно, что на фотонных сферах вокруг черной дыры углы отклонения света становятся логарифмически расходящимися, в результате чего все лучи захватываются фотонной сферой [144,145]. Следовательно, эти радиусы r_{ph}^{\pm} определяют естественные пределы сильного поля, воспринимаемого нулевыми лучами. Следовательно, световые лучи должны проходить на расстояниях, далеких от радиусов фотонных сфер черной дыры Керра-Сена, чтобы углы (в радианах) были малы.

(в) Приближение тонкой линзы не работает при $\frac{M}{b} \sim O(1)$. Поэтому, для того чтобы можно было использовать это приближение ставится третье условие, которое состоит в том, что меньший из двух прицельных параметров (b или $b + a$) должен намного превышать больший из двух радиусов фотонных сфер r_{ph}^{\pm} , а именно $b \gg r_{ph}^-$ или $b = 10^n r_{ph}^-$, где $n > 1$ – любое действительное число. Идея этого метода состоит в том, чтобы направить r к r_{ph}^- до такой степени, чтобы лучи сохраняли малость задействованных углов, как обсуждалось в пункте (а). Этот алгоритм будет использован в таблицах 1 и 2.

Существует четвертое обязательное условие для черной дыры Керра-Сена: значение $\frac{\xi}{M}$ на самом деле должно быть очень маленьким по сравнению с верхним пределом в (5.19). Соответственно, для иллюстрации предполагается, что $0 \leq \frac{\xi}{M} \leq 10^{-3}$. Возвращаясь к рис. 1, из геометрических соображений имеем $d_{LS} = \chi d_{OL}$, где $\chi > 0$ – конечная константа, $PLQ \perp OLS$. Радиальное расстояние измеряется от линзы L . Путем кусочного интегрирования прямых линий в соответствующих секторах, для сонаправленной с вращением линзы $\left(\frac{1}{r_{cor}}\right)$ и противоположно-направленной вращению линзы $\left(\frac{1}{r_{cou}}\right)$ сторон, мы получаем окончательный результат, вычитая интегралы между длинами пути, а именно $SQO - SPO$:

$$I_1 = 4aM \left[\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{1}{r_{cor}} d\phi + \int_0^{\pi/2} \frac{1}{r_{cor}} d\phi \right] - 4aM \left[\int_{-\pi/2}^{-\pi} \frac{1}{r_{cou}} d\phi + \int_0^{-\pi/2} \frac{1}{r_{cou}} d\phi \right], \quad (5.40)$$

$$\Delta t_1 = \frac{I_1}{c} = \frac{8aM\{2a[b(\chi-1)+\chi d_{OL}]+b[b(\chi-1)+2\chi d_{OL}]\}}{cb\chi d_{OLF}}. \quad (5.41)$$

Рассмотрим предел, когда источник и наблюдатель находятся на бесконечном расстоянии от линзы, то есть когда $d_{OL} \rightarrow \infty$ и $d_{LS} \rightarrow \infty$, и получим

$$\Delta t_1 = \frac{I_1}{c} = \frac{8aM(a+2b)}{cb(a+b)}. \quad (5.42)$$

Из требований приближения тонкой линзы следует, что $(a/b) \ll 1$ и, следовательно, уравнение (2.47) может быть переписано в виде

$$\Delta t_1 \simeq \frac{16aM}{cb}, \quad (5.43)$$

которое не зависит от параметра ξ и в точности является задержкой в главном порядке, полученной Лагуной и Вольщаном [30]. Интересно, что уравнение (5.43) может быть получено из уравнения (5.41) подстановкой $\chi = 1$, то есть, когда $d_{OL} = d_{LS}$. Таким образом, уравнение (5.41) обобщает задержку (5.43) на реалистичную геометрию тонкой линзы на конечном расстоянии. Таким же образом мы можно вычислить интегралы I_2 и I_3

$$\Delta t_2 = \frac{I_2}{c} = \frac{4aM^2[a^2F_1+2abF_2+b^2F_3]}{cb^2(a+b)^2(\chi d_{OL})^2} \lambda_1, \quad (5.45)$$

$$\Delta t_3 = \frac{l_3}{c} = \frac{2aM^3[a^2F_1+2abF_2+b^2F_3]}{3cb^3d_{OL}^3} \lambda_2, \quad (5.46)$$

где

$$F_1 = 2b(\chi - 1)\chi d_{OL} + \pi(\chi d_{OL})^2 + \pi b^2(1 + \chi^2),$$

$$F_2 = 3b(\chi - 1)\chi d_{OL} + \pi(\chi d_{OL})^2 + \pi b^2(1 + \chi^2),$$

$$F_3 = 4b(\chi - 1)\chi d_{OL} + 2\pi(\chi d_{OL})^2 + \pi b^2(1 + \chi^2),$$

$$G_1 = [b + d_{OL}](2b^2 + bd_{OL} + 2d_{OL}^2),$$

$$G_2 = \left[\frac{a+b+d_{OL}}{(1+a/b)^3} \right] [2(a+b)^2 + (a+b)d_{OL} + 2d_{OL}^2],$$

$$G_3 = \left[\frac{b-d_{OL}}{\chi^3} \right] [2b^2 - b\chi d_{OL} + 2(\chi d_{OL})^2],$$

$$G_4 = \left[\frac{1}{(1+a/b)^3 \chi^3} \right] [2(a+b)^3 - 3(a+b)^2 \chi d_{OL} + 3(a+b)(\chi d_{OL})^2 - 2(\chi d_{OL})^3].$$

Уравнения (5.42), (5.45), (5.42) - общие уравнения относительной задержки времени.

5.4. Увеличение изображения и относительная задержка времени

Измерив положение изображения в статичной системе, можно вывести угол Эйнштейна θ_E . Для этого необходимо заменить систему с вращающейся линзой так называемой «фиктивной» статичной при $\beta \neq 0$, что соответствует вращающейся системе с $\beta = 0$ в слабом поле. Хартл установил [140], что в статичной системе при $\beta \neq 0$, относительная задержка времени этих двух изображений отличаются за счет разности ΔD в длине пути в первом порядке по β , и определяются как $\Delta D \approx \left(\frac{16}{\theta_E} \right) M$. За счет этого появляется задержка времени в первом порядке значения $\Delta D/c$. Отклонение в увеличении изображения источника света приводит к отклонению изображения, когда оно достигает наблюдателя.

Если гравитационная линза является действительно статичной и система из наблюдателя O , линзы L и источника излучения S находятся на одной прямой ($\beta=0$), при отсутствии эффекта увлечения инерциальных систем отсчета, сигналы из источника пройдут равную длину до Земли, таким образом, относительной

задержки времени не будет, поскольку изображения симметричны относительно линии OLS .

Статическая гравитационная линза с $\beta \neq 0$, где β - угол положения источника, и θ_{\pm} является измеренным угловым положением изображения (рис. 4.). Его можно определить, получив квадратные корни уравнения линзы [140]

$$\theta^2 - \beta\theta - \theta_E^2 = 0, \quad (5.47)$$

где θ_E угол Эйнштейна в статической линзе для некоторых расстояний при $\beta \neq 0$, которые отличны от значений d_{LS} , d_{OS} , d_{OL} , присущих вращающейся конфигурации гравитационной линзы (имеющий $\beta=0$). Угол Эйнштейна θ_E можно вывести исходя из наблюдений θ_{\pm} изображения. Таким образом, можно определить, что

$$\theta_+ \equiv \gamma_2 = ctg^{-1}\left(\frac{d_{OL}}{b}\right), \quad (5.48)$$

$$\theta_- \equiv \delta_2 = ctg^{-1}\left(-\frac{d_{OL}}{a+b}\right), \quad (5.49)$$

так, чтобы из уравнения (5.48) получим

$$\theta_+ + \theta_- = \beta, \quad (5.50)$$

$$\sqrt{-\theta_+\theta_-} = \theta_E, \quad (5.51)$$

Проверить полученные значения β и θ_E можно исходя временной задержки, полученной Хартлом [140]:

$$\Delta t \approx \frac{\Delta D}{S} \approx \left(\frac{\beta}{\theta_E}\right) \left(\frac{16M}{c}\right). \quad (5.52)$$

Разность относительной задержки времени в статической системе была получена Вирбхадрой и Эллисом [146] с углом Эйнштейна, который определяется массой гравитационной линзы. В случае, приведенном здесь, угол Эйнштейна определяется геометрией линзы.

