

На правах рукописи

Самсонов Кирилл Юрьевич

Структура и динамика солитонов уравнения Клейна-Гордона в модели с притягивающими примесями, внешней силой и затуханием

Специальность 1.3.3 – Теоретическая физика

Автореферат диссертации
на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Тюмень – 2023

Работа выполнена на кафедре моделирования физических процессов и систем
Федерального государственного автономного образовательного учреждения
высшего образования
«Тюменский государственный университет»

Научный руководитель — Екомасов Евгений Григорьевич, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры теоретической физики ФГБОУ ВО «Уфимский университет науки и технологий»

Официальные оппоненты:

Белим Сергей Викторович, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры Физика, ФГАОУ ВО «Омский государственный технический университет», г. Омск

Алфимов Георгий Леонидович, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры Высшая математика-1, ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский университет «Московский институт электронной техники», г. Москва.

Ведущая организация:

ФГАОУ ВО «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина».

Защита состоится «22» декабря 2023 года в 12 ч. 00 м. на заседании диссертационного совета 24.2.431.01 Челябинского государственного университета по адресу: 454001, г. Челябинск, ул. Братьев Кашириных, д. 129.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Челябинского государственного университета.

Автореферат разослан «___» ноября 2023 года.

Учёный секретарь диссертационного
совета, доктор физико-математических
наук, доцент

Загребин М.А.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Используемые для описания физических процессов в области теоретической и математической физики линейные дифференциальные уравнения, для которых действует принцип суперпозиции, в основном хорошо применимы для задач с малыми параметрами. Часто для адекватного описания физических процессов и явлений должны применяться нелинейные дифференциальные уравнения, для которых принцип суперпозиции обычно не выполняется. Это означает, что подобные явления намного труднее поддаются математическому анализу и для них не существует общего аналитического метода. Поэтому каждое конкретное нелинейное уравнение приходится рассматривать отдельно. В теоретической и математической физике при исследовании нелинейных волновых процессов, описываемых такими уравнениями, к настоящему времени разработано много методов и найдено много интересных решений. Например, с помощью разработанных методов интегрирования нелинейных эволюционных уравнений удалось проинтегрировать некоторые нелинейные дифференциальные уравнения, используемые в теоретической физике. Среди них: уравнение Кортевега-де Фриза, нелинейное уравнение Шредингера и уравнение Клейна-Гордона. Обнаружены новые типы решений, названных солитонами, которые описывают уединённые волны, сохраняющие свою форму и скорость во времени и при взаимодействии друг с другом. Нахождение новых солитонных решений, описание их свойств и поведения — актуальная задача теоретической физики интересная как с фундаментальной, так и с прикладной точки зрения.

Хотя первое упоминание о экспериментальном наблюдении уединенной волны солитонного типа было зафиксировано в 1834 г. Джоном Скоттом Расселом [1], бурное изучение солитонов, нахождение новых решений солитонного типа, описание их свойств и поведения начались со второй половины двадцатого века. Было показано, что солитоны возникают при решении задач в механике, физике конденсированного состояния, оптике, атомной физике, биофизике, и т.д. [1–3].

Одним из уравнений, часто появляющимся при решении физических задач, связанных с нелинейными волновыми процессами, является уравнение Клейна-Гордона (УКГ). А одними, из наиболее часто используемыми в теоретической физике уравнений данного класса, являются уравнения синус-Гордона (УСГ) и модели φ^4 [4, 5]. Например, уравнение синус Гордона применимо для теоретического описания динамики доменных границ в ферромагнетиках (ФМ) и слабых ферромагнетиках (СФМ) и протекания сверхпроводящего тока в джозефсоновских контактах сверхпроводников [2, 5]. Новый импульс изучению уравнения в модели φ^4 в последние годы придало использование его для описания физических процессов в графене [6]. Однако, в реальных физических системах, описываемых УКГ, для их адекватного описания возникает необходимость ввода дополнительных слагаемых или функций, способных моделировать неоднородности среды, внешнюю силу, диссипацию в системе и т.п. Модифицированное УКГ уже в общем случае не имеет точного решения. Например, часто учитывают наличие пространственной неоднородности потенциала (или примеси) в системе [5]. Хотя численный расчёт позволяет получить решение такой задачи для более широкой области значений параметров системы, для качественного понимания изучаемого процесса и для контроля правильности численных расчётов сохраняют актуальность и аналитические исследования. Одним, из часто рассматриваемых видов примеси, является точечная примесь и протяженная примесь прямоугольного вида [7, 8]. Для уравнения синус-Гордона были подробно рассмотрены случаи одной и двух, как точечных, так и протяженных примесей, с учетом возбуждения на них нелинейных локализованных волн [5, 9, 10]. Было показано, что для случая двух примесей возникают интересные коллективные эффекты влияния примесей на нелинейную динамику солитонов.

Очевидно, что если рассмотреть случай трех и более примесей, то таких интересных коллективных эффектов должно быть больше. Для уравнения модели φ^4 подробно исследовано движение кинка через одиночную точечную примесь, с учётом возбуждения на ней нелинейной локализованной волны — примесной моды [4, 11]. Однако для случая протяженных примесей рассмотрены лишь некоторые частные случаи такой задачи [12,13].

Рассмотрение таких нерешенных задач могло бы существенно помочь при планировании и проведении экспериментов в реальных физических системах по наблюдению теоретически открытых эффектов.

Цели и задачи. Целью данной работы является теоретическое исследование динамики солитонов уравнения синус-Гордона и уравнения φ^4 в одномерной модели с притягивающими и отталкивающими примесями с учетом генерации локализованных нелинейных волн, внешней силы и затухания. Основные задачи, решаемые в рамках исследования:

1. Для уравнения φ^4 – изучение структуры и резонансной динамики кинков при наличии протяженной примеси, с учетом возможности генерации высокоамплитудных нелинейных локализованных волн.

2. Для уравнения синус Гордона – изучение структуры и резонансной динамики кинков при наличии трех точечных и протяженных примесей, с учетом возможности генерации высокоамплитудных нелинейных локализованных волн: исследование связанных колебаний локализованных на примесях волн: использование авторезонансных методов воздействия для управления структурой и параметрами локализованных волн при наличии внешней силы и диссипации в системе.

3. Разработка программного комплекса для вычисления динамических характеристик солитонов модифицированных уравнений φ^4 и синус-Гордона, инструментов анализа и средств, визуализации, необходимых для физической интерпретации численно полученных данных.

Методы исследования. При решении, поставленных в данной работе задач, использовалось математическое моделирование, на основе численного решения нелинейного дифференциального уравнения в частных производных. Для численного решения УСГ использовался метод конечной разности с явной схемой интегрирования, для решения уравнения φ^4 метод линий. Частотный анализ колебаний кинка и локализованных волн, рассчитанных численно, выполнялся с помощью дискретного преобразования Фурье. При наличии малого параметра использовался аналитический подход. Путем линеаризации исходная задача сводилась к обыкновенным дифференциальным уравнениям, решаемым как аналитически, так и численно. Для получения уравнений, описывающих динамику нелинейных волн, был использован метод коллективных координат.

Научная новизна.

1. Впервые с помощью численных методов исследована структура и резонансная динамика кинков уравнения φ^4 при их взаимодействии с протяженной примесью, описываемую функцией прямоугольного вида, размеры которой качественно соответствуют ширине кинка. Определены и описаны два возможных сценария динамики кинка для случая отталкивающей примеси и четыре, для случая притягивающей примеси. Найдены структура и зависимости критических и резонансных скоростей кинка от параметров примеси. Показано, что с помощью кинк-примесного взаимодействия можно протяженную притягивающую примесь использовать как генератор для возбуждения воблинг кинка и бризера.

2. Впервые с помощью аналитических и численных методов описана структура и резонансная динамика кинков уравнения синус Гордона в модели с тремя точечными и протяженными одинаковыми примесями, с учетом возможности возбуждения примесных мод, наличия внешней силы и затухания, применимая к описанию динамики магнитных неоднородностей в

мультислоенных ферромагнетиках. Для случая точечных примесей получена система интегро-дифференциальных уравнений для коллективных переменных, качественно описывающая одномерную динамику кинка УСГ. Для связанных колебаний примесных мод из нее получена система дифференциальных уравнений, аналогичная системе уравнений для модели трех связанных гармонических осцилляторов. Предложен способ, как при наличии трех одинаковых примесей, изменяя расстояние между ними, можно существенно изменить скорость, возможный сценарий динамики кинка, структуру и динамику связанных локализованных волн, возбуждаемых на примесях.

3. Показана возможность для уравнения синус Гордона использования авторезонансного метода воздействия для управления структурой локализованных волн бризерного и солитонного типов при наличии протяженной притягивающей примеси и диссипации в системе.

Теоретическая и практическая значимость результатов проведенных исследований заключается в том, что они расширяют знания об общей картине динамики солитонов одномерного уравнения Клейна-Гордона при наличии примесей, внешней силы и затухания, а также о динамике нелинейных связанных осцилляторов. Результаты исследования динамики кинков при наличии примесей позволяют определить условия для наиболее эффективного прохождения кинка через неоднородные области материала. Найденный характер влияния параметров системы и внешней силы на изученные эффекты, делает рассматриваемые модели более соответствующими реальным физическим системам. Предложенная модель для уравнения синус-Гордона описывает одномерную динамику магнитных неоднородностей в семислойных ферромагнитных структурах. Разработанный программный комплекс дает возможность моделирования разнообразных физических задач, сводимых к уравнениям Клейна-Гордона, подробного анализа и визуализации получаемых результатов в виде векторного поля. Он также может быть задействован в учебном процессе при выполнении лабораторных работ.

Основные положения и результаты, выносимые на защиту.

1. Два сценария динамики кинка для случая отталкивающей примеси и четыре сценария для случая притягивающей примеси для одномерного уравнения φ^4 с протяженной примесью прямоугольного вида. Нелинейные зависимости от параметров примеси критических и резонансных скоростей кинка, определяющих сценарии его динамики. Использование примесей для возбуждения и управления параметрами воблинг кинков и бризеров. Нелинейные зависимости амплитуд и частот локализованных на притягивающей примеси волн от начальной скорости кинка и параметров примеси.

2. Система интегро-дифференциальных уравнений для коллективных переменных: координаты центра кинка и амплитуд, локализованных на трех одинаковых точечных примесях волн, полученная из одномерного уравнения синус Гордона, с учетом внешней силы и затухания. Пять сценариев динамики кинка для случая трех отталкивающих примесей и восемь сценариев для случая трех, притягивающих примесей без учета внешней силы и затухания. Зависимости от величины параметров трех одинаковых точечных и протяженных примесей, расстояния между ними критических и резонансных скоростей кинка, определяющих сценарии его динамики.

