

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ТЮМЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Физико-технический институт

Кафедра моделирования физических процессов и систем

На правах рукописи

САМСОНОВ КИРИЛЛ ЮРЬЕВИЧ

**СТРУКТУРА И ДИНАМИКА СОЛИТОНОВ УРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА-
ГОРДОНА В МОДЕЛИ С ПРИТЯГИВАЮЩИМИ ПРИМЕСЯМИ,
ВНЕШНЕЙ СИЛОЙ И ЗАТУХАНИЕМ**

Специальность 1.3.3 – Теоретическая физика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических наук,
профессор Екомасов Евгений Григорьевич

Тюмень – 2023

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
1. ЛИТЕРАТУРНЫЙ ОБЗОР	11
1.1. Уравнение синус-Гордона.....	13
1.1.1. Солитонные решения уравнения синус-Гордона.....	14
1.1.2. Модифицированное уравнение синус-Гордона	15
1.2. Уравнение φ^4	26
1.2.1. Солитонные решения уравнения φ^4	27
1.2.2. Модифицированное уравнение φ^4	28
1.3. Численные методы решения уравнения Клейна-Гордона.....	30
1.4. Выводы по главе 1	34
2. ВЛИЯНИЕ ПРОТЯЖЁННОЙ ПРИМЕСИ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ВИДА НА ДИНАМИКУ КИНКОВ И БРИЗЕРОВ УРАВНЕНИЯ φ^4	35
2.1. Основное уравнение и метод решения.....	36
2.2. Динамика кинка. Случай потенциального барьера	37
2.3. Динамика кинка. Случай потенциальной ямы	41
2.4. Динамика локализованной волны. Результаты численного моделирования.....	50
2.5. Динамика локализованной волны. Результаты аналитического решения.....	57
2.6. Выводы по главе 2	59
3. ДИНАМИКА КИНКОВ, БРИЗЕРОВ И СОЛИТОНОВ УРАВНЕНИЯ СИНОС- ГОРДОНА В МОДЕЛИ С ПРИМЕСЯМИ	62
3.1. Аналитическое описание динамика кинка и примесных мод в модели с тремя точечными примесями	63
3.2. Динамика кинка с тремя точечными примесями. Результаты аналитической модели.....	78
3.3. Связанные колебания локализованных на трёх точечных примесях волн. Результаты аналитической модели	81
3.4. Численный метод решения уравнения синус-Гордона в модели с тремя примесями	91
3.5. Динамика кинка для случая трёх точечных примесей. Результаты численного моделирования	100
3.6. Связанные колебания локализованных волн для случая трёх точечных примесей. Результаты численного моделирования.....	102

3.7. Динамика кинка для случая трёх протяжённых примесей. Результаты численного моделирования	106
3.8. Связанные колебания локализованных на трёх протяжённых примесях волн бризерного типа. Результаты численного моделирования	115
3.9. Генерация локализованных на трёх протяжённых примесях волн солитонного типа. Результаты численного моделирования	123
3.10. Управление структурой и динамикой локализованных на протяжённой примеси волн бризерного и солитонного типа методами авторезонанса.....	127
3.11. Выводы по главе 3.....	136
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	140
СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ	143
АВТОРСКИЙ СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ	144
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	150

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Используемые для описания физических процессов в области теоретической и математической физики линейные дифференциальные уравнения, для которых действует принцип суперпозиции, в основном хорошо применимы для задач с малыми параметрами. Часто для адекватного описания физических процессов и явлений должны применяться нелинейные дифференциальные уравнения, для которых принцип суперпозиции обычно не выполняется. Это означает, что подобные явления намного труднее поддаются математическому анализу и для них не существует общего аналитического метода. Поэтому каждое конкретное нелинейное уравнение приходится рассматривать отдельно. В теоретической и математической физике при исследовании нелинейных волновых процессов, описываемых такими уравнениями, к настоящему времени разработано много интересных методов и найдено много интересных решений. Например, с помощью разработанных методов интегрирования нелинейных эволюционных уравнений удалось проинтегрировать некоторые нелинейные дифференциальные уравнения, используемые в теоретической физике. Среди них уравнение Кортевега-де Вриза, нелинейное уравнение Шредингера и уравнение Клейна-Гордона. Обнаружены новые типы решений названных солитонами, которые описывают уединённые волны, сохраняющие свою форму и скорость во времени и при взаимодействии друг с другом. Нахождение новых солитонных решений, описание их свойств и поведения – актуальная задача теоретической и математической физики интересная как с фундаментальной, так и с прикладной точки зрения.

Хотя первое упоминание о экспериментальном наблюдении уединенной волны солитонного типа было зафиксировано в 1834 г. Джоном Скоттом Расселом [1], бурное изучение солитонов, нахождение новых решений солитонного типа, описание их свойств и поведения начались со второй половины двадцатого века. Было показано, что солитоны возникают при решении задач в механике, физике конденсированного состояния, оптике, атомной физике, биофизике, и т.д. [1–3].

Одним из уравнений часто появляющимся при решении физических задач связанных с нелинейными волновыми процессами является уравнение Клейна-Гордона (УКГ). А одними из наиболее часто используемыми в теоретической физике уравнений данного класса являются уравнения синус-Гордона (УСГ) и модели φ^4 [4, 5]. Например, уравнение синус Гордона применимо для теоретического описания динамики доменных границ в ферромагнетиках (ФМ) и слабых ферромагнетиках (СФМ) и протекания сверхпроводящего тока в джозефсоновских контактах сверхпроводников. Новый импульс изучению уравнения в модели φ^4 в последние годы придало и использование его для описания физических процессов в графене. Однако, в реальных физических системах, описываемые УКГ, для их адекватного описания возникает необходимость ввода дополнительных слагаемых или функций, способных моделировать неоднородности среды, внешнюю силу, диссипацию в системе и т.п. Модифицированное УКГ уже в общем случае не имеет точного решения. Например, часто учитывают наличие пространственной неоднородности периодического потенциала (или примеси) в системе [4–7]. Хотя численный расчёт позволяет получить решение такой задачи для более широкой области значений параметров системы, для качественного понимания изучаемого процесса и для контроля правильности численных расчётов сохраняют актуальность и аналитические исследования. Одним из часто рассматриваемых видов примеси являются точечная примесь и протяженная примесь прямоугольного вида [7, 8]. Для уравнения синус-Гордона были подробно рассмотрены случаи одной и двух точечных и протяженных примесей с учетом возбуждения на них нелинейных локализованных волн [5, 9, 10]. Было показано, что для случая двух примесей возникают интересные коллективные эффекты влияния примесей на нелинейную динамику солитонов. Очевидно, что если рассмотреть случай трех и более примесей, то таких интересных коллективных эффектов должно быть больше. Для уравнения модели φ^4 рассмотрено движение кинка через одиночную точечную примесь с учётом возбуждения на ней нелинейной локализованной волны –

примесной моды [4–11]. Однако для случая протяженных примесей имеются лишь несколько работ, рассматривающих некоторые частные случаи проблемы [12, 13].

Рассмотрение таких задач могло бы существенно помочь при проведении экспериментов в реальных физических системах по наблюдению теоретически открытых эффектов.

Цели и задачи. Целью данной работы является теоретическое исследование динамики солитонов уравнения синус-Гордона и уравнения φ^4 в одномерной модели с притягивающими и отталкивающими примесями с учетом генерации локализованных нелинейных волн, внешней силы и затухания. Основные задачи, решаемые в рамках исследования:

1. Для уравнения φ^4 – изучение резонансной динамики кинков при наличии протяженной примеси, с учетом возможности генерации высокоамплитудных нелинейных локализованных волн.

2. Для уравнения синус-Гордона – изучение резонансной динамики кинков при наличии трех точечных и протяженных примесей, с учетом возможности генерации высокоамплитудных нелинейных локализованных волн: исследование связанных колебаний локализованных на примесях волн: использование авторезонансных методов воздействия для управления структурой локализованных волн при наличии внешней силы и диссипации в системе.

3. Разработка программного комплекса для вычисления динамических характеристик солитонов модифицированных уравнений φ^4 и синус-Гордона, инструментов анализа и средств, визуализации, необходимых для физической интерпретации численно полученных данных.

Методы исследования. При решении, поставленных в данной работе задач, использовалось математическое моделирование, на основе численного решения нелинейного дифференциального уравнения в частных производных. Для численного решения УСГ использовался метод конечной разности с явной схемой интегрирования, для решения уравнения φ^4 метод линий. Частотный анализ колебаний кинка и локализованных волн, рассчитанных численно, выполнялся с помощью дискретного преобразования Фурье. При наличии малого параметра

использовался аналитический подход. Путем линеаризации исходная задача сводилась к обыкновенным дифференциальным уравнениям, решаемым как аналитически, так и численно. Для получения уравнений, описывающих динамику нелинейных волн, был использован метод коллективных координат.

Научная новизна.

1. Впервые с помощью численных методов исследована структура и резонансная динамика кинков уравнения φ^4 при их взаимодействии с протяженной примесью, описываемую функцией прямоугольного вида, размеры которой качественно соответствуют ширине кинка. Определены и описаны два возможных сценария динамики кинка для случая отталкивающей примеси и четыре, для случая притягивающей примеси. Найдены структура и зависимости критических и резонансных скоростей кинка от параметров примеси. Показано, что с помощью кинк-примесного взаимодействия можно протяженную притягивающую примесь использовать как генератор для возбуждения воблинг кинка и бризера.

2. Впервые с помощью аналитических и численных методов описана структура и резонансная динамика кинков уравнения синус Гордона в модели с тремя точечными и протяженными одинаковыми примесями, с учетом возможности возбуждения примесных мод, наличия внешней силы и затухания, применяемая к описанию динамики магнитных неоднородностей в мультислойных ферромагнетиках. Для случая точечных примесей получена система интегро-дифференциальных уравнений для коллективных переменных, качественно описывающая одномерную динамику кинка УСГ. Для связанных колебаний примесных мод из нее получена система дифференциальных уравнений, аналогичная системе уравнений для модели трех связанных гармонических осцилляторов. Предложен способ, как при наличии трех одинаковых примесей, изменяя расстояние между ними, можно существенно изменить скорость, возможный сценарий динамики кинка, структуру и динамику связанных локализованных волн, возбуждаемых на примесях.

3. Показана возможность для уравнения синус Гордона использования авторезонансного метода воздействия для управления структурой локализованных

волн бризерного и солитонного типов при наличии протяженной притягивающей примеси и диссипации в системе.

Теоретическая и практическая значимость результатов проведенных исследований заключается в том, что они расширяют знания об общей картине динамики солитонов одномерного уравнения Клейна-Гордона при наличии примесей, внешней силы и затухания, а также о динамике нелинейных связанных осцилляторов. Результаты исследования динамики кинков при наличии примесей позволяют определить условия для наиболее эффективного прохождения кинка через неоднородные области материала. Найденный характер влияния параметров системы и внешней силы на изученные эффекты, делает рассматриваемые модели более соответствующими реальным физическим системам. Предложенная модель для уравнения синус-Гордона описывает одномерную динамику магнитных неоднородностей в семислойных ферромагнитных структурах. Разработанный программный комплекс дает возможность моделирования разнообразных физических задач, сводимых к уравнениям Клейна-Гордона, подробного анализа и визуализации получаемых результатов в виде векторного поля. Он также может быть задействован в учебном процессе при выполнении лабораторных работ.

Основные положения и результаты , выносимые на защиту.

1. Два сценария динамики кинка для случая отталкивающей примеси и четыре сценария для случая притягивающей примеси для одномерного уравнения φ^4 с протяженной примесью прямоугольного вида. Нелинейные зависимости от параметров примеси критических и резонансных скоростей кинка, определяющих сценарии его динамики. Использование примесей для возбуждения и управления параметрами воблинг кинков и бризеров. Нелинейные зависимости амплитуд и частот локализованных на притягивающей примеси волн от начальной скорости кинка и параметров примеси.

2. Система интегро-дифференциальных уравнений для коллективных переменных: координаты центра кинка и амплитуд, локализованных на трех одинаковых точечных примесях волн, полученная из одномерного уравнения синус Гордона, с учетом внешней силы и затухания. Пять сценариев динамики кинка для

случая трех отталкивающих примесей и восемь сценариев для случая трех, притягивающих примесей без учета внешней силы и затухания. Зависимости от величины параметров трех одинаковых точечных и протяженных примесей, расстояния между ними критических и резонансных скоростей кинка, определяющих сценарии его динамики.

3. При отсутствии кинка система интегро-дифференциальных уравнений для коллективных переменных, полученная из одномерного уравнения синус-Гордона без учета внешней силы и затухания, становится аналогичной системе уравнений, полученной для модели трех связанных гармонических осцилляторов. Связанные малые колебания трех локализованных на примесях волн представляют собой сумму трёх гармонических колебаний: синфазного, синфазно-антифазного и антифазного типа. Авторезонансный метод воздействия с помощью внешней силы специального вида для управления структурой, локализованных на примеси волн бризерного и солитонного типа, при наличии диссипации в системе. Применение рассмотренной математической модели для описания динамики магнитных неоднородностей в семислойных ферромагнетиках.

Степень достоверности и апробация результатов.

Достоверность результатов обеспечивается корректностью математической постановки задач, а также сравнением с результатами, полученными другими авторами. Результаты численного решения уравнений сравнивались с предельными случаями, рассчитанными аналитически. Основные результаты работы докладывались на научных конференциях: «Двадцать пятая Всероссийская научная конференция студентов-физиков и молодых учёных (ВНКСФ – 25)», Республика Крым, г. Севастополь, 2019.; Международная конференция «XIX научная школа «Нелинейные волны – 2020», г. Нижний Новгород, 2020; «Фундаментальная математика и её приложения в естествознании, спутник Международной научной конференции «Уфимская осенняя математическая школа», г. Уфа, 2020, 2021, 2022, 2023; «III Международная научно-практическая конференция «Физика конденсированного состояния и её приложения» г. Стерлитамак, 2020, 2022; «Virtual Conference 65th Annual conference on magnetism and magnetic materials,

USA, 2020 (MMM2020)», 2020.; Международная конференция «Фазовые переходы, критические и нелинейные явления в конденсированных средах», посвященной 90-летию Дагестанского государственного университета, г. Махачкала, 2021, 2023; Международная научная конференция «Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения», Уфа, 2021, 2022, 2023; Международная конференция «Марчуковские научные чтения», Новосибирск, 2021.; «VIII Euro-Asian Symposium «Trends in MAGnetism», Kazan, 2022.

Личный вклад. Автор принимал активное участие в формулировке целей и задач исследования, написании численных программ, выполнении аналитических расчётов, проводил численное моделирование, обработку и анализ полученных данных. Аналитические результаты для УСГ в модели коллективных переменных получены совместно с Кудрявцевым Р.В., численные результаты для динамики кинка, совместно с Гумеровым А.М., для модели авторезонанса с Назаровым В. Н. Для уравнения φ^4 в линеаризованной модели аналитические результаты получены совместно с Дмитриевым С.В., численные результаты совместно с Фахретдиновым М.И. Разработка программных модулей для УСГ велась совместно с Муртазиным Р.Р., а для уравнения φ^4 с Фахретдиновым М.И. Во всех этих задачах вклад автора был существенным, либо определяющим, что позволяет представить соответствующие результаты к защите. Автор участвовал в подготовке результатов исследований к публикации и представлял их на научных конференциях.

Публикации. По результатам работы опубликованы 23 тезиса в сборниках материалов российских и международных конференций. 2 — свидетельства о государственной регистрации программ и 7 статей в журналах, рекомендованных ВАК для публикации результатов диссертаций на соискание учёной степени кандидата наук и приравненных к ним.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, трёх глав и заключения. Полный объём диссертации составляет 162 страницы, включая 70 рисунков, 1 таблицы и 124 источника в списке цитируемой литературы.

1. ЛИТЕРАТУРНЫЙ ОБЗОР

Открытие «солитона» занимает важное место в области современной теоретической физики. Первые наблюдения солитонов в качестве уединённых волн на поверхности воды были выполнены шотландским учёным Д. С. Расселом в 1834 году, наблюдая как масса воды, которая была приведена в движение после остановки баржи, не останавливаясь, покатилась по каналу с большой скоростью в виде уединённой волны. Позже о своих наблюдениях он сообщил в своей работе «Доклад о волнах» в 1844 г. [14]. Позже независимо друг от друга Дж. Буссинеск (1872 г.) и Дж. У. Рэлей (1876 г.) нашли аналитическое выражение для свободной поверхности распространения уединённой волны на воде. В 1895 г. Д.Д. Кортвегом и Г. де Фризом было получено нелинейное уравнение в частных производных, позволяющая описывать движение одномерных волн в узких каналах [15], которое имеет вид:

$$u_t + buu_x + u_{xxx} = 0, \quad (1.1)$$

где $u(x, t)$ – функция, описывающая форму волны, зависящая от координаты x и времени t , а индексы под функциями $u(x, t)$ обозначают производные по x и t соответственно. Полученное уравнение (1.1) носит название уравнение Кортвега–де Фриза (КдФ), физический смысл которого заключается во взаимодействии нелинейных волн со средой. Математически, данное взаимодействие описывается особыми уравнениями, называемыми «эталонными» [16], которые являются простым и элегантным способом описания нелинейного взаимодействия со средой и основываются на общих представлениях о характере дисперсии и диссипации. Так в системе, где дисперсия и диссипация отсутствуют, профиль нелинейной волны, движущийся с постоянной скоростью, в определённый момент времени его крутизна переднего фронта возмущения будет увеличиваться (иными словами, происходит «укручение» волны), что в дальнейшем приводит к её «опрокидыванию» [17]. Однако, если всё же учесть упомянутые выше явления, то эффект опрокидывания волны не происходит, поскольку дисперсия (в том числе и диссипация) является высокочастотной и её влияние сильно сказывается в том

участке волны, где её профиль изменяется быстрее всего, а именно вблизи переднего фронта. Иными словами, возникает ударная волна, при взаимодействии с которой профиль волны расплывается в пространстве и постепенно затухает. Устойчивость солитонов как раз и объясняется противодействием этих двух процессов – нелинейности и дисперсией, которые способны уравнивать друг друга.

Первое определение солитона, как нелинейной уединённой волны, которая могла сохранять свою форму и скорость при взаимодействии с подобными волнами, представляющее собой устойчивое образование было дано в 1965 г. в ходе численного эксперимента, проведённого Н. Забуски и М. Крускалом. Данный эксперимент являлся продолжением другого численного эксперимента, проведённого в 1952 г. Э. Ферми совместно с С. Улама и Д. Паста [18]. В 1967 г. К.С. Гарднер, Дж. М. Грин, М. Крускал и Р. Миура получили решение уравнения КдФ при помощи открытого ими метода обратной задачи рассеяния.

В настоящий момент солитонные решения, по мимо КдФ, были получены и в ряде других уравнений (содержащие нелинейные и дисперсионные члены), нелинейное уравнение Шрёдингера, уравнение Буссинеска, уравнение Бюргерса–Кортевега–де Фриза, уравнение Клейна–Гордона (УКГ) и т.д. [19] и представляют особый интерес в математике и теоретической физике.

Солитонные решения уравнения Клейна–Гордона (1.2), рассматриваемого в диссертационной работе, на сегодняшний день, является одним из часто исследуемых классических дифференциальных уравнений в теории нелинейных волн и широко используется в различных областях науки и техники.

$$u_{xx} - u_{tt} + F(u) = 0, \quad (1.2)$$

где $F(u)$ – некоторая функция. Для уравнения синус-Гордона $F(u) = \sin u$, для уравнения φ^4 $F(u) = u + u^3$ [1, 20].

1.1. Уравнение синус-Гордона

Уравнение синус-Гордона (УСГ) является одним из первых полученных приложений УКГ. Одним из простых примеров применения УСГ является модель связанных маятников, которая была предложена и рассмотрена Э. Скоттом [1, 21, 22]. Изучаемая модель представляет собой систему из N одинаковых маятников длиной l и массой M . Маятники соединены между собой струной, связанной пружиной с жёсткостью k . Если отклонить i -ый маятник от положения равновесия на угол $\varphi_i = \varphi_i(\tau)$, то на него будут действовать момент силы тяжести и силы упругости со стороны предыдущего $-k(\varphi_i - \varphi_{i-1})$ и следующего $-k(\varphi_i - \varphi_{i+1})$ маятника. Тогда уравнение Ньютона для данной цепочки примет вид:

$$I \frac{d^2 \varphi_i}{d\tau^2} = mgl \sin \varphi_i - kl^2(\varphi_i - \varphi_{i+1}) - kl^2(\varphi_i - \varphi_{i-1}), i = 1, \dots, N, \quad (1.3)$$

где I – момент инерции маятника ml^2 . Если мы рассматриваем возмущение, длина волны которых много больше расстояния между маятниками, то можно ввести непрерывную функцию $\varphi_i(z, t')$. Учитывая, что координата i -го маятника направленной вдоль оси $z = id$, приведём уравнение (1.3) в континуальную форму:

$$ml \frac{d^2 \varphi(z, \tau)}{d\tau^2} - kld^2 \frac{d^2 \varphi(z, \tau)}{dz^2} + mg \sin \varphi(z, \tau) = 0. \quad (1.4)$$

Введя параметры обезразмеривания $t = \tau(g/l)^{1/2}$, $x = z(mg/kld^2)^{1/2}$, $\varphi(z, \tau) \rightarrow u(x, t)$ уравнение (1.4) примет вид:

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0. \quad (1.5)$$

где $u(x, t)$ – является вещественной функцией координаты и времени, а коэффициентами ниже обозначены частные производные. Уравнение (1.5) является полностью интегрируемым и включает в себя различные солитонные решения. Существуют множество методик, которые позволяют отыскать точное решение уравнения. К основным методам отыскания точных решений можно отнести метод

обратной задачи рассеяния, метод одевания [4, 16], метод Хироты, преобразования Бэклунда и Дарбу [23, 24, 25] и т.д.

1.1.1. Солитонные решения уравнения синус-Гордона

Как упоминалось выше уравнение (1.5) имеет множество солитонных решений. Одним из основных солитонных решений УСГ является топологический солитон или кинк:

$$u(x, t) = 4 \operatorname{arctg} [\exp(\pm\gamma(x - vt - x_0))], \quad (1.6)$$

где γ множитель, который характеризует ширину кинка и равен $(1 - v^2)^{-1/2}$, v – скорость кинка. Знаки перед множителем γ характеризует топологический заряд кинка. При положительном значении решение (1.6) является кинком, при отрицательном – антикинком. Граничными условиями кинка являются $\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x, t) = 0$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x, t) = 2\pi$ (для антикинка условия противоположные), что представляет собой перегиб. Множитель γ , исходя из выражения, обратно пропорциональна квадрату скорости. С увеличением значения v параметр ширины кинка уменьшается, что в целом напоминает Лоренцевское уменьшение длины тела при релятивистских скоростях. Скорость движения кинка изменяется в пределах $0 < v < 1$. Данное решение встречается во многих работах и книгах [1, 3, 17 – 19, 24, 25]. Кроме однокинковых решений УСГ, имеют место быть и двухкинковые такие как, например, кинк–кинк (или наоборот антикинк–антикинк) (1.7), представляющее взаимодействие двух кинков (или антикинков) и кинк–антикинк (1.8):

$$u(x, t) = \pm 4 \operatorname{arctg} \left[\frac{v \operatorname{sh}(\gamma(x - x_0))}{\operatorname{ch}(v\gamma(t - t_0))} \right], \quad (1.7)$$

$$u(x, t) = 4 \operatorname{arctg} \left[\frac{\operatorname{sh}(v\gamma(v)(t - t_0))}{v \operatorname{ch}(\gamma(v)(x - x_0))} \right]. \quad (1.8)$$

Решение (1.8) представляет собой взаимодействие кинка и антикинка, которые движутся навстречу друг к другу и, после взаимодействия, удаляются двигаясь в противоположные стороны, сохраняя при этом первоначальную форму

и величину скорости. Кинк и антикинк, у которых недостаточно энергии для преодоления их взаимного притяжения, являются связными. Связное состояние кинка и антикинка образуют локализованное нелинейное колебание, которое называется покоящимся бризером:

$$u(x, t) = 4 \operatorname{arctg} \left[\frac{\sqrt{1 - \omega^2}}{\omega} \frac{\sin \omega t}{\operatorname{ch}[\sqrt{1 - \omega^2}(x - x_0)]} \right], \quad (1.9)$$

где ω – частота колебаний бризера, x_0 – координата его центра.