Зная значения β и θ_E можно вычислить формы и увеличения изображений. Пока азимутальная ширина $\Delta\phi$ постоянна, полярная ширина $\Delta\theta_{\pm}$ может быть получена дифференцированием уравнения (5.52):

$$\Delta\theta_{\pm} = \left(\frac{1}{2}\right) \left[1 \pm \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2}} \right] \Delta\beta. \quad (5.53)$$

При угловой ширине источника излучения $\Delta\beta \neq 0$, изображения искажаются и удлиняют форму. Этот факт подтверждается наблюдениями.

Коэффициент яркости отдельных изображений μ_{\pm} к естественной яркости источника μ_* в положениях углов θ_{\pm} дается уравнениями увеличений изображений [140]

$$\frac{\mu_{\pm}}{\mu_*} = \left| \left(\frac{\theta_{\pm}}{\beta} \right) \left(\frac{d\theta_{\pm}}{d\beta} \right) \right| = \frac{1}{4} \left[\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2}} + \frac{\sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2}}{\beta} \pm 2 \right] \quad (5.54)$$

Здесь можно прийти к интересным заключениям: исходя из уравнений (5.52) и (5.53) следует, что при $\beta < 0$, получим $|\mu_-| > \mu_+$ который показывает, что изображение θ_- , вращающейся в противоположную сторону ярче, чем изображение θ_+ на стороне, вращающейся в одну сторону. Эти наблюдения указывают на то, что промежуточная линза вращается и обеспечивает определение вращения a , если все остальные параметры определяются независимо. Однако величины яркости в любом конкретном случае не сильно отличаются, что делает выполнение отдельных измерений затруднительным. Фактор увеличения изображения, определяется уравнением

$$\begin{aligned} \frac{\mu_{tot}}{\mu_*} &= \frac{\mu_+ - \mu_-}{\mu_*} = \frac{1}{2} \left| \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2}} + \frac{\sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2}}{\beta} \right|, \\ &= \frac{1}{2} \left| \frac{(\beta / \theta_E)}{\sqrt{(\beta / \theta_E)^2 + 4}} + \frac{\sqrt{(\beta / \theta_E)^2}}{(\beta / \theta_E)} \right|, \end{aligned} \quad (5.55)$$

отношение всегда больше единицы. Особенно, когда соответствующий β имеет маленькое значение, то есть, источник излучения располагается близко к оптической оси OLS . Таким образом, полное увеличение изображений может иметь довольно большое значение. Измерив увеличение изображения, можно определить отношение β/θ_E . В этом случае можно определить компоненты

разности ВП Δt_1 , Δt_2 , Δt_3 с точки зрения наблюдаемых данных β/θ_E , используя соотношение $a/b = \beta/\theta_E$.

5.5. Увеличение изображения и относительная задержка времени

Двойные системы пульсар-черная дыра представляют собой хорошую лабораторию для проверки предсказаний относительной задержки времени, поскольку переменные источники, такие как пульсары, квазары, гамма-всплески и т. д. могут выдавать сигналы в тот момент, когда они находятся позади вращающейся черной дыры на оптической оси OL и их время прибытия Δt может быть измерено наблюдателем. Хотя конкретный пример такой двойной системы еще не обнаружен, перспективы открытия кажутся весьма многообещающими [30]. Предполагается, что орбита пульсара находится в экваториальной плоскости черной дыры Керра-Сена, а луч зрения перпендикулярен оси вращения черной дыры.

5.5.1. Двойная система пульсар-черная дыра Лебедь X-1

Ранняя оценка заключалась в том, что из всех открытых к настоящему времени пульсаров небольшое, но значительное число принадлежит к категории пульсар-черная дыра с массой черной дыры, которая немного превышает массу Солнца [147]. В работе рассматривается типичный пример такой двойной системы – пульсар-черная дыра Лебедь X-1 с массой черной дыры $M = 14,8M_{\odot} = 2,19 \times 10^6$ см, параметром вращения $a = 0,95M = 2,08 \times 10^6$ см и расстоянием от наблюдателя до линзы $d_{OL} = 1,86$ кпк $= 5,74 \times 10^{21}$ см [148,149]. Решение Керра восстанавливается при $\xi = 0$, а следовательно $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 8$ для него. Значение r_{ph}^{\pm} в уравнении (5.39) практически не меняется при малых значениях ξ/M , выбранных с учетом верхнего предела (5.19), и имеет значения $r_{ph}^{-} = 8,66 \times 10^6$ см и $r_{ph}^{+} = 3,03 \times 10^6$ см, таким образом r_{ph}^{-} больший из двух радиусов фотонной сферы. Соответственно, чтобы сохранить приближение тонкой линзы и пост-постньютоновское приближение, выбираем $b = 10^4 r_{ph}^{-} = 8,66 \times 10^{10}$ см, так что $\frac{M}{b} \sim 10^{-5}$, оправдывающее разложение ППН. Расстояния

между линзой и источником $d_{LS} = \chi d_{OL}$ на рис. 3. можно варьировать, значения χ , но сохраняя требуемые малые значения углов (в радианах): $\gamma_1 \simeq b/d_{LS}$, $\delta_1 \simeq (a+b)/d_{LS}$, $\gamma_2 \simeq b/d_{OL}$, $\delta_2 \simeq (a+b)/d_{OL}$. В данном случае для фиксирования значений выберем некоторый $\chi = 0.1$, мотивированный практическими соображениями.

Таблица 5.1. Значения относительной задержки времени Δt_1 , Δt_2 , Δt_3 для двойной системы пульсар-черная дыра Лебедь X-1. В двух последних столбцах показано влияние параметра ξ .

ξ/M	Δt_1 (мкс)	Δt_2 (мкс)	Δt_3 (мкс)
0	0.028	1.11×10^{-6}	5.97×10^{-12}
10^{-5}	0.028	1.00×10^{-6}	4.84×10^{-12}
10^{-4}	0.028	5.57×10^{-7}	1.49×10^{-12}

Измерение с высокой точностью возможно в случае миллисекундных пульсаров, а точность 0,1 мкс была достигнута в работе [150] для PSRJ0437-4715, яркого миллисекундного пульсара в двойной системе белый карлик-нейтронная звезда. Первый столбец показывает, что измерение Δt_1 может стать возможным в ближайшем будущем, хотя технически это все еще довольно сложно. Однако, как видно из последних двух столбцов, для исследования влияния параметра ξ необходимо, чтобы точность измерений достигала пикосекундного уровня и выше. Эта точность может быть достигнута с учетом современных технологий.

5.5.2. Двойная система пульсар-черная дыра Стрелец А*

Недавние наблюдения показывают, что, вероятно, около 100 пульсаров окружают сверхмассивную вращающуюся черную дыру Стрелец А* с орбитальными периодами около десяти лет [151] и некоторые из них формируют двойные системы пульсар-черная дыра со спутниками черными дырами звездного размера, находящимися в пределах 1 парсека от Стрельца А* [152]. Предположим, что некоторые из пульсаров пересекают оптическую ось OLS за Стрельцом А*, образуя двойную систему пульсар-черная дыра Стрелец А*.

Таблица 5.2. Значения относительной задержки времени Δt_1 , Δt_2 , Δt_3 для двойной системы пульсар-черная дыра Стрелец А*. В двух последних столбцах показано влияние параметра ξ на относительную задержку времени.

ξ/M	Δt_1 (мкс)	Δt_2 (мкс)	Δt_3 (мкс)
0	4.20	1.90×10^{-7}	9.29×10^{-15}
10^{-5}	4.20	1.71×10^{-7}	7.53×10^{-15}
10^{-4}	4.20	9.51×10^{-8}	2.32×10^{-15}

В таблице 5.2 показаны некоторые типичные компоненты относительной задержки времени Δt_1 , Δt_2 , Δt_3 , рассчитанные по уравнениям (5.41), (5.45) и (5.46) для Стрельца А* со значениями параметров, взятых из работы Като и др. [153], а именно, $M = 4,2 \times 10^6 M_\odot$, $d_{OL} = 7,6$ кПк, параметр вращения $a = 0,44M$, так что $r_{ph}^- = 2,15 \times 10^{12}$ см, $r_{ph}^+ = 1,51 \times 10^{12}$ см, $b = 10^7 r_{ph}^-$, и, следовательно, $M/b \ll 1$.