3. При отсутствии кинка система интегро-дифференциальных уравнений для коллективных переменных, полученная из одномерного уравнения синус Гордона без учета внешней силы и затухания, становится аналогичной системе уравнений, полученной для модели трех связанных гармонических осцилляторов. Связанные малые колебания трех локализованных на примесях волн представляют собой сумму трёх гармонических колебаний: синфазного, синфазно-антифазного и антифазного типа. Авторезонансный метод воздействия с помощью внешней силы специального вида для управления структурой, локализованных на примеси волн бризерного и солитонного типа,

при наличии диссипации в системе. Применение рассмотренной математической модели для описания динамики магнитных неоднородностей в семислойных ферромагнетиках.

Степень достоверности и апробация результатов.

Достоверность результатов обеспечивается корректностью математической постановки задач, а также сравнением с результатами, полученными другими авторами. Результаты численного решения уравнений сравнивались с предельными случаями, рассчитанными аналитически. Основные результаты работы докладывались на научных конференциях: «Двадцать пятая Всероссийская научная конференция студентов-физиков и молодых учёных (ВНКСФ – 25)», Республика Крым, г. Севастополь, 2019.; Международная конференция «XIX научная школа «Нелинейные волны – 2020», г. Нижний Новгород, 2020; «Фундаментальная математика и её приложения в естествознании, спутник Международной научной конференции «Уфимская осенняя математическая школа», г. Уфа, 2020, 2021, 2022, 2023; «III Международная научно-практическая конференция «Физика конденсированного состояния и её приложения» г. Стерлитамак, 2020, 2022; «Virtual Conference 65th Annual conference on magnetism and magnetic materials, USA, 2020 (MMM2020)»; Международная конференция «Фазовые переходы, критические и нелинейные явления в конденсированных средах», г. Махачкала, 2021, 2023; Международная научная конференция «Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения», Уфа, 2021, 2022, 2023; Международная конференция «Марчуковские научные чтения», Новосибирск, 2021.; «VIII Euro-Asian Symposium «Trends in MAGnetism», Kazan, 2022.

Личный вклад. Автор принимал активное участие в формулировке целей и задач исследования, написании численных программ, выполнении аналитических расчётов, проводил численное моделирование, обработку и анализ полученных данных. Аналитические результаты для УСГ в модели коллективных переменных получены совместно с Кудрявцевым Р.В., численные результаты для динамики кинка, совместно с Гумеровым А.М., для модели авторезонанса с Назаровым В. Н. Для уравнения φ^4 в линеаризованной модели аналитические результаты получены совместно с Дмитриевым С.В., численные результаты совместно с Фахретдиновым М.И. Разработка программных модулей для УСГ велась совместно с Муртазиным Р.Р., а для уравнения φ^4 с Фахретдиновым М.И. Во всех этих задачах вклад автора был существенным, либо определяющим, что позволяет представить соответствующие результаты к защите. Автор участвовал в подготовке результатов исследований к публикации и представлял их на научных конференциях.

Публикации. По результатам работы опубликованы 23 тезиса в сборниках материалов российских и международных конференций, получены 2 – свидетельства о государственной регистрации программ и 7 статей в журналах, рекомендованных ВАК для публикации результатов диссертаций на соискание учёной степени кандидата наук и приравненных к ним.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, трёх глав и заключения. Полный объём диссертации составляет 162 страниц, включая 70 рисунков, 1 таблицу и 124 источника в списке цитируемой литературы.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **ВВЕДЕНИИ** обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения.

В **первой главе** приводится обзор работ по теме диссертации, посвященных значительному количеству аналитических и численных методов решения УКГ. Кратко рассмотрена история открытия солитонов. Рассмотрены наиболее важные, с точки зрения темы диссертации, методы решения (аналитический метод коллективных координат, численные методы с явной и неявной схемой). Изложены некоторые основные приложения модифицированного УКГ в теоретической физике. Показано, как уравнение Ландау-Лившица-Гильберта, описывающее динамику магнитных неоднородностей в частном случае, сводится к МУСГ.

Во **второй главе** исследуется взаимодействие между кинком и протяженной примесью в рамках одномерной модели φ^4 [4]:

$$u_{tt} - u_{xx} + K(x)(u^2 - 1)u = 0, \quad (1)$$

где $u(x, t)$ – некоторое скалярное поле, $K(x)$ – некоторая функция от координаты x , учитывающая наличие примеси в системе. Рассмотрен для определенности случай $K(x)$ описываемый функцией прямоугольного вида:

$$K(x) = \begin{cases} 1, & x < 0, x > W \\ 1 - \Delta K, & 0 \leq x \leq W, \end{cases} \quad (2)$$

где ΔK и W – некоторые константы. Отметим, что если $\Delta K > 0$, то примесь является эффективной потенциальной ямой для кинка, при $\Delta K < 0$ – потенциальным барьером. Уравнение (1) решалось численно методом линий [14]. Шаг по координате $\Delta x = 0.1$. Шаг по времени автоматически выбирался программой расчета, чтобы обеспечить абсолютную точность интегрирования получившейся системы дифференциальных уравнений равную 10^{-8} . В качестве начального решения при $t = 0$ брался кинк вида [4]:

$$u(x, t) = \text{th} \left(\frac{x - v_0 t}{\sqrt{2(1 - v_0^2)}} \right), \quad (3)$$

имеющий начальную координату $x_0 = -10$. Он запускался с разными начальными скоростями v_0 в направлении примеси и наблюдалась его динамика. Использовались граничные условия Неймана. На границах используемой численной схемы заложено сильное трение, позволяющее по прошествии некоторого времени счета избавиться от излучения свободных волн, возникающих при взаимодействии кинка с примесью и границами расчетной схемы.

Для случая $\Delta K < 0$ получены два возможных сценария движения кинка. Если начальная скорость кинка v_0 не превышает некоторое критическое значение v_c , то кинк отражается от примеси и движется в обратную сторону. Если начальная скорость кинка $v_0 \geq v_c$, то кинк проходит примесь. В обоих случаях после прохождения или отражения от примеси кинк продолжает движение с некоторой скоростью v_f . Критическая скорость кинка v_c зависит от величины ΔK и W . Показано, что критическая скорость прохождения над примесью, как и для случая УСГ, является линейной функцией корня из площади примеси (в нашем случае это $(\sqrt{W|\Delta K|})$) (см. рисунок 1а). Значение R-квадрат для линии регрессии близко к единице и поэтому критическая скорость прохождения барьера

v_{crit} может приблизительно описываться формулой $v_c \approx c\sqrt{W|\Delta K|}$, где c – некоторая константа ($c \approx 0.55$ для случая на рисунке 1а).

Отражение от барьера можно считать упругим, т.к. скорость кинка сохраняет свою величину, меняя направление на противоположное. $v_f \approx -v_0$. После прохождения барьера кинк движется практически с той же скоростью, как и начальная, т.е. можно считать, что $v_f \approx v_0$. Заметное отличие величин начальных и конечных скоростей возникает только при больших начальных скоростях кинка и больших величинах параметра W и ΔK . Это можно объяснить тем, что в этом случае, после столкновения с высоким барьером, возбуждаются за счет кинетической энергии кинка внутренние моды колебаний, он начинает так же излучать объёмные волны, что заметно влияет на величину его скорости (см. рисунок 1б).

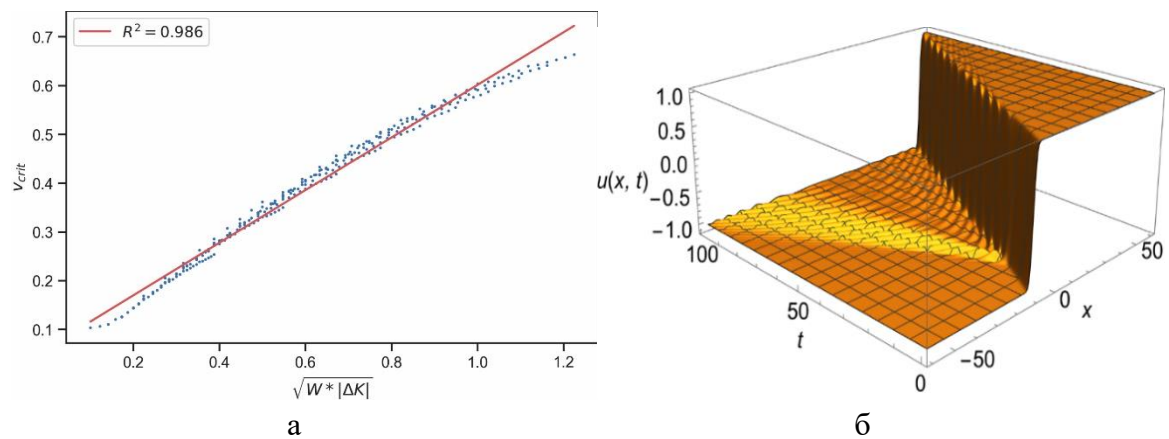


Рисунок 1. Зависимость критической скорости v_c прохождения кинка над примесью от $\sqrt{W|\Delta K|}$ (а), изменение структуры кинка для случая больших скоростей $v_0 = 0.7$, $\Delta K = -1$, $W = 1$ (б)

При $\Delta K > 0$ наблюдались уже три сценария движения кинка. Если начальная скорость кинка v_0 не превышает некоторое критическое значение v_c , то кинк захватывается примесью (кривая 1 на рисунке 2а, $v_0 = 0.05$, $\Delta K = 0.5$, $W = 1$, $v_c \approx 0.13$). Если начальная скорость кинка $v_0 \geq v_c$, то кинк проходит примесь (кривая 2 на рисунке 2а, $v_0 = 0.2$, $\Delta K = 0.5$, $W = 1$).