В последнее время наибольший интерес представляют мультисолитонные решения, которые являются связным состоянием решений типа кинка (1.6) и бризера (1.9), и существует множество аналитических методов получения таких решений. Одним из известных представителей мультисолитонов является воббл [26, 27].

1.1.2. Модифицированное уравнение синус-Гордона

Уравнение синус-Гордона (1.5) в том или ином приближении достаточно широко используется для описания большого количества задач в теоретической физике. Однако для наиболее адекватного описания большинства физических процессов в УСГ добавляются дополнительные члены, позволяющие учитывать различные возмущения или неоднородности параметров системы. Уравнение (1.5) с дополнительными слагаемыми называют модифицированным уравнением синус-Гордона (МУСГ), которое часто встречается в виде [3]:

$$u_{tt} - u_{xx} + K(x) \sin u = F(x, t, u) - \alpha(x, u)u_t, \quad (1.10)$$

где параметр $K(x)$ – пространственная неоднородность параметров системы, $F(x, t, u)$, $\alpha(x, u)$ параметры внешней силы и диссипации соответственно. Отличительной особенностью уравнения (1.10) от (1.5) является то, что в общем случае для него нет точных решений и при помощи различных аналитических методов ищутся лишь приближённые. Стоит отметить, что в различных областях физики смысл функции $F(x, t, u)$ может иметь разное значение. К примеру, для

описания, в модели, молекулы ДНК данная функция имеет смысл момента обобщённой нестационарной внешней силы, в магнетизме – магнитное внешнее поле и т.д.

Солитонная модель, в случае малых возмущений, остаётся актуальным для МУСГ. Для анализа влияния возмущений на солитоны, была разработана теория возмущений [3, 29], которая основывается на построение гамильтониана и предполагает, что под действием внешних факторов структура солитона сохраняется, при этом его параметры, такие как скорость, могут изменяться. Так при помощи данной теории, независимо, была получена простая модель, позволяющая описывать динамику цепи частиц, которые взаимодействуют с соседними в присутствии периодического потенциала, введённая Френкелем и Конторовой [28 – 30]. Стандартный гамильтониан модели выглядит следующим образом:

$$\mathcal{H} = \frac{m_a}{2} \sum_n \left(\frac{dx_n}{dt} \right)^2 + U_{sub} + U_{int}, \quad (1.11)$$

где m_a – масса частицы, x_n – координата n -ой частицы цепи. Первое слагаемое является кинетической энергии системы частиц, второе слагаемое характеризует взаимодействие системы с внешним периодическим потенциалом, а третье – гармоническое воздействие между соседними частицами. В простейшей форме последние два слагаемых выражаются следующим образом:

$$U_{sub} = \frac{\varepsilon_s}{2} \sum_n \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi x_n}{a_s} \right) \right), \quad (1.12)$$

$$U_{int} = \frac{k}{2} \sum_n (x_{n+1} - x_n - a_0)^2, \quad (1.13)$$

где ε_s и a_s амплитуда и период потенциала соответственно, k – коэффициент жёсткости, a_0 – равновесное расстояние межатомного потенциала. Удобнее всего представить гамильтониан ((1.11 – (1.13) в безразмерной форме. Введя безразмерные переменные получим:

$$H = \sum_n \left(\frac{1}{2} \left(\frac{dx_n}{dt} \right)^2 + (1 - \cos x_n) + \frac{k}{2} (x_{n+1} - x_n - a_0)^2 \right), \quad (1.14)$$

где $H = 2\mathcal{H}/\varepsilon_s$. Из гамильтониана (1.14) можно получить уравнение движения в дискретной цепи:

$$\frac{d^2 x_n}{dt^2} + \sin x_n - k(x_{n+1} + x_{n-1} - 2x_n) = 0. \quad (1.15)$$

Для случаев, когда смещения малы, то введя новые переменные $x_n = na_s + u_n$, где u_n характеризует смещения частиц, уравнение (1.15) можно представить в линейном приближении:

$$\frac{d^2 u_n}{dt^2} + u_n - k(u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n) = 0. \quad (1.16)$$

Полученное уравнение (1.16) позволяет описывать линейные моды цепи называемыми фононами. В случае, если смещение частиц не является малым, то исходное уравнение (1.15) приводится в континуальную форму приближения, поскольку уравнение способно одновременно допускать как протяжённые моды, так и локализованные. Процедура получения уравнения движения в континуальном приближении из дискретной модели цепи была предложена Розенау [31]. Предложенный метод позволяет получить континуальное уравнение с точностью порядка $O(a_s^4)$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{a_s^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial^2 x \partial^2 t} - F_{sub}(u) + a_s \frac{\partial}{\partial x} \left\{ F_{int} \left[a_s \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] - \frac{a_s}{12} \frac{\partial}{\partial x} F_{sub}(u) \right\} = 0, \quad (1.17)$$

где

$$F_{int}(u) = -\frac{dV_{int}(u)}{du}, \quad F_{sub}(u) = -\frac{dV_{sub}(u)}{du}, \quad (1.18)$$

где $V_{int}(u)$ – потенциал взаимодействия, раскладываемая в ряд Тейлора и учитывая только гармоническое воздействие, $V_{sub}(u)$ – периодическая функция, раскладываемая в ряд Фурье, где учитывается только первый его член. Применяя

уравнения (1.17) в модель Френкеля – Конторовой можно получить возмущенное уравнение синус-Гордона:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - d^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin u = \epsilon f(u), \quad (1.19)$$

где

$$d = a_s \sqrt{k}, \quad (1.20)$$

$$\epsilon f(u) = \frac{a_s^2}{12} \left[\frac{\partial^4 u}{\partial^2 x \partial^2 t} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \sin u - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cos u \right]. \quad (1.21)$$

Функция (1.21) в первом приближении позволяет учитывать эффекты дискретности цепи в модели. Полученное уравнение (1.19) является одним из примеров МУСГ, где для описания поведения солитонов применима модель точечной частицы. Данный подход применялся не только в модели Френкеля – Конторовой, но и во многих других задачах, например в исследованиях джозефсоновских контактных линий [28 – 36], в результате которых были получены простые решения, позволяющие описывать изменение скорости кинка в модели с полем внешней силы.

Модифицированное УСГ также широко применяется и в физике твердого тела, например для описания доменных границ (ДГ) в ферромагнитной структуре. Теория динамического поведения ДГ, основывается на уравнении движения намагниченности или уравнении Ландау-Лифшица [37]:

$$\dot{\vec{M}} = \gamma [\vec{M}, \vec{H}_{eff}] + \frac{\beta}{M_0} [\vec{M}, \dot{\vec{M}}], \quad (1.22)$$

где $\vec{H}_{eff} = -\delta F / \delta \vec{M}$ эффективное магнитное поле, F – плотность энергии магнетика, γ – гиромагнитное отношение, β – коэффициент затухания, M_0 – намагниченность насыщения. Рассмотрим модель двухосного бесконечного ферромагнетика в магнитном поле. Пусть \vec{M} является функцией координаты z . Тогда, перейдя к угловым координатам $\vec{M} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$, плотность энергии в магнитном поле $\vec{H} = (-H, 0, 0)$ можно записать в виде:

$$F = A \left[\left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^2 + \sin^2 \theta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] + (K - 2\pi M_0^2) \sin^2 \theta + K_p \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + M_0 H \sin \theta \sin \varphi, \quad (1.23)$$

где K, K_p – константы одноосной и ромбической магнитной анизотропии соответственно, A – константа неоднородного обменного взаимодействия. В [33] показано, что для случая $K < 0$ и $K_p > 0$, наиболее предпочтительным является структура 180-градусной доменной стенки, т.к. $\theta_0 = \pi/2, \varphi_0 = 0$. Подставив (1.24) в уравнение Ландау-Лифшица, предположив, что $|K| + 2\pi M_0^2 \gg K_p, A, M_0 H, \theta = \pi/2 + \theta_1, \theta_1 \ll \theta_0$. Приняв, что $\theta = \theta(z, t)$ и $\varphi = \varphi(z, t)$ получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1 = -\frac{\gamma}{M_0} \left(2K_p \sin \varphi \cos \varphi - M_0 H \sin \varphi - 2A \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) - \beta \dot{\varphi}, \\ \dot{\varphi} = -\frac{2\gamma}{M_0} (|K| + 2\pi M_0^2) \theta_1 + \beta \dot{\theta}_1. \end{cases} \quad (1.24)$$

Система (1.25) для случая малых затуханий ($\beta \ll 1$) сводится к МУСГ

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 2h \sin \frac{u}{2} - \alpha u_t, \quad (1.25)$$

где $u = 2\theta = \varphi, z/\delta_0 \rightarrow x, tc/\delta_0 = t\omega_f \rightarrow t, c$ – предельная скорость стационарного движения равная $2\gamma\sqrt{A(|K| + 2\pi M_0^2)}/M_0, \omega_f$ – характерная частота равная $2\gamma\sqrt{K_p(|K| + 2\pi M_0^2)}/M_0, \delta_0 = \sqrt{A/K_p}$ – ширина доменной стенки, θ – угол, определяющий положение вектора намагниченности в легкой плоскости xu от Ox (оси легкого намагничивания), h – постоянное магнитное поле ($M_0 H/K_p$), α – нормированный коэффициент затухания и равна $\beta\sqrt{(|K| + 2\pi M_0^2)/K_p}$.

Для слабых ферромагнетиков уравнение Ландау-Лифшица также можно приближенно свести к МУСГ [2]. Тогда $u(x, t)$ будет описывать угол отклонения вектора антиферромагнетизма от кристаллографических осей. Безразмерные

переменные в уравнении (1.25) равны: $x = x_{real}/\delta_0$, $v = v_{real}/c$, $t = t_{real}/(\delta_0/c)$, $h = H_d H_z / (H_K H_E)$, $\alpha = 2\alpha_0 \sqrt{H_E/H_K}$. Здесь δ_0 — ширина статической блоховской ДГ, c — предельная скорость движения ДГ, H_d , H_K , H_E — эффективные поля Дзялошинского, обмена и анизотропии, H_z — компонента внешнего магнитного поля. Для РЗО эти константы имеют следующий порядок величины: $H_E \sim 10^6$ Э, $H_d \sim 10^5$ Э, $H_K \sim 10^4$ Э, $\alpha_0 \sim 10^{-5} - 10^{-4}$ [3].

Кроме приведённого метода теории возмущения, для решения МУСГ использовался и другой, тоже широко известный способ, называемый методом коллективных координат или переменных (МКК). Во многом МКК свободен от тех ограничений, которые были допущены в теории возмущений и предполагает построение функции плотности Лагранжа для МУСГ [38 – 40]. Основная идея метода заключается в поиске решения в виде функции, которая содержит произвольные параметры, зависящие от времени. Поскольку во многих случаях солитон является достаточно устойчивым и ведёт себя подобно частице, то представляется возможным перейти от непрерывного скалярного поля $u = u(x, t)$ к конечному n -набору функций $\vec{X}(t) = \{X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)\}$, которые зависят только от времени. Такой набор $\vec{X}(t)$ принято называть «коллективными координатами» (или «коллективными переменными») [41]. Таким образом, при подстановке $\vec{X}(t)$ поле $u(x, t)$ аппроксимируется суммой решений, которые содержат характеризующие для солитонов функции. МКК относится к классу вариационных методов и что характерно, даёт удовлетворительный результат лишь при правильном выборе функции, которая используется для аппроксимации точного решения, называемая «анзацем» u_a :

$$u(x, t) \approx u_a(x, \vec{X}(t)). \quad (1.26)$$

Система уравнений, описывающая эволюцию коллективных переменных $\vec{X}(t)$, может быть получена при использовании функции Лагранжа, которая сопоставляется уравнению (1.10). Функция Лагранжа для поля $u(x, t)$ имеет вид:

$$L = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}(u(x, t)) dx, \quad (1.27)$$

где \mathcal{L} – плотность функции Лагранжа. Для уравнения (1.5), например, плотность лагранжиана находится в виде:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - (1 - \cos u). \quad (1.28)$$

В правильности (1.29) можно убедиться, подставив в (1.28) и затем полученный лагранжиан подставить в уравнение Лагранжа-Эйлера (1.30), что приводит к искомому уравнению (1.5):

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial u_t} - \frac{\partial L'}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L'}{\partial u_x} = 0. \quad (1.29)$$

Подставив (1.27) в (1.28), получаем выражение, зависящее от коллективных координат, называемое «эффективным лагранжианом» $L_э$, который является аппроксимацией исходного лагранжиана L . При подстановке $L_э$ в (1.29) получаем систему из n обыкновенных дифференциальных уравнений, которые в ряде случаев решаются значительно легче, чем исходное уравнение (1.10).

В случае больших возмущений МУСГ, в основном, исследуется численно, поскольку аналитические методы в общем случае не работают. Существует множество вариантов численного анализа, например метод конечных разностей, который заключается в замене производных по координате и времени их конечно-разностными аппроксимациями [42 – 45].

В последнее время широко исследуются поведение кинка при взаимодействии с примесью. Наличие примеси или пространственной модуляции периодического потенциала в уравнении (1.10) описывается коэффициентом $K(x)$. Чаще всего $K(x)$ представляется в виде потенциального барьера или ямы. В работах [46, 47] показано, что прохождение кинка через примесь оказывает значительное влияние на движение кинка. В случае сильной неоднородности структура солитона изменяется, возникают резонансные взаимодействия, излучения [48].

Взаимодействие примесей с другими видами солитонов, например с бризерами, носит иной характер [49, 50].

Рассмотрим применение МКК на примере исследования взаимодействия движущегося кинка МУСГ в модели с одной точечной примесью в отсутствие внешней силы и диссипации в системе. Функция $K(x)$ для точечных неоднородностей представляется в виде [7]:

$$K(x) = 1 - \varepsilon\delta(x), \quad (1.30)$$

где ε – вещественный параметр, определяющий вид точечной примеси, $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака. Выражение (1.30) является простым и во многом облегчает аналитические расчеты. Тогда уравнение (1.10) примет вид:

$$u_{tt} - u_{xx} + (1 - \varepsilon\delta(x)) \sin u = 0. \quad (1.31)$$

Уравнению (1.31) соответствует лагранжиан:

$$L = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2} u_t^2 - \frac{1}{2} u_x^2 - (1 - \varepsilon\delta(x)) (1 - \cos u) \right] dx, \quad (1.32)$$

Рассмотрим влияние величины возмущения $\varepsilon\delta(x)$ на динамику кинка, движущегося в сторону примеси с малой скоростью $v_0 \ll 1$. Для построения решения в работе используется точное решение УСГ в виде кинка (1.6). В случае $v_0 \ll 1$ выражение (1.6) примет вид:

$$u_0 = 4 \operatorname{arctg} e^{x-X(t)}, \quad (1.33)$$

где $X(t) = vt + x_0$ – координата центра кинка, которая является коллективной. Для случая малых скоростей ширина примеси $|\gamma| \approx 1$. Смысл выражения (1.33) заключается в том, что кинк представлен как квазичастица, единственной характеристикой которой является координата его центра. При этом исключаются возможные возмущения: изменение ширины кинка и излучение им волн.

В случае взаимодействия кинка с притягивающей примесью ($\varepsilon > 0$) в ней образуется локализованная волна, называемая примесной модой. Аналитическая

форма такой моды ищется путём линеаризации (1.31) для случая малых колебаний $|u| \ll 1$:

$$u_{tt} - u_{xx} + (1 - \varepsilon\delta(x))u = 0. \quad (1.34)$$

Решение уравнения (1.34) ищется в виде $u(x, t) = f(x)e^{i\Omega t}$, являющейся осциллирующей функцией. Подставляя выражение в (1.34), получим:

$$-\Omega^2 f(x) - f_{xx}(x) + (1 - \varepsilon\delta(x))f(x) = 0. \quad (1.35)$$

Уравнение (1.35) является аналогом уравнение Шредингера, решение которого имеет вид:

$$f(x) = a_0 e^{-\varepsilon|x|/2}, \quad (1.36)$$

где a_0 – константа, а ω определяется в виде:

$$\Omega = 1 - \frac{\varepsilon^2}{4}. \quad (1.37)$$

Таким образом, подставив полученные решения (1.36) и (1.37) в выражение $u(x, t)$ получим:

$$u_1 = a(t)e^{-\varepsilon|x|/2}, \quad (1.38)$$

где θ_0 – начальная фаза. В (1.38) множитель $e^{-\varepsilon|x|/2}$ определяется величиной вещественного параметра и расстояния от неё. Параметр $a(t)$ равный:

$$a(t) = a_0 \cos\left(\sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}}t + \theta_0\right), \quad (1.39)$$

зависит от взаимодействия с кинком, и для случая малых колебаний также является малым. Выражение (1.38) является второй коллективной переменной. В таком случае анзац МУСГ для модели с точечной примесью является суммой кинка (1.33) и примесной моды (1.38):

$$u_a = 4 \operatorname{arctg} e^{x-X(t)} + a(t)e^{-\varepsilon|x|/2}. \quad (1.40)$$

В силу малости примесной моды, а следовательно, и амплитуды $a(t)$, нелинейный член лагранжиана (1.32), можно разложить в ряд Тейлора до второго порядка малости

$$\cos u_a = \cos(u_0 + u_1) \approx \cos u_0 - u_1 \sin u_0 - \frac{u_1^2}{2} \cos u_0. \quad (1.41)$$

Параметры, содержащие \cos , можно преобразовать, используя основные тригонометрические соотношения. Подставляя (1.40) в (1.32), получим эффективный лагранжиан вида:

$$L_3 = 4\dot{X}^2(t) + \frac{\dot{a}^2(t)}{\varepsilon} + \frac{2\varepsilon}{\text{ch}^2(X(t))} + a(t) \frac{2\varepsilon \text{sh}(X(t))}{\text{ch}^2(X(t))} + a^2(t) \left(\frac{\varepsilon}{4} - \frac{1}{\varepsilon} \right). \quad (1.42)$$

Подставим (1.42) в уравнение Лагранжа-Эйлера по коллективным переменным и получим систему уравнения движения по этим коллективным переменным:

$$\begin{cases} 4\ddot{X}(t) + 2\varepsilon \frac{\text{sh}(X(t))}{\text{ch}^3(X(t))} + a(t)\varepsilon \frac{\text{sh}^2(X(t)) - 1}{\text{ch}^3(X(t))} = 0, \\ \ddot{a}(t) + a(t) \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4} \right) - \varepsilon^2 \frac{\text{sh}(X(t))}{\text{ch}^2(X(t))} = 0. \end{cases} \quad (1.43)$$

Полученная система обыкновенных дифференциальных уравнений решается значительно проще исходного уравнения (1.31), т.е. задача с n -числом степеней свободы сводится к задаче с двумя степенями свободы.

Вкратце отметим основные частные случаи. В отсутствии примеси ($\varepsilon = 0$) уравнение движения кинка сводится к $\ddot{X}(t) = 0$. Полученное выражение говорит о том, что кинк движется с постоянной скоростью. В случае отталкивающей примеси ($\varepsilon < 0$) примесная мода $a(t) = 0$ отсутствует, поскольку возникающие на примесях колебания мгновенно затухают. Тогда уравнение для кинка сводится к виду:

$$\ddot{X}(t) + \frac{\varepsilon \text{sh}(X(t))}{2 \text{ch}^3(X(t))} = 0. \quad (1.44)$$

Физический смысл выражения (1.44), заключается в том, что на кинк действует потенциальная сила (второе слагаемое), при приближении к примеси.

Чем ближе кинк находится к примеси, тем сильнее на него действует потенциальная сила примеси. Из выражения (1.44) можно выразить скорость кинка:

$$\dot{X}^2(t) = \frac{\varepsilon}{2 \operatorname{ch}^2(X(t))} + v_0^2, \quad (1.45)$$

что показывает увеличение его скорости по мере приближения кинка к примеси от начальной скорости v_0 к $\sqrt{\varepsilon/2 + v_0^2}$ при $X(t) = 0$ (координата центра примеси). После взаимодействия с примесью кинк может продолжить движение в том же направлении со скоростью $v(t) \rightarrow v_0$, упруго отразиться или остаться на примеси. Также стоит отметить, что изменение параметра скорости кинка $\dot{X}(t)$ прямо пропорционально зависит от величины ε . В случае притягивающих примесей ($\varepsilon > 0$) уравнение (1.45) не годится для описания динамики поскольку не позволяет описать те эффекты, которые возникают при взаимодействии с притягивающей примесью, получаемые при численном моделировании [5, 52]. Поэтому необходимо вводить вторую коллективную переменную u_2 . Таким образом, при взаимодействии кинка с областью примеси часть его энергии тратится на возбуждение примесной моды. Если начальная скорость кинка v_0 больше некоторой критической скорости v_c , то у кинка достаточно энергии для прохождения примеси. При этом кинк движется со скоростью значительно меньше его начальной. В противном случае кинк, как и в случае с отталкивающей примесью, может отразиться, однако скорость будет также меньше начальной поскольку взаимодействие не упругое или остаться на примеси.

В отсутствие кинка $X(t) \rightarrow \infty$ на примеси остается примесная мода:

$$\ddot{a}(t) + a(t) \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4}\right) = 0. \quad (1.46)$$

Из уравнения (1.46) видно, что колебания на примеси возбуждаются гармонически с частотой:

$$\Omega^2 = 1 - \frac{\varepsilon^2}{4}. \quad (1.47)$$

Ширина примесной моды определяется $e^{-\varepsilon|x|/2}$, отсюда можно сделать вывод, что она обратно пропорциональна ε .

Д. Мак-Лафлиным и А Скоттом [33] для исследования влияния диссипации и внешней силы на динамику солитонов в УСГ был предложен энергетический метод, которой так же, как и МКК свободен от ограничений теории возмущений. Используемый метод позволил получить не только простые выражения, которые описывают изменение скорости топологического солитона, но и найти условия равновесия, когда внешняя сила компенсируется диссипацией.

Аналитические и численные методы позволяют изучать солитоны в присутствии возмущений. Приведённые выше аналитические методы в основном применимы в модели точечной частицы, где их движение можно описать ОДУ. Примером таких простых моделей могут служить наличие диссипации, замедляющий или останавливающий кинк или постоянной внешней силы, которая увеличивает скорость кинка до некоторого максимального значения. В работах [32, 33] были проведены оценки изменения скорости кинка под действием внешней силы. Также рассматривались гармонические, постоянные и частотно-модулированные взаимодействия на кинк [53]. Во многих работах, в частности [46, 54], были проведены исследования влияния неоднородной внешней силы, зависящей от времени, на солитон. В [54] было показано, что солитоны под действием различных возмущений способны изменять свою форму и для них характерно возбуждение внутренних мод – трансляционной и пульсационной.

1.2. Уравнение φ^4

Ещё одним из широко известных приложений УКГ является уравнение φ^4 . Впервые уравнение φ^4 было предложено Клейном и Гордоном [55, 56] для описания релятивистского движения электрона в 1926 г. Однако, предложенное ими уравнение не учитывало спин электрона, который описывается уравнением Дирака. Однако для случая бесспиновых скалярных (или псевдоскалярных) частиц данная теория может быть применима и в основном использовалась для описания пи-мезонов и бозона Хиггса. Также уравнение φ^4 нашло своё применение в

низкоэнергетическом описании многих физических процессов, включая доменные стенки, молекулярную динамику и химическое равновесие. Аналогично уравнению УСГ, φ^4 имеет точные солитонные решения типа кинк.