5.6. Выводы по главе

В этой главе была применена обобщенная формула (5.22) к черной дыре Керра-Сена, предполагая, что она является возможным партнером вращающейся линзы в двойной системе, и исследовано влияние параметра струны ξ , используя приближение гравитационной тонкой линзы и пост-постньютоновского приближения до третьего порядка по $(1/r)$. В этом анализе было учтено три важных фактора, которые часто упускаются в литературе. Во-первых, прицельные параметры должны быть b и $b + a$ на соответствующих сторонах линзы, причем последнее должно быть вызвано вращением a или эффектом увлечения инерциальных систем отсчета. Во-вторых, расстояния между источником и наблюдателем от линзы были взяты большими, но конечными, как того требует любой реалистичный эксперимент по астрофизическому линзированию. В-третьих, лучи света должны проходить по нулевым геодезическим траекториям на большом расстоянии от фотонных сфер r_{ph}^\pm по обе стороны от линзы. Отметим, что фотонные сферы разграничивают предел сильного поля, поскольку существует логарифмическая расходимость в угле отклонения, так что все световые лучи захватываются фотонной сферой. Поскольку здесь

рассматривается предел тонкой линзы слабого поля, было принято, что $b = 10^n r_{ph}^-$, где $n > 1$, а r_{ph}^- является большим из двух радиусов r_{ph}^\pm , так что $M/b \ll 1$. И, наконец, показано, что относительная задержка времени принципиально отличается от временной задержки Шапиро (вопреки утверждениям в [29]), где один направленный вперед световой луч, скользящий по промежуточному гравитирующему источнику, отражается обратно от удаленного объекта в верхнем соединении, а два времени прохождения пути суммируются, тогда как в относительной задержке времени два световых луча исходят от переменного источника, проходящего за вращающимся гравитирующим источником (линзой), и время прохождения вычитается.

Метод, исследованный в этой главе, может быть легко применен к любой двойной системе, если источник, линза и наблюдатель будут определены на одной прямой. Полученные в результате оценки величин для Δt_1 , Δt_2 , Δt_3 по формулам (5.41), (5.45) и (5.46) сведены в таблицу для двух наглядных линз двойных систем. Они достаточно устойчивы, то есть порядок величин остается неизменным даже при изменении параметров χ и ξ с сохранением малых углов и ограничения (5.18) соответственно. Поэтому было представлено только две небольшие репрезентативные таблицы 1 и 2. Однако эти оценки следует рассматривать только как предположительные, поскольку ни одна двойная система еще не была окончательно обнаружена, хотя моделирование методом Монте-Карло показывает, что количество двойных систем пульсар-черная дыра в значительной степени будет с компаньоном черной дырой, с массой в несколько солнечных масс [147]. В работе рассмотрены две двойные системы, пульсар-Лебедь X-1 и пульсар-Стрелец A*, и было обнаружено, что задержки нулевого порядка находятся на уровне мкс, что вполне согласуется с предсказаниями в литературе [30]. Однако задержки высших порядков Δt_2 и Δt_3 , содержащие параметр ξ , слишком малы, чтобы их можно было измерить, что делает на сегодняшний день неразличимыми с точки зрения наблюдения черных дыр теории струн и общей теории относительности.

Так же была обобщена формула Лагуны-Вольщана нулевого порядка (5.43) для Δt_1 на практически реализуемые эксперименты по линзированию на конечных расстояниях. Уравнение (5.43) следует, когда расстояния источника и наблюдателя от линзы бесконечны и когда прицельный параметр равен только b по обе стороны от линзы (a не b и $b + a$, как требуется). Несмотря на это, разница между уравнениями (5.43) и (5.41) слишком мала, чтобы ее можно было измерить при больших значениях b , но вполне может быть измерена, если b достаточно близко к фотонным сферам.

В работе показано, что составляющая относительной задержки времени Δt_1 может быть экспериментально измерена в терминах наблюдаемого коэффициента увеличения изображения, определяемого только членом (β/θ_E) , где θ_E – угол Эйнштейна в эквивалентной статической неориентированной линзе. Изображение с противоположно-направленной вращению линзы стороны θ_- ярче, чем второе изображение θ_+ .

Прогноз Δt_1 на основе уравнения (5.41) для системы пульсар-Лебедь X-1 составляет около 0,028 мкс (Таблица 1). Достижение требуемого уровня точности станет возможным в ближайшем будущем, поскольку точность в 0,1 мкс была достигнута в работе [150] для PSRJ0437-4715, яркого миллисекундного пульсара в двойной системе нейтронная звезда-белый карлик. Однако измерение членов высшего порядка Δt_2 и Δt_3 , содержащих ξ , потребует точности уровня выше пикосекунд. Что касается двойной системы пульсар-Стрелец A*, показано, что $\Delta t_1 = 4.11$ мкс (Таблица 2), что должно быть измеримо при условии, что подходящий переменный источник может быть обнаружен среди пульсаров, вращающихся вокруг Стрелец A* [151,152].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты работы сводятся к следующему:

Разработан метод ограничения свободных параметров решений, описывающих компактные объекты с вращением, основанный на применении эффекта Саньяка и экспериментальных данных. Результаты экспериментов Хафеле и Киттинга, АВЭ и методом ДПСВЧ через спутники были применены для ограничения параметра НУТ [А3,А10,А12], параметра отклонения метрики Йоханнсена-Псалтиса [А6,А13], нелинейного электрического заряда метрики АБГ [А16], скаляра кривизны Риччи [А2, А9] и параметра СТВГ [А5, А14]. Наилучшее ограничение свободных параметров получается в результате применения экспериментальных данных по измерению эффекта Саньяка методом ДПСВЧ через спутники [А3,А8].

Измеряемый эффект нулевого порядка задержки Саньяка в пространстве-времени Керра-де Ситтера для негеодезического движения источника/приемника света подтверждает заключение Лихтенегера и Иорио, что основная причина асинхронности времени связана с абсолютным статусом пространства-времени (в данном случае пространство-время Минковского), что противоречит принципу Маха [А1]. С другой стороны задержка Саньяка в пространстве-времени Керра-де Ситтера в пределе $M \rightarrow 0$, $a \rightarrow 0$ и $\Lambda \rightarrow 0$ (Минковского) для геодезического кругового движения равна нулю. В этом случае, по крайней мере эффект Саньяка, не возникает в качестве наблюдаемой величины в пределе Минковского и принцип Маха может быть выполнен [А1]. Таким образом, два типа движения источника/приемника света по замкнутым круговым траекториям демонстрируют принципиально разные типы поведения эффекта Саньяка.

Подтверждено, что параметр НУТ может быть интерпретирован как имеющий «вращение» заряда НУТ, что согласуется с результатами Чахраборти и Мажумдара, где показано, что метрика Тауб-НУТ инвариантна относительно временной перестановки $t \rightarrow -t$ [А3]. Получен верхний предел заряда НУТ, который составил $n < 5.68$ м. Для ограничения заряда использовались данные

эксперимента Хафеле и Киттинга для негеодезического движения источника/приемника света и данные эксперимента по измерению задержки Саньяка методом двухсторонней передачи сигнала времени и частоты через спутники для геодезического движения [A3,A12].

Получено ограничение скаляра кривизны Риччи $0 \leq \mathbf{R}_0 < 4.16 \times 10^{-25} \text{ м}^{-2}$. Для ограничения скаляра кривизны Риччи двух моделей $f(\mathbf{R})$ -гравитации использовались: условие сигнатуры метрики, данные эксперимента Хафеле и Киттинга для негеодезического движения источника/приемника света и данные эксперимента АВЭ для геодезического движения. Это ограничение применено к двум моделям теории $f(\mathbf{R})$ -гравитации. Перес и соавт. [76] получили диапазон для \mathbf{R}_0 , используя свойства аккреционных дисков в сильном гравитационном поле рентгеновской бинарной черной дыры Лебедь X-1, который в безразмерных единицах имеет вид $\mathbf{R}_0 \in [-1.2 \times 10^{-3}, 6.67 \times 10^{-4}]$ [A2]. Полученный в ходе исследования диапазон $\mathbf{R}_0 \in (0, 7.87 \times 10^{-3}]$ из экспериментальных данных задержки Саньяка, значительно строже, не смотря на то, что в окрестности поверхности Земли гравитация слабая.

Обобщена модель для расчета относительной задержки времени, вызванной увлечением инерциальных систем отсчета, в двойных системах в приближении тонкой линзы. В работе рассмотрены две двойные системы, пульсар-черная дыра Лебедь X-1 и пульсар- черная дыра Стрелец A* и получена относительная задержка времени до третьего порядка [A4]. С помощью обобщенного метода рассмотрен случай двойной системы, одним из компаньонов которой является черная дыра описываемая решением Керра-Сена. Показано так же, что задержки нулевого порядка находятся на уровне микросекунд, что вполне согласуется с предсказаниями в литературе [30].