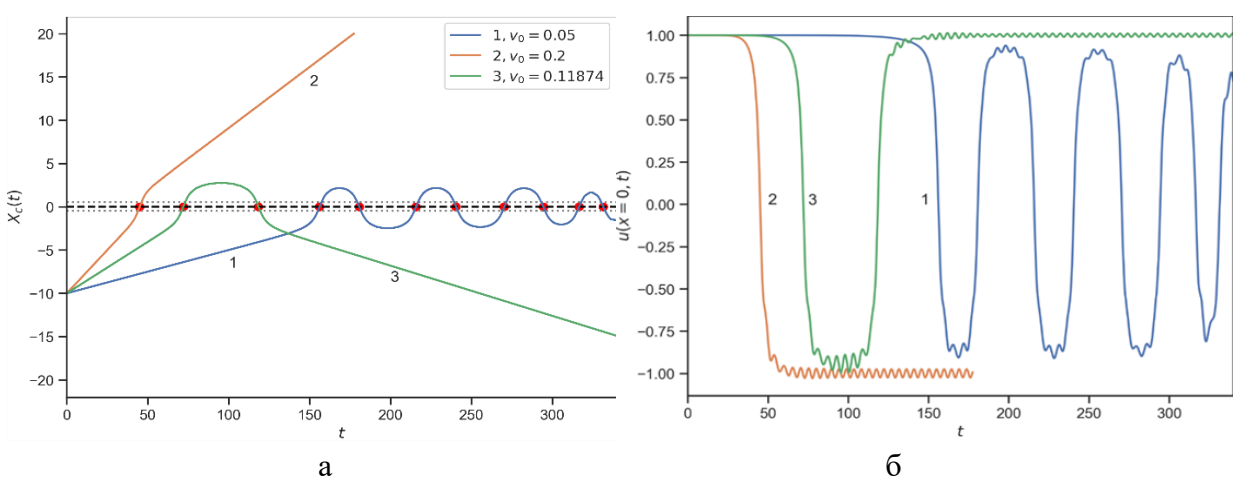


Рисунок 2. Возможные сценарии движения кинка при $\Delta K = 0.5$, $W = 1$ для разных начальных скоростей (а) зависимость координаты центра кинка от времени, (б) зависимость $u(0, t)$. Пиннинг кинка на примеси (кривая-1), прохождении кинка через примесь (кривая-2), резонансном отражении (кривая-3)

При определенных начальных скоростях $v_0 < v_c$ происходит интересное явление, наблюдавшееся ранее для случая точечных примесей и протяженных другого типа [11, 12], резонансное отражение кинка от притягивающей примеси (кривая 3 на рисунке 2а, $v_0 = 0.11874$, $\Delta K = 0.5$, $W = 1$).

После прохождения или отражения от примеси кинк продолжает движение с некоторой скоростью v_f . Главное отличие взаимодействия кинка с примесью типа потенциальной ямы от барьера, как и для случая уравнения синус-Гордона [5, 9], заключается в том, что взаимодействие кинка с ямой – не упругое. В центре ямы возникают локализованные колебания, которые сильно влияют на динамику кинка. При этом на самом кинке возбуждаются внутренние моды колебаний. Это хорошо видно если построить зависимость от времени функции $u(0, t)$ (см. рисунок 2б). Критическая скорость прохождения кинка через примесь, так же, как и для случая примеси в виде потенциального барьера, рассмотренного выше, зависит от величины параметров ΔK и W .

Критическая скорость прохождения кинка через примесь, также, как и для случая примеси в виде потенциального барьера, рассмотренного выше, нелинейно увеличивается с ростом величины параметров ΔK и W (рисунок 3).

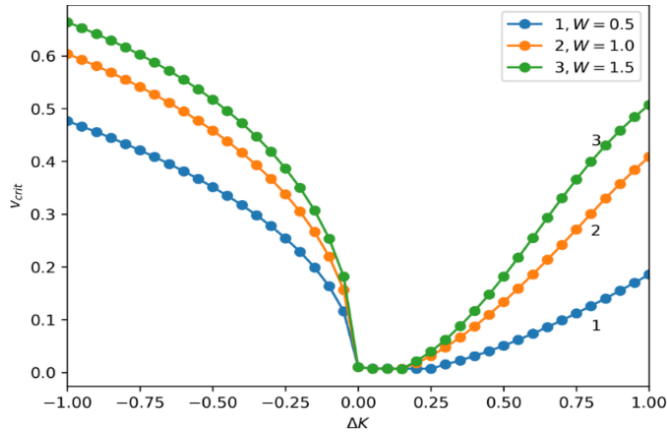


Рисунок 3. Зависимость критической скорости прохождения кинком примеси от ΔK

Сравнение зависимостей критической скорости прохождения кинком примеси при $\Delta K > 0$ и $\Delta K < 0$ показывает, что эти зависимости v_c имеют разный вид. Например, изменение величины параметра ΔK влияет на конечный результат больше при $\Delta K < 0$.

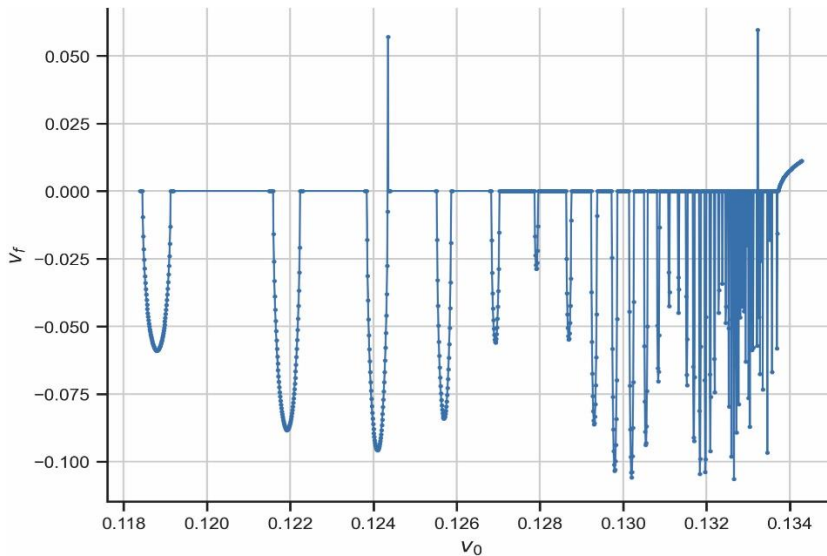


Рисунок 4. Зависимость конечной скорости кинка v_f от начальной при $\Delta K = 0.5$ и $W = 1$

После прохождения примеси кинк продолжает движение со скоростью v_f , отличной от начальной. Для уравнения синус-Гордона с примесями [5] для зависимости v_f от v_0 при $v_0 > v_c$ была предложена формула $v_f^2 = c(v_0^2 - v_c^2)$, где c – некоторая константа, зависящая от параметров примеси. Численные расчеты показали, что эта формула может быть применима для случая начальной скорости кинка, до величины примерно равной 0.4.

При некоторых скоростях кинка меньше критической, как было уже показано на рисунке 2б, наблюдается резонансное отражение кинка от притягивающей примеси. Это происходит при некоторых очень узких диапазонах скоростей ширины порядка 10^{-4} . Такие диапазоны скоростей (их еще называют окнами) можно найти строя зависимость конечного положения кинка X_{end} от начальной скорости (см. рисунок 4). Можно заметить, что конечные скорости для случая резонансного отражения ложатся на параболы. Т.е. имеем дискретных набор резонансных областей, содержащих резонансные скорости начального движения кинка. С какой бы точностью (10^{-5} , 10^{-6}) мы бы ни брали значения начальной скорости внутри определенного окна – мы попадаем на резонансное отражение. Это позволяет предположить, что этот диапазон скоростей сплошной. На рисунке 4 есть также два значения начальной скорости ($v_0 = 0.12435$ и $v_0 = 0.13323$) меньше критической скорости, при которых кинк покидает примесь и удаляется в положительном направлении, три раза пересекая центр примеси. Этот сценарий динамики кинка можно назвать «квазитуннелированием».

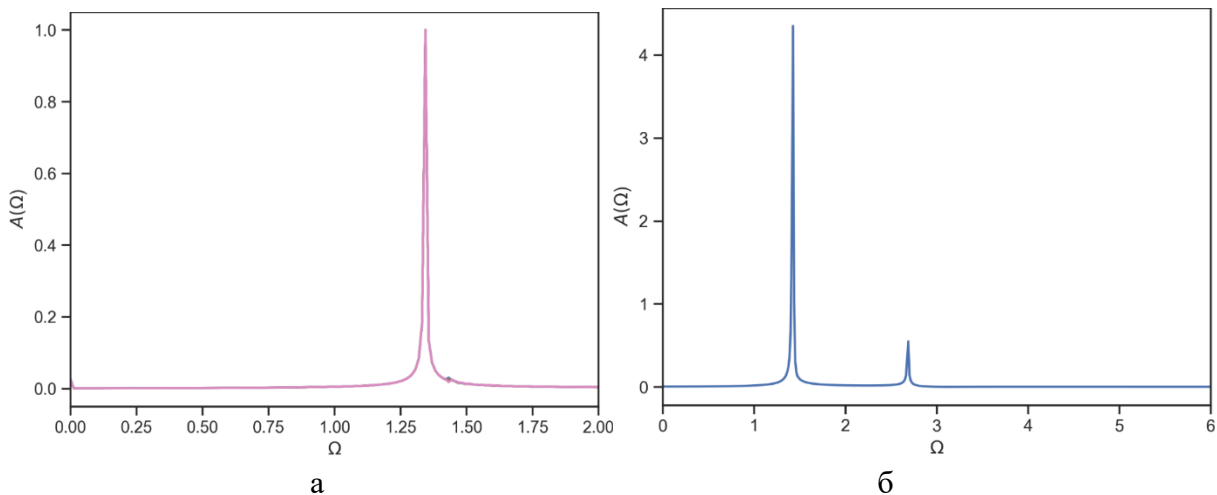


Рисунок 5. Спектр Фурье-разложения зависимости (а) $u(0, t)$ для x лежащих в области примеси или рядом с ней (б) $u(-20, t)$ при $v_0 = 0.4$, $\Delta K = 0.5$, $W = 1$

Показано, что если кинк проходит над примесью, то в области примеси возникают высокоамплитудные нелинейные колебания (или примесные моды). Найден спектр Фурье-разложения $u(x, t)$ для разных значений x , лежащих как в области примеси и рядом с ней, так и лежащих далеко от примеси. Как видно из рисунка 5а, все точки лежащие в области примеси и рядом с ней (в «ядре» локализованной волны) колеблются с одинаковой частотой. Это позволяет сделать вывод, что эти локализованные на примеси волны бризерного типа. Будем далее говорить об этой частоте колебаний, как частоте колебаний примесной моды. Найдена зависимость амплитуды огибающей бризера от времени. При малых величинах параметров, описывающих функцию $K(x)$, (для определенности рассмотрены параметры $\Delta K = 0.5$, $W = 1$ и разные начальные скорости кинка) оказалось, что на протяжении длительного времени ($t_0 \approx 5000$) она практически не меняется, т.е. полученный бризер

можно считать «долгоживущим». Для случая $\Delta K = 1$, тогда начальная амплитуда увеличивается более чем в два раза, амплитуда огибающей бризера начинает заметно уменьшаться со временем.