1.2.1. Солитонные решения уравнения φ^4

Для получения уравнения φ^4 рассматривается скалярное поле $u = u(x, t)$ в одномерном случае описываемое плотностью Лагранжа в виде:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{4} (1 - u^2)^2. \quad (1.48)$$

Подставляя лагранжиан в уравнение Лагранжа-Эйлера, получим:

$$u_{xx} - u_{tt} - u + u^3 = 0. \quad (1.49)$$

Уравнение (1.49) является уравнением движения данного скалярного поля и называется уравнением φ^4 . Тривиальными решениями уравнения (1.50) являются $u = 0$, что соответствует нестабильному локальному максимуму потенциала и $u = u_{1,2} = \pm 1$, которые являются вакуумными решениями. Для теории φ^4 , определяемое уравнением (1.50) солитонным решением является кинк (или антикинк):

$$u = \pm \text{th} \left(\frac{x - x_0}{\sqrt{2}} \right). \quad (1.50)$$

Решение (1.50) является статическим кинком. Каждый из них имеет центр в точке $x = x_0$ и характеристическую ширину $\sqrt{2}$. Благодаря Лоренц-инвариантности статический кинк (или антикинк) преобразуется в динамическое решение

$$u(x, t) = \pm \text{th} \left(\frac{x - v_0 t}{\sqrt{2(1 - v_0^2)}} \right) \quad (1.51)$$

где $0 < v_0 < 1$ – скорость движущегося кинка или антикинка. Кинк уравнения (1.49) отличается от кинка (1.5) наличием внутренней моды колебаний. В работах [12, 57] также были получены решение кинк-антикинк:

$$u(x, t) = 1 + \operatorname{th} \left(\frac{x + x_0 - v_0 t}{\sqrt{2(1 - v_0^2)}} \right) - \operatorname{th} \left(\frac{x - x_0 + v_0 t}{\sqrt{2(1 - v_0^2)}} \right). \quad (1.52)$$

В отличие от солитонов в УСГ, кинк и антикинк уравнения φ^4 не могут проходить друг через друга. Вместо этого они взаимодействуют и подвергаются динамическим процессам, включая рассеяние, образование связанных состояний и резонансы [13]. Иными словами, в модели φ^4 нет локализованных в пространстве решений типа солитонов или бризеров.

1.2.2. Модифицированное уравнение φ^4

Уравнение (1.49) с дополнительными слагаемыми называют модифицированным уравнением φ^4 :

$$u_{tt} - u_{xx} - K(x)(u - u^3) = 0. \quad (1.53)$$

Много работ, где модифицированное уравнение φ^4 изучают для моделей с точечными примесями. Например, в работе [13] при исследовании кинк-примесного взаимодействия для модели точечной примеси в Гауссовской форме были получены осциллоны. Осциоллон или «осциллирующий солитон» — это волна, поведение которой похоже на квазичастицу, однако при этом находится в состоянии стабильных колебаний. В другой работе [57] рассматривались резонансные взаимодействия кинка с точечной примесью. Уравнение (1.53) в модели с точечной неоднородностью имеет вид [7, 58 – 60]:

$$u_{tt} - u_{xx} + (1 - \varepsilon\delta(x))(u^3 - u) = 0. \quad (1.54)$$

Лагранжиан тогда имеет вид:

$$L = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{4} [1 - \varepsilon\delta(x)] (u^2 - 1)^2 \right] dx. \quad (1.55)$$

В области примеси, так же, как и в случае с УСГ, можно получить значение примесной моды, линеаризуя (1.55) вблизи вакуумных состояний:

$$u_1 = a_0 \cos(\Omega t + \theta_0) e^{-\varepsilon|x|}, \quad (1.56)$$

где Ω и ε связаны дисперсионным соотношением:

$$\Omega^2 = 2 - \varepsilon^2, \quad (1.57)$$

Стоит отметить, что примесная мода возникает в случае притягивающих примесей ($\varepsilon > 0$). Из выражения (1.56) видно, что примесная мода периодична во времени и локализована в пространстве. В ходе численного моделирования (1.54), были получены различные сценарии взаимодействия кинка с примесью: отражение, прохождение и захват на точечной примеси (пиннинг). Было показано, что при взаимодействии кинка с примесью возникает «излучение» в виде линейных волн.

Для случая притягивающих примесей учитывать внутреннюю моду кинка недостаточно. Как было показано в параграфе 1.1.2 в случае притягивающей примеси нужно учитывать и примесную моду. Поэтому представляется возможным рассмотреть общий случай. В работе [57] для нахождения решения (1.54) применялся анзац вида:

$$u \approx u_a = \text{th}\left(\frac{x - X(t)}{\sqrt{2}}\right) + A(t)\eta(x) + a(t)e^{-\varepsilon|x|}, \quad (1.58)$$

где $a(t)$ – амплитуда примесной моды, $A(t)$ – амплитуда внутренней моды кинка, $\eta(x)$ – внутренняя мода кинка, определяемая уравнением:

$$\eta(x) = \left(\frac{9}{8}\right)^{\frac{1}{4}} \text{th}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \text{ch}^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right). \quad (1.59)$$

Подставляя (1.58) в лагранжиан уравнения φ^4 (1.55) получим эффективный лагранжиан. Упрощенная форма записи эффективного лагранжиана имеет вид:

$$L_{eff} = \frac{M_{kink}}{2} \dot{X}^2 - U(X) + \frac{1}{2} \dot{A}^2 - \frac{\omega_1^2}{2} A^2 - AF(X) + \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{1}{2} \dot{a}^2 - \frac{\Omega^2}{2} a^2 \right) - aG(X) - aAD(X), \quad (1.60)$$

где ω_1 – частота внутренней моды равная $\sqrt{1.5}$, Ω – частота примесной моды, M_{kink} – масса кинка равная $2\sqrt{2}/3$. Функции в (1.60) имеют вид:

$$U(X) = -\frac{\varepsilon}{4 \operatorname{ch}^4(X/\sqrt{2})}, F(X) = (9/8)^{1/4} \frac{\varepsilon \operatorname{th}^2(X/\sqrt{2})}{\operatorname{ch}^3(X/\sqrt{2})}, \quad (1.61)$$

$$G(X) = -\frac{\varepsilon \operatorname{th}(X/\sqrt{2})}{\operatorname{ch}^2(X/\sqrt{2})}, D(X) = (9/8)^{1/4} \frac{2\varepsilon \operatorname{th}(X/\sqrt{2})}{\operatorname{ch}(X/\sqrt{2})}. \quad (1.62)$$

Подставляя (1.60) в уравнение Лагранжа-Эйлера получим систему уравнений движения, которая описывает частицу, связанную с двумя осцилляторами, соответствующих внутренней и примесной моде кинка:

$$\begin{cases} M_{kink} \ddot{X} + U'(X) + AF'(X) + aG'(X) + aAD'(X) = 0, \\ \ddot{A} + \omega_1^2 A + F(X) + aD(X) = 0, \\ (1/\varepsilon)[\ddot{a} + \Omega^2 a] + G(X) + AD(X) = 0. \end{cases} \quad (1.63)$$

Система (1.63) используется для аналитических оценок амплитуды примесной моды и внутренней моды кинка возбуждаемых за счёт рассеяния кинка. Подобная система с осцилляторами получалась и для уравнения синус-Гордона.

1.3. Численные методы решения уравнения Клейна-Гордона

Как известно точные решения уравнения Клейна-Гордона могут быть получены лишь в частных случаях и не охватывают все возможные состояния, в особенности для модифицированных уравнений типа (1.10) или (1.53). Есть множество аналитических способов решения подобных уравнений (например, метод коллективных координат, теория возмущений см. параграф 1.1.2), однако такие методы способны работать с хорошей точностью, лишь с определёнными ограничениями параметров системы. Таким образом, представляется возможным решать такие уравнения, используя численные методы. Использование таких методов, позволяет решить и проанализировать пределы применимости аналитического решения для описания нелинейного дифференциального уравнения. На сегодняшний день существует большое количество методов

численного решения подобного вида уравнений [1, 51, 61-63]. Одним из самых популярных и простых методов решения нелинейного типа уравнений являются метод конечных разностей [30, 43, 45] и метод линий [64, 65].

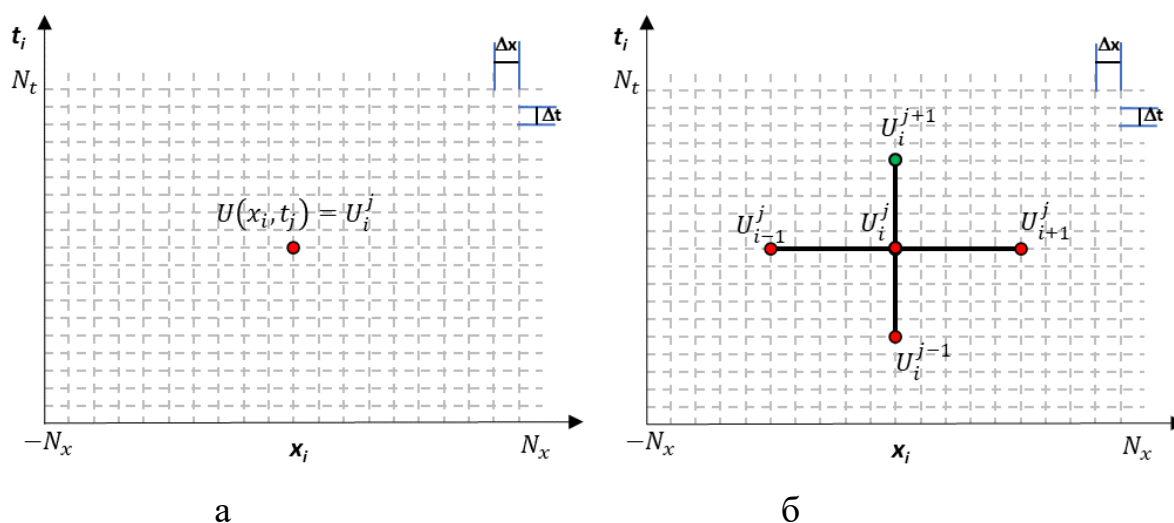


Рисунок 1.1. Схематическое изображение конечно-разностной схемы (а) и пятиточечный шаблон аппроксимации типа «крест» или трёхслойная явная схема (б).

В работе для численного решения МУСГ (1.10) применяется метод конечных разностей. Суть данного метода заключается в замене производных на конечно-разностные аппроксимации, т.е. проводится аппроксимация пространства решений на пространство сеточных функций в дискретной области $D = \{-L \leq x \leq L, 0 \leq t \leq T\}$, где L – границы координатной оси x , T – параметр правой границы временной оси области D . Вводится разностная сетка, схематическое изображение которой представлена на рисунке 1.1а. В узлах полученной сетки задаётся искомая функция U . Параметры изменения координатных осей x и t задаются параметрами:

$$\begin{aligned} x_i &= i\Delta x, & i &= [-N_x, N_x], \\ t_j &= \Delta t j, & j &= [0, N_t], \end{aligned} \quad (1.64)$$

где Δx – шаг по оси x равный $2L/(2N_x + 1)$, N_x, N_t – число точек сетки, τ – шаг по оси t равный T/N_t . Функция, параметры которой определены на узлах сетки, называется сеточной. Часто для решения уравнений нелинейного типа, в частности уравнение синус-Гордона, используют явную или неявную схему интегрирования,

которые часто используются во многих работах и являются одними из известных схем интегрирования [42, 66–69]. Такие схемы имеют свои достоинства и недостатки. В частности, сравнение этих двух схем интегрирования были отражены в работе [70], где было показано, что неявная схема является более предпочтительной, поскольку являются наиболее устойчивыми нежели явные. Однако существует необходимость решения конечно-разностных уравнений на каждом шаге, что увеличивает время расчета. Также неявная схема представляет интерес увеличения скорости расчётов, но необходимо корректно проводить линеаризацию исходной нелинейной системы, что также накладывает определённые ограничения на неё. Явная схема лишена такого недостатка и является наиболее простой в реализации, но также имеют жёсткие требования по её сходимости. Более того явная схема позволяет строить решения, затрачивая минимальное количество вычислительных ресурсов, в отличие от неявной. Поэтому, на основании приведённых выше отличий, в данной работе для решения УСГ, была выбрана явная схема интегрирования.

Для построения явной схемы решения уравнения необходимо использовать шаблон разностного уравнения, который может быть использован для конечно-разностной аппроксимации уравнения (1.10). Наиболее часто, для численных решений нелинейных уравнений, используется простой шаблон аппроксимации типа «крест», изображённый на рисунке 1.1б, определяющий взаимосвязь пяти узлов сетки. Используя данный шаблон, конечно-разностные аппроксимации примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &\approx \frac{U_{i+1}^j - U_{i-1}^j}{2\Delta x}, & \frac{\partial U}{\partial t} &\approx \frac{U_i^{j+1} - U_i^{j-1}}{2\Delta t}, \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &\approx \frac{U_{i+1}^j - 2U_i^j + U_{i-1}^j}{\Delta x^2}, & \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} &\approx \frac{U_i^{j+1} - 2U_i^j + U_i^{j-1}}{\Delta t^2}. \end{aligned} \quad (1.65)$$

Численное решение модифицированного уравнения синус-Гордона (1.10) с переменной внешней силой и затуханием с использованием (1.65):

$$\frac{U_{i+1}^j - 2U_i^j + U_{i-1}^j}{\Delta x^2} + \frac{-U_i^{j+1} + 2U_i^j - U_i^{j-1}}{\Delta t^2} -$$

$$-K(x) \sin U_i^n - h(t) \sin \frac{U_i^n}{2} - \alpha \frac{U_i^{j+1} - U_i^{j-1}}{2\Delta t} = 0. \quad (1.66)$$

Далее, предполагая, что все узлы на $(j-1)$ -м и j -м временных слоях известны, находится неизвестный узел U_i^{j+1} . Подробнее о решении МУСГ (1.10) конечно-разностным методом рассмотрен в параграфе 3.4.

Метод линий (или метод прямых) является одним из основных дифференциально-разностных численных методов решения уравнений математической физики. Его суть заключается в сведении уравнений частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений путем замены пространственных производных на алгебраические аппроксимации. Проведя такую замену, пространственные производные не являются независимыми переменными, т.е. остается одна начальная переменная. Другими словами, уравнение в частных производных рассматриваются на «линиях» (Рисунок 1.2), которые параллельны одной из осей координат.

Для наглядности рассмотрим применение метода линий на примере решения волнового уравнения первого порядка:

$$u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad (1.67)$$

с начальными и граничными условиями:

$$u(x, t = 0) = u_0, \quad (1.68)$$

$$\frac{\partial u(x = x_i, t)}{\partial x} = 0$$

На отрезке $[-L, L]$ область D через точки $x_i = x_0 + \Delta x$ разделена N прямыми $x = x_i = \text{const}$ параллельные оси t (отсюда и название метод линий). Поскольку дискретизация происходит по оси x , заменим вторую производную на конечно-разностную аппроксимацию (1.65), полученную по шаблону «крест».

Проведя такую замену для всех линий x_i , а также пренебрегая малыми порядками $O(\Delta x^2)$, получим систему из N обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \frac{u_{i+1} - 2u_i - u_{i-1}}{\Delta x^2} = 0, \quad (1.69)$$

где через $u_i(t)$ обозначено приближённое значение решения $u(x, t)$ на прямой $x = x_i$.

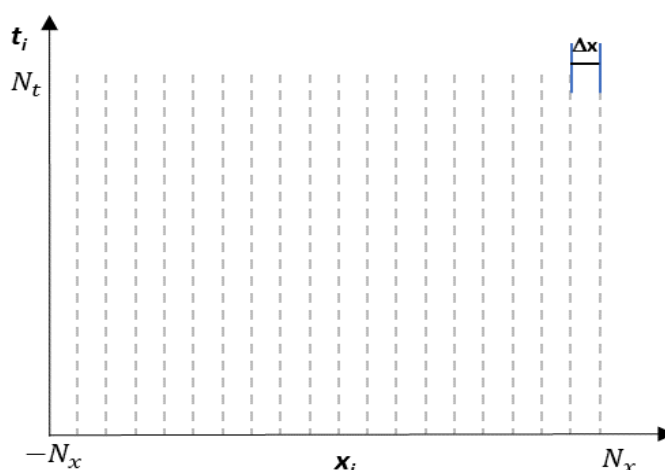


Рисунок 1.2. Схематическое изображение метода линий.

Всего с учётом граничных значений число неизвестных равно числу линий $x_i = const$ и числу уравнений в системе. Систему обыкновенных дифференциальных уравнений (1.69) называют системой уравнений метода прямых (или метода линий) [65, 71, 72].

1.4. Выводы по главе 1

Проведён обзор работ по теме диссертации посвящённых значительному количеству аналитических и численных методов. Кратко рассмотрена история открытия солитонов. Рассмотрены наиболее важные, с точки зрения темы диссертации, методы решения (аналитический метод коллективных координат, численные методы с явной и неявной схемой). Изложены некоторые основные приложения модифицированного УКГ в теоретической физике. Показано, как уравнение Ландау-Лившица-Гильберта, описывающее динамику магнитных неоднородностей в частном случае, сводится к МУСГ.

2. ВЛИЯНИЕ ПРОТЯЖЁННОЙ ПРИМЕСИ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ВИДА НА ДИНАМИКУ КИНКОВ И БРИЗЕРОВ УРАВНЕНИЯ φ^4

Одним из наиболее исследуемых нелинейных дифференциальных уравнений относящихся к классу уравнений Клейна-Гордона (УКГ) является уравнение φ^4 [4, 7]. Модель φ^4 применялась в теоретической физике, в космологии [7], квантовой теории поля [73-75], биофизике [76], в физике конденсированного состояния [77-79]. Новый импульс изучению этого уравнение в последние годы придало использование его для описания физических процессов в графене [80-81]. В уравнении φ^4 есть точное решение в виде кинка, но, в отличии от интегрируемой модели синус-Гордона [82] нет локализованных в пространстве решений в виде солитонов и бризеров. Кинк φ^4 отличается от кинка уравнения синуса-Гордона наличием внутренней моды колебаний [5]. Эта колебательная степень свободы может накапливать энергию и периодически отдавать ее, что приводит к возникновению резонансов во взаимодействиях кинк-антикинк [9, 59, 83-89] и кинк-примесь [75, 76], а также стимулировать образование пары кинк-антикинк [5, 10, 90, 91]. Кинк уравнения φ^4 с возбужденными внутренними модами колебаний получили название воблинг кинк [5, 64].

Для практических приложений часто уравнение φ^4 модифицируют, считая коэффициенты функциями от координат и времени [4, 5, 59, 84, 85, 94]. Для модели φ^4 с примесями, в отличии от случая УСГ с примесями, пока подробно рассмотрен только случай точечных примесей [4, 9, 61, 62]. Так же рассмотрена динамика кинков для модели с одиночными протяженными примесями, имеющих пространственные профили Гаусса или Лоренца. Однако не было подробно исследована структура кинка и влияние параметров примеси на резонансную скорость отражения от притягивающей примеси. Показано качественное согласие полученных результатов со случаем точечных примесей и существенное количественное влияние профиля примеси на форму локализованной примесной моды и рассеяние кинков на примесях. В данной главе рассматриваем влияние протяженной примеси прямоугольного вида на динамику кинков с учетом

возбуждения с помощью кинк-примесного взаимодействия локализованных волн бризерного типа.

2.1. Основное уравнение и метод решения

Рассмотрим некоторое скалярное поле $u(x, t)$, для которого уравнение движения в одномерном случае имеет вид:

$$u_{tt} - u_{xx} + K(x)(u^2 - 1)u = 0, \quad (2.1)$$

где $K(x)$ – некоторая функция от координаты x , учитывающая наличие примеси в системе. При $K(x) = 1$ уравнение (2.1) является уравнением φ^4 и имеет решение в виде кинка (1.51). Для произвольного вида функции $K(x)$ уравнение (2.1) можно решить только численно. Рассмотрим для определенности случай, хорошо исследованный для УСГ, $K(x)$ в виде одиночной протяженной примеси прямоугольного вида:

$$K(x) = \begin{cases} 1, & x < 0, x > W \\ 1 - \Delta K, & 0 \leq x \leq W, \end{cases} \quad (2.2)$$

где ΔK и W – некоторые константы.

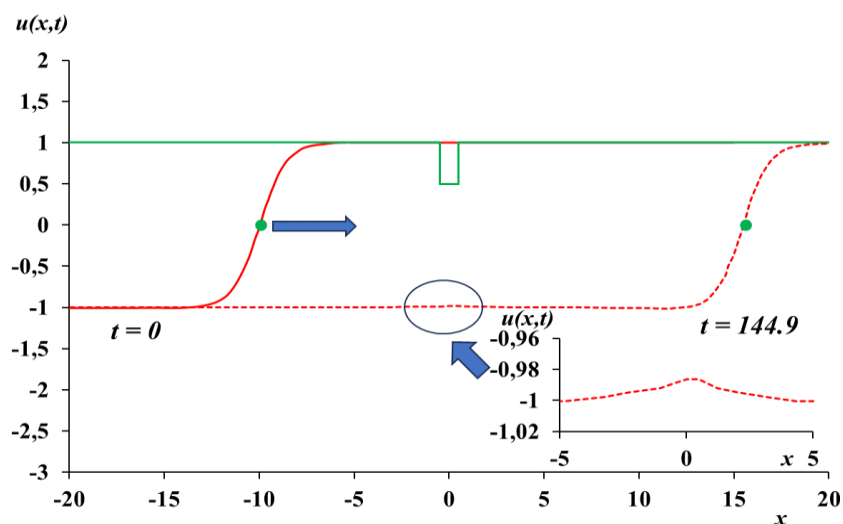


Рисунок 2.1. Иллюстрация численного эксперимента

Как показано для случая точечных примесей [4, 7], если $\Delta K > 0$, то примесь является эффективной потенциальной ямой для кинка, при $\Delta K < 0$ – потенциальным барьером. С физической точки зрения выбор формы примеси вида

(2.2) оправдан для описания случаев протяженной неоднородности, имеющей резкие границы изменения параметров системы. Такой выбор формы примеси позволяет ответить на ряд вопросов. Во-первых, как форма примеси влияет на результаты динамики кинка. Во-вторых, провести сравнение результатов, полученных для уравнений φ^4 и синус Гордона. Уравнение (2.1) решалось численно методом линий [4, 64] на интервале $x \in [-60, 60]$, $t \in [0, 500]$ или $t \in [0, 1000]$. Шаг по координате $\Delta x = 0.1$. Шаг по времени автоматически выбирался программой расчета, чтобы обеспечить абсолютную точность интегрирования получившейся системы дифференциальных уравнений 10^{-8} . В качестве начального решения при $t = 0$ брался кинк вида (1.50), имеющий координату $x_0 = -10$ (Рисунок 2.1). Он запускался с разными начальными скоростями v_0 в направлении примеси и наблюдалась его динамика. Использовались граничные условия Неймана, которые имеют вид $u(x = -60, t)_x = -1$, $u(x = 60, t)_x = 1$. На границах используемой численной схемы заложено сильное трение, позволяющее по прошествии некоторого времени счета избавиться от излучения волн, возникающих при взаимодействии кинка с примесью и границами расчетной схемы.

2.2. Динамика кинка. Случай потенциального барьера

Рассмотрим вначале случай $\Delta K < 0$. Численно получены два возможных сценария движения кинка.