СПИСОК ОСНОВНЫХ ПУБЛИКАЦИЙ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в изданиях, рекомендованных ВАК РФ, для публикации материалов диссертационных работ:

в журналах, индексируемых в международных базах данных Web of Science и Scopus:

A1. Karimov R.Kh. Sagnac delay in the Kerr-dS spacetime: Implications for mach's principle / R.Kh. Karimov, R.N. Izmailov, G.M. Garipova, K.K. Nandi // The European Physical Journal Plus. – 2018. – Vol. 133, № 2. – P. 44. (DOI: 10.1140/epjp/i2018-11919-x)

A2. Karimov R.Kh. Terrestrial Sagnac delay constraining modified gravity models / R.Kh. Karimov, R.N. Izmailov, A.A. Potapov, K.K. Nandi // General Relativity and Gravitation. – 2018. – Vol. 50, № 4. – P. 44. (DOI: 10.1007/s10714-018-2365-5)

A3. Kulbakova A. Upper limit on NUT charge from the observed terrestrial Sagnac effect / A. Kulbakova, R.Kh. Karimov, R.N. Izmailov, K.K. Nandi // Classical and Quantum Gravity. – 2018. – Vol. 35, № 11. – P. 115014. (DOI: 10.1088/1361-6382/aac07d)

A4. Izmailov R.N. String effect on the relative time delay in the Kerr–Sen black hole / R.N. Izmailov, R.Kh. Karimov, A.A. Potapov, K.K. Nandi // Annals of Physics. – 2020. – Vol. 413. – P. 168069. (DOI: 10.1016/j.aop.2020.168069)

A5. Karimov R.Kh. Terrestrial Sagnac delay in scalar-tensor-vector-gravity / R.Kh. Karimov, R.N. Izmailov, K.K. Nandi // International Journal of Modern Physics D. – 2021. – Vol. 30. – P. 2150042. (DOI: 10.1142/S0218271821500425)

в журналах из списка ВАК:

A6. Камалова Д.Ю. Эффект Саньяка в пространстве-времени Йохансена-Псалтиса / Д.Ю. Камалова, Н.Ю. Давлетшина, Г.Б. Байбулова, Р.Х. Каримов // Инженерная физика. – 2019. – № 7. – С. 27–30. (DOI: 10.25791/infizik.07.2019.763)

A7. Каримов Р.Х. Влияния магнитного заряда на эффект Саньяка в пространстве-времени Бардина / Р.Х. Каримов, К.К. Нанди // Известия УНЦ РАН. – 2021. – № 1. – С. 92–97. (DOI: 10.31040/2222-8349-2021-0-1-92-97)

Тезисы докладов научных конференций:

A8. Каримов Р.Х. Решение некоторых задач ОТО при использовании математического пакета Mathematica / Р.Х. Каримов, Р.Н. Измаилов, Г.Ф. Ахтарьянова // Материалы IV Всероссийской научно-практической конференции *Математическое моделирование процессов и систем.* – СФ БашГУ, Стерлитамак, 2015. – Часть II., С. 131–135.

A9. Izmailov R. Testing of $f(R)$ gravity: Analogue of the Aharonov-Bohm effect in a gravitational lensing system / R. Izmailov, R. Lukmanova, A. Kulbakova, R. Karimov // Abstracts of the 5th Ulyanovsk International School-Seminar (UISS 2016) *Problems of Theoretical and Observational Cosmology.* – UISPU, Ulyanovsk, 2016. – P. 56–57. (ISBN 978-5-86045-872-7)

A10. Karimov R.Kh. Kerr-Taub-NUT corrections to the Sagnac effect / R.Kh. Karimov, R.N. Izmailov // Тезисы докладов 3-ей международной зимней школы-семинара по гравитации, космологии и астрофизике *Петровские чтения-2017.* – КФУ, Казань, 2017. – С. 27.

A11. Абдуллин Р.А. Исследование относительной задержки времени света в поле кротовой норы Тео / Р.А. Абдуллин, Р.Х. Каримов // Материалы Всероссийской научно-практической конференции «Наука 2020» *Актуальные проблемы математического, естественнонаучного и технического знания: приоритетные молодежные исследования XXI в.* – БГПУ, Уфа, 2018. – С. 124–130. (ISBN 978-5-906958-63-1)

A12. Karimov R.Kh. Observational constrain on NUT charge using Sagnac effect / R.Kh. Karimov, A.K. Kulbakova // Сборник тезисов докладов международной научной конференции *Спектральная теория и смежные вопросы.* – БГПУ, Уфа, 2018. – С. 30–32. (ISBN 978-5-906958-70-9)

A13. Давлетшина Н.Ю. Эффект саньяка в пространстве-времени Йохансена-Псалтиса / Н.Ю. Давлетшина, Р.Х. Каримов // Тезисы докладов X Международной школы-конференции *Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании.* – БашГУ, Уфа, 2018. – С. 18. (ISBN 978-5-7477-4737-1)

A14. Каримов Р.Х. Эффект Саньяка в скаляр-тензор-векторной теории гравитации / Р.Х. Каримов // Сборник тезисов международной научной конференции *Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения*. – Уфа, РИЦ БашГУ, 2019. – С. 45-46. (ISBN 978-5-7477-4874-3)

A15. Латыпова Л.В. Устойчивость пробной частицы около горловины кротовой норы Дамура-Солодухина / Л.В. Латыпова, Р.Х. Каримов // Сборник трудов IV Международной научно-практической конференции *Актуальные проблемы науки и образования в современном ВУЗе*. – Стерлитамак, РИЦ БашГУ, 2019. – С. 149-153. (ISBN 978-5-7477-4874-3)

A16. Каримов Р.Х. Эффект Саньяка в пространстве-времени Керра-де Ситтера / Р.Х. Каримов, Р.Ф. Мингазова, Г.Ю. Тулеганова // Сборник аннотаций докладов молодежной конференции по теоретической и экспериментальной физике *МКТЭФ-2019*. – Москва, НИЦ «Курчатовский институт», 2019. – С. 45-46.

A17. Каримов Р.Х. Эффект Саньяка в пространстве-времени вращающихся черных дыр в теории Эйнштейна-Максвелла / Р.Х. Каримов, Р.Н. Измаилов, К.К. Нанди // Сборник тезисов международной научной конференции *Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения*. – Уфа, РИЦ БашГУ, 2020. – С. 32. (ISBN 978-5-7477-4874-3)

A18. Каримов Р.Х. Исследование влияния магнитного заряда на эффект Саньяка в пространстве-времени Бардина / Р.Х. Каримов // Тезисы докладов XI Международной школы-конференции *Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании*. – БашГУ, Уфа, 2020. – С. 67. (ISBN 978-5-00177-062-6)