Зависимость амплитуды бризера от начальной скорости кинка носит довольно сложный характер, имеет минимумы и максимумы. Отметим, что такой же сложный характер этой зависимости был найден и для случая примеси гауссового вида в [12]. Отметим, что эти кривые отличаются от случая УСГ, где на графике наблюдался только один максимум. В спектре колебаний для точек, лежащих далеко от примеси (в «хвосте» локализованной волны), проведенный Фурье анализ (рисунок 5б) показывает наличие двух частот – 1.41479042 и 2.69062821. Одна из них связана с частотой $\sqrt{2}$ вакуумного решения для уравнения φ^4 [4]. Вторая частота равна удвоенной частоте колебаний ядра бризера, т.е. связана с волнами излучаемыми бризером. Таким образом, можно считать, что имеем дело с воблинг бризером модели φ^4 [4].

Найдено, что частота колебаний Ω примесной моды не зависит от начальной скорости кинка, так же, как и для случая примеси, описываемой гауссовской функцией [12]. С увеличением параметра ΔK частота колебаний примесной моды плавно уменьшается, так же, как и для случая точечной примеси [11], и примеси, описываемой гауссовской функцией [12]. Функционально зависимости Ω от каждого из параметров $\Delta K, W$ близки друг к другу, так что при одинаковой «площади» ямы $S = \Delta KW$ они отличаются друг от друга незначительно. Зависимость амплитуды колебаний примесной моды A от параметра ΔK при скорости $v_0 = 0.4$ и выше, имеет вид гладких кривых, которые быстро растут с увеличением ΔK . При более низкой скорости $v_0 = 0.3$ зависимости, например, для $W = 0.5$ и $W = 0.8$, очень слабо увеличивается при увеличении параметра ΔK . Отметим, что качественно похожая зависимость получена в [12] для примеси, описываемой гауссовской функцией.

Изучена структура кинка после его взаимодействия с примесью. Из анализа проведенных численных расчетов обнаружено, что на кинке возбуждаются малоамплитудные периодические колебания. Фурье анализ этих колебаний показывает наличие двух пиков. Большой пик, примерно равен $\sqrt{3/2}$, что соответствует внутренней моде колебаний воблинг кинка уравнения φ^4 . Малый пик связан с волнами излучаемыми бризером, т.к. в рассмотренных случаях кинк еще недостаточно далеко отошел от примеси. Т.е. можно утверждать, что после кинк-примесного взаимодействия имеем дело уже с воблинг кинком [4].

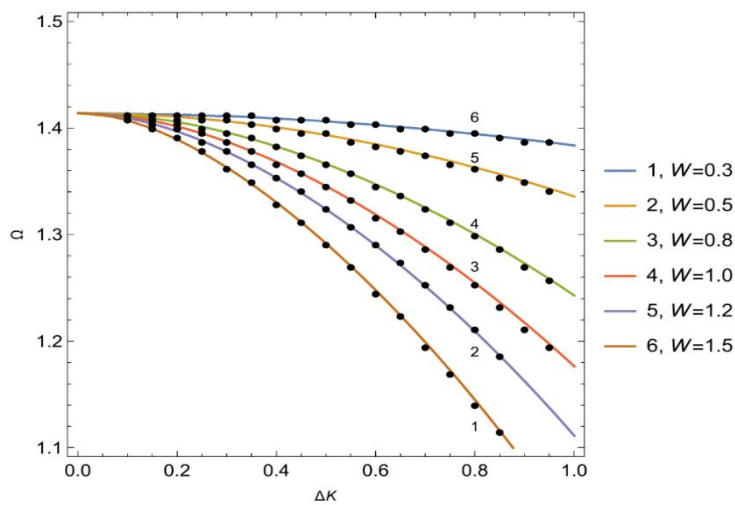


Рисунок 6. Зависимость частоты колебаний примесной моды Ω от параметра ΔK для разных значений параметра W ($v_0 = 0.4$). Маркерами показаны значения частоты, вычисленные численно решением исходного уравнения (1)

Для получения аналитической зависимости частоты локализованной волны от параметров примеси использовано линейное приближение для случая, когда кинк ушел далеко вправо от точки $x = 0$. Тогда для малоамплитудной локализованной волны решение можно брать в виде [4]:

$$u = -1 + \varepsilon \exp(-I\Omega_{teor}t) \psi(x), \quad (4)$$

где Ω_{teor} – частота примеси (теоретическая), ε – малая величина (амплитуда примеси), $\psi(x)$ – функция, определяющая пространственную форму примеси. Подставляя (4) в (1) и разложив в ряд по малому ε , получим уравнение вида:

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + (\Omega_{teor} - 2K)\psi(x) = 0. \quad (5)$$

В дальнейших расчетах для удобства рассматривалась примесь, расположенная в диапазоне значений x от $-W/2$ до $W/2$. Применяв условия гладкости и непрерывности рассматриваемого решения в точке $x = -W/2$, $x = W/2$ получено следующее уравнение:

$$\sqrt{\Omega_{teor}^2 - 2(1 - \Delta K)} \cot \left[\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}W \sqrt{\Omega_{teor}^2 - 2(1 - \Delta K)} \right] = \sqrt{2 - \Omega_{teor}^2}. \quad (6)$$

Из (6) при $\Delta K \rightarrow 0$ или $W \rightarrow 0$ можно получить значение максимальной частоты примесной моды равной $\Omega_{teor} = \sqrt{2}$. Графики для зависимости частоты примесной моды $\Omega_{teor} = \Omega_{teor}(\Delta K)$ для разных W представлены на рисунке 6. Из него видно, что линейное приближение с хорошей точностью описывает зависимость частоты колебаний примеси от параметров для небольших примесей.

В **третьей главе** исследуется взаимодействие между кинком и тремя примесями в рамках одномерной модели уравнения синус Гордона [9, 10]:

$$u_{tt} - u_{xx} + (1 - K(x)) \sin u + h(t) \sin \frac{u}{2} + \alpha u_t = 0, \quad (7)$$

где $u(x, t)$ – некоторое скалярное поле, $K(x)$ – некоторая функция от координаты x , учитывающая наличие примеси в системе, $h(t)$ – переменный параметр внешней силы, α – константа затухания.

Для случая трех одинаковых точечных примесей, расположенных на расстоянии d друг от друга, функция $K(x)$ принимает вид:

$$K(x) = 1 - \sum_{k=1}^3 (1 - \varepsilon \delta(x - x_k)), \quad (8)$$

где ε – вещественный параметр, а $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака, $x_k = (k - 1)d$.

Для случая трёх одинаковых протяжённых примесей, расположенных на расстоянии d друг от друга:

$$K(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } |x| > W/2, |x + d| > W/2, |x - d| > W/2, \\ 1 - \Delta K, & \text{если } |x| \leq W/2, |x + d| \leq W/2, |x - d| \leq W/2. \end{cases} \quad (9)$$

В случае применения математической модели УСГ с примесями к мультислойным ферромагнетикам примесь соответствует тонкому плоскому слою, с отличными от основного объёма параметрами магнитной анизотропии. Кинк моделирует блоховскую 180-градусную доменную границу, при прохождении которой через слой с другой константой магнитной анизотропии в его

области возбуждается локализованная волна намагниченности, моделируемая примесной модой. Таким образом, рассматриваемая в этой главе математическая модель применима для исследования динамики доменных границ в семислойной ферромагнитной структуре. Доменная граница в рассматриваемой модели параллельна этим слоям и движется в перпендикулярном им направлении.

Для получения приближённой системы уравнений, описывающей динамику кинка и примесных мод для случая малых колебаний, использовался метод коллективных координат. В качестве коллективных координат, как и в случае двух примесей [10], были приняты координата центра кинка и амплитуды примесных мод: $X(t)$, $a_1 = a_1(t)$, $a_2 = a_2(t)$, $a_3 = a_3(t)$. Полученная система уравнений имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
& 4 \left\{ \ddot{X}(t) + \sum_{k=1}^3 \frac{\varepsilon \operatorname{th}(X(t) - (k-1)d)}{2 \operatorname{ch}^2(X(t) - (k-1)d)} - \frac{h(t)}{2} + \alpha \dot{X}(t) \right\} + \\
& + \sum_{n=1}^3 \sum_{k=1}^3 \varepsilon a_n(t) \frac{1 - \operatorname{sh}^2(X(t) - (k-1)d)}{\operatorname{ch}(X(t) - (k-1)d)} \frac{e^{-\frac{\varepsilon|(k-1)d - (n-1)d|}{2}}}{\operatorname{ch}^2(X(t) - (k-1)d)} - \\
& - \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 a_m(t) a_n(t) \varepsilon \sum_{k=1}^3 \left[\frac{\operatorname{th}(X(t) - (k-1)d)}{\operatorname{ch}^2(X(t) - (k-1)d)} \right] e^{-\frac{\varepsilon|(k-1)d - (n-1)d|}{2}} e^{-\frac{\varepsilon|(k-1)d - (m-1)d|}{2}} = 0,
\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^3 \left\{ [\ddot{a}_n(t) + \alpha \dot{a}_n(t) + a_n(t)] \left[\frac{e^{-\frac{\varepsilon|(p-1)d - (n-1)d|}{2}}}{\varepsilon} + \frac{|(p-1)d - (n-1)d|}{2} e^{-\frac{\varepsilon|(p-1)d - (n-1)d|}{2}} \right] \right. \\
& + a_n(t) \left[\frac{\varepsilon^2}{4} \left[\frac{e^{-\frac{\varepsilon|(p-1)d - (n-1)d|}{2}}}{\varepsilon} - \frac{|(p-1)d - (n-1)d|}{2} e^{-\frac{\varepsilon|(p-1)d - (n-1)d|}{2}} \right] \right. \\
& + \left. \left. \varepsilon \sum_{k=1}^3 \left[\frac{1}{\operatorname{ch}^2(X(t) - (k-1)d)} - \frac{1}{2} \right] e^{-\frac{\varepsilon|(k-1)d - (n-1)d|}{2}} e^{-\frac{\varepsilon|(k-1)d - (p-1)d|}{2}} \right] \right\} \\
& - \sum_{k=1}^3 \varepsilon \operatorname{th}(X(t) - (k-1)d) \frac{e^{-\frac{\varepsilon|(k-1)d - (p-1)d|}{2}}}{\operatorname{ch}(X(t) - (k-1)d)} = 0,
\end{aligned} \tag{11}$$

где p – количество степеней свободы (в работе рассматриваются $p = 1, 2, 3$), k – номер примеси, $X(t)$ – координата центра кинка, $a_n(t)$ – примесная мода ($n = 1, 2, 3$).