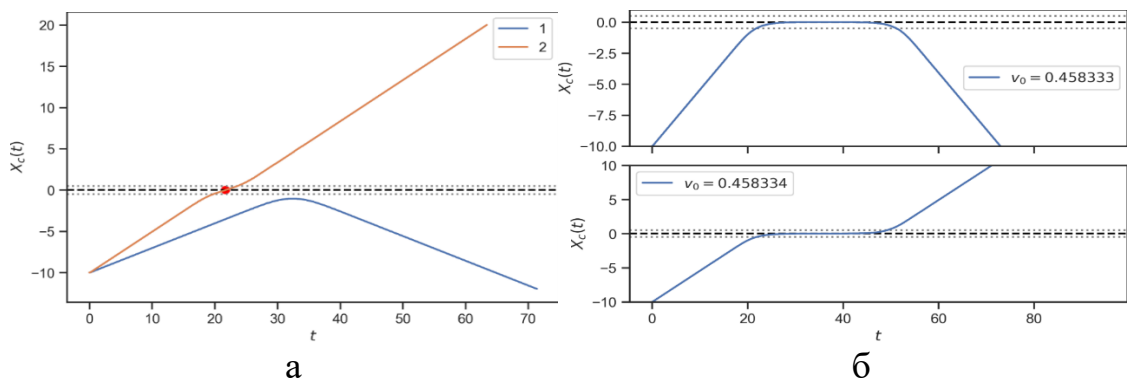


Рисунок 2.2. Возможные сценарии движения кинка при наличии потенциального барьера. Пунктирной линией показан центр примеси, точками ее границы (а) и динамика кинка при v_0 вблизи v_c , $\Delta K = -0.5$, $W = 1$ (б)

Если начальная скорость кинка v_0 не превышает некоторое критическое значение v_c , то кинк отражается от примеси и движется в обратную сторону (кривая 1, Рисунок 2.2а). Если начальная скорость кинка $v_0 \geq v_c$, то кинк проходит примесь (кривая 2, Рисунок 2.2а). Найденная критическая скорость для случая $\Delta K = -0.5$, $W = 1$ равна $v_c \approx 0.46$. В обоих случаях после прохождения или отражения от примеси кинк продолжает движение с некоторой скоростью v_f .

При начальных скоростях кинка v_0 близких к критическим v_c он может значительное время двигаться в области примеси, прежде чем её покинуть (кривая 1, Рисунок 2.2б) или отразится от нее (кривая 2, Рисунок 2.2б). Критическая скорость кинка v_c зависит от величины ΔK и W (см. Рисунок 2.3). Видно, что с уменьшением высоты барьера ΔK , критическая скорость v_c необходимая для его прохождения плавно уменьшается. С увеличением ширины барьера W для его прохождения необходима большая скорость v_c .

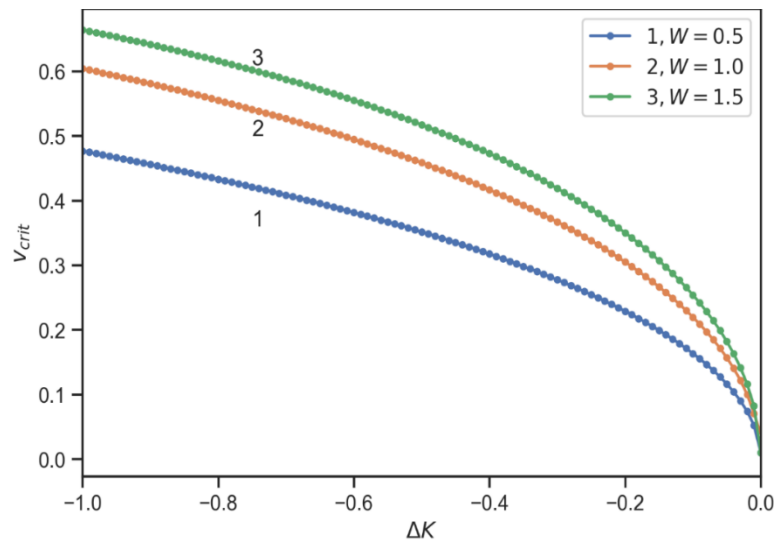


Рисунок 2.3. Зависимость критической скорости прохождения кинком примеси v_c от ширины барьера ΔK

В работах по взаимодействию кинка с протяженными примесями прямоугольного вида для УСГ показано [95], что критическая скорость прохождения примеси является линейной функцией корня из площади примеси (в нашем случае это $\sqrt{W|\Delta K|}$). Полученная зависимость критической скорости от $\sqrt{W|\Delta K|}$ приведена на рисунке 2.4а. Значение R -квадрат для линии регрессии

близко к единице и поэтому критическая скорость прохождения барьера v_c может приблизительно описываться формулой:

$$v_c \approx \sqrt{c(W|\Delta K|)}, \quad (2.3)$$

где c – некоторая константа ($c \approx 0.55$ для случая на рисунке 2.4а).

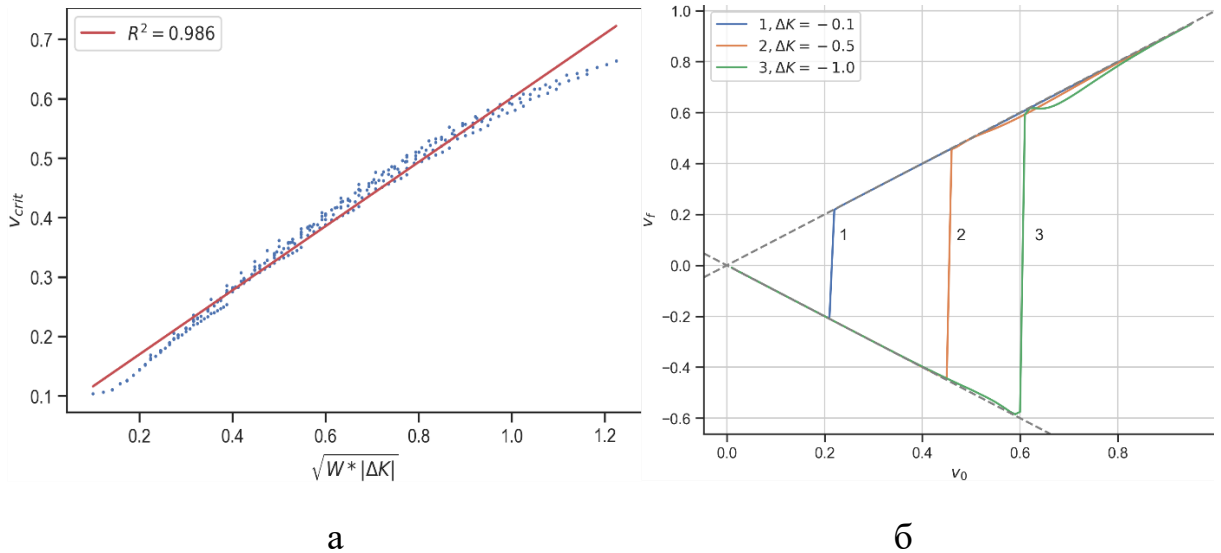


Рисунок 2.4. Зависимость критической скорости v_c прохождения кинком примеси от $\sqrt{W|\Delta K|}$ (а) и зависимость конечной скорости кинка после взаимодействия с барьером при разных значениях высоты барьера ΔK , $W = 1$ (б)

Для нахождения конечной скорости кинка v_f после прохождения примеси можно использовать наклон траектории кинка, аппроксимированный линией $y = v_f x + b$. Графики $v_f(v_0)$ при разных ΔK и $W = 1$ показаны на рисунке 2.4б. Пунктирной линией показаны две линии $y = x$ и $y = -x$. Видно, что отражение от барьера можно считать упругим, т.к. скорость кинка сохраняет свою величину меняя направление на противоположное. $v_f \approx v_0$. Переход от отражения к прохождению довольно резкий как видно из рисунка 2.4б. После прохождения барьера кинк движется практически с той же скоростью, как и начальная, т.е. можно считать, что $v_f \approx v_0$.

То, что взаимодействие кинка с примесью, в данном случае, практически упругое, также видно если построить график функции $u(x, t)$ в центре примеси, то есть $u(x = 0, t)$. Колебания в центре примеси после отражения (см. Рисунок 2.5а, кривая 1) и прохождения (см. Рисунок 2.5а, кривая 2)

отсутствуют и появляются лишь при больших начальных скоростях кинка и быстро затухают (см. Рисунок 2.5а, кривая 3, $v_0 = 0.7$, $\Delta K = -0.5$, $W = 1$).

Это, как будет показано ниже, кардинально отличает случай примеси в виде потенциального барьера от случая примеси в виде потенциальной ямы. Заметное отличие величин начальных и конечных скоростей возникает только при больших начальных скоростях кинка и больших величинах параметра ΔK (линии $\Delta K = -1$ на рисунке 2.4б).

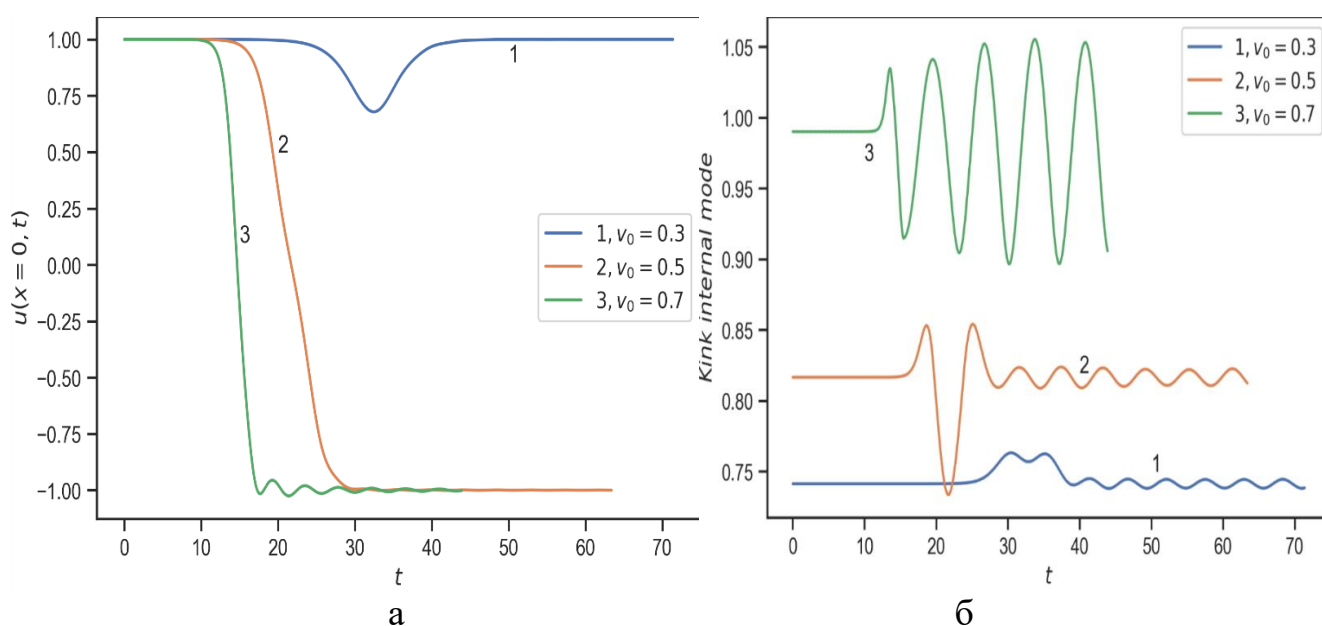


Рисунок 2.5. Временная эволюция центра примеси при разных значениях начальной скорости кинка v_0 (а) и колебаний внутренних мод колебаний кинка при разных значениях начальной скорости кинка v_0 (б)

Это можно объяснить тем, что в этом случае после столкновения с высоким барьером возбуждаются за счет кинетической энергии кинка внутренние моды колебаний (см. Рисунок 2.5б), он начинает так же сильно излучать объёмные волны, что заметно влияет на величину его скорости. Динамика кинка для случая больших скоростей приведена на рисунке 2.6.

На рисунке видно излучение волн после столкновения кинка с барьером. В области примеси колебаний не возникает. Полученные зависимости конечной скорости кинка от начальной при рассмотрении других случаев, например, $W = 0.5$ и $W = 1.5$ качественно имеют тот же вид, отличается только значение критической скорости для перехода от отражения к прохождению при $v_0 \geq v_c$.

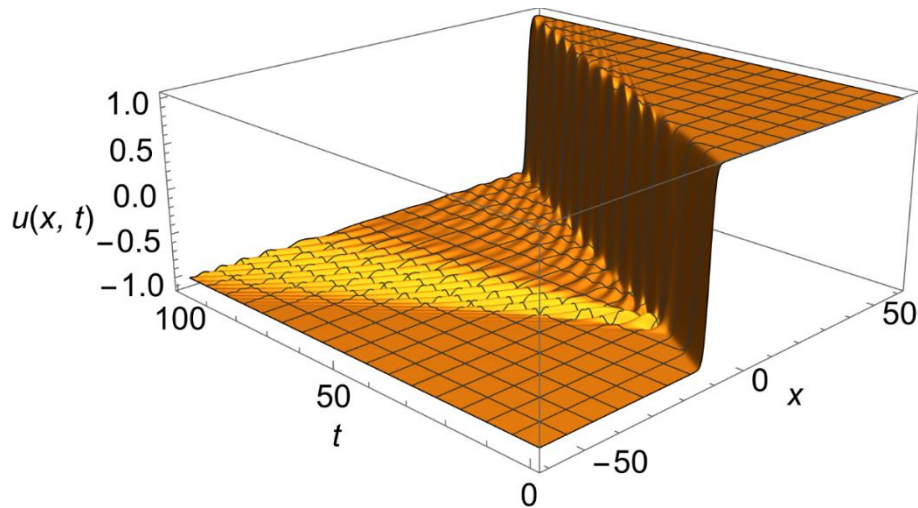


Рисунок 2.6. Динамика кинка при прохождении барьера для случая больших скоростей $v_0 = 0.7$, $\Delta K = -1$, $W = 1$

Также, чем больше параметр W , тем менее упругим является взаимодействие при прохождении кинка барьером на больших начальных скоростях v_0 .

2.3. Динамика кинка. Случай потенциальной ямы

При $\Delta K > 0$ наблюдались уже три сценария движения кинка. Если начальная скорость кинка v_0 не превышает некоторое критическое значение v_c , то кинк захватывается примесью (кривая 1, Рисунок 2.7, $v_0 = 0.05$, $\Delta K = 0.5$, $W = 1$, $v_c \approx 0.13$). Если начальная скорость кинка $v_0 \geq v_c$, то кинк проходит примесь (Рисунок 2.7, кривая 2, $v_0 = 0.2$, $\Delta K = 0.5$, $W = 1$). При определенных начальных скоростях $v_0 < v_c$ происходит интересное явление, наблюдавшееся ранее для случая точечных примесей и протяженных другого типа [4, 90], резонансное отражение кинка от притягивающей примеси (Рисунок 2.7, кривая 3, $v_0 = 0.11874$, $\Delta K = 0.5$, $W = 1$). После прохождения или отражения от примеси кинк продолжает движение с некоторой скоростью v_f .

Трехмерные графики динамики кинка, демонстрирующие изменение структуры кинка, соответствующие пиннингу кинка на примеси, прохождению кинка через примесь и резонансному отражению приведены на рисунке 2.8а, б и в. Главное отличие взаимодействия кинка с примесью типа потенциальной ямы от барьера, как и для случая уравнения синус-Гордона [4, 5], заключается в том, что взаимодействия кинка с ямой – неупругое.

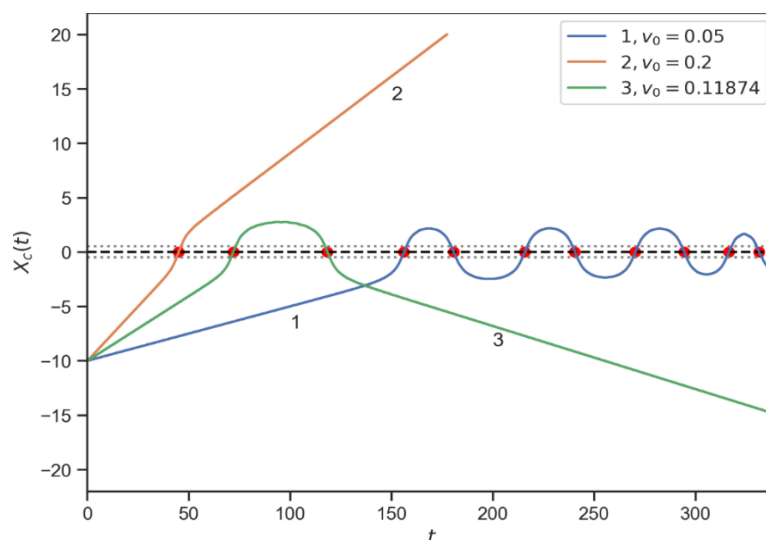


Рисунок 2.7. Сценарии движения кинка при наличии потенциальной ямы

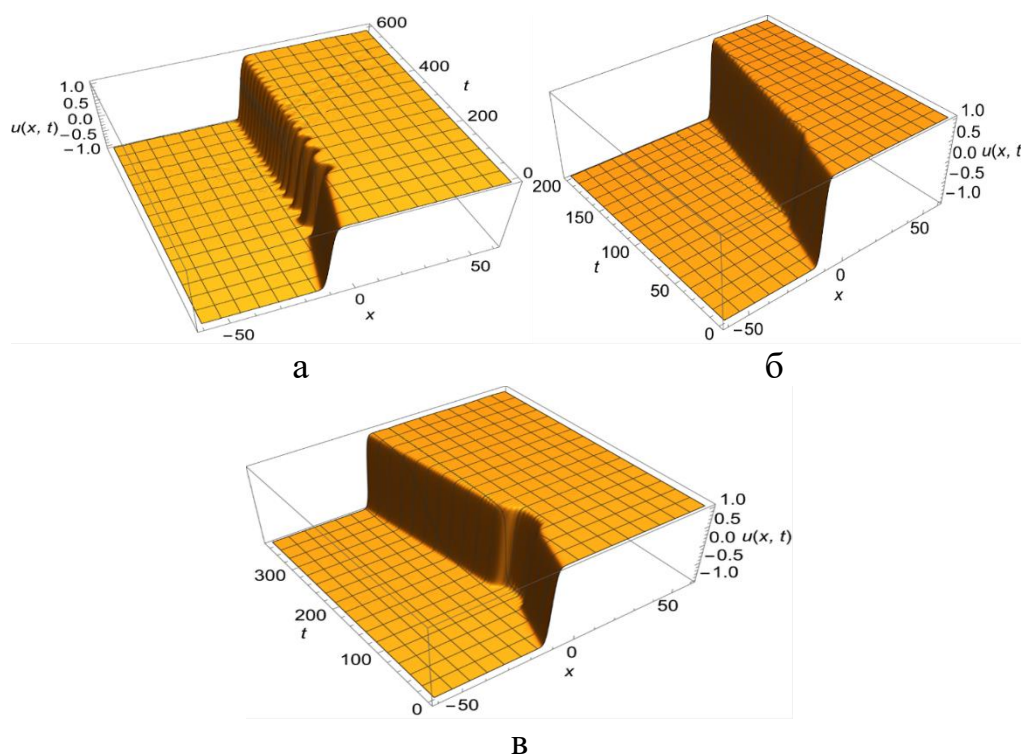


Рисунок 2.8. Динамика кинка: а) при пиннинге на примеси, б) при прохождении кинка через примесь, в) при резонансном отражении

В центре ямы возникают локализованные волны, которые сильно влияют на динамику кинка. При этом на самом кинке возбуждаются внутренние моды колебаний. Это хорошо видно если построить зависимость от времени функции $u(0, t)$ (Рисунок 2.9) и сравнить ее с рисунком 2.5а для случая примеси в виде потенциального барьера.

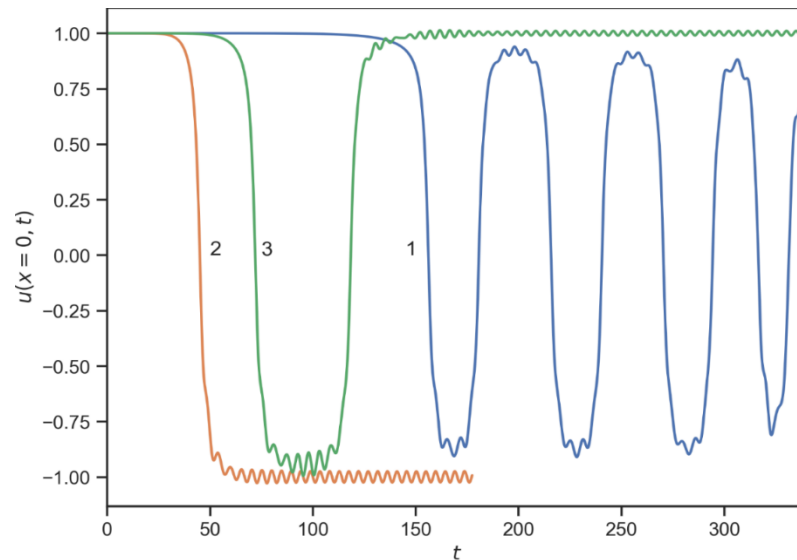


Рисунок 2.9. Временная эволюция центра примеси $\Delta K = 0.5$, $W = 1$ при: а) пиннинге кинка на примеси, кривая – 1, б) прохождении кинка через примесь, кривая – 2 (интегрирование закончилось примерно при $t = 180$, поэтому кривая обрывается), в) резонансном отражении

Критическая скорость прохождения кинка через примесь, так же, как и для случая примеси в виде потенциального барьера, рассмотренного выше, зависит от величины параметров ΔK и W . Эта зависимость приведена на рисунке 2.10а. С увеличением ΔK критическая скорость v_c , необходимая кинку для прохождения примеси увеличивается. Так же, как и для барьера, с увеличением параметра W для прохождения примеси кинку необходима большая скорость v_c . На рисунке 2.10б показано сравнение зависимостей критической скорости прохождения кинком примеси при $\Delta K > 0$ и $\Delta K < 0$. Видно, что по сравнению с рисунком 2.3 зависимость v_c несколько иная, изменение величины параметра W влияет на результат больше.

Если построить аналогично случаю примеси в виде потенциального барьера (Рисунок 2.4а) зависимость v_c от $\sqrt{W|\Delta K|}$ (Рисунок 2.11а), то получим более сложную и нелинейную зависимость. Зависимость интересна так же тем, что при малых площадях примеси (до величины 0.4) v_c почти не меняется.

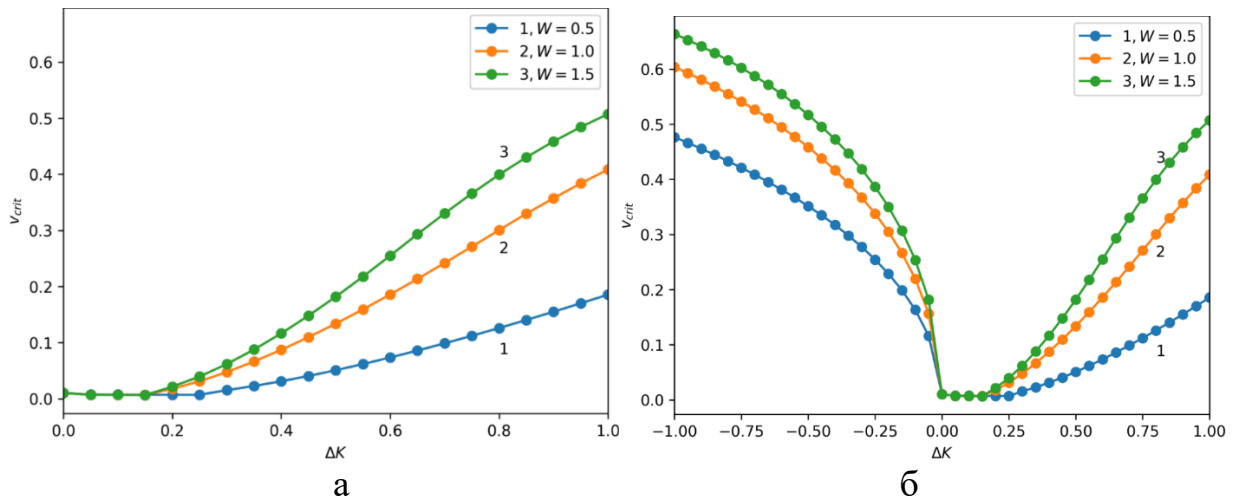


Рисунок 2.10. Зависимость критической скорости прохождения кинком примеси: а) от глубины ямы при разной ширине, б) случай $\Delta K > 0$ и $\Delta K < 0$ одновременно.