A19. Каримов Р.Х. Изменение массы объекта в зависимости от типа аккрецируемой жидкости / Р.Х. Каримов, Р.М. Юсупова, Р.Н. Измаилов, К.К. Нанди, И.Д. Лаврик // Сборник тезисов международной научной конференции *Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения*. – Уфа, РИЦ БашГУ, 2021. – С. 32. (ISBN 978-5-00177-151-7)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sagnac G. The luminiferous ether demonstrated by the effect of the relative motion of the ether in an interferometer in uniform rotation / G. Sagnac // *Comptes Rendus de l'Académie des Science*. – 1913. – Vol. 157. – P. 708-710.
2. Sagnac G. On the Proof of the Reality of the Luminous Ether by the Rotating Interferograph Experiment / G. Sagnac // *Comptes Rendus de l'Académie des Science*. – 1913. – Vol. 157. – P. 1410-1413.
3. Allan D.W. Around-the-World Relativistic Sagnac Experiment / D.W. Allan, M.A. Weiss, N. Ashby // *Science*. – 1985. – Vol. 228, Iss. 4695. – P. 69-70.
4. Ashby N. Relativity in GNSS / N. Ashby // *Confronting Relativity Theories with Observations (Springer Handbook of Spacetime)*, ed. Ashtekar A. and Petkov V. Berlin: Springer. – 2014. – Part D. – P. 509-525.
5. Ashby N. Relativity in the Global Positioning System / N. Ashby // *Living Reviews in Relativity*. – 2003. – Vol. 6, Iss. 1. – P. 1.
6. Fujieda M. Long-Baseline TWSTFT Between Asia and Europe / M. Fujieda, T. Gotoh, M. Aida, J. Amagai, H. Maeno, D. Piester, A. Bauch, S.H. Yang // *Proceedings of the 38th Annual Precise Time and Time Interval Systems and Applications Meeting, Virginia – 2006*, P. 499-510.
7. Piester D. Time transfer with nanosecond accuracy for the realization of International Atomic Time / D. Piester, A. Bauch, L. Breakiron, D. Matsakis, B. Blanzano, O. Koudelka // *Metrologia*. – 2008. – Vol. 45, Iss. 2. – P. 185-198.
8. Tseng W. Sagnac Effect and Diurnal Correction on Two-Way Satellite Time Transfer / W. Tseng, K. Feng, S. Lin, H. Lin, Y. Huang, C. Liao // *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*. – 2008. – Vol. 60, Iss. 7. – P. 2298-2303.
9. Ashtekar A. The Sagnac effect in general relativity / A. Abhay, A. Magnon // *Journal of Mathematical Physics*. – 1975. – Vol. 16, Iss. 2. – P. 341-344.
10. Tartaglia A. General relativistic corrections to the Sagnac effect / A. Tartaglia // *Physical Review D*. – 1998. – Vol. 58, Iss. 6. – P. 064009.
11. Bhadra A. String corrections to the Sagnac effect / A. Bhadra, T.B. Nayak, K.K. Nandi // *Physics Letters A*. – 2002. – Vol. 295, Iss. 1. – P. 1-7.

12. Nandi K.K. Brans-Dicke corrections to the gravitational Sagnac effect / K.K. Nandi, P.M. Alsing, J.C. Evans, T.B. Nayak // *Physical Review D*. – 2001. – Vol. 63, Iss. 8. – P. 084027.
13. Newman E. Empty-Space Generalization of the Schwarzschild Metric / E. Newman, L. Tamburino, T. Unti // *Journal of Mathematical Physics*. – 1975. – Vol. 4, Iss. 7. – P. 915-923.
14. Demianski M. Combined Kerr-NUT solution of the Einstein field equations / M. Demianski, E.T. Newman // *Bulletin L'Académie Polonaise des Science, Série des Sciences Mathématiques, Astronomiques et Physiques*. – 1966. – Vol. 14, Iss. 1. – P. 653-657.
15. Miller J.G. Global analysis of the Kerr-Taub-NUT metric / J.G. Miller // *Journal of Mathematical Physics*. – 1973. – Vol. 14, Iss. 4. – P. 486-494.
16. Lynden-Bell D. Classical monopoles: Newton, NUT space, gravomagnetic lensing, and atomic spectra / D. Lynden-Bell, M. Nouri-Zonoz // *Reviews of Modern Physics*. – 1998. – Vol. 70, Iss. 2. – P. 427--445.
17. Al-Badawi A. On the physical meaning of the NUT parameter / A. Al-Badawi, M. Halilsoy // *General Relativity and Gravitation*. – 2006. – Vol. 38, Iss. 12. – P. 1729--1734.
18. Moffat J.W. Scalar-tensor-vector gravity theory / J.W. Moffat // *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*. – 2006. – Vol. 2006, Iss. 03. – P. 004.
19. Moffat J.W. The MOG weak field approximation and observational test of galaxy rotation curves / J.W. Moffat, S. Rahvar // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. – 2013. – Vol. 436, Iss. 2. – P. 1439-1451.
20. Brownstein J.R. Galaxy cluster masses without non-baryonic dark matter / J.R. Brownstein, J.W. Moffat // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. – 2006. – Vol. 367, Iss. 2. – P. 527-540.
21. Brownstein J.R. The Bullet Cluster 1E0657-558 evidence shows modified gravity in the absence of dark matter / J. R. Brownstein, J. W. Moffat // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. – 2007. – Vol. 382, Iss. 1. – P. 29-47.

22. Moffat J.W. Testing Modified Gravity with Globular Cluster Velocity Dispersions / J.W. Moffat, V.T. Toth // *The Astrophysical Journal*. – 2008. – Vol. 680, Iss. 2. – P. 1158-1161.
23. Pérez D. Accretion disks around black holes in scalar-tensor-vector gravity / D. Pérez, F.G. Lopez Armengol, G.E. Romero // *Physical Review D*. – 2017. – Vol. 95, Iss. 10. – P. 104047.
24. Moffat J.W. LIGO GW150914 and GW151226 gravitational wave detection and generalized gravitation theory (MOG) / J.W. Moffat // *Physics Letters B*. – 2016. – Vol. 763. – P. 427-433.
25. Moffat J.W. Black holes in modified gravity (MOG) / J.W. Moffat // *The European Physical Journal C*. – 2015. – Vol. 75, Iss. 4. – P. 175.
26. Faraoni V. Beyond Einstein Gravity: A Survey of Gravitational Theories for Cosmology and Astrophysics / V. Faraoni, S. Capozziello // *Fundamental Theories of Physics*. New York: Springer. – 2011. – Vol. 170. – 428 p.
27. Izmailov R.N. Relative time delay in a spinning black hole as a diagnostic for no-hair theorem / R.N. Izmailov, E.R. Zhdanov, A. Bhadra, K.K. Nandi // *The European Physical Journal C*. – 2019. – Vol. 79, Iss. 2. – P. 105.
28. Ford L.H. A gravitational analogue of the Aharonov-Bohm effect / L.H. Ford, A. Vilenkin // *Journal of Physics A: Mathematical and General*. – 1981. – Vol. 14, Iss. 9. – P. 2353-2357.
29. Shapiro I.I. Fourth Test of General Relativity / I.I. Shapiro // *Physical Review Letters*. – 1964. – Vol. 13, Iss. 26. – P. 789-791.
30. Laguna P. Pulse arrival times from binary pulsars with rotating black hole companions / P. Laguna, A. Wolszczan // *Astrophysical Journal*. – 1997. – Vol. 486, Iss. 1. – P. L27-L29.
31. Sen A. Rotating charged black hole solution in heterotic string theory / A. Sen // *Physical Review Letters*. – 1992. – Vol. 69, Iss. 7. – P. 1006-1009.
32. Pérez D. Accretion disks around black holes in modified strong gravity / D. Pérez, G.E. Romero, S.E. Perez Bergliaffa // *Astronomy & Astrophysics*. – 2013. – Vol. 551, Iss. 3. – P. A4.

33. Cembranos J.A.R. Kerr-Newman black holes in $f(R)$ theories / J.A.R. Cembranos, A. de la Cruz-Dombriz, P.J. Romero // *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*. – 2014. – Vol. 11, Iss. 01. – P. 1450001.

34. Carter B. Black hole equilibrium states. Part I. Analytic and geometric properties of the Kerr solutions / B. Carter // *Black holes – les Astres Occlus*, ed. DeWitt C., DeWitt B. New York: Gordon and Breach. – 1973. – P. 61-124.

35. Dolgov A.D. Can modified gravity explain accelerated cosmic expansion? / A.D. Dolgov, M. Kawasaki // *Physics Letters B*. – 2003. – Vol. 573. – P. 1-4.

36. Aprile E. Dark Matter Results from 225 Live Days of XENON100 Data / E. Aprile et al. (XENON100 Collaboration) // *Physical Review Letters*. – 2012. – Vol. 109, Iss. 18. – P. 181301.

37. Agnese R. Search for Low-Mass Weakly Interacting Massive Particles with SuperCDMS / R. Agnese et al. (SuperCDMS Collaboration) // *Physical Review Letters*. – 2014. – Vol. 112, Iss. 24. – P. 241302.

38. Akerib D.S. Improved Limits on Scattering of Weakly Interacting Massive Particles from Reanalysis of 2013 LUX Data / D.S. Akerib et al. (LUX Collaboration) // *Physical Review Letters*. – 2016. – Vol. 116, Iss. 16. – P. 161301.

39. Akerib D.S. Results from a Search for Dark Matter in the Complete LUX Exposure / D.S. Akerib et al. (LUX Collaboration) // *Physical Review Letters*. – 2017. – Vol. 118, Iss. 2. – P. 021303.

40. Michelson A.A. The relative motion of the Earth and of the luminiferous ether / A.A. Michelson // *The American Journal of Science*. III series. – 1881. – Vol. 22, Iss. 128. – P. 120-129.