Для случая отталкивающих примесей ($\varepsilon < 0$), при $h=0$, $\alpha=0$ для различных начальных скоростях кинка v_0 были получены различные сценарии его взаимодействия с тремя точечными примесями: прохождение (кривая 1, рисунок 7а), отражение от первой примеси (кривая 2, рисунок 7а), отражение от второй примеси (кривая 3, рисунок 7а). В некоторых случаях, когда начальная скорость кинка близка к скорости прохождения трёх примесей, то он на некоторое время задерживается на примеси прежде, чем её покинуть (кривая 4, рисунок 7а). Для случая притягивающих примесей ($\varepsilon > 0$) добавляются еще (см. рисунок 7б): случай перескока между примесями, с дальнейшим пиннингом на одной из них (кривые 4, 5, рисунок 7б), резонансные явления – «квазитуннелирование» (кривая 3, рисунок 7б) и резонансное отражение (кривая 2, рисунок 7б).

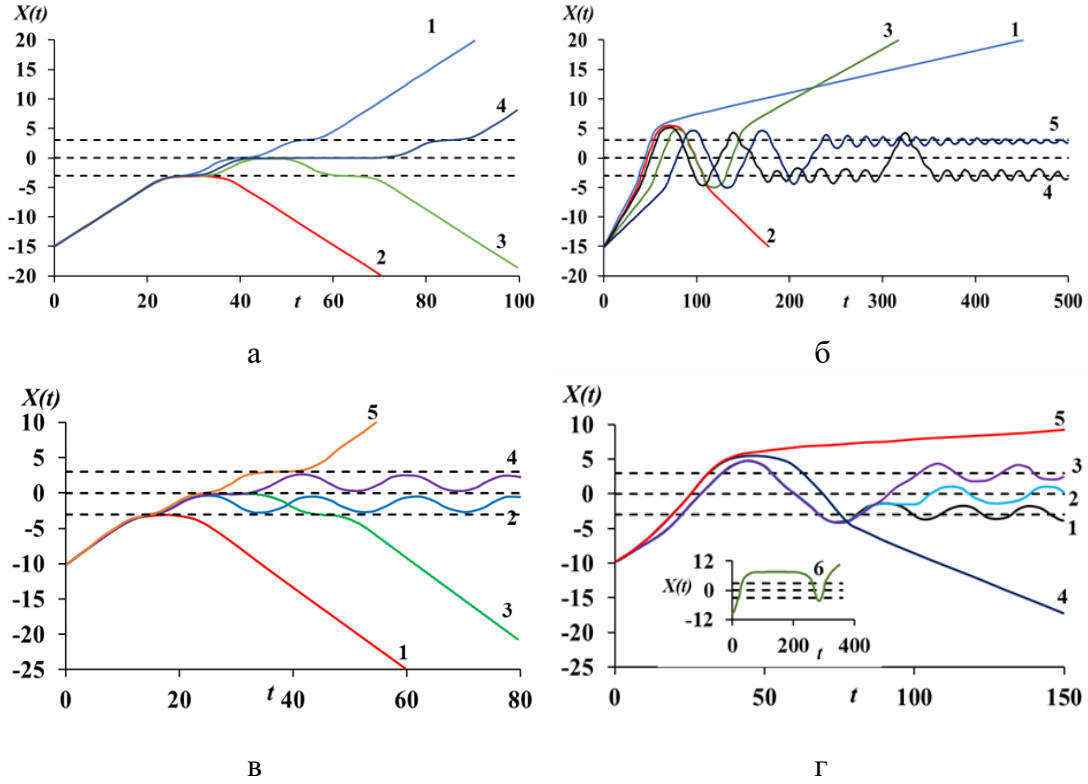


Рисунок 7. Зависимость координаты центра кинка $X(t)$ от времени t для случая: а) отталкивающих точечных примесей при $\varepsilon = -0.5$ и $d = 3$: 1) $v_0 = 0.51$, 2) $v_0 = 0.502$, 3) $v_0 = 0.5035$, 4) $v_0 = 0.5049038$; б) притягивающих точечных примесей при $\varepsilon = 0.5$ и $d = 3$: 1) $v_0 = 0.3$, 2) $v_0 = 0.28$, 3) $v_0 = 0.2$, 4) $v_0 = 0.26$, 5) $v_0 = 0.15$; в) отталкивающих протяжённых примесей при $W = 1$, $\Delta K = -1$, $d = 3$: 1) $v_0 = 0.59$; 2) $v_0 = 0.595$; 3) $v_0 = 0.59855$; 4) $v_0 = 0.5986$; 5) $v_0 = 0.602$; г) притягивающих протяжённых примесей при $W = 1$, $\Delta K = 0.5$, $d = 3$: 1) $v_0 = 0.28$, 2) $v_0 = 0.283043899$, 3) $v_0 = 0.2849$, 4) $v_0 = 0.33$, 5) $v_0 = 0.343$, 6) $v_0 = 0.3426$

Для приближенного аналитического описания динамики локализованных волн в случае $h=0$, $\alpha=0$ из системы уравнений (10), (11) при $X(t) \rightarrow \infty$ была получена система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \ddot{a}_1 + a_1 \omega_1^2 + a_2 k_{12} + a_3 k_{13} = 0, \\ \ddot{a}_2 + a_2 \omega_2^2 + (a_1 + a_3) k_{21} = 0, \\ \ddot{a}_3 + a_3 \omega_1^2 + a_1 k_{13} + a_2 k_{12} = 0. \end{cases} \quad (12)$$

где

$$\omega_1^2 = 1 - \frac{\varepsilon^2}{4} + \frac{\varepsilon^3 d e_d^2 / 4}{1 - (1 + \varepsilon d + \varepsilon^2 d^2 / 2) e_d^2} \left[1 + e_d^2 + \frac{\varepsilon d (e_d^2 - 1) e_d^2 / 2}{1 - (1 + \varepsilon d) e_d^2} \right], \quad (13)$$

$$\omega_2^2 = 1 - \frac{\varepsilon^2}{4} + \frac{\varepsilon^3 d (1 - e_d^2) e_d^2 / 2}{1 - (1 + \varepsilon d + \varepsilon^2 d^2 / 2) e_d^2}, \quad (14)$$

$$k_{12} = \frac{\varepsilon^2 [(1 + \varepsilon d) e_d^2 - 1] e_d / 2}{1 - (1 + \varepsilon d + \varepsilon^2 d^2 / 2) e_d^2}, \quad k_{21} = \frac{\varepsilon^2 (\varepsilon d e_d^2 / 2 - 1) (1 - e_d^2) e_d / 2}{1 - (1 + \varepsilon d + \varepsilon^2 d^2 / 2) e_d^2}, \quad (15)$$

$$k_{13} = \frac{\varepsilon^2 e_d^2 / 2}{1 - (1 + \varepsilon d + \varepsilon^2 d^2 / 2) e_d^2} \left[\frac{\varepsilon d (1 + e_d^2)}{2} + e_d^2 - 1 + \frac{\varepsilon^2 d^2 (1 - e_d^2) e_d^2 / 4}{1 - (1 + \varepsilon d) e_d^2} \right]. \quad (16)$$

При $d \rightarrow \infty$ коэффициенты связи k_{12} , k_{21} , k_{13} , равны нулю, а параметры частот $\omega_1^2 = \omega_2^2 = 1 - \varepsilon^2/4$, т.е. получаем известное решение для одной точечной примеси [5]. Уравнения (12) являются уравнениями колебательной системы с тремя степенями свободы (или трёх связанных осцилляторов). Их решение представляет собой сумму трёх гармонических колебаний вида:

$$\begin{aligned} a_1(t) &= a_{01} \cos(\Omega_1 t + \theta_1) + \eta_{12} a_{02} \cos(\Omega_2 t + \theta_2) - a_{03} \cos(\Omega_3 t + \theta_3), \\ a_2(t) &= \eta_{21} a_{01} \cos(\Omega_1 t + \theta_1) + a_{02} \cos(\Omega_2 t + \theta_2), \\ a_3(t) &= a_{01} \cos(\Omega_1 t + \theta_1) + \eta_{12} a_{02} \cos(\Omega_2 t + \theta_2) + a_{03} \cos(\Omega_3 t + \theta_3), \end{aligned} \quad (17)$$

где:

$$\begin{aligned} \Omega_{1,2}^2 &= \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2 + k_{13} \mp \sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2 + k_{13})^2 + 8k_{12}k_{21}}}{2}, \\ \eta_{21} &= \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2 - k_{13} - \sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2 + k_{13})^2 + 8k_{12}k_{21}}}{2k_{12}}, \\ \eta_{12} &= \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2 + k_{13} - \sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2 + k_{13})^2 + 8k_{12}k_{21}}}{4k_{12}}, \\ \Omega_3^2 &= \omega_1^2 - k_{13}. \end{aligned} \quad (18)$$

При $d \rightarrow \infty$, используя (16) – (19) получим:

$$\Omega_{1,2,3}^2 = 1 - \frac{\varepsilon^2}{4}, \eta_{21} = \sqrt{2}, \eta_{12} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad (19)$$

Можно заметить, что первая формула (19) описывает частоту примесной моды для одиночной примеси. По формулам (18) были построены зависимости $\Omega_{1,2,3}(d)$ (см. рисунок 10). По построенным зависимостям видно, что при больших d параметры частот $\Omega_{1,2,3}$ стремятся к предельному значению, при малых d величина частоты Ω_1 уменьшается, а частоты $\Omega_{2,3}$ увеличиваются, стремясь к бесконечности. Причём Ω_2 относительно Ω_3 увеличивается быстрее. Было показано, что, варьируя начальными условиями, можно получить как простые, так и сложные случаи связанных колебаний примесных мод. На рисунке 8 представлены зависимости амплитуд от времени, где все примесные моды колеблются с одинаковой частотой. Так, например, в зависимости от начальных условий можно получить случай синфазных (рисунок 8а), антифазных (рисунок 8в) и синфазно-антифазных или «смешанных» колебаний (рисунок 8б). В результате сопоставления значений частот $\Omega_{1,2,3}$ полученных по формулам (18) и дискретному Фурье-разложению было определено, что параметр частоты Ω_1 соответствует частоте синфазных колебаний, Ω_2 – синфазно-антифазным колебаниям, а Ω_3 – антифазным колебаниям.