После прохождения примеси кинк продолжает движение с отличной от начальной скорости v_f . Т.к. столкновение кинка с примесью неупругое – возникают локализованные волны в области примеси. Типичная картина зависимости конечной скорости кинка v_f от начальной v_0 имеет вид, представленный на рисунке 2.11б.

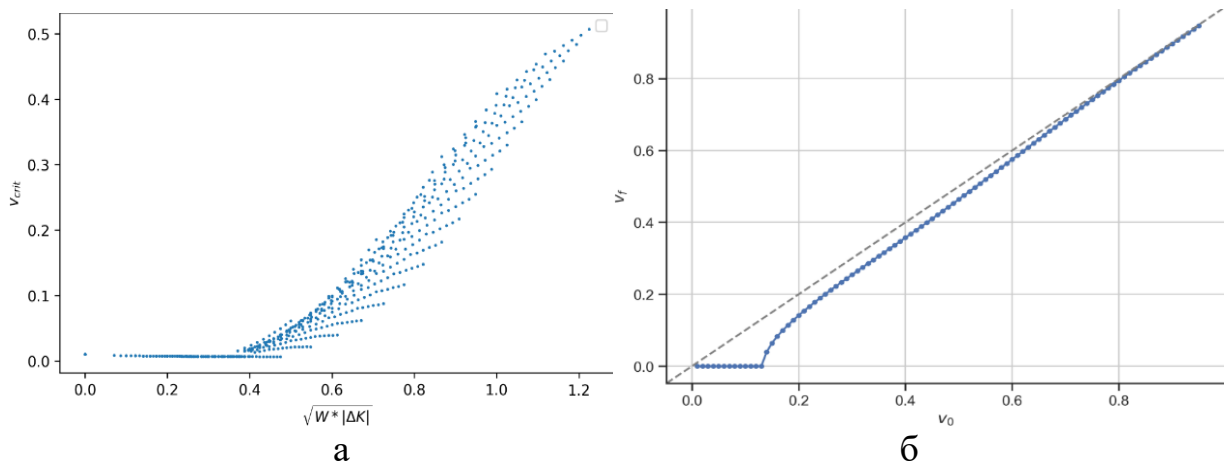


Рисунок 2.11. Зависимость критической скорости прохождения кинком примеси от $\sqrt{W|\Delta K|}$ (а) и зависимость конечной скорости кинка от начальной при $\Delta K = 0.5$, $W = 1$ (б)

При малых начальных скоростях (пиннинге) кинк колеблется на примеси и очень медленно останавливается на примеси излучая волны (Рисунок 2.10а, кривая 1). Его конечная скорость со временем падает до нуля. При скорости больше критической (пунктирной линией показана на рисунке 2.11б линия $v_f = v_0$) он выходит из области примеси. Для уравнения синус-Гордона с примесями [3] для зависимости конечной скорости v_f от начальной v_0 при $v_0 > v_c$

была предложена формула $v_f^2 = c(v_0^2 - v_c^2)$, где c – некоторая константа, зависящая от параметров примеси. Можно оценить применима ли эта формула для модели φ^4 . Для этого приведем зависимость:

$$c = \frac{v_f^2}{(v_0^2 - v_c^2)}, \quad (2.4)$$

для случая $\Delta K = 0.5$, $W = 1$, $v_c = 0.1303$ (Рисунок 2.12). Из рисунка 2.12 видно, что с точностью до нескольких процентов эта формула может быть применима для случая начальной скорости кинка до величины примерно 0.4 при этом константа $c \approx 0.91$.

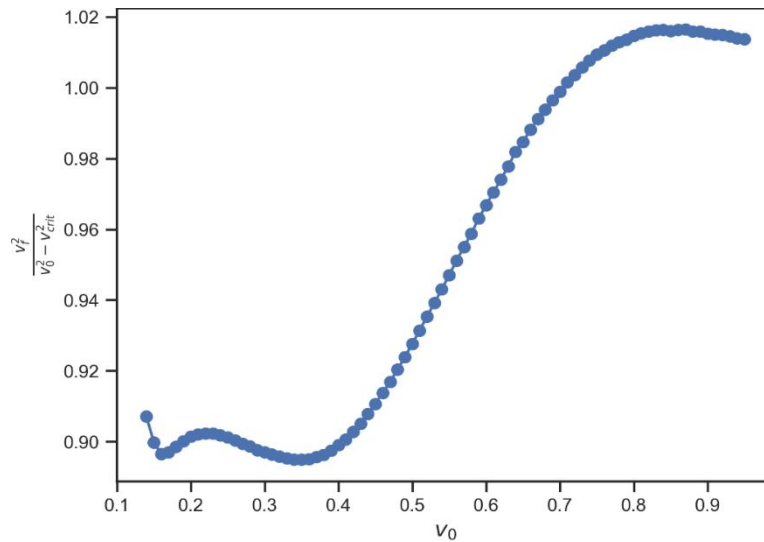


Рисунок 2.12. Зависимость $c = v_f^2 / (v_0^2 - v_c^2)$, от начальной скорости кинка

При некоторых скоростях кинка меньше критической, как было уже показано на рисунке 2.8в, наблюдается резонансное отражение кинка от притягивающей примеси. Это происходит при некоторых очень узких диапазонах скоростей (окнах) ширины порядка 10^{-4} , в которые попасть при расчетах бывает трудно. Как правило такое отражение происходит при попадании величины начальной скорости кинка v_0 в особый очень узкий диапазон резонансных скоростей. Такие диапазоны скоростей можно найти строя зависимость конечного положения кинка X_{end} от начальной скорости. Если кинк уходит за пределы координаты x вправо на расстояние, значительно превышающее ширину примеси (взято предельное значение $x = 20$), то можно говорить, что кинк прошел область примеси и

остановить интегрирование для данного значения v_0 . Если же кинк после взаимодействия с примесью уходит за пределы координаты x влево на расстояние, значительно превышающее ширину примеси (в наших расчетах взято предельное значение $x = -20$), то можно говорить, что для данного v_0 значения произошло резонансное отражение кинка. Результат такого численного анализа (при шаге по изменению величины начальной скорости v_0 равном 10^{-5}) приведен на рисунке 2.13 для $\Delta K = 0.5$, $W = 1$.

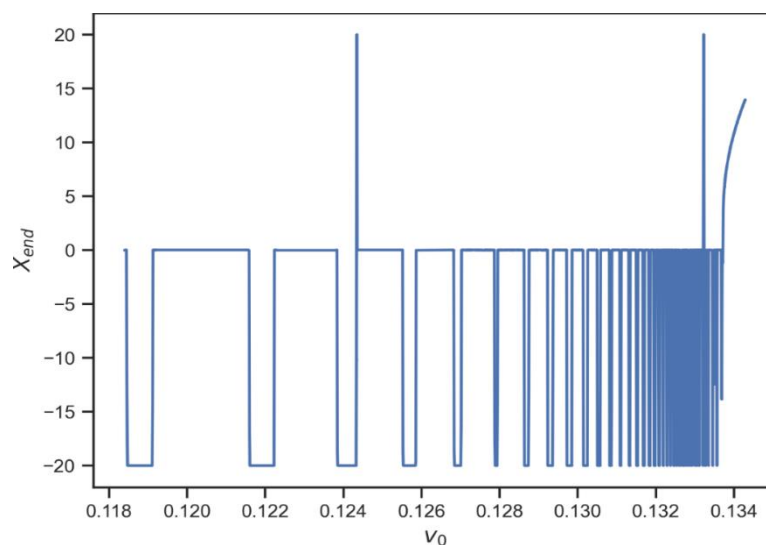


Рисунок 2.13. Зависимость конечного положения кинка (максимальное значение траектории) от начальной скорости $\Delta K = 0.5$, $W = 1$

После резонансного отражения кинк практически всегда движется по прямой линии (кривая 3, рисунок 2.7), что дает возможность найти конечную скорость кинка v_f после отражения аппроксимировав его траекторию линией $y = v_f x + b$. Интересной особенностью резонансного отражения является возможность сильной зависимости конечной скорости от начальной. Так, например, очень маленькое изменение по начальным скоростям v_0 на 10^{-5} вызывает довольно сильное изменение конечных скоростей кинка v_f (Рисунок 2.14). Если построить зависимость конечной скорости от начальной $v_f(v_0)$, то можно заметить, что конечные скорости для случая резонансного отражения ложатся на параболы. На рисунке 2.15а можно заметить много резонансных областей (окон) скорости в виде параболы. Т.е. имеем дискретный

набор резонансных областей, содержащих резонансные скорости для начального движения кинка.

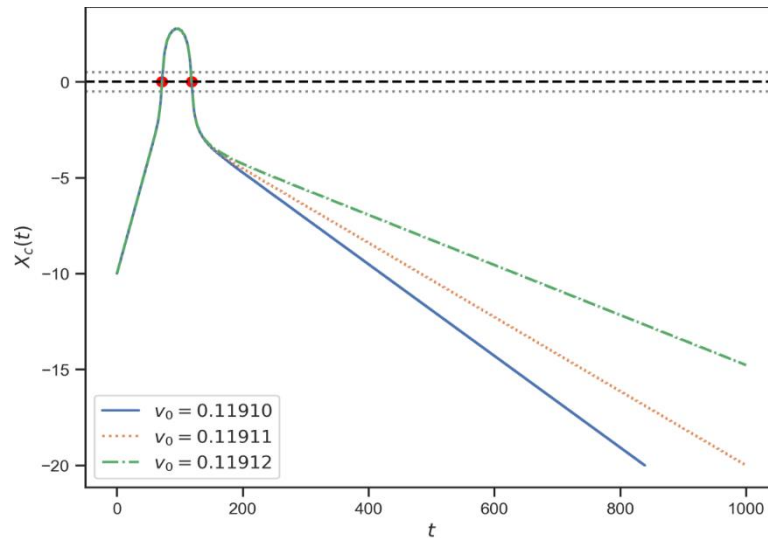


Рисунок 2.14. Траектории кинка при разных близких резонансных скоростях

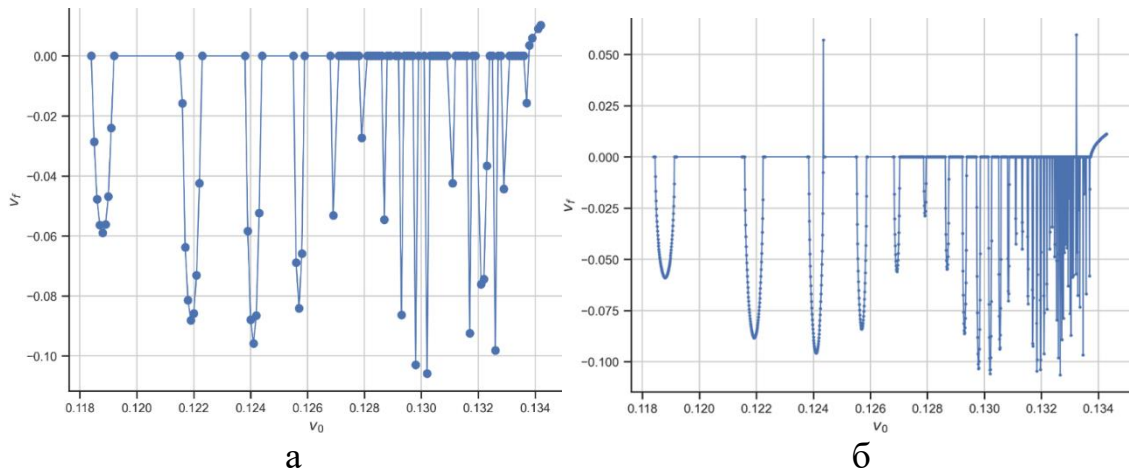


Рисунок 2.15. Конечные скорости: а) при шаге 10^{-4} по v_0 вблизи $v_c = 0.13377$, при шаге 10^{-5} по v_0 вблизи $v_c = 0.13377$

Если идти по начальной скорости с меньшим шагом 10^{-5} , то можно получить еще большее число резонансных скоростей, лежащих на тех же параболах (Рисунок 2.15б). На рисунке видно большое число резонансных окон четко ограниченных по v_0 . Видно, что чем ближе начальная скорость к скорости прохождения, тем плотнее друг к другу располагаются окна. Интересно, что есть два «пойманных» значения ($v_0 = 0.12435$ и $v_0 = 0.13323$), при которых кинк покидает примесь и удаляется в положительном направлении, три раза пересекая центр примеси (Рисунок 2.16).

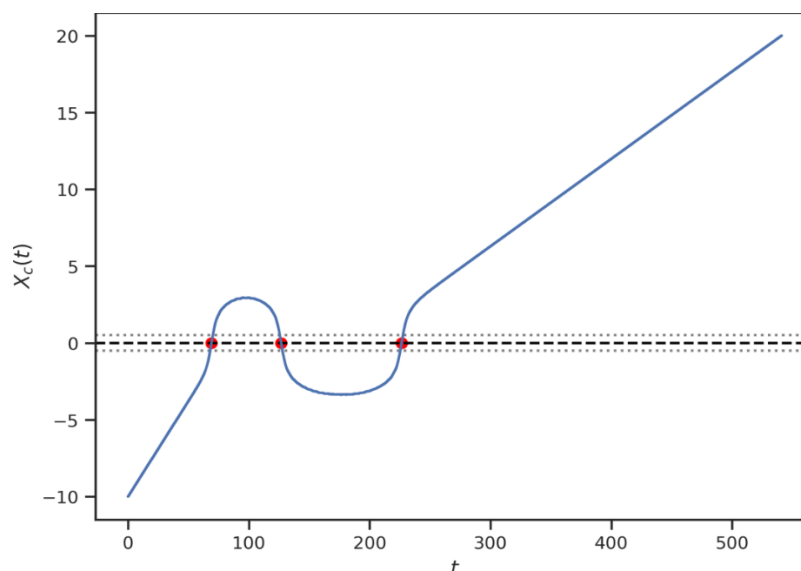


Рисунок 2.16. Траектория центра кинка при $v_0 = 0.12435$

С какой бы точностью (10^{-5} , 10^{-6}) ни брали значения начальной скорости внутри определенного окна – мы попадаем на резонансное отражение. Это позволяет сделать вывод, что этот диапазон скоростей сплошной. Приведем значения этих диапазонов $[0.11846, 0.11912]$, $[0.12160, 0.12223]$, $[0.12385, 0.12435]$, $[0.12553, 0.12586]$, $[0.12684, 0.12702]$ для первой, второй, третьей, четвертой и пятой параболы соответственно. Ширина диапазонов порядка $5 \cdot 10^{-4} v_0$, поэтому если идти с большим шагом по начальной скорости резонансное отражение можно пропустить. Отметим, что ранее в работе [12] исследующей резонансное отражение от притягивающей протяженной примеси другого вида для модели φ^4 шла речь только о дискретном наборе резонансных начальных скоростей кинка.

Критическая скорость, при которой кинк проходит примесь на рисунке 2.15 $v_c \approx 0.1337$. Рассмотрим случай, когда кинк дважды пересекает примесь и отражается от нее – резонансное отражение [4, 11]. Обозначим за T_{12} время между двумя прохождениями кинком примеси. В работе [11] была получена формула для нахождения T_{12} для резонансных окон для случая точечной примеси:

$$T_{12} = \frac{a}{\sqrt{v_c^2 - v_0^2}} + b. \quad (2.5)$$

Здесь коэффициенты a , b вычисляются численно (по методу наименьших квадратов, чтобы удовлетворить значения для первого окна (первой параболы

$n = 1$). Посмотрим, как будет работать эта формула для случая протяженной прямоугольной примеси. Ниже, в таблице 2.1, приведены интервалы резонансных окон, $[v_0 \text{ нач.}, v_0 \text{ конеч.}]$, среднее значение начальной скорости в окне и конечное v_f , средн. в этой средней точке ($a \approx 2.6, b \approx 4.2$). В целом формула может приближенно описывать время между двумя столкновениями кинка, но видно, что с увеличением номера резонансного окна, расхождение между вычисленным численно значением T_{12} и вычисленным по формуле начинает увеличиваться.

Таблица 2.1. Таблица интервалов резонансных окон. Сравнение времени прохождения примеси с формулой (2.5)

n	v_0 , нач.	v_0 , кон.	v_0 , средн.	v_f , средн.	T_{12} , числ.	T_{12} , форм.
1	0.11846	0.119122	0.11879	-0.05900	46.51099	46.5135
2	0.12160	0.12223	0.12191	-0.08834	51.76572	51.4831
3	0.12385	0.12435	0.12410	-0.09580	56.96791	56.3576
4	0.125531	0.12586	0.12570	-0.08410	62.16787	61.1314
5	0.12684	0.12702	0.12693	-0.05602	67.41481	65.9036

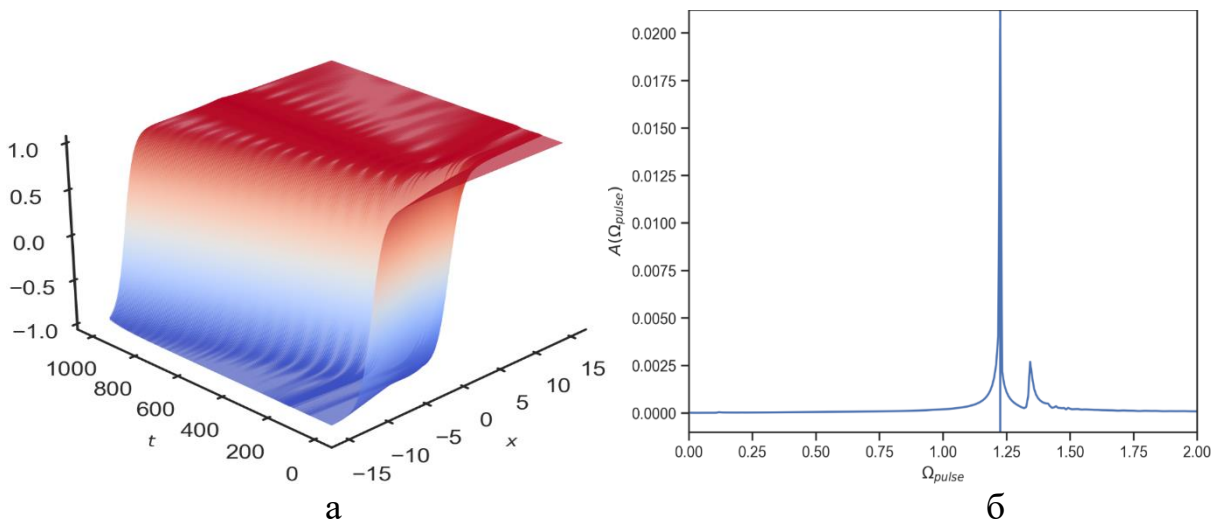


Рисунок 2.17. Зависимость $u(x, t)$ при $v_0 = 0.12875$, $\Delta K = 0.5$, $W = 1$ (а) и его спектр Фурье-разложения (б)

Далее найдем структуру кинка после его взаимодействия с примесью. Рассмотрим случай резонансного отражения кинка от примеси (например, $v_0 = 0.12875$), т.к. в этом случае после отражения до границы численной схемы он движется достаточно большое время. При анализе структуры кинка также будем учитывать, что на примеси возникает локализованная волна типа бризера, которая излучает волны. Из рисунка 2.17а видно, что на кинке возбуждаются

малоамплитудные периодические колебания. Фурье анализ этих колебаний (Рисунок 2.17б) показывает наличие двух пиков. Большой пик $\Omega_{\text{pulse}} = 1.225 \pm 0.008$ примерно равен $\sqrt{3/2}$, что соответствует внутренней моде колебаний воблинг кинка уравнения φ^4 . Малый пик $\Omega_{\text{imp}} = 1.343 \pm 0.008$ связан с волнами излучаемыми бризером, т.к. в рассматриваемом случае кинк еще недостаточно далеко отошел от примеси. Т.е. можно утверждать, что после кинк-примесного взаимодействия имеем дело уже с воблинг кинком [4].

2.4. Динамика локализованной волны. Результаты численного моделирования

При $\Delta K > 0$, если начальная скорость кинка v_0 по величине больше некоторой критической скорости v_c , кинк проходит над примесью. В области примеси возникают высокоамплитудные нелинейные колебания (или примесные моды) бризерного типа. Так как на границах задано сильное трение, то по прошествии некоторого времени, начиная примерно с $t > 800$, излучение от столкновения кинка с примесью исчезает и остаются только локализованные на примеси колебания (рисунок 2.18). Амплитуду и частоту примесной моды можно изучать, исследуя динамику координаты центра примеси $u(x = 0, t)$ (рисунок 2.19а). Амплитуда колебаний A в точке $x = 0$ рассчитывалась с помощью формулы $\max(u(x = 0, t)) - \min(u(x = 0, t))$ при $t > 500$, а частота колебаний Ω методом Фурье. Фурье-разложение зависимости $u(x = 0, t)$ при $t > 500$ показывает, что есть одна основная частота колебаний примеси (рисунок 2.19б), т.е. имеем локализованную нелинейную волну бризерного типа. Проверим наше предположение используя тот факт, что разные точки бризера по оси x двигаются с одной частотой. Для этого найдем спектр Фурье-разложения $u(x, t)$ для разных значений $x = -1, -0.5, -0.25, 0, 0.25, 0.5, 1$. Примесь, для рассматриваемого случая $W = 1$, расположена в области $x = [-0.5, 0.5]$. Как видно из рисунка 2.20, все точки, лежащие в области примеси и рядом с ней (будем далее называть эту область ядром) колеблются с одинаковой частотой. Это позволяет

сделать вывод, что эти локализованные волны бризерного типа. Будем далее говорить об этой частоте колебаний, как частоте колебаний примесной моды.