41. Michelson A.A. On the Relative Motion of the Earth and the Luminiferous Ether / A.A. Michelson, E.W. Morley // *The American Journal of Science*. III series. – 1887. – Vol. 34, Iss. 203. – P. 333-345.

42. Anderson R. «Sagnac» effect: A century of Earth-rotated interferometers / R. Anderson, H.R. Bilger, G.E. Stedman // *American Journal of Physics*. – 1994. – Vol. 62, Iss. 1. – P. 975-985.

43. Michelson A.A. Relative motion of Earth and Ether / A.A. Michelson // *Philosophical Magazine. Series 6.* – 1904. – Vol. 8, Iss. 48. – P. 716-719.
44. Lodge O.J. Aberration problems.—A discussion concerning the motion of the ether near the earth, and concerning the connexion between ether and gross matter; with some new experiments / O.J. Lodge // *Philosophical Transactions of the Royal Society of London (A).* – 1893. – Vol. 184. – P. 727-804.
45. Michelson A.A. The Effect of the Earth's Rotation on the Velocity of Light / A.A. Michelson // *The Astrophysical Journal.* – 1925. – Vol. 61. – P. 137-145.
46. Hafele J.C. Around-the-World Atomic Clocks: Predicted Relativistic Time Gains / J.C. Hafele, R.E. Keating // *Science.* – 1972. – Vol. 177, № 4044. – P. 166-168.
47. Hafele J.C. Around-the-World Atomic Clocks: Observed Relativistic Time Gains / J.C. Hafele, R.E. Keating // *Science.* – 1972. – Vol. 177, № 4044. – P. 168-170.
48. Schlegel R. Physical Sciences: Flying Clocks and the Sagnac Effect / R. Schlegel // *Nature.* – 1972. – Vol. 242, № 5394. – P. 180.
49. Macek W.M. Rotation rate sensing with traveling-wave ring lasers / W.M. Macek, D.T.M. Davis // *Applied Physics Letters.* – 1963. – Vol. 2, Iss. 3. – P. 67-68.
50. Macek W.M. Measurement of Fresnel Drag with the Ring Laser / W.M. Macek, J.R. Schneider, R.M. Salamon // *Journal of Applied Physics.* – 1964. – Vol. 35, Iss. 8. – P. 2556-2557.
51. Rostomyan A.H. X-Ray Resonators. III. Applications / A.H. Rostomyan, A.M. Rostomyan // *Physica Status Solidi (a).* – 1991. – Vol. 126, Iss. 1. – P. 29-39.
52. Zimmerman J. E. Compton Wavelength of Superconducting Electrons / J.E. Zimmermann, J.E. Mercereau // *Physical Review Letters.* – 1965. – Vol. 14, Iss. 22. – P. 887-888.
53. Werner S.A. Effect of Earth's Rotation on the Quantum Mechanical Phase of the Neutron / S.A. Werner, J.L. Staudenmann, R. Colella // *Physical Review Letters.* – 1979. – Vol. 42, Iss. 17. – P. 1103-1106.

54. Riehle F. Optical Ramsey spectroscopy in a rotating frame: Sagnac effect in a matter-wave interferometer / F. Riehle, Th. Kisters, A. Witte, J. Helmcke, Ch.J. Borde // *Physical Review Letters*. – 1991. – Vol. 67, Iss. 2. – P. 177-180.
55. Hasselbach F. Sagnac experiment with electrons: Observation of the rotational phase shift of electron waves in vacuum / F. Hasselbach, M. Nicklaus // *Physical Review A*. – 1993. – Vol. 48, Iss. 1. – P. 143-151.
56. Dresden M. Phase shift in a rotating neutron or optical interferometer / M. Dresden, C.N. Yang // *Physical Review D*. – 1979. – Vol. 20, Iss. 8. – P. 1846-1848.
57. Sakurai J.J. Comments on quantum-mechanical interference due to the Earth's rotation / J.J. Sakurai // *Physical Review D*. – 1980. – Vol. 21, Iss. 10. – P. 2993-2994.
58. Anandan J. Sagnac effect in relativistic and nonrelativistic physics / J. Anandan // *Physical Review D*. – 1981. – Vol. 24, Iss. 2. – P. 338-346.
59. Scorgie G.C. Remarks on ring interferometry / G.C. Scorgie // *European Journal of Physics*. – 1991. – Vol. 12, Iss. 2. – P. 64-65.
60. Mashhoon B. On the coupling of intrinsic spin with the rotation of the earth / B. Mashhoon // *Physics Letters A*. – 1995. – Vol. 198, Iss. 1. – P. 9-13.
61. Rizzi G. Speed of Light on Rotating Platforms / G. Rizzi, A. Tartaglia // *Foundations of Physics*. – 1998. – Vol. 28, Iss. 11. – P. 1663-1683.
62. Misner C.W. *Gravitation* / C.W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler // San Francisco: Freeman. – 1973. – P. 877.
63. Cohen J.M. Standard clocks, interferometry, and gravitomagnetism / J.M. Cohen, B. Mashhoon // *Physics Letters A*. – 1993. – Vol. 181, Iss. 5. – P. 353-358.
64. Aharonov Y. Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory / Y. Aharonov, D. Bohm // *Physical Review*. – 1959. – Vol. 115, Iss. 3. – P. 485-491.
65. Semon M.D. Experimental verification of an Aharonov-Bohm effect in rotating reference frames / M.D. Semon // *Foundations of Physics*. – 1982. – Vol. 12, Iss. 1. – P. 49-57.

66. Ruggiero M.L. Gravito-electromagnetic Aharonov-Bohm effect: Some rotation effects revised / M.L. Ruggiero // *Nuovo Cimento B Serie.* – 2004. – Vol. 119, Iss. 7. – P. 893-907.
67. Sakurai J.J. Comments on quantum-mechanical interference due to the Earth's rotation / J.J. Sakurai // *Physical Review D.* – 1980. – Vol. 21, Iss. 10. – P. 2993-2994.
68. Soffel M.H. *Relativity in Astrometry, Celestial Mechanics and Geodesy* / M.H. Soffel // Berlin: Springer-Verlag. – 1989.
69. Tseng W.-H. Measurements of TWSTFT Earth station delay instabilities using a satellite-simulators / W.-H. Tseng, H.-T. Lin, S.-Y. Lin, C.-S. Liao // *Proceedings of IEEE Conference on Precision Electromagnetic Measurements (CPEM).* – Daejeon, South Korea, 2006. – P. 604–605.
70. Intelsat satellite ephemeris data. [Online]. Available: <http://www.intelsat.com/resources/SatelliteData/ephemeris.asp>.
71. Lichtenegger H. The twin paradox and Mach's principle / H. Lichtenegger, L. Iorio // *The European Physical Journal Plus.* – 2011. – Vol. 126, Iss. 12. – P. 129.
72. Einstein A. *The Meaning of Relativity* / A. Einstein // New Jersey: Princeton U.P. – 1955. P. 55–63.
73. Schutz B.F. *A First Course in General Relativity* / B.F. Schutz // New York: Cambridge U.P. – 1985. P. 298.
74. Weber T.A. A note on rotating coordinates in relativity / T.A. Weber // *American Journal of Physics.* – 1997. – Vol. 65, Iss. 6. – P. 486-487.
75. Cembranos J.A.R. Kerr–Newman black holes in $f(r)$ theories / J.A.R. Cembranos, A. de la Cruz-Dombriz, P. Jimeno Romero // *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics.* – 2014. –Vol. 11, Iss. 01. – P. 1450001.
76. P\'erez, D. Accretion disks around black holes in modified strong gravity / D. P\'erez, G.E. Romero, S.E. Perez Bergliaffa // *Astronomy and Astrophysics.* – 2013. –Vol. 551. – P. A4.
77. Iorio L. Gravitomagnetic effects in Kerr-de Sitter space-time / L. Iorio, M.L. Ruggiero // *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics.* – 2009. –Vol. 2009, Iss. 03. – P. 024.