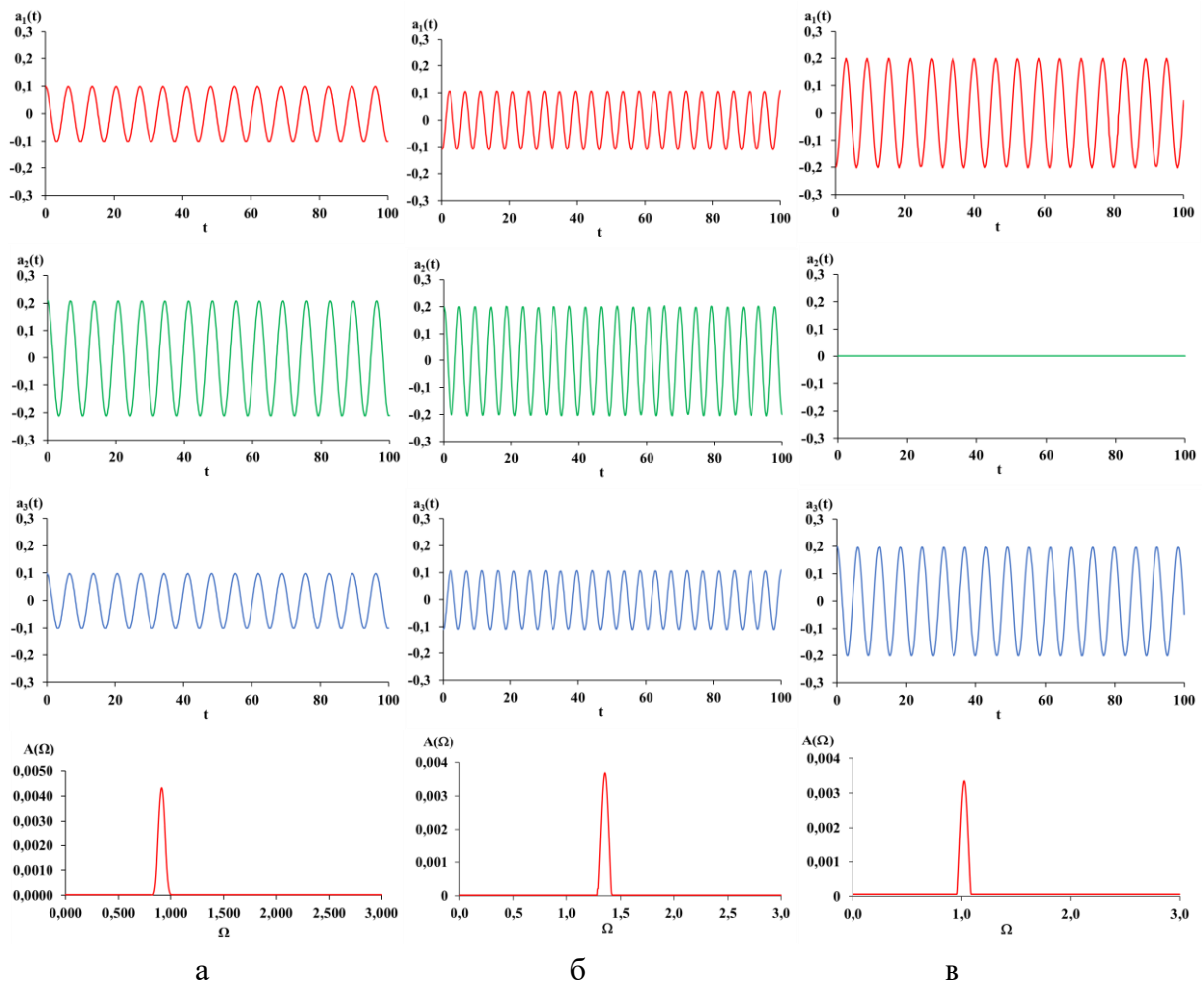


Рисунок 8. Зависимость амплитуд $a_{1,2,3}$ от времени t при $\varepsilon = 0.5$, $d = 2$ и соответствующее $a_{1,2,3}$ дискретное Фурье-разложение $A(\Omega)$ при начальных условиях: а) $a_1(0) = 0.1$, $a_2(0) = 0.2098$, $a_3(0) = 0.1$, б) $a_1(0) = -0.1095$, $a_2(0) = 0.2$, $a_3(0) = -0.1095$, в) $a_1(0) = -0.2$, $a_2(0) = 0$, $a_3(0) = 0.2$

На рисунке 9 представлены зависимости амплитуд $a_{1,2,3}$ от времени t при различных колебаниях примесных мод. На рисунке 9 показано, что помимо случаев с колебанием примесных мод на одной частоте (рисунок 9а) путём изменения начальных условий можно добиться колебаний типа биений (рисунок 9б) или более сложные типы колебаний, где три моды колеблются на своей частоте (рисунок 9в).

Для численного моделирования УСГ с примесями применялся метод конечных разностей с трёхслойной явной схемой интегрирования с аппроксимацией производных типа «крест» [9]. Данная численная схема второго порядка аппроксимации по координате Δx и времени Δt обладает условной устойчивостью $\Delta t/\Delta x \leq 1$. Частотный анализ колебаний локализованных, на примесях волн для случая численного решения проводился с помощью дискретного преобразования Фурье.

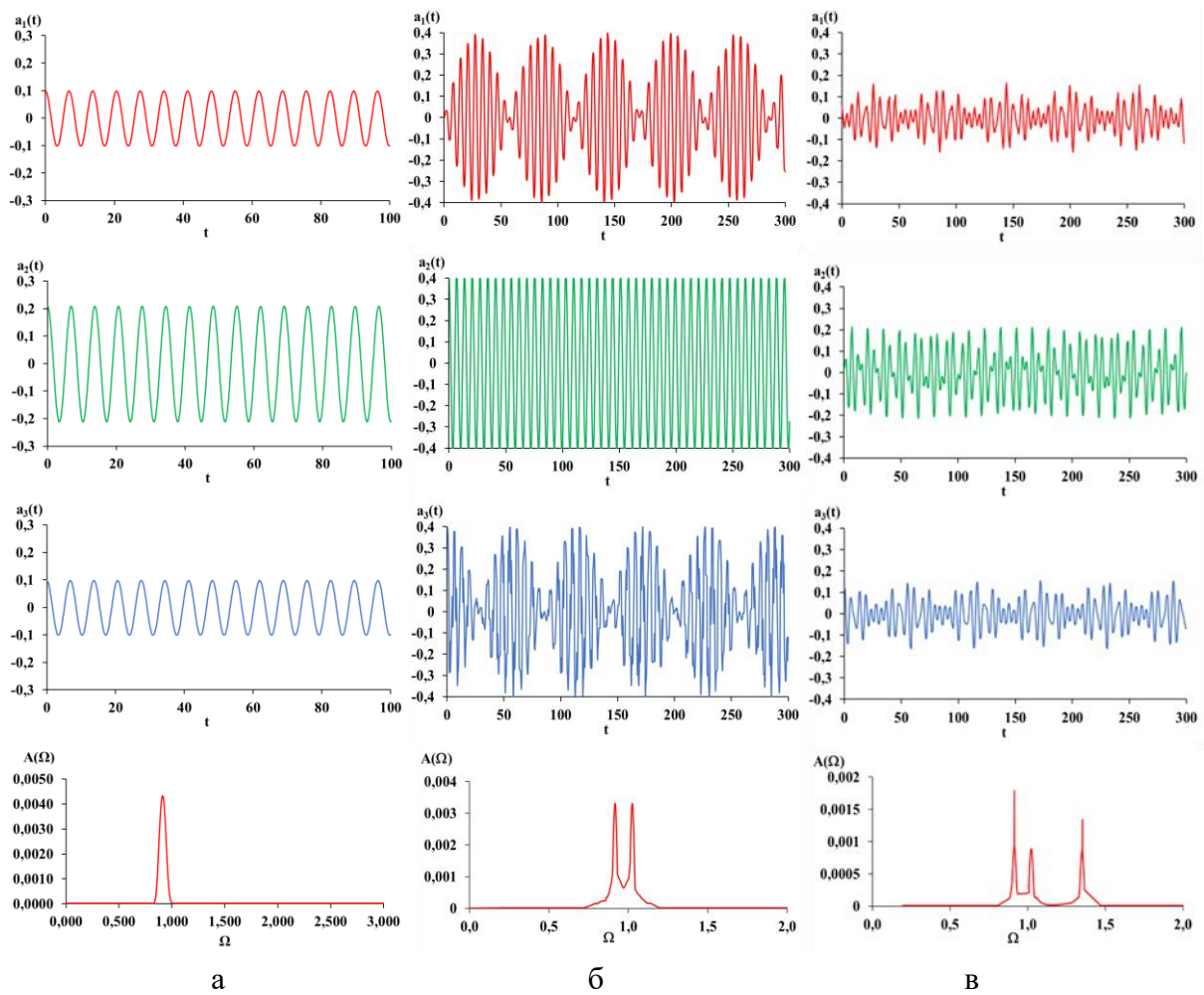


Рисунок 9. Зависимость амплитуд $a_{1,2,3}$ от времени t при $\varepsilon = 0.5$, $d = 2$ и соответствующее $a_{1,2,3}$ дискретное Фурье-разложение $A(\Omega)$ при начальных условиях: а) $a_1(0) = 0.1$, $a_2(0) = 0.2098$, $a_3(0) = 0.1$, б) $a_1(0) = 0$, $a_2(0) = 0.4196$, $a_3(0) = 0.4$, в) $a_1(0) = 0.05375$, $a_2(0) = 0.01277$, $a_3(0) = 0.16125$

Численный счет исходного уравнения (1) при $h=0$, $\alpha=0$ показал, что, как и в случае с аналитическим решением, в зависимости от скорости набегания кинка можно получить разные сценарии его динамики: прохождение, отражение, квазитунелирование, пиннинг на примесях. После прохождения через область точечных примесей на них возбуждаются локализованные волны типа бризерного типа. Помимо параметров ε и d , амплитуда и вид локализованных волн зависят от начальной скорости кинка. Сравнение численных и аналитических зависимостей $\Omega(d)$ приведено на рисунке 10. Из рисунка видно, что они коррелируют друг с другом и тем лучше, тем больше расстояние между примесями. При параметре расстояния между примесями ($d \leq 1$) три примесные моды сливаются в одну, т.е. три примеси выступают как одна «эффективная» коллективная примесь. Стоит отметить, что частоты Ω_1 и Ω_3 , численно возбуждаются численно, начиная с относительно малых расстояний, между примесями ($2 \leq d \leq 4$), а локализованные волны, содержащие частоту Ω_2 при сравнительно больших расстояниях ($d > 4$).