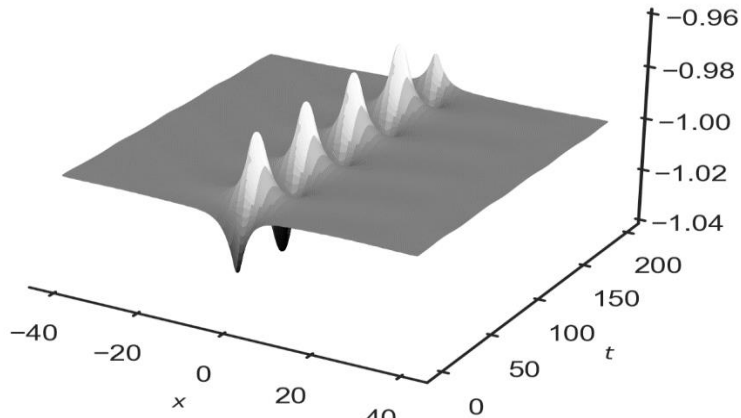


Рисунок 2.18. Зависимость $u(x, t)$ при $v_0 = 0.4, \Delta K = 0.5, W = 1$

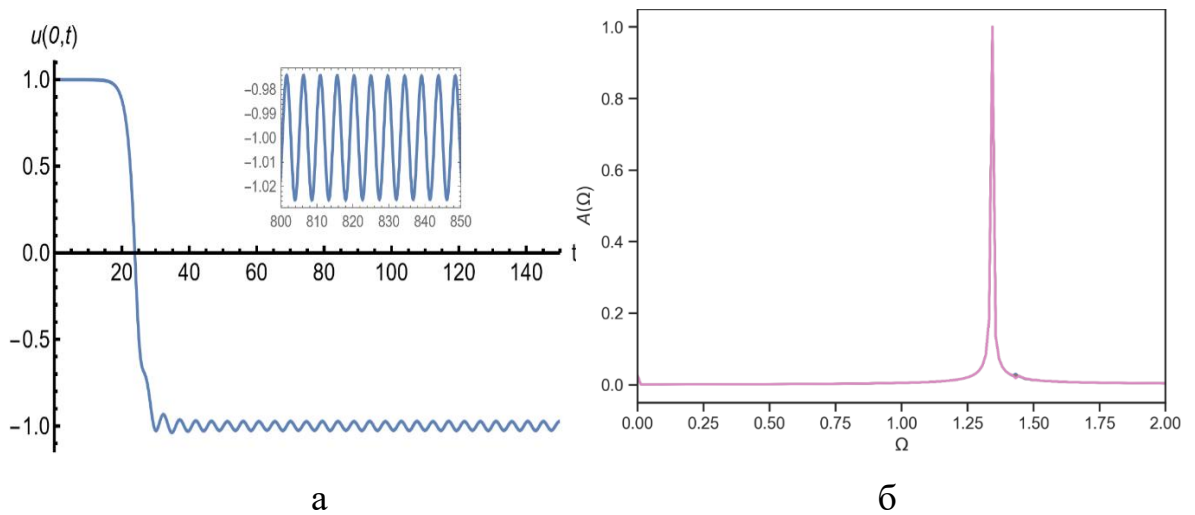


Рисунок 2.19. Зависимость $u(0, t)$ при $v_0 = 0.4, \Delta K = 0.5, W = 1.0$ (а) и спектр Фурье-разложения $A(\Omega)$ (б)

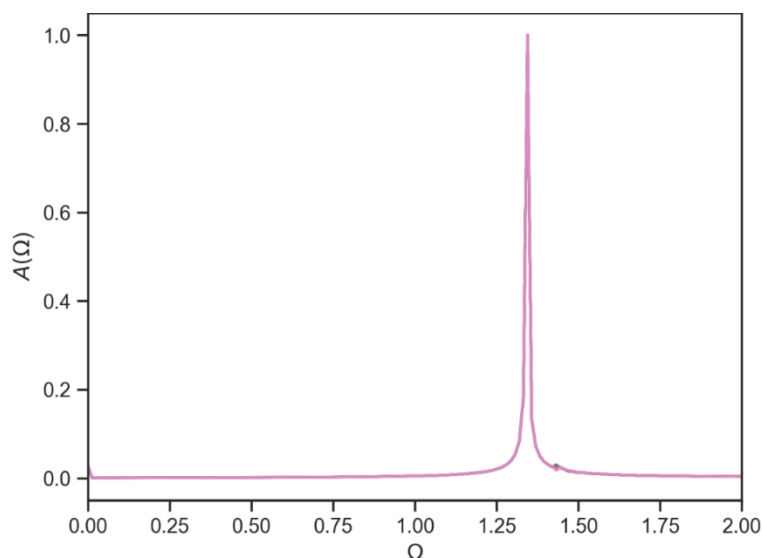


Рисунок 2.20. Спектр Фурье-разложения зависимости $u(x, t)$ при $t > 500$ для $x = -1, x = -0.5, x = -0.25, x = 0, x = 0.25, x = 0.5, x = 1$

Структуру полученной локализованной волны можно попробовать описать бризерным решением УСГ, модернизированным для нашего случая уравнения φ^4 :

$$u(x, t, \omega) = -1 + A(\omega) * \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{1 - \omega^2} \sin \omega t}{\omega \cosh \left(\sqrt{1 - \omega^2} (x - x_0) \right)} \right). \quad (2.6)$$

где величину амплитуды $A(\omega)$ и частоты ω нужно брать из результатов численного счета, x_0 – это координата центра бризера. Из рисунка 2.21, где проведено такое сравнение, видна плохая корреляция значений этих двух функций (начальное время, с которого сравниваются форма бризера и примесной моды, равна $t_0 \approx 1500$). На рисунке 2.21 для удобства сравнения к бризеру (2.6) и примесной моде добавлено значение 1.

Рассмотрим теперь структуру и свойства «хвоста» нашего бризера. Из рисунка Рисунок 2.22а видно, что в спектре колебаний присутствует несколько частот. Проведенный Фурье анализ (рисунок 2.22б) показывает наличие двух частот – 1.41479042 и 2.69062821. Одна из них связана с частотой $\sqrt{2}$ аналитического бризера φ^4 [4]. Вторая частота равна удвоенной частоте бризера, т.е. связана с волнами излучаемыми бризером. Т.е. можно считать, что имеем дело с воблинг бризером модели φ^4 [4].

Рассмотрим зависимость амплитуды огибающей бризера от времени. При малых величинах параметров, описывающих функцию $K(x)$, (для определенности рассмотрим параметры $\Delta K = 0.5$, $W = 1$ и разные начальные скорости кинка) оказалось, что на протяжении длительного времени ($t_0 \approx 5000$) она практически не меняется (рисунок 2.23а), т.е. полученный бризер можно считать «долгоживущим» [4].

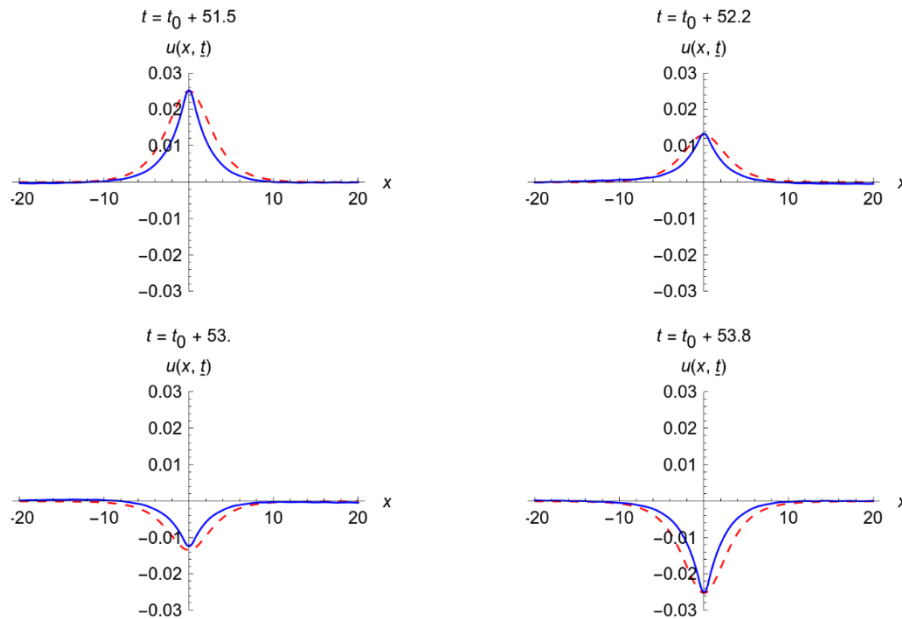


Рисунок 2.21. Зависимость $u(x, t)$ в разные моменты времени: сплошной линией – численные расчеты, пунктирной линией – аналитические

Для случая $\Delta K = 1$, когда начальная амплитуда увеличивается более чем в два раза, амплитуда огибающей бризера начинает заметно уменьшаться со временем (рисунок 2.23б). Зависимость амплитуды бризера от начальной скорости кинка носит довольно сложный характер имеет минимумы и максимумы и показана на рисунках 2.26а и б. Отметим, что такой же сложный характер этой зависимости был найден и для случая примеси гауссового вида в [12].

Далее найдем зависимость частоты Ω и амплитуды колебаний A примесной моды уравнения φ^4 от начальной скорости кинка при фиксированных значениях $\Delta K, W$. Начальные ненулевые значения v_0 на линиях рисунка 2.24а, б обусловлены тем, что при $v_0 < v_c$ происходит пининг кинка на примеси.

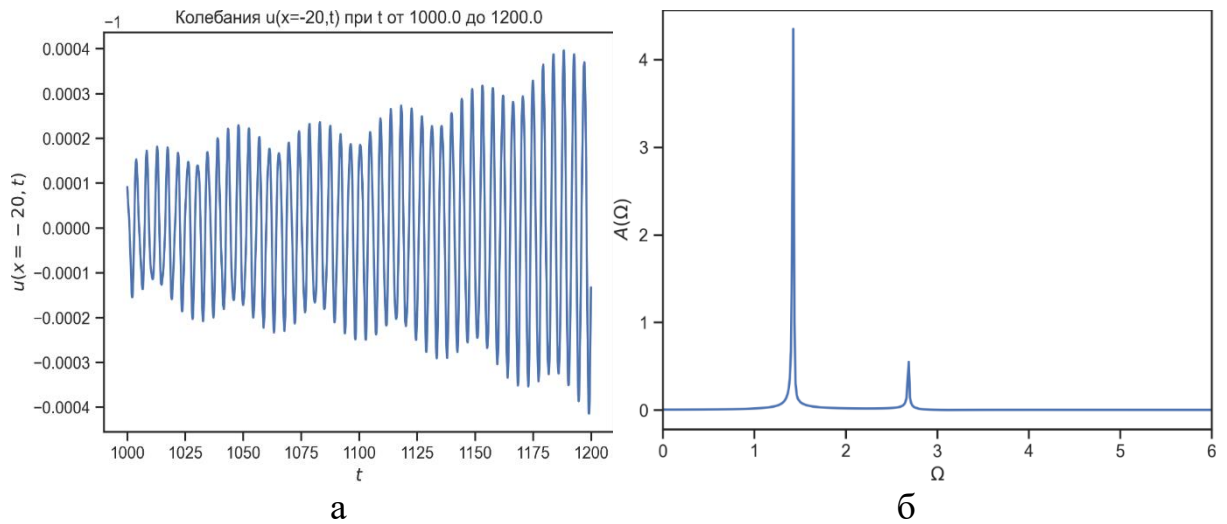


Рисунок 2.22. Зависимость $u(-20, t)$ при $v_0 = 0.4, \Delta K = 0.5, W = 1$ (а) и приведённый спектр Фурье-разложения зависимости при $t > 1000$ (б)

Заметим, что для каждого значения параметров $\Delta K, W$ есть свое значение v_c . Как видно из рисунков 2.24 частота колебаний примесной моды не зависит от начальной скорости кинка, так же, как и для случая примеси, описываемой гауссовской функцией [12].

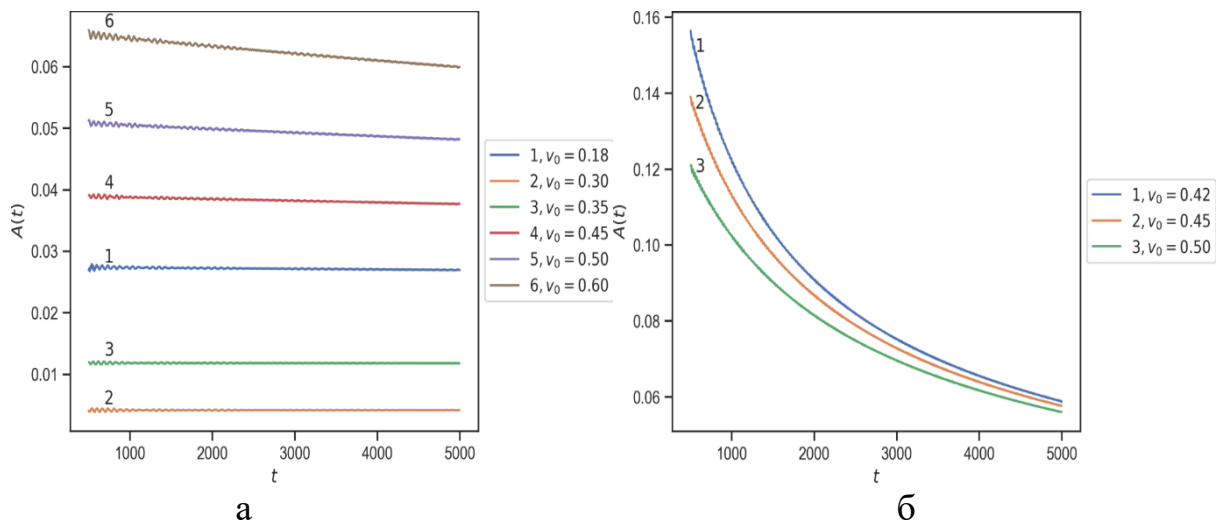


Рисунок 2.23. Зависимость максимальной величины амплитуды бризера от времени: а) $\Delta K = 0.5, W = 1$, б) $\Delta K = 1, W = 1$

Зависимости амплитуды колебаний примесной моды от начальной скорости кинка при разных значениях параметров $\Delta K, W$ показаны на рисунках 2.26а, б. Видно, что на этих кривых имеются минимумы и максимумы в отличие от случая УСГ, где на графике имелся только один максимум [96]. Отметим, что такой же сложный характер кривой с несколькими экстремумами имели зависимости

амплитуды колебаний примесной моды от начальной скорости кинка полученные в [12] для примеси, описываемой гауссовской функцией.

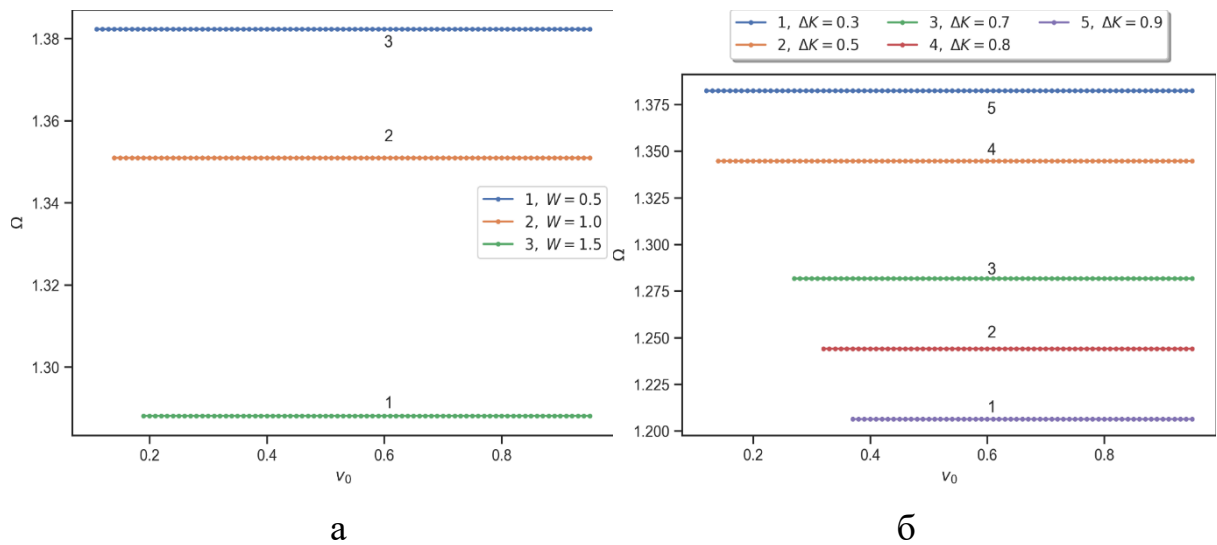


Рисунок 2.24. Зависимость частоты колебаний примесной моды Ω от начальной скорости кинка v_0 : а) при разных значениях W , б) при разных значениях ΔK

Зависимость частоты колебаний примесной моды Ω от параметров ΔK , W при фиксированной начальной скорости кинка $v_0 = 0.4$ показаны на рисунке 2.25. Видно, что с увеличением параметров ΔK частота колебаний примесной моды плавно уменьшается, так же как и для случая точечной примеси [11], и примеси, описываемой гауссовской функцией [12]. Для случая точечной примеси найдено аналитическое выражение для частоты колебаний примесной моды $\Omega^2 = 2 - \varepsilon^2$ [4, 11], где ε – амплитуда примеси. Отметим, что полученная на рисунке 2.29а зависимость частоты от ΔK (аналогом ε в нашем случае) близка к этой зависимости. Из рисунка 2.25б видно, что с увеличением W частота колебаний примесной моды плавно уменьшается в отличие от примеси, описываемой гауссовской функцией [12]. Это различие связано со спецификой задания гауссовской функции в [12]. Анализ зависимостей, представленных на рисунке 2.25, показывает, что функционально зависимости Ω от каждого из параметров $\Delta K, W$ близки друг к другу. так что при одинаковой «площади» ямы $S = \Delta KW$ они отличаются друг от друга незначительно.

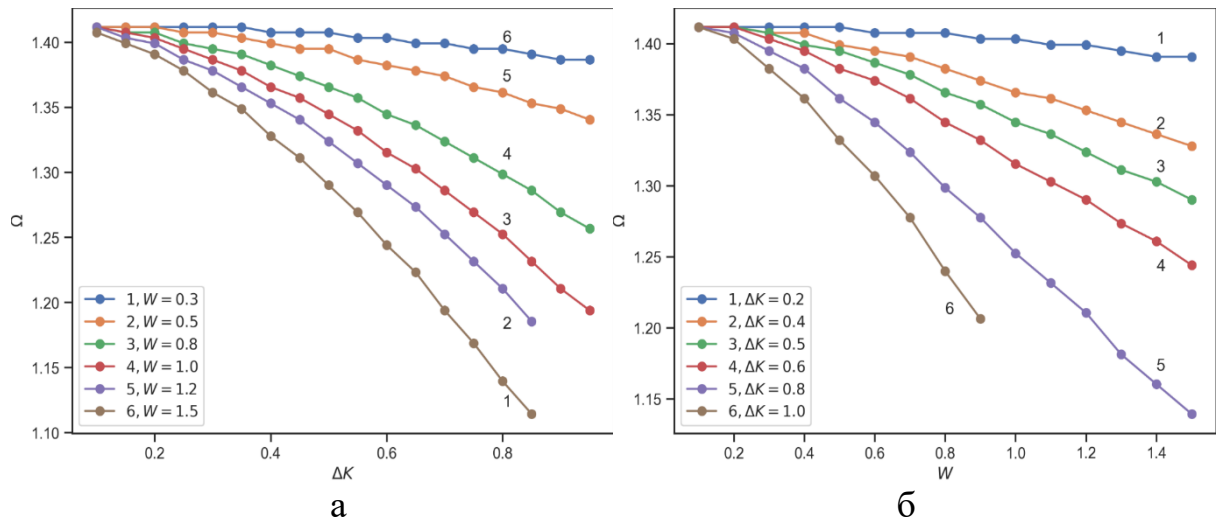


Рисунок 2.25. Зависимость частоты колебаний примесной моды Ω : а) от ΔK при разных значениях W , б) от параметра W при разных значениях ΔK

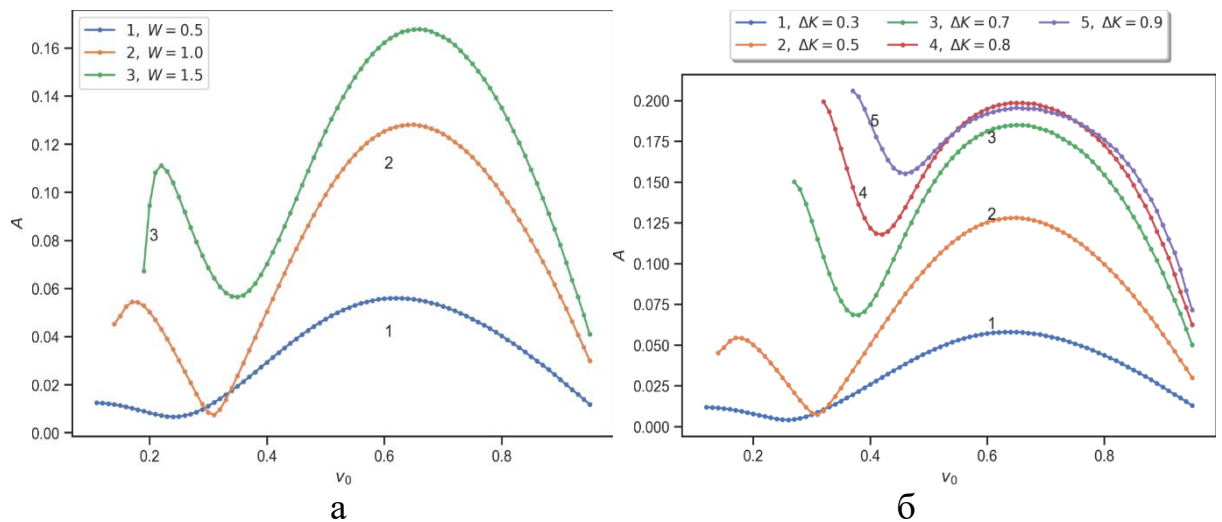


Рисунок 2.26. Зависимость амплитуды колебаний примесной моды A от начальной скорости кинка: а) при разных значениях параметра W , б) при разных значениях параметра ΔK

Зависимость амплитуды колебаний примесной моды A от параметра ΔK при разных значениях ширины W при фиксированной начальной скорости кинка $v_0 = 0.4$ показаны на рисунке 2.27. Видно, что при скорости $v_0 = 0.4$ имеем гладкие кривые, которые быстро растут с увеличением ΔK . При более низкой скорости $v_0 = 0.3$ зависимости, например для $W = 0.5$ и $W = 0.8$ очень слабо увеличивается при увеличении параметра ΔK . Отметим, что качественно похожая зависимость получена в [12] для примеси, описываемой гауссовской функцией.