78. Rindler W. Contribution of the cosmological constant to the relativistic bending of light revisited / W. Rindler, M. Ishak // *Physical Review D*. – 2007. –Vol. 76, Iss. 4. – P. 043006.
79. Sereno M. Solar and stellar system tests of the cosmological constant / M. Sereno, P. Jetzer // *Physical Review D*. – 2006. –Vol. 73, Iss. 6. – P. 063004.
80. Kagramanova V. Solar system effects in Schwarzschild–de Sitter space-time / V. Kagramanova, J. Kunz, C.L. ammerzahl // *Physics Letters B*. – 2006. –Vol. 634, Iss. 5. – P. 465 - 470.
81. Chakraborty C. Strong gravity Lense-Thirring precession in Kerr and Kerr-Taub-NUT spacetimes / C. Chakraborty, P. Majumdar // *Classical and Quantum Gravity*. – 2014. –Vol. 31, Iss. 7. – P. 075006.
82. Lynden-Bell D. Classical monopoles: Newton, NUT space, gravomagnetic lensing, and atomic spectra / D. Lynden-Bell, M. Nouri-Zonoz // *Reviews of Modern Physics*. – 1998. –Vol. 70, Iss. 2. – P. 427-445.
83. Kagramanova V. Charged particle interferometry in Pleba\’nski-Demia\’nski black hole spacetimes / V. Kagramanova, J. Kunz, C.L. ammerzahl // *Classical and Quantum Gravity*. – 2008. –Vol. 25, Iss. 10. – P. 105023.
84. Hackmann E. Observables for bound orbital motion in axially symmetric space-times / E. Hackmann, C. Lämmerzahl // *Physical Review D*. – 2012. –Vol. 85, Iss. 4. – P. 044049.
85. Chakraborty C. Anomalous Lense–Thirring precession in Kerr–Taub–NUT spacetimes / C. Chakraborty // *The European Physical Journal C*. – 2015. –Vol. 75, Iss. 12. – P. 572.
86. Kagramanova V. Charged particle interferometry in Pleba\’nski-Demia\’nski black hole spacetimes / V. Kagramanova, J. Kunz, E. Hackmann, C.L. ammerzahl // *Physical Review D*. – 2010. –Vol. 81, Iss. 12. – P. 124044.
87. Israel W. Event Horizons in Static Vacuum Space-Times / W. Israel // *Physical Review*. – 1967. –Vol. 164, Iss. 5. – P. 1776-1779.
88. Carter B. Axisymmetric Black Hole Has Only Two Degrees of Freedom / B. Carter // *Physical Review Letters*. – 1971. –Vol. 26, Iss. 6. – P. 331-333.

89. Wald R.M. Black hole in a uniform magnetic field / R.M. Wald // *Physical Review D*. – 1974. –Vol. 10, Iss. 6. – P. 1680-1685.
90. Will C.M. The Confrontation between General Relativity and Experiment / C.M. Will // *Living Reviews in Relativity*. – 2014. –Vol. 17, Iss. 1. – P. 4.
91. Abbott B.P. Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger / B.P. Abbott et al. (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration) // *Physical Review Letters*. – 2016. –Vol. 116, Iss. 6. – P. 061102.
92. Berti E. Testing general relativity with present and future astrophysical observations / E. Berti et al. // *Classical and Quantum Gravity*. – 2015. –Vol. 32, Iss. 24. – P. 243001.
93. Broderick A.E. Testing the no-hair theorem with Event Horizon Telescope observations of Sagittarius A / A.E. Broderick, T. Johannsen, A. Loeb, D. Psaltis // *The Astrophysical Journal*. – 2014. –Vol. 784, Iss. 1. – P. 7.
94. Johannsen T. Metric for rapidly spinning black holes suitable for strong-field tests of the no-hair theorem / T. Johannsen, D. Psaltis // *Physical Review D*. – 2011. – Vol. 83, Iss. 12. – P. 124015.
95. Manko V. Generalizations of the Kerr and Kerr-Newman metrics possessing an arbitrary set of mass-multipole moments / V. Manko, I.D. Novikov // *Classical and Quantum Gravity*. – 1992. –Vol. 9, Iss. 11. – P. 2477.
96. Ciufolini I. A confirmation of the general relativistic prediction of the Lense-Thirring effect / I. Ciufolini, E.C. Pavlis // *Nature*. – 2004. –Vol. 431, Iss. 7011. – P. 958.
97. Everitt C.W.F. Gravity Probe B: Final Results of a Space Experiment to Test General Relativity / C.W.F. Everitt et al. // *Physical Review Letters*. – 2011. –Vol. 106, Iss. 22. – P. 221101.
98. Hawking S.W. The Large Scale Structure of Space-Time / S.W. Hawking , G.F.R. Ellis // New York: Cambridge Univ. Press. – 1973.
99. Wald R.M. Gravitational Collapse and Cosmic Censorship / R.M. Wald // *Black Holes, Gravitational Radiation and the Universe*, ed. Iyer B.R., Bhawal B. *Fundamental Theories of Physics*. Dordrecht: Springer. – 1999. – Vol. 100.

100. Bardeen J.M. Non-singular general relativistic gravitational collapse / J.M. Bardeen // Proceedings of the International Conference GR5, Tbilisi, U.S.S.R – 1968, P. 174.
101. Borde A. Open and closed universes, initial singularities, and inflation / A. Borde // Physical Review D. – 1994. – Vol. 50, Iss. 6. – P. 3692-3702.
102. Bambi C. Rotating regular black holes / C. Bambi, L. Modesto // Physics Letters B. – 2016. – Vol. 721, Iss. 4-5. – P. 329-334.
103. Mars M. Models of regular Schwarzschild black holes satisfying weak energy conditions / M. Mars, M.M. Martín-Prats, J.M.M. Senovilla / Classical and Quantum Gravity. – 1996. – Vol. 13, Iss. 5. – P. L51-L58.
104. Borde A. Regular black holes and topology change / A. Borde // Physical Review D. – 1997. – Vol. 55, Iss. 12. – P. 7615-7617.
105. Tseytlin A.A. On singularities of spherically symmetric backgrounds in string theory / A.A. Tseytlin // Physics Letters B.– 1995. – Vol. 363, Iss. 4. – P. 223-229.
106. Cvetic M. Flat world of dilatonic domain walls / M. Cvetic // Physical Review Letters. – 1993. – Vol. 71, Iss. 6. – P. 815-818.
107. Horne J.H. Exact black string solutions in three dimensions / J.H. Horne, G.T Horowitz // Nuclear Physics B. – 1992. – Vol. 368, Iss. 2. – P. 444-462.
108. Ayon-Beato E. Regular Black Hole in General Relativity Coupled to Nonlinear Electrodynamics / E. Ayon-Beato, A. Garcia // Physical Review Letters. – 1998. – Vol. 80, Iss. 23. – P. 5056-5059.
109. Ayon-Beato E. New regular black hole solution from nonlinear electrodynamics / E. Ayon-Beato, A. Garcia // Nuclear Physics B. – 1999. – Vol. 464, Iss. 1. – P. 25-29.
110. Ayon-Beato E. Non-Singular Charged Black Hole Solution for Non-Linear Source / E. Ayon-Beato, A. Garcia // General Relativity and Gravitation. – 1999. – Vol. 31, Iss. 5. – P. 629-633.
111. Salazar H. / H. Salazar, A. García, J. Plebański // Journal of Mathematical Physics. – 1987. – Vol. 28, Iss. 9. – P. 2171-2181.

112. Toshmatov B. Rotating regular black hole solution / B. Toshmatov, B. Ahmedov, A. Abdujabbarov, Z. Stuchlik // *Physical Review D*. – 1996. – Vol. 89, Iss. 10. – P. 104017.
113. Weinberg S. The cosmological constant problem / S. Weinberg // *Reviews of Modern Physics*. – 1989. – Vol. 61, Iss. 1. – P. 1-23.
114. Capozziello S. Curvature quintessence / S. Capozziello // *International Journal of Modern Physics D*. – 2002. – Vol. 11, Iss. 04. – P. 483.
115. De Felice A. $f(R)$ Theories / A. De Felice, S. Tsujikawa // *Living Reviews in Relativity*. – 2010. – Vol. 13, Iss. 1. – P. 3.
116. Starobinsky A.A. A new type of isotropic cosmological models without singularity / A.A. Starobinsky // *Physics Letters B*. – 1980. – Vol. 91, Iss. 1. – P. 99-102.
117. Горбунов Д.С. Введение в теорию ранней Вселенной: космологические возмущения. Инфляционная теория / Д.С. Горбунов, В.А. Рубаков // М.: КРАСАНД. – 2016. 568 с. [Gorbunov D.S. Introduction to Theory of the Early Universe: Cosmological Perturbations and Inflationary Theory / D.S. Gorbunov, V.A. Rubakov // Hackensack, USA: World Sci. – 2011. 489 p.]
118. Motohashi H. Reheating after $f(R)$ inflation / H. Motohashi, A. Nishizawa // *Physical Review D*. – 2012. – Vol. 86, Iss. 6. – P. 083514.
119. Arbuzova E.V. Cosmological evolution in R^2 gravity / E.V Arbuzova, A.D. Dolgov, L. Reverberi // *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*. – 2012. – Vol. 2012, Iss. 02. – P. 049.
120. Arbuzova E.V. Instability Effects in $F(R)$ -Modified Gravity and in Gravitational Baryogenesis / E.V Arbuzova, A.D. Dolgov // *Physics of Particles and Nuclei*. – 2019. – Vol. 50, Iss. 6. – P. 850.
121. De la Cruz-Dombriz A. Black holes in $f(R)$ theories / A. de la Cruz-Dombriz, A. Dobado, A.L. Maroto // *Physical Review D*. – 2009. – Vol. 80, Iss. 12. – P. 124011.
122. De la Cruz-Dombriz A. Erratum: Black holes in $f(R)$ theories [Phys. Rev. D PRVDAQ1550-7998 80, 124011 (2009)] / A. de la Cruz-Dombriz, A. Dobado, A.L. Maroto // *Physical Review D*. – 2011. – Vol. 83, Iss. 2. – P. 029903.