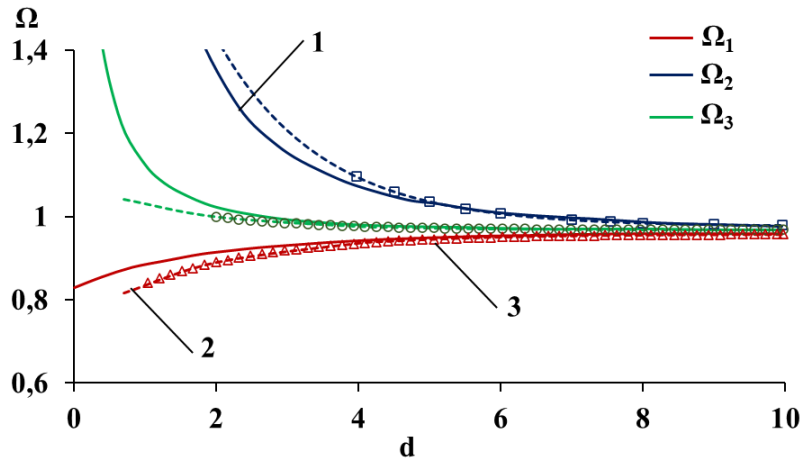


Рисунок 10. Зависимость $\Omega(d)$ частот колебаний локализованных примесных волн от расстояния между примесями d при $\varepsilon = 0.5$, Ω_1 – частота синфазных колебаний, Ω_2 – частота смешанных колебаний, Ω_3 – частота антифазных колебаний. Аналитическое решение (18) – сплошная линия, численный результат обозначен точками

В ходе численного эксперимента по исследованию взаимодействия кинка с протяжёнными отталкивающими примесями были найдены все режимы динамики кинка, полученные для случая точечных примесей аналитическими и численными методами (см. рисунок 7). В том числе и случай замкнутого движения кинка между примесями, называемый пиннингом (рисунок 7в). Сравнивая величины скоростей кинка до и после взаимодействия, можно отметить, что для случая отталкивающих протяженных примесей, значения таких скоростей одинаковы, что говорит о практически упругом взаимодействии системы «кинк-примесь». В случае притягивающей протяженной примеси кинк-примесное взаимодействие неупругое и сопровождается «излучением» свободных волн и возбуждением локализованных на примесях волн бризерного типа, а с увеличением площади примеси можно получить и локализованные волны солитонного типа (рисунок. 11).

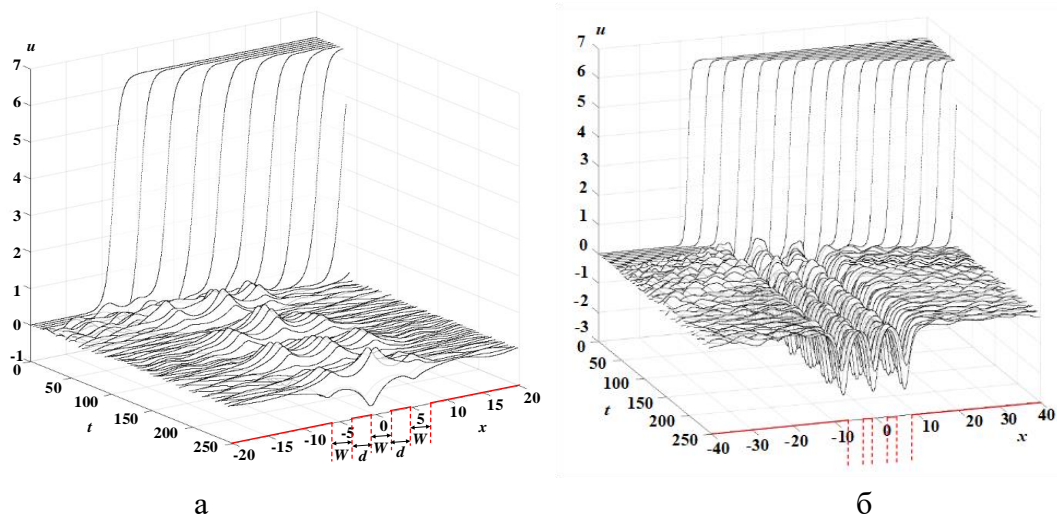


Рисунок 11. Генерация локализованных волн на примесях бризерного (а) и солитонного (б) типа

Путем линеаризации УСГ, как и для случая уравнения φ^4 , было сведено к уравнению Шредингера, решая которое нашли дисперсионному выражению вида:

$$\begin{aligned}
& \left(2\sqrt{1-\omega^2}\sqrt{\omega^2+\Delta K-1} \operatorname{ctg}\sqrt{\omega^2+\Delta K-1}W + 2 - 2\omega^2 - \Delta K \right)^3 = \\
& = \Delta K^2 \left[2 \left(2\sqrt{1-\omega^2}\sqrt{\omega^2+\Delta K-1} \operatorname{ctg}\sqrt{\omega^2+\Delta K-1}W + 2 - 2\omega^2 - \Delta K \right) \right. \\
& \quad + \left(2\sqrt{1-\omega^2}\sqrt{\omega^2+\Delta K-1} \operatorname{ctg}\sqrt{\omega^2+k-1}W - 2 + 2\omega^2 \right. \\
& \quad \left. \left. + \Delta K \right) e^{-2\sqrt{1-\omega^2}d} \right] e^{-2\sqrt{1-\omega^2}d}.
\end{aligned} \tag{20}$$

Используя соотношение (20), была построена зависимость частот локализованных на примесях волн от расстояния d между ними при различных значениях ΔK (рисунок 12). Из рисунка видно, что дисперсионное выражение (20) показывает хорошую корреляцию с численными результатами.

В модели с одной протяжённой примесью вида (9) была исследована возможность изменения с помощью метода авторезонанса динамических параметров локализованных волн бризерного и солитонного типа для УСГ (7) в модели с протяженной примесью, переменной внешней силой и диссипацией. Численно показано, что при помощи переменной силы специального вида $h = h_0 \cos(\omega t)$, с частотой $\omega = \omega_0 - \mu t$ и малой амплитудой, можно резонансно повысить амплитуду бризера и солитона, (см. рисунки 13, 14). Здесь ω_0 – известная из численных расчетов собственная частота бризера или солитона, локализованного в области примеси, μ – малый параметр. Для переключения солитон в антисолитон и обратно необходимо прикладывать достаточно большую величину постоянной внешней силы h .

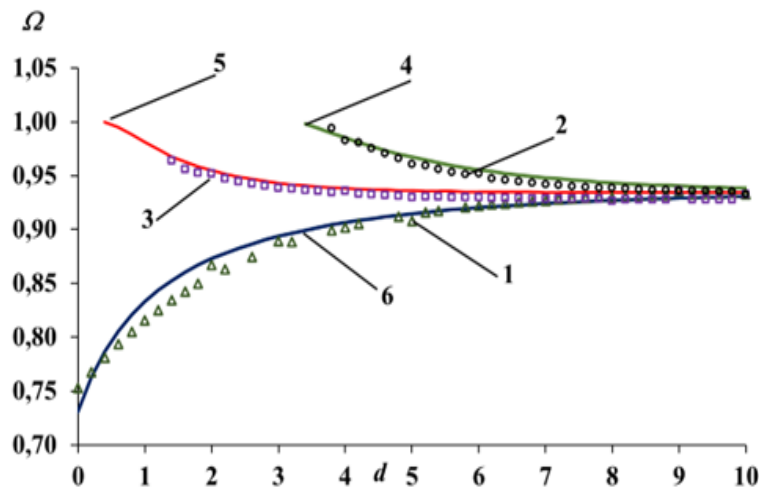


Рисунок 12. Зависимость частот локализованных на примесях волн от расстояния d между ними при $W = 1$: а) $\Delta K = 0.2$. Кривые 1, 2 и 3 численно рассчитанные частоты для синфазных, антифазных и смешанных колебаний соответственно. Кривые 4, 5 и 6 аналитически рассчитанные частоты для синфазных, антифазных и смешанных колебаний соответственно

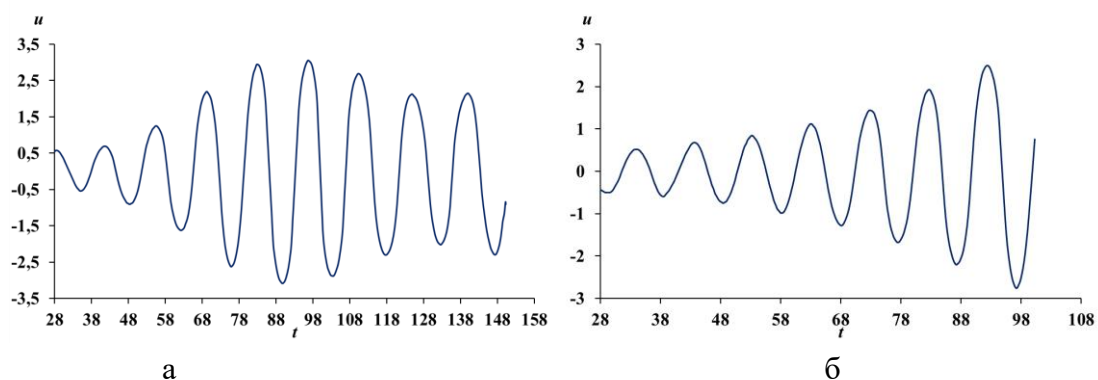


Рисунок 13. Зависимость амплитуды колебаний бризера от времени при $K = -0.2$, $h_0 = 0.1$, $\mu = 0.01$, $\alpha = 0.001$ для случаев а) $W = 3$, $\omega_0 = 0.44$, б) $W = 2$, $\omega_0 = 0.58$

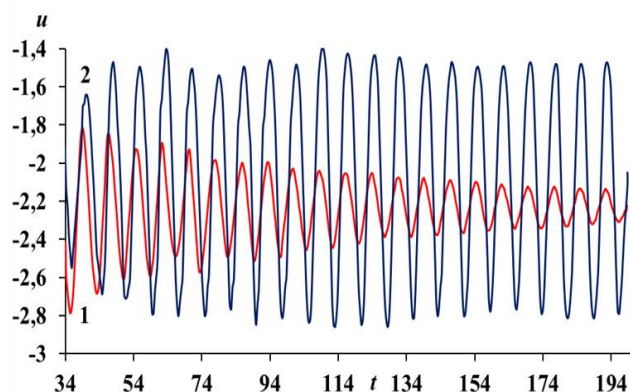


Рисунок 14. Зависимость амплитуды колебаний солитона от времени без поля (кривая 1), и в переменном поле (кривая 2), где $h_0 = 0.1$, параметр $\mu = 0.01$, $\omega_0 = 0.83$, параметры ямы $W = 2$, $K = -1.4$

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

1. Для уравнения φ^4 исследовано взаимодействие между кинками и протяженной примесью, описываемую функцией прямоугольного вида. На основе метода линий разработана программа для вычисления резонансной динамики солитонов. Изучены возможные сценарии динамики кинков при наличии протяженных примесей. В случае отталкивающих примесей кинк, в зависимости от начальной скорости, может либо отражаться, либо проходить через область примеси. Неупругое взаимодействие кинка с примесью возникает только при больших начальных скоростях кинка. Притягивающие примеси для уравнения φ^4 могут еще захватывать кинк, отражать или пропускать его. После кинк-примесного взаимодействия на кинке возбуждается внутренняя мода частотой $\sqrt{3/2}$ и его можно считать воблинг кинком. Для найденной численно зависимости конечной скорости кинка от начальной, большей критической скорости прохождения через область примеси, применима формула, предложенная для уравнения синус Гордона с притягивающими примесями. Найдено, что на зависимости конечной скорости кинка от начальной, есть большое число резонансных окон, в которых лежат резонансные скорости отражения от примеси. Между резонансными окнами не наблюдались, описанные для случая точечных примесей, особые случаи динамики кинка, названные «квазирезонансом». Найдены особые значения резонансной скорости «квазитуннелирования», при которых кинк, имея скорость меньше критической, проходит над примесью. Особенности резонансного взаимодействия в модели φ^4 кинка с протяженной примесью, как и для случая точечной

примеси, в отличие от случая уравнения синус-Гордона, связаны с тем, что кинк взаимодействует уже не с одним осциллятором (примесной модой), а с двумя (добавляются еще внутренние моды колебаний кинка). Показано, что для уравнения φ^4 протяженную примесь прямоугольного вида можно использовать как генератор для возбуждения, с помощью кинк-примесного взаимодействия, долгоживущих локализованных волн типа воблинг бризера. Рассмотрено линейное приближение, допускающее аналитическое решение задач о локализованных волнах и найдены границы ее применимости для данной модели.

2. Для уравнения синус Гордона в модели с тремя примесями, с учетом возможности возбуждения примесных мод, наличия внешней силы и затухания, описана резонансная динамика кинков. Рассмотренная модель УСГ с примесями может быть использована для описания и управления динамикой волн намагниченности в семислойных магнетиках. При помощи метода коллективных переменных, для случая точечных примесей, получена система интегро-дифференциальных уравнения для координаты центра кинка и амплитуд примесных мод. Она показала значительные различия, наблюдаемые при взаимодействии кинка с отталкивающей и притягивающей примесями. Так, резонансные эффекты отражения от и прохождения над примесями наблюдаются только для случая притягивающих примесей. Для связанных колебаний примесных мод в отсутствие кинка она переходит в систему дифференциальных уравнений аналогичную системе, полученной для модели связанных трех гармонических осцилляторов. Связанные колебания трех примесных мод представляют собой сумму трёх типов гармонических колебаний: синфазного, синфазно-антифазного и антифазного.

3. На основе метода конечных разностей, с использованием явной схемы интегрирования, создана программа для вычисления резонансной динамики солитонов УСГ. С ее помощью найдены возможные сценарии динамики кинков при наличии трех точечных и протяженных примесей при отсутствии внешней силы и затухания в системе. Для случая точечных примесей наблюдались, как сценарии взаимодействия кинка с примесями, полученные аналитическим способом, так и новые сценарии. Найденные сценарии динамики кинка для случая протяженных примесей прямоугольного вида качественно похожи на сценарии, полученные численно для точечных примесей, описываемых с помощью дельта-функции. Найдены критические и резонансные скорости кинка, как функции от вида и параметров примеси. Показано, как меняя расстояние между примесями, можно эффективно управлять величиной кинк-примесного взаимодействия. Используя метод линеаризации УСГ для случая трех локализованных волн малой амплитуды, были определены частоты синфазных, антифазных и смешанных локализованных на примесях колебаний как функции от параметров примесей и расстояния между ними. Эти зависимости качественно согласуются с результатами численных расчетов для связанных локализованных волн бризерного типа. Увеличивая площадь потенциальных ям, создаваемых протяжёнными примесями, можно получить три связанные локализованные волны солитонного типа. Показано, что при наличии затухания в модели синус Гордона с протяженной примесью, с помощью внешней переменной силы малой амплитуды методом авторезонанса можно повысить амплитуды колебаний локализованных волн бризерного и солитонного типа. А с помощью постоянной внешней силы большой амплитуды переключать локализованные волны типа солитон в антисолитон и обратно.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Публикации в журналах, рекомендованных ВАК для опубликования результатов диссертационной работы

А.1 Екомасов Е.Г. Управление с помощью внешнего магнитного поля параметрами магнитного бризера в трехслойной ферромагнитной структуре / Е.Г. Екомасов, В.Н. Назаров, А.М. Гумеров, К.Ю. Самсонов, Р.Р. Муртазин // Письма о материалах. – 2020 – Т.10. – №2. – С. 141–146.

А.2 Екомасов Е.Г. Возможность управления динамикой и структурой магнитного солитона в трехслойной ферромагнитной структуре / Е.Г. Екомасов, В.Н. Назаров, К.Ю. Самсонов, Р.Р. Муртазин // Письма в журнал технической физики. – 2021. – Т.47. – №10 – С. 15 – 18.

А.3 Ekomasov E.G. Changing the Dynamic Parameters of Localized Breather and Soliton Waves in the Sine-Gordon Model with Extended Impurity, External Force, and Decay in the Autoresonance Mode / E.G. Ekomasov, V.N. Nazarov, K.Yu. Samsonov // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. – 2022. – Vol. 18. – No. 2.– P. 217 – 229.

А.4 Екомасов Е.Г. Структура и динамика локализованных нелинейных волн уравнения синус-Гордона в модели с одинаковыми примесями / Е.Г. Екомасов, К.Ю. Самсонов, А.М. Гумеров, Р.В. Кудрявцев // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2022. – Т. 30. – №. 6. –С. 749 – 765.

А.5 Кабанов Д.К. Одномерная динамика доменной границы в мультислойной ферромагнитной структуре. / Д.К. Кабанов, К.Ю. Самсонов, В.Н. Назаров, Е.Г. Екомасов // Физика твёрдого тела. – 2023. – Т. 65. – №. 4. – С. 558–564.

А.6 Назаров В.Н. Одномерная динамика доменной границы в семислойной ферромагнитной структуре / В.Н. Назаров, К.Ю. Самсонов, Е.Г. Екомасов // Известия Уфимского научного центра РАН. – 2023. – №. 1. – С. 18–22.

А.7 Fakhretdinov M.I. Kink Dynamics in the ϕ^4 model with Extended impurity / M.I. Fakhretdinov, K.Y. Samsonov, S.V. Dmitriev, E.G. Ekomasov // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. – 2023. – Vol. 19. – No. 3. – P. 303 – 320.

Патенты и авторские свидетельства на программное обеспечение

А.8 Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2021661447: Численное моделирование высокоамплитудных нелинейных волн уравнения синус-Гордона в модели с несколькими протяжёнными притягивающими примесями, внешней силой и затуханием / Екомасов Е.Г., Самсонов К.Ю. – Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2021661447 от 12.07.2021. Роспатент.

А.9 Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2022684315: Численное моделирование нелинейных волн уравнения $\phi-4$ в модели с протяженной примесью прямоугольного вида / Екомасов Е.Г., Фахретдинов М.И., Самсонов К.Ю. – Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2022684315 от 13.12.2022. Роспатент.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Додд, Р. Солитоны и нелинейные волновые уравнения / Р. Додд, Дж. Эйлбек, Дж. Гиббон, Х. Моррис. Пер. с англ. – М.: Мир, 1988. – с. 694.

2. Шамсутдинов, М.А. Ферро- и антиферромагнитодинамика. Нелинейные колебания, волны и солитоны / М.А. Шамсутдинов, И.Ю. Ломакина, В.Н. Назаров, А.Т. Харисов, Д.М. Шамсутдинов. – М.: Наука, 2009. –С.456.

3. Браун, О.М. Модель Френкеля-Конторовой: Концепции, методы, приложения / О.М. Браун, Ю.С. Кившарь. Пер. с англ. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – С. 536.

4. P. Kevrekidis A Dynamical Perspective on the φ^4 Model: Past, Present and Future (Nonlinear Systems and Complexity, Vol. 26) / P. Kevrekidis J. Cuevas-Maraver // Springer. – 2019. – P. 311.
5. J. Cuevas-Maraver The Sine-Gordon Model and Its Applications: From Pendula and Josephson Junctions to Gravity and High-Energy Physics / J. Cuevas-Maraver, P. Kevrekidis, F. Williams (Eds.) // Cham: Springer. – 2014.– P. 311.
6. Yamaletdinov R. D. Kinks and antikinks of buckled graphene: a testing ground for the φ^4 field model / Yamaletdinov R. D., Slipko V. A., Pershin Y. V. // Physical Review B. – 2017. – V. 96. – No. 9. – P. 094306. DOI: 10.1103/PhysRevBPhysRevB.96.094306
7. Белова Т.И. Солитоны и их взаимодействия в классической теории поля / Т.И. Белова, А.Е. Кудрявцев // УФН. – 1997. – Т. 167. – №4 – С. 377 – 406. DOI : 10.3367/UFNr.0167.199704b.0377
8. Piette B. Scattering of sine-Gordon kinks on potential wells / Piette B., Zakrzewski W. J. // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. – 2007. – V. 40. – No. 22. – P. 5995. DOI: 0.1088/1751-8113/40/22/016
9. Гумеров, А.М. Трансформация солитонов уравнения синус-Гордона в моделях с переменными коэффициентами и затуханием / А.М. Гумеров, Е.Г. Екомасов, Р.Р. Муртазин, В.Н. Назаров // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2015. – Т. 55, № 4. – С. 631–640. DOI : 10.7868/S0044466915040031
10. Ekomasov E. G. Multisoliton Dynamics in the Sine-Gordon Model with Two Point Impurities / Ekomasov E. G., Gumerov A. M., Kudryavtsev R. V., Dmitriev S. V., and Nazarov V. N // Braz. J. Phys., 2018, vol. 48, no. 6, P. 576–584. DOI: 10.1007/s13538 018 0606 4
11. Fei Z. Resonant kink-impurity interactions in the φ^4 model / Fei Z., Kivshar Y. S., Vázquez L. //Physical Review A. – 1992. – V. 46. – No. 8. – P. 5214. DOI: 10.1103/PhysRevA.46.5214
12. Lizunova M. A. Kinks and realistic impurity models in φ^4 -theory / Lizunova M.A., Kager J., Stan de Lange, Jasper van Wezel // International Journal of // International Journal of Modern Physics B. – 2022. – V. 36. – No. 05. – P. 2250042. DOI: 10.1142/S0217979222500424
13. Lizunova M. Emergence of oscillons in kink-impurity interactions / Kager J., Stan de Lange, Jasper van Wezel/ // J. Phys. A: Math. Theor. – 2021 – Vol.54. – P. 315701. DOI: 10.1088/1751-8121/ac0d36
14. Schiesser W. E. Schiesser W. E. The numerical method of lines: integration of partial differential equations. San Diego: Academic Press .– 1991. – P. 326