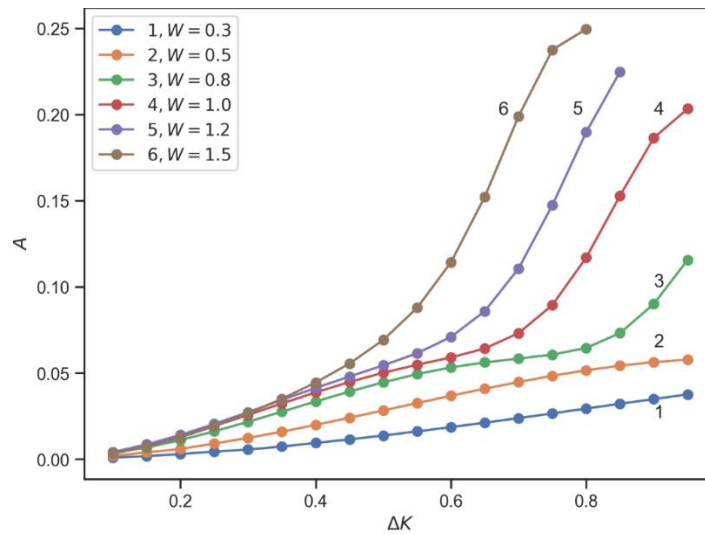


Рисунок 2.27. Зависимость амплитуды колебаний примесной моды A от параметра ΔK при разных значениях ширины ямы W ($v_0 = 0.4$)

2.5. Динамика локализованной волны. Результаты аналитического решения

Исследуемое уравнение (2.1) имеет вакуумные решения $u = -1, u = 0, u = 1$. Проведенный численный счет показывает, что ядро возбуждаемого при кинк-примесном взаимодействии бризера лежит в небольшом диапазоне по координате x , связанном с шириной примеси и с центром в центре примеси при $x = 0$. Рассмотрим локализованные колебания, возбуждаемые на примеси для случая, когда кинк ушел далеко вправо от точки $x = 0$. Тогда для малоамплитудной локализованной волны решение можно брать в виде [4]:

$$u(x, t) = -1 + \varepsilon \exp(-i\Omega_{teor}t) \psi(x), \quad (2.7)$$

где Ω_{teor} – частота примеси (теоретическая), ε – малая величина (амплитуда примеси), $\psi(x)$ – функция, определяющая пространственную форму примеси. Подставляя (2.7) в (2.1) и разложив в ряд по малому ε , получим уравнение вида:

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + (\Omega_{teor} - 2K)\psi(x) = 0. \quad (2.8)$$

Уравнение (2.8) имеет три решения в зависимости от области определения. В дальнейших расчетах для удобства рассматривалась примесь, расположенная в диапазоне значений от $-W/2$ до $W/2$, а не от 0 до W как в (2.4). В области I , $\Delta K = 0$ и решение (2.8) имеет вид:

$$\psi_1 = c_1 \exp(\sqrt{2 - \Omega_{teor}^2} x). \quad (2.9)$$

В области III, $\Delta K = 0$ решение (2.8) имеет вид:

$$\psi_3 = c_3 \exp(-\sqrt{2 - \Omega_{teor}^2} x). \quad (2.10)$$

В областях I, III мы отбросили растущие на $|x| = \infty$ решения. В области II, $K = 1 - \Delta K$ и решение (2.8) имеет вид:

$$\psi_2 = c_2 \sin\left(\sqrt{\Omega_{teor}^2 - 2(1 - \Delta K)} x + \delta\right). \quad (2.11)$$

Применив условия гладкости и непрерывности рассматриваемого решения в точке $x = -W/2, x = W/2$, получим:

$$\begin{cases} \sqrt{\Omega_{teor}^2 - 2(1 - \Delta K)} \cot\left[\delta - \frac{1}{2}W \sqrt{\Omega_{teor}^2 - 2(1 - \Delta K)}\right] = \sqrt{2 - \Omega_{teor}^2}, \\ \sqrt{\Omega_{teor}^2 - 2(1 - \Delta K)} \cot\left[\delta + \frac{1}{2}W \sqrt{\Omega_{teor}^2 - 2(1 - \Delta K)}\right] = -\sqrt{2 - \Omega_{teor}^2}. \end{cases} \quad (2.12)$$

Исключая δ из (2.12), можно получить $\delta = \pi/2$. Тогда дисперсионное соотношение (2.12) примет вид:

$$\sqrt{\Omega_{teor}^2 - 2(1 - \Delta K)} \cot\left[\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}W \sqrt{\Omega_{teor}^2 - 2(1 - \Delta K)}\right] = \sqrt{2 - \Omega_{teor}^2}. \quad (2.13)$$

Уравнение (2.13) — это трансцендентное уравнение, $\Delta K, W$ — задаваемые параметры. Из (2.13) при $\Delta K \rightarrow 0$ или $W \rightarrow 0$ можно получить значение максимальной частоты примесной моды равной $\Omega_{teor} = \sqrt{2}$. Построим графики для зависимости частоты примесной моды $\Omega_{teor} = \Omega_{teor}(\Delta K)$ для разных W (рисунок 2.28). Можно так же провести сравнение функции описываемую уравнениями (2.9)–(2.11) с численными результатами (рисунок 2.28). Отметим, что чем меньше площадь примеси, тем сильнее корреляция между аналитическим и численным решением для профиля примесной моды.

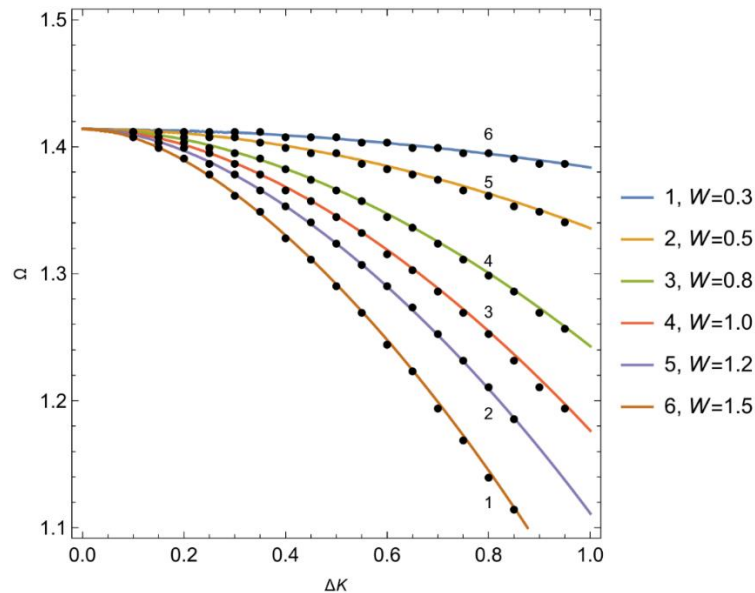


Рисунок 2.28. Зависимость частоты колебаний примесной моды Ω от параметра ΔK для разных значений параметра W ($\nu_0 = 0.4$). Маркерами показаны значения частоты, вычисленные численно решением исходного уравнения (2.1)

2.6. Выводы по главе 2

Исследовано взаимодействие между кинками и протяженной примесью в модели φ^4 , описываемую функцией прямоугольного вида. Используемый нами численный метод позволяет проводить численный счет достаточно длительное время для однозначного нахождения типа сценария динамики кинка и нахождения величины критической скорости необходимой кинку для прохождения примеси. Определены и описаны все возможные сценарии динамики кинка с учетом резонансных эффектов. В случае отталкивающих примесей, которые являются потенциальными барьерами, как и для случая точечной примеси, кинк в зависимости от начальной скорости может либо отражаться, либо проходить. Для малых скоростей движения взаимодействие кинка с примесью практически упругое. Неупругое взаимодействие кинка с примесью возникает только при больших начальных скоростях кинка. Колебания в центре примеси после прохождения кинка появляются лишь при его больших начальных скоростях и быстро затухают. При этом возбуждаются так же и внутренние моды колебаний кинка. Показано, что критическая скорость прохождения барьера пропорционально корню квадратному площади барьера, как и для случая уравнения синус-Гордона.

Притягивающие примеси могут еще захватывать кинк, либо после нескольких колебаний в условиях резонансного процесса отражать или пропускать его. При этом возбуждается примесная мода в области примеси. Интересной особенностью резонансного отражения кинка является сильная зависимость его конечной скорости от начальной, т.е. очень маленькое изменение его начальной скорости вызывает заметное изменение конечной скорости кинка. Показано, что для зависимости конечной скорости кинка от начальной. большей критической скорости прохождения примеси, применима формула, предложенная для уравнения синус Гордона. Как и для случая точечной примеси найдено, что на зависимости конечной скорости от начальной есть большое число резонансных окон, в которых лежат резонансные скорости отражения от примеси. Показано, что для случая нашей протяженной примеси можно пользоваться для нахождения времени между первым и вторым взаимодействием кинка и примеси формулой предложенной ранее для случая точечной примеси. Однако, с увеличением номера резонансного окна, расхождение между вычисленным численно значением этого времени и вычисленным по формуле начинает увеличиваться. Между резонансными окнами не наблюдались, описанные для случая точечных примесей, особые случаи динамики кинка названные «квазирезонансом». Найдены и особые значения резонансной скорости «квазитуннелирования», при которых кинк, имея скорость меньше критической проходит примесь. Показано, что особенности резонансного взаимодействия в модели φ^4 с протяженной примесью, как и для случая точечной примеси, в отличии от случая УСГ, связаны с тем, что кинк взаимодействует уже не с одним осциллятором (примесной модой) а с двумя (добавляются еще внутренние моды колебаний кинка).

Показано, что примесь является генератором для возбуждения долгоживущих воблинг бризеров. Исследована структура бризера, состоящая из ядра и хвоста, имеющего вид квазисинусоидальной функции неограниченного по пространству и с классической частотой $\sqrt{2}$. Показано, как с помощью изменения параметров примеси можно управлять динамическими параметрами воблинг бризера. Рассмотрено линейное приближение, допускающее аналитическое решение задачи.

Найдены границы ее применимости для данной модели. Показано, что после кинк-примесного взаимодействия на кинке возбуждается внутренняя мода частотой $\sqrt{3/2}$ и его можно считать воблинг кинком.

3. ДИНАМИКА КИНКОВ, БРИЗЕРОВ И СОЛИТОНОВ УРАВНЕНИЯ СИНУС-ГОРДОНА В МОДЕЛИ С ПРИМЕСЯМИ

Другим наиболее исследуемым уравнением Клейна-Гордона является уравнение синус-Гордона [2, 3, 97, 98]. УСГ применялась в квантовой теории поля, биофизике. в физике конденсированного состояния [20, 28, 5]. Для практических приложений часто это уравнение модифицируют, считая коэффициенты функциями от координат и времени [99-101].

Для УСГ с примесями, в отличие от случая уравнения φ^4 с примесями, подробно рассмотрены случаи одной и двух точечных и протяженных примесей [10, 51, 52, 61, 96-98, 102]. Причем, много работ (см., например, [10, 51, 52, 102]) посвящено исследованию частных случаев МУСГ без учета внешней силы и затухания. Поскольку, во-первых, найти решение в данном случае представляется более просто, нежели рассматривать общий случай. Во-вторых, решение такой задачи позволяет качественно понимать основные свойства взаимодействия кинка и примеси. Причем, полученные результаты в будущем могут являться основой при изучении более сложных моделей. Модель в отсутствие параметров внешней силы и диссипации называется бездиссипативной и достаточно удобна в исследовании различных связанных динамических состояниях мультисолитонного типа. В работах [61, 103, 104], на основе такой модели, численными и аналитическими методами было получено мультисолитонное решение типа «кинк-бризер», а также изучены основные свойства такого решения на модели с одной и двумя протяжёнными и точечными примесями. Исследованы особенности рассеяния кинка на примесях. В данной главе рассматривается влияние трёх точечных и протяжённых примесей на динамику кинка с учётом возбуждения локализованных волн. Также рассмотрена возможность использования авторезонансных методов для управления динамическими параметрами солитонов и бризеров, локализованных на примеси, при наличии внешней силы и диссипации.

3.1. Аналитическое описание динамика кинка и примесных мод в модели с тремя точечными примесями

Рассмотрим динамику солитонных решений безразмерного МУСГ в модели с точечными примесями. Моделирование точечных примесей довольно часто описывается пространственной неоднородностью периодического потенциала $K(x)$ вида (1.30). Такой вид параметра $K(x)$ во многом облегчает аналитические расчеты, благодаря дельта-функции. Для системы из трёх одинаковых примесей (1.30) примет вид:

$$K(x) = 1 - \sum_{k=1}^3 (1 - \varepsilon \delta(x - x_k)), \quad (3.1)$$

где x_k – координата примеси на оси Ox . Для простоты исследования динамики солитонных решений в системе трёх примесей, положим, что примеси в системе располагаются на одинаковом расстоянии d друг от друга. Тогда параметр x_k можно представить как $(k - 1)d$.

С учетом всех условий получим МУСГ для модели с тремя пространственными неоднородностями с учётом внешней силы и затухания:

$$u_{tt} - u_{xx} + \sum_{k=1}^3 (1 - \varepsilon \delta(x - (k - 1)d)) \sin u + h(t) \sin \frac{u}{2} + \alpha u_t = 0. \quad (3.2)$$

где $h(t)$ – переменный параметр внешней силы, α – константа затухания. Это уравнение, например, описывает динамику магнитной доменной границы в семислойной ферромагнитной и слабоферромагнитной структуре с различными значениями констант магнитной анизотропии в присутствии внешнего магнитного поля и затухания. По аналогии с моделью одной точечной примеси получим лагранжиан:

$$L = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} u_t^2 - \frac{1}{2} u_x^2 - (1 - \varepsilon \delta(x) - \varepsilon \delta(x-d) - \varepsilon \delta(x-2d))(1 - \cos u) + 2h(t) \cos \frac{u}{2} \right) dx. \quad (3.3)$$

Заметим, что (3.3) описывает и безразмерную плотность энергии одноосного семислойного ферромагнетика с константой анизотропии вида $K(x) = 1 - \sum_{k=1}^N \varepsilon_k \delta(x - x_k)$, $u = u(x, t)$ определяет двойной угол между намагниченностью и направлением намагниченности в домене. Поскольку в данной модели присутствует затухание, то к лагранжиану добавляется диссипативная функция Рэлея:

$$R = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} \alpha u_t^2 dx. \quad (3.4)$$

Подстановка выражения (3.2) – (3.4) в уравнение Лагранжа–Эйлера с учетом диссипации (3.5) приводит к исходному уравнению движения (3.2):

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial u_t} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial u_x} - \frac{\partial L}{\partial u} + \frac{\partial R}{\partial u_t} = 0. \quad (3.5)$$

Для получения приближённой системы уравнений динамики кинка и примесных мод, воспользуемся методом коллективных координат. Для учёта возбуждения примесных мод введём коллективные переменные $a_1 = a_1(t)$, $a_2 = a_2(t)$, $a_3 = a_3(t)$.

Используя полученные ранее решения примесных мод в приближении малых колебаний (см. параграф 1.1.2), запишем искомые выражения для примесных мод:

$$\begin{aligned} u_1 &= a_1(t) e^{-\frac{\varepsilon|x|}{2}}, \\ u_2 &= a_2(t) e^{-\frac{\varepsilon|x-d|}{2}}, \\ u_3 &= a_3(t) e^{-\frac{\varepsilon|x-2d|}{2}}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Тогда «анзац» u_a будем искать в виде:

$$\begin{aligned}
u_a(a_1, a_2, a_3, x) \approx & 4 \operatorname{arctg}(\exp(x - X(t))) + \\
& + a_1(t)e^{-\frac{\varepsilon|x|}{2}} + a_2(t)e^{-\frac{\varepsilon|x-d|}{2}} + a_3(t)e^{-\frac{\varepsilon|x-2d|}{2}},
\end{aligned} \tag{3.7}$$

где $X(t)$ – координата центр кинка, являющаяся коллективной переменной. Полагаем, что примесные моды малы, т.е. $u_n \ll u_0$. Отсюда следует, что коллективные переменные примесных мод так же малы. Таким образом нелинейный член лагранжиана (3.3) в силу малости, представляется возможным разложить в ряд Тейлора вплоть до второго порядка малости. Подставляя «анзац» в выражения с \cos и, упрощая их с помощью основных тригонометрических тождеств, подставим полученный «анзац» (3.7) в (3.3), получим эффективный лагранжиан вида:

$$\begin{aligned}
L_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{2} u_{0t}^2 + u_{0t} (u_{1t} + u_{2t} + u_{3t}) + \frac{1}{2} (u_{1t} + u_{2t} + u_{3t})^2 - \frac{1}{2} u_{0x}^2 \right. \\
- u_{0x} (u_{1x} + u_{2x} + u_{3x}) - \frac{1}{2} (u_{1x} + u_{2x} + u_{3x})^2 \\
+ [1 - \varepsilon\delta(x) - \varepsilon\delta(x-d) - \varepsilon\delta(x-2d)] \left(-\frac{2}{\operatorname{ch}^2(x-X(t))} \right. \\
+ (u_1 + u_2 + u_3) \frac{2 \operatorname{sh}(x-X(t))}{\operatorname{ch}^2(x-X(t))} \\
\left. \left. - \frac{(u_1 + u_2 + u_3)^2}{2} \left[1 - \frac{2}{\operatorname{ch}^2(x-X(t))} \right] \right) \right. \\
\left. + 2h(t) \cos \frac{u_0 + u_1 + u_2 + u_3}{2} \right\} dx.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Далее, чтобы проинтегрировать каждое слагаемое выражения (3.8), раскроем скобки. Полученные интегралы берутся. После вычисления всех интегралов и, проведя группировку слагаемых, получим следующий вид эффективного лагранжиана:

$$\begin{aligned}
L_3 = & -8 + 4\dot{x}^2(t) + \sum_{k=1}^3 \frac{2\varepsilon}{\text{ch}^2((k-1)d - X(t))} \\
& - \sum_{n=1}^3 \left([2\dot{x}(t)\dot{a}_n(t) + a_n(t)h(t)] \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{\varepsilon|x-(n-1)d|}{2}}}{\text{ch}(x - X(t))} dx \right. \\
& + \sum_{k=1}^3 2\varepsilon a_n(t) \text{th}((k-1)d - X(t)) \frac{e^{-\frac{\varepsilon|(k-1)d-(n-1)d|}{2}}}{\text{ch}((k-1)d - X(t))} \\
& - \sum_{k=1}^3 a_n(t) \int_{-\infty}^{-\infty} \left[2\text{th}(x - X(t)) \right. \\
& \left. - \varepsilon \frac{|x - (k-1)d|}{|x - (k-1)d|} \frac{e^{-\frac{\varepsilon|x-(k-1)d|}{2}}}{\text{ch}(x - X(t))} dx \right) \\
& + \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 \left\{ \dot{a}_m(t)\dot{a}_n(t) \left[\frac{e^{-\frac{\varepsilon|(m-1)d-(n-1)d|}{2}}}{\varepsilon} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{|(m-1)d - (n-1)d|}{2} e^{-\frac{\varepsilon|(m-1)d-(n-1)d|}{2}} \right] \right. \\
& - a_m(t)a_n(t) \left[\left[1 + \frac{\varepsilon^2}{4} \right] \frac{e^{-\frac{\varepsilon|(m-1)d-(n-1)d|}{2}}}{\varepsilon} \right. \\
& \left. + \left[1 - \frac{\varepsilon^2}{4} \right] \frac{|(m-1)d - (n-1)d|}{2} e^{-\frac{\varepsilon|(m-1)d-(n-1)d|}{2}} \right. \\
& + \varepsilon \sum_{k=1}^3 \left[\frac{1}{\text{ch}^2((k-1)d - X(t))} \right. \\
& \left. - \frac{1}{2} \right] e^{-\frac{\varepsilon|(k-1)d-(n-1)d|}{2}} e^{-\frac{\varepsilon|(k-1)d-(m-1)d|}{2}} \\
& - \frac{h(t)}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\varepsilon|x-(m-1)d|}{2}} e^{-\frac{\varepsilon|x-(n-1)d|}{2}} \text{th}(X(t) - x) dx \\
& \left. - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{\varepsilon|x-(n-1)d|}{2}} e^{-\frac{\varepsilon|x-(m-1)d|}{2}}}{\text{ch}^2(X(t) - x)} dx \right\} \\
& + 2h(t) \int_{-\infty}^{+\infty} \text{th}(X(t) - x) dx.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Полученный эффективный лагранжиан (3.9) приводит к системе интегро-дифференциальных уравнений, которые сложны для исследования данной задачи, т.к содержат интегралы вида:

$$\int_{-\infty}^{-\infty} \frac{e^{-\frac{\varepsilon|x-(k-1)d|}{2}}}{\text{ch}(x - X(t))} dx, \quad (3.10)$$

Интегралы вида (3.10) присутствовали и в эффективных уравнениях для коллективных координат, полученных для случая взаимодействия кинка с одной и двумя точечными примеси в работе [104]. Там было показано, что ими можно пренебречь, поскольку они являлись несущественными при рассмотрении задачи. Учитывая это, ограничимся далее исследованием нашей системы уравнений без их учета. Используя свойства чётности и нечётности гиперболических функций, выражение (3.9) можно упростить:

$$\begin{aligned}
L_3 \approx & -8 + 4\dot{x}^2(t) + \sum_{k=1}^3 \frac{2\varepsilon}{\text{ch}^2(X(t) - (k-1)d)} \\
& + \sum_{n=1}^3 \sum_{k=1}^3 2\varepsilon a_n(t) \text{th}(X(t) - (k-1)d) \frac{e^{-\frac{\varepsilon|(k-1)d-(n-1)d|}{2}}}{\text{ch}(X(t) - (k-1)d)} \\
& + \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 \left\{ \dot{a}_m(t) \dot{a}_n(t) \left[\frac{e^{-\frac{\varepsilon|(m-1)d-(n-1)d|}{2}}}{\varepsilon} \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{|(m-1)d - (n-1)d|}{2} e^{-\frac{\varepsilon|(m-1)d-(n-1)d|}{2}} \right] \right. \\
& - a_m(t) a_n(t) \left[\left[1 + \frac{\varepsilon^2}{4} \right] \frac{e^{-\frac{\varepsilon|(m-1)d-(n-1)d|}{2}}}{\varepsilon} \right. \\
& + \left. \left[1 - \frac{\varepsilon^2}{4} \right] \frac{|(m-1)d - (n-1)d|}{2} e^{-\frac{\varepsilon|(m-1)d-(n-1)d|}{2}} \right. \\
& + \varepsilon \sum_{k=1}^3 \left[\frac{1}{\text{ch}^2(X(t) - (k-1)d)} \right. \\
& - \left. \left. \frac{1}{2} \right] e^{-\frac{\varepsilon|(k-1)d-(n-1)d|}{2}} e^{-\frac{\varepsilon|(k-1)d-(m-1)d|}{2}} \right] \left. \right\} \\
& + 2h(t) \int_{-\infty}^{+\infty} \text{th}(X(t) - x) dx.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Эффективная функция Рэля после подстановки «анзаца» (3.7) примет вид:

$$\begin{aligned}
R_3 &\approx \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} \alpha (u_0 + u_1 + u_2 + u_3)_t^2 dx = \\
&= \alpha \left\{ 4\dot{x}^2(t) - \sum_{n=1}^3 2\dot{x}(t)\dot{a}_n(t) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{\varepsilon|x-(n-1)d|}{2}}}{\text{ch}(X(t)-x)} dx \right. \\
&+ \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 \dot{a}_m(t)\dot{a}_n(t) \left[\frac{e^{-\frac{\varepsilon|(m-1)d-(n-1)d|}{2}}}{\varepsilon} \right. \\
&\left. \left. + \frac{|(m-1)d-(n-1)d|}{2} e^{-\frac{\varepsilon|(m-1)d-(n-1)d|}{2}} \right] \right\}. \tag{3.12}
\end{aligned}$$

Подставим теперь полученные эффективные лагранжиан (3.11) и функцию Рэля (3.12) в систему уравнений вида (3.5) для коллективных переменных – центра кинка $X(t)$ и примесных мод $a_p(t)$, где p – номер $p + 1$ уравнения (1.29). В нашем случае $p = 3$, тогда получим следующую систему дифференциальных уравнений. Первое уравнение системы после подстановки:

$$\begin{aligned}
8\ddot{X}(t) &+ \sum_{k=1}^3 \frac{4\varepsilon \text{th}(X(t) - (k-1)d)}{\text{ch}^2(X(t) - (k-1)d)} \\
&+ \sum_{n=1}^3 \sum_{k=1}^3 2\varepsilon a_n(t) \frac{1 - \text{sh}^2(X(t) - (k-1)d)}{\text{ch}(X(t) - (k-1)d)} \frac{e^{-\frac{\varepsilon|(k-1)d-(n-1)d|}{2}}}{\text{ch}^2(X(t) - (k-1)d)} \\
&- \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 a_m(t)a_n(t) 2\varepsilon \sum_{k=1}^3 \left[\frac{\text{th}(X(t) - (k-1)d)}{\text{ch}^2(X(t) - (k-1)d)} \right] e^{-\frac{\varepsilon|(k-1)d-(n-1)d|}{2}} \\
&e^{-\frac{\varepsilon|(k-1)d-(m-1)d|}{2}} - 2h(t) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\text{ch}^2(X(t) - x)} dx + 8\alpha\dot{X}(t) = 0 \tag{3.13}
\end{aligned}$$

Взяв интеграл в выражении (3.13) и немного упростив его члены, получим:

$$\begin{aligned}
& 4 \left\{ \ddot{X}(t) + \sum_{k=1}^3 \frac{\varepsilon \operatorname{th}(X(t) - (k-1)d)}{2 \operatorname{ch}^2(X(t) - (k-1)d)} - \frac{h(t)}{2} + \alpha \dot{X}(t) \right\} \\
& + \sum_{n=1}^3 \sum_{k=1}^3 \varepsilon a_n(t) \frac{1 - \operatorname{sh}^2(X(t) - (k-1)d)}{\operatorname{ch}(X(t) - (k-1)d)} \frac{e^{-\frac{\varepsilon|(k-1)d - (n-1)d|}{2}}}{\operatorname{ch}^2(X(t) - (k-1)d)} \\
& - \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 a_m(t) a_n(t) \varepsilon \sum_{k=1}^3 \left[\frac{\operatorname{th}(X(t) - (k-1)d)}{\operatorname{ch}^2(X(t) - (k-1)d)} \right] \cdot \\
& \cdot e^{-\frac{\varepsilon|(k-1)d - (n-1)d|}{2}} e^{-\frac{\varepsilon|(k-1)d - (m-1)d|}{2}} = 0
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Оставшиеся три уравнений системы проще всего представить в виде $p + 1$ -ых уравнений. Для этого воспользуемся следующим выражением:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial a_p} \left(\sum_{n=1}^3 \sum_{m=1}^3 a_n a_m f(n, m) \right) = \sum_{m=1}^3 a_m f(p, m) + \sum_{n=1}^3 a_n f(n, p) = \\
& = 2 \sum_{n=1}^3 a_n f(n, p)
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Выражение (3.15) справедливо, поскольку для нашего случая выполняется равенство $f(n, m) = f(m, n)$. Используя (3.15), получим $p + 1$ уравнение системы:

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^3 \left\{ [\ddot{a}_n(t) + \alpha \dot{a}_n(t) + a_n(t)] \left[\frac{e^{-\frac{\varepsilon|(p-1)d-(n-1)d|}{2}}}{\varepsilon} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{|(p-1)d-(n-1)d|}{2} e^{-\frac{\varepsilon|(p-1)d-(n-1)d|}{2}} \right] \right. \\
& \quad \left. + a_n(t) \left[\frac{\varepsilon^2}{4} \left[\frac{e^{-\frac{\varepsilon|(p-1)d-(n-1)d|}{2}}}{\varepsilon} \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{|(p-1)d-(n-1)d|}{2} e^{-\frac{\varepsilon|(p-1)d-(n-1)d|}{2}} \right] \right. \\
& \quad \left. + \varepsilon \sum_{k=1}^3 \left[\frac{1}{\operatorname{ch}^2(X(t) - (k-1)d)} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{1}{2} \right] e^{-\frac{\varepsilon|(k-1)d-(n-1)d|}{2}} e^{-\frac{\varepsilon|(k-1)d-(p-1)d|}{2}} \right] \left. \right\} \\
& - \sum_{k=1}^3 \varepsilon \operatorname{th}(X(t) - (k-1)d) \frac{e^{-\frac{\varepsilon|(k-1)d-(p-1)d|}{2}}}{\operatorname{ch}(X(t) - (k-1)d)} = 0.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Таким образом для модели с тремя одинаковыми примесями точечного вида, находящимися на расстоянии d друг от друга, с учетом внешней силы и диссипации, получена система дифференциальных уравнений для координаты центра кинка (3.14) и амплитуд примесных мод (3.16). Распишем уравнение системы (3.16) для $p = 1$, $p = 2$ и $p = 3$. Тогда получим следующую систему из четырёх уравнений:

$$\begin{aligned}
& 4 \left\{ \ddot{X}(t) + \sum_{k=1}^3 \frac{\varepsilon \operatorname{th}(X(t) - (k-1)d)}{2 \operatorname{ch}^2(X(t) - (k-1)d)} - \frac{h(t)}{2} + \alpha \dot{X}(t) \right\} \\
& + \sum_{n=1}^3 \sum_{k=1}^3 \varepsilon a_n(t) \frac{1 - \operatorname{sh}^2(X(t) - (k-1)d)}{\operatorname{ch}(X(t) - (k-1)d)} \frac{e^{-\frac{\varepsilon|(k-1)d-(n-1)d|}{2}}}{\operatorname{ch}^2(X(t) - (k-1)d)} \\
& - \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 a_m(t) a_n(t) \varepsilon \sum_{k=1}^3 \left[\frac{\operatorname{th}(X(t) - (k-1)d)}{\operatorname{ch}^2(X(t) - (k-1)d)} \right] e^{-\frac{\varepsilon|(k-1)d-(n-1)d|}{2}} \\
& e^{-\frac{\varepsilon|(k-1)d-(m-1)d|}{2}} = 0,
\end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^3 \left\{ [\ddot{a}_n(t) + \alpha \dot{a}_n(t) + a_n(t)] \left[\frac{e^{-\frac{\varepsilon|(n-1)d|}{2}}}{\varepsilon} + \frac{|(n-1)d|}{2} e^{-\frac{\varepsilon|(n-1)d|}{2}} \right] \right. \\
& \quad + a_n(t) \left[\frac{\varepsilon^2}{4} \left[\frac{e^{-\frac{\varepsilon|(n-1)d|}{2}}}{\varepsilon} - \frac{|(n-1)d|}{2} e^{-\frac{\varepsilon|(n-1)d|}{2}} \right] \right. \\
& \quad + \varepsilon \sum_{k=1}^3 \left[\frac{1}{\operatorname{ch}^2(X(t) - (k-1)d)} \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{1}{2} \right] e^{-\frac{\varepsilon|(k-1)d - (n-1)d|}{2}} e^{-\frac{\varepsilon|(k-1)d|}{2}} \right] \left. \right\} \\
& \quad - \sum_{k=1}^3 \varepsilon \operatorname{th}(X(t) - (k-1)d) \frac{e^{-\frac{\varepsilon|(k-1)d|}{2}}}{\operatorname{ch}(X(t) - (k-1)d)} = 0,
\end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^3 \left\{ [\ddot{a}_n(t) + \alpha \dot{a}_n(t) + a_n(t)] \left[\frac{e^{-\frac{\varepsilon|d - (n-1)d|}{2}}}{\varepsilon} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{|d - (n-1)d|}{2} e^{-\frac{\varepsilon|d - (n-1)d|}{2}} \right] \right. \\
& \quad + a_n(t) \left[\frac{\varepsilon^2}{4} \left[\frac{e^{-\frac{\varepsilon|d - (n-1)d|}{2}}}{\varepsilon} - \frac{|d - (n-1)d|}{2} e^{-\frac{\varepsilon|d - (n-1)d|}{2}} \right] \right. \\
& \quad + \varepsilon \sum_{k=1}^3 \left[\frac{1}{\operatorname{ch}^2(X(t) - (k-1)d)} \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{1}{2} \right] e^{-\frac{\varepsilon|(k-1)d - (n-1)d|}{2}} e^{-\frac{\varepsilon|(k-1)d - d|}{2}} \right] \left. \right\} \\
& \quad - \sum_{k=1}^3 \varepsilon \operatorname{th}(X(t) - (k-1)d) \frac{e^{-\frac{\varepsilon|(k-1)d - d|}{2}}}{\operatorname{ch}(X(t) - (k-1)d)} = 0,
\end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^3 \left\{ [\ddot{a}_n(t) + \alpha \dot{a}_n(t) + a_n(t)] \left[\frac{e^{-\frac{\varepsilon|2d-(n-1)d|}{2}}}{\varepsilon} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{|2d-(n-1)d|}{2} e^{-\frac{\varepsilon|2d-(n-1)d|}{2}} \right] \right. \\
& \quad \left. + a_n(t) \left[\frac{\varepsilon^2}{4} \left[\frac{e^{-\frac{\varepsilon|2d-(n-1)d|}{2}}}{\varepsilon} \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{|2d-(n-1)d|}{2} e^{-\frac{\varepsilon|2d-(n-1)d|}{2}} \right] \right. \\
& \quad \left. + \varepsilon \sum_{k=1}^3 \left[\frac{1}{\operatorname{ch}^2(X(t) - (k-1)d)} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{1}{2} \right] e^{-\frac{\varepsilon|(k-1)d-(n-1)d|}{2}} e^{-\frac{\varepsilon|(k-1)d-2d|}{2}} \right] \\
& \quad \left. - \sum_{k=1}^3 \varepsilon \operatorname{th}(X(t) - (k-1)d) \frac{e^{-\frac{\varepsilon|(k-1)d-2d|}{2}}}{\operatorname{ch}(X(t) - (k-1)d)} \right\} = 0.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Распишем систему (3.17) – (3.20) более подробно, раскрыв суммы. Для упрощения записи уравнений введём следующие обозначения:

$$e_{np} = e^{-\frac{\varepsilon|p-n|d}{2}} = e_d^{|p-n|}, E_{pn\pm} = \left[\frac{1}{\varepsilon} \pm \frac{|p-n|d}{2} \right] e_d^{|p-n|} = E_{|p-n|\pm}, p = 1, \dots, 3 \tag{3.21}$$

$$U_k = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(X(t) - (k-1)d)}, F_k = \frac{\operatorname{th}(X(t) - (k-1)d)}{\operatorname{ch}^2(X(t) - (k-1)d)}, k = 1 \dots 3, \tag{3.22}$$

$$\begin{aligned}
& 4 \left\{ \ddot{X}(t) + \varepsilon/2 [U'_1 + U'_2 + U'_3] - \frac{h(t)}{2} + \alpha \dot{X}(t) \right\} + a_1(t) [\varepsilon(F'_1 e_{11} + F'_2 e_{12} + \\
& F'_3 e_{13})] + a_2(t) [\varepsilon(F'_1 e_{21} + F'_2 e_{22} + F'_3 e_{23})] + a_3(t) [\varepsilon(F'_1 e_{31} + F'_2 e_{32} + \\
& F'_3 e_{33})] + a_1^2(t) [-\varepsilon[U'_1 e_{11} e_{11} + U'_2 e_{12} e_{12} + U'_3 e_{13} e_{13}]] + \\
& 2a_1(t)a_2(t) [-\varepsilon[U'_1 e_{11} e_{21} + U'_2 e_{12} e_{22} + U'_3 e_{13} e_{23}]] + a_2^2(t) [-\varepsilon[U'_1 e_{21} e_{21} + \\
& U'_2 e_{22} e_{22} + U'_3 e_{23} e_{23}]] + 2a_2(t)a_3(t) [-\varepsilon[U'_1 e_{21} e_{31} + U'_2 e_{22} e_{32} + \\
& U'_3 e_{23} e_{33}]] + a_3^2(t) [-\varepsilon[U'_1 e_{31} e_{31} + U'_2 e_{32} e_{32} + U'_3 e_{33} e_{33}]] + \\
& 2a_1(t)a_3(t) [-\varepsilon[U'_1 e_{11} e_{31} + U'_2 e_{12} e_{32} + U'_3 e_{13} e_{33}]] = 0,
\end{aligned} \tag{3.23}$$

$$\begin{aligned}
& [\ddot{a}_1(t) + \alpha \dot{a}_1(t) + a_1(t)]E_{11+} + [\ddot{a}_2(t) + \alpha \dot{a}_2(t) + a_2(t)]E_{12+} + \\
& [\ddot{a}_3(t) + \alpha \dot{a}_3(t) + a_3(t)]E_{13+} + a_1(t)\varepsilon \left[\varepsilon E_{11-}/4 + [[U_1 - 1/2]e_{11}e_{11} + \right. \\
& \quad \left. [U_2 - 1/2]e_{12}e_{12} + [U_3 - 1/2]e_{13}e_{13}] \right] + a_2(t)\varepsilon \left[\varepsilon E_{12-}/4 + [[U_1 - \right. \\
& 1/2]e_{21}e_{11} + [U_2 - 1/2]e_{22}e_{12} + [U_3 - 1/2]e_{23}e_{13}] \right] + a_3(t)\varepsilon \left[\varepsilon E_{13-}/4 + \right. \\
& \left. [[U_1 - 1/2]e_{31}e_{11} + [U_2 - 1/2]e_{32}e_{12} + [U_3 - 1/2]e_{33}e_{13}] \right] - \varepsilon[F_1e_{11} + \\
& \quad F_2e_{12} + F_3e_{13}] = 0,
\end{aligned} \tag{3.24}$$

$$\begin{aligned}
& [\ddot{a}_1(t) + \alpha \dot{a}_1(t) + a_1(t)]E_{21+} + [\ddot{a}_2(t) + \alpha \dot{a}_2(t) + a_2(t)]E_{22+} + \\
& [\ddot{a}_3(t) + \alpha \dot{a}_3(t) + a_3(t)]E_{23+} + a_1(t)\varepsilon \left[\varepsilon E_{21-}/4 + [[U_1 - 1/2]e_{11}e_{21} + \right. \\
& \quad \left. [U_2 - 1/2]e_{12}e_{22} + [U_3 - 1/2]e_{13}e_{23}] \right] + a_2(t)\varepsilon \left[\varepsilon E_{22-}/4 + [[U_1 - \right. \\
& 1/2]e_{21}e_{21} + [U_2 - 1/2]e_{22}e_{22} + [U_3 - 1/2]e_{23}e_{23}] \right] + a_3(t)\varepsilon \left[\varepsilon E_{23-}/4 + \right. \\
& \left. [[U_1 - 1/2]e_{31}e_{21} + [U_2 - 1/2]e_{32}e_{22} + [U_3 - 1/2]e_{33}e_{23}] \right] - \varepsilon[F_1e_{21} + \\
& \quad F_2e_{22} + F_3e_{23}] = 0,
\end{aligned} \tag{3.25}$$

$$\begin{aligned}
& [\ddot{a}_1(t) + \alpha \dot{a}_1(t) + a_1(t)]E_{31+} + [\ddot{a}_2(t) + \alpha \dot{a}_2(t) + a_2(t)]E_{32+} + \\
& [\ddot{a}_3(t) + \alpha \dot{a}_3(t) + a_3(t)]E_{33+} + a_1(t)\varepsilon \left[\varepsilon E_{31-}/4 + \varepsilon [[U_1 - 1/2]e_{31} + \right. \\
& \quad \left. [U_2 - 1/2]e_{12}e_{32} + [U_3 - 1/2]e_{13}] \right] + a_2(t)\varepsilon \left[\varepsilon E_{32-}/4 + [[U_1 - \right. \\
& 1/2]e_{21}e_{31} + [U_2 - 1/2]e_{32} + [U_3 - 1/2]e_{23}] \right] + a_3(t)\varepsilon \left[\varepsilon E_{33-}/4 + \right. \\
& \left. [[U_1 - 1/2]e_{31}e_{31} + [U_2 - 1/2]e_{32}e_{32} + [U_3 - 1/2]e_{33}] \right] - \varepsilon[F_1e_{31} + \\
& \quad F_2e_{32} + F_3e_{33}] = 0.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Приведём выражения (3.23) – (3.26) к виду, содержащие только одно ускорение. Вычтем из второго уравнения (3.24), умноженного на $[1 - \varepsilon^2 E_{23+} E_{32+}]$, третье (3.25), умноженное на $\varepsilon[E_{12+} - \varepsilon E_{13+} E_{32+}]$, вынесем и вставим $[\ddot{a}_3(t) + \alpha \dot{a}_3(t) + a_3(t)]$, полученное из (3.26), вынесем и избавимся от $[\ddot{a}_2(t) + \alpha \dot{a}_2(t) + a_2(t)]$. Таким образом получим выражение, содержащее только одно ускорение по $\ddot{a}_1(t)$:

$$\begin{aligned}
& [\ddot{a}_1 + \alpha \dot{a}_1 + a_1(1 - \varepsilon^2/4)] \{ 1/\varepsilon [1 - \varepsilon^2 E_{23+} E_{32+}] - E_{21+} \varepsilon [E_{12+} - \\
& \varepsilon E_{13+} E_{32+}] - E_{31+} \varepsilon [E_{13+} - \varepsilon E_{12+} E_{23+}] \} + a_1 \{ [\varepsilon U_1 + (\varepsilon U_2 - \varepsilon/2)e_{12}^2 + \right.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

$$\begin{aligned}
& (\varepsilon U_3 - \varepsilon/2)e_{13}^2][1 - \varepsilon^2 E_{23+} E_{32+}] - [\varepsilon U_1 e_{21} + (\varepsilon U_2 - \varepsilon/2)e_{12} + \\
& (\varepsilon U_3 - \varepsilon/2)e_{13} e_{23}] \varepsilon [E_{12+} - \varepsilon E_{13+} E_{32+}] - [\varepsilon U_1 e_{31} + (\varepsilon U_2 - \\
& \varepsilon/2)e_{12} e_{32} + (\varepsilon U_3 - \varepsilon/2)e_{13}] \varepsilon [E_{13+} - \varepsilon E_{12+} E_{23+}] \} + a_2 \{ [(2e_{12} - \\
& \varepsilon E_{12-}) E_{32+} - (2e_{32} - \varepsilon E_{32-}) E_{12+}] \varepsilon^3 E_{23+} / 4 + [(\varepsilon U_1 - \varepsilon/2)e_{21} + \\
& \varepsilon U_2 e_{12} + (\varepsilon U_3 - \varepsilon/2)e_{23} e_{13}] [1 - \varepsilon^2 E_{23+} E_{32+}] - [(\varepsilon U_1 - \varepsilon/2)e_{21}^2 + \\
& \varepsilon U_2 + (\varepsilon U_3 - \varepsilon/2)e_{23}^2] \varepsilon [E_{12+} - \varepsilon E_{13+} E_{32+}] - [(\varepsilon U_1 - \varepsilon/2)e_{21} e_{31} + \\
& \varepsilon U_2 e_{32} + (\varepsilon U_3 - \varepsilon/2)e_{23}] \varepsilon [E_{13+} - \varepsilon E_{12+} E_{23+}] \} + a_3 \{ [(2e_{13} - \\
& \varepsilon E_{13-}) E_{23+} - (2e_{23} - \varepsilon E_{23-}) E_{13+}] \varepsilon^3 E_{32+} / 4 + [(\varepsilon U_1 - \varepsilon/2)e_{31} + \\
& (\varepsilon U_2 - \varepsilon/2)e_{32} e_{12} + \varepsilon U_3 e_{13}] [1 - \varepsilon^2 E_{23+} E_{32+}] - [(\varepsilon U_1 - \varepsilon/2)e_{31} e_{21} + \\
& (\varepsilon U_2 - \varepsilon/2)e_{32} + \varepsilon U_3 e_{23}] \varepsilon [E_{12+} - \varepsilon E_{13+} E_{32+}] - [(\varepsilon U_1 - \varepsilon/2)e_{31}^2 + \\
& (\varepsilon U_2 - \varepsilon/2)e_{32}^2 + \varepsilon U_3] \varepsilon [E_{13+} - \varepsilon E_{12+} E_{23+}] \} - \{ [\varepsilon F_1 + \varepsilon F_2 e_{12} + \\
& \varepsilon F_3 e_{13}] [1 - \varepsilon^2 E_{23+} E_{32+}] - [\varepsilon F_1 e_{21} + \varepsilon F_2 + \varepsilon F_3 e_{23}] \varepsilon [E_{12+} - \\
& \varepsilon E_{13+} E_{32+}] - [\varepsilon F_1 e_{31} + \varepsilon F_2 e_{32} + \varepsilon F_3] \varepsilon [E_{13+} - \varepsilon E_{12+} E_{23+}] \} = 0.
\end{aligned}$$

Проведя те же математические операции с оставшимся двумя уравнениями системы, получим:

$$\begin{aligned}
& [\ddot{a}_2 + \alpha \dot{a}_2 + a_2(1 - \varepsilon^2/4)] \{ 1/\varepsilon [1 - \varepsilon^2 E_{13+} E_{31+}] - E_{12+} \varepsilon [E_{21+} - \\
& \varepsilon E_{23+} E_{31+}] - E_{32+} \varepsilon [E_{23+} - \varepsilon E_{21+} E_{13+}] \} + a_1 \{ [(2e_{21} - \varepsilon E_{21-}) E_{31+} - \\
& (2e_{31} - \varepsilon E_{31-}) E_{21+}] \varepsilon^3 E_{13+} / 4 + [\varepsilon U_1 e_{21} + (\varepsilon U_2 - \varepsilon/2)e_{12} + \\
& (\varepsilon U_3 - \varepsilon/2)e_{13} e_{23}] [1 - \varepsilon^2 E_{13+} E_{31+}] - [\varepsilon U_1 + (\varepsilon U_2 - \varepsilon/2)e_{12}^2 + \\
& (\varepsilon U_3 - \varepsilon/2)e_{13}^2] \varepsilon [E_{21+} - \varepsilon E_{23+} E_{31+}] - [\varepsilon U_1 e_{31} + (\varepsilon U_2 - \varepsilon/2)e_{12} e_{32} + \\
& (\varepsilon U_3 - \varepsilon/2)e_{13}] \varepsilon [E_{23+} - \varepsilon E_{21+} E_{13+}] \} + a_2 \{ [(\varepsilon U_1 - \varepsilon/2)e_{21}^2 + \varepsilon U_2 + \\
& (\varepsilon U_3 - \varepsilon/2)e_{23}^2] [1 - \varepsilon^2 E_{13+} E_{31+}] - [(\varepsilon U_1 - \varepsilon/2)e_{21} + \varepsilon U_2 e_{12} + \\
& (\varepsilon U_3 - \varepsilon/2)e_{23} e_{13}] \varepsilon [E_{21+} - \varepsilon E_{23+} E_{31+}] - [(\varepsilon U_1 - \varepsilon/2)e_{21} e_{31} + \\
& \varepsilon U_2 e_{32} + (\varepsilon U_3 - \varepsilon/2)e_{23}] \varepsilon [E_{23+} - \varepsilon E_{21+} E_{13+}] \} + a_3 \{ [(2e_{23} - \\
& \varepsilon E_{23-}) E_{13+} - (2e_{13} - \varepsilon E_{13-}) E_{23+}] \varepsilon^3 E_{31+} / 4 + [(\varepsilon U_1 - \varepsilon/2)e_{31} e_{21} + \\
& (\varepsilon U_2 - \varepsilon/2)e_{32} + \varepsilon U_3 e_{23}] [1 - \varepsilon^2 E_{13+} E_{31+}] - [(\varepsilon U_1 - \varepsilon/2)e_{31} + \\
& (\varepsilon U_2 - \varepsilon/2)e_{32} e_{12} + \varepsilon U_3 e_{13}] \varepsilon [E_{21+} - \varepsilon E_{23+} E_{31+}] - [(\varepsilon U_1 - \varepsilon/2)e_{31}^2 + \\
& (\varepsilon U_2 - \varepsilon/2)e_{32}^2 + \varepsilon U_3] \varepsilon [E_{23+} - \varepsilon E_{21+} E_{13+}] \} - \{ [\varepsilon F_1 e_{21} + \varepsilon F_2 + \\
& \varepsilon F_3 e_{23}] \varepsilon [E_{23+} - \varepsilon E_{21+} E_{13+}] \} = 0. \tag{3.28}
\end{aligned}$$

$$\varepsilon F_3 e_{23}][1 - \varepsilon^2 E_{13+} E_{31+}] - [\varepsilon F_1 + \varepsilon F_2 e_{12} + \varepsilon F_3 e_{13}] \varepsilon [E_{21+} - \varepsilon E_{23+} E_{31+}] - [\varepsilon F_1 e_{31} + \varepsilon F_2 e_{32} + \varepsilon F_3] \varepsilon [E_{23+} - \varepsilon E_{21+} E_{13+}] \} = 0.$$

$$\begin{