123. Perez Bergliaffa S.E. Static and spherically symmetric black holes in $f(R)$ theories / S.E. Perez Bergliaffa, E. Yves De Oliveira // *Physical Review D*. – 2011. – Vol. 84, Iss. 8. – P. 084006.
124. Cembranos J.A.R. Kerr-Newman black holes in $f(R)$ theories / J.A.R. Cembranos, A. de la Cruz-Dombriz, P. Jimeno Romero // [arXiv:1109.4519v1]. – 2011.
125. Rubin V.C. Rotation of the Andromeda Nebula from a Spectroscopic Survey of Emission Regions / V.C. Rubin, W. Ford, Jr. Kent // *The Astrophysical Journal*. – 1970. – Vol. 159, Iss. 2. – P. 379-403.
126. Bosma A. The distribution and kinematics of neutral hydrogen in spiral galaxies of various morphological types / A. Bosma // PhD Thesis. – Groningen Univ. – 1978.
127. Markevitch M. Direct constraints on the dark matter self-interaction cross-section from the merging galaxy cluster 1E0657-56 / M. Markevitch, A.H. Gonzalez, D. Clowe, A. Vikhlinin, L. David, W. Forman, C. Jones, S. Murray, W. Tucker // *The Astrophysical Journal*. – 2003. – Vol. 606, Iss. 2. – P. 819-824.
128. Clowe D. Weak lensing mass reconstruction of the interacting cluster 1E0657-558: Direct evidence for the existence of dark matter / D. Clowe, A. Gonzalez, M. Markevich // *The Astrophysical Journal*. – 2003. – Vol. 604, Iss. 2. – P. 596-603.
129. Ade P.A.R. Planck 2013 results. I. Overview of products and scientific results / P.A.R. Ade et al. (Planck Collaboration) // *Astronomy and Astrophysics*. – 2013. – Vol. 1303, Iss. 3. – P. 5062.
130. Brownstein J.R. Galaxy rotation curves without nonbaryonic dark matter / J.R. Brownstein, J.W. Moffat // *The Astrophysical Journal*. – 2006. – Vol. 636, Iss. 2. – P. 721-741.
131. Moffat J.W. The MOG weak field approximation-II. Observational test of Chandra X-ray clusters / J.W. Moffat, S. Rahvar // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. – 2014. – Vol. 441, Iss. 4. – P. 3724–3732.
132. Moffat J.W. Modified gravity: cosmology without dark matter or Einstein's cosmological constant / J.W. Moffat, V.T. Toth // [arXiv: 0710.0364]. – 2007.

133. Moffat J.W. Gravitational theory, galaxy rotation curves and cosmology without dark matter / J.W. Moffat // *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*. – 2005. –Vol. 2005, Iss. 05. – P. 003.
134. Lopez Armengol F.G. Neutron stars in Scalar-Tensor-Vector Gravity / F.G. Lopez Armengol, G.E. Romero // *General Relativity and Gravitation*. – 2017. – Vol. 49, Iss. 2. – P. 27.
135. Uniyal R. Bending angle of light in equatorial plane of Kerr–Sen Black Hole / R. Uniyal, H. Nandan, P. Jetzer // *Physics Letters B*. – 2018. –Vol. 782. – P. 185-192.
136. Li G. Classical tests of photons coupled to Weyl tensor in the Solar System / G. Li, H.-M. Deng // *Annals of Physics*. – 2017. –Vol. 382. – P. 136-142.
137. Dymnikova I.G. Motion of particles and photons in the gravitational field of a rotating body (In memory of Vladimir Afanas'evich Ruban) / I.G. Dymnikova // *Soviet Physics Uspekhi*. – 1986. –Vol. 29, Iss. 3. – P. 215.
138. Datta B. General relativistic effects on the pulse profile of fast pulsars / B. Datta, R.C. Kapoor // *Nature*. – 1985. –Vol. 315, Iss. 6020. – P. 557- 559.
139. Matilsky T. Evidence for 200 second variability in the X-ray flux of the quasar 1525 + 227 / T. Matilsky, C. Shrader, H. Tananbaum // *The Astrophysical Journal*. – 1982. –Vol. 258. – P. L1.
140. Hartle J.B., *Gravity: An Introduction To Einstein's General Relativity*, Pearson Inc, San Francisco, 2003.
141. Sereno M. Gravitational lensing by spinning and radially moving lenses / M. Sereno // *Physics Letters A*. – 2002. –Vol. 305, Iss. 1-2. – P. 7-11.
142. Thorne K.S. Disk-Accretion onto a Black Hole. II. Evolution of the Hole / K.S. Thorne // *The Astrophysical Journal*. – 1974. –Vol. 191. – P. 507-520.
143. Boyer R.H. Maximal Analytic Extension of the Kerr Metric / R.H. Boyer, R.W. Lindquist // *Journal of Mathematical Physics*. – 1967. –Vol. 8, Iss. 2. – P. 265-281.
144. Manko V.S. Generalizations of the Kerr and Kerr-Newman metrics possessing an arbitrary set of mass-multipole moments / V.S. Manko, I.D. Novikov // *Classical and Quantum Gravity*. – 1992. –Vol. 9, Iss. 11. – P. 2477-2487.

145. Glampedakis K. Mapping spacetimes with LISA: inspiral of a test body in a 'quasi-Kerr' field / K. Glampedakis, S. Babak // *Classical and Quantum Gravity*. – 2006. –Vol. 23, Iss. 12. – P. 4167-4188.
146. Virbhadra K.S. Schwarzschild black hole lensing / K.S. Virbhadra, G.F.R. Ellis // *Physical Review D*. – 2000. –Vol. 62, Iss. 8. – P. 084003.
147. Lipunov V.M. How abundant is the population of binary radio pulsars with black holes? / V.M. Lipunov, A.I. Bogomazov, M.K. Abubekkerov // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. – 2005. –Vol. 359, Iss. 4. – P. 1517-1523.
148. Reid M.J. The trigonometric parallax of Cygnus X-1 / M.J. Reid et. al. // *The Astrophysical Journal*. – 2011. –Vol. 742, Iss. 2. – P. 83.
149. Gou L. The extreme spin of the black hole in Cygnus X-1 / L. Gou et. al. // *The Astrophysical Journal*. – 2011. –Vol. 742, Iss. 2. – P. 85.
150. Van Straten W. A test of general relativity from the three-dimensional orbital geometry of a binary pulsar / W. Van Straten et. al. // *Nature*. – 2001. –Vol. 412, Iss. 6843. – P. 158-160.
151. Pfahl E. Probing the spacetime around sagittarius A* with radio pulsars / E. Pfahl, A. Loeb // *The Astrophysical Journal*. – 2004. –Vol. 615, Iss. 1. – P. 253-258.
152. Faucher-Giguère C.-A. Pulsar-black hole binaries in the Galactic Centre / C.-A. Faucher-Giguère, A. Loeb // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. – 2011. –Vol. 415, Iss. 4. – P. 3951-3961.
153. Kato Y. Measuring spin of a supermassive black hole at the Galactic centre — implications for a unique spin / Y. Kato, M. Miyoshi, R. Takahashi, H. Negoro, R. Matsumoto // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. – 2010. –Vol. 403 Iss. 1. – P. L74-L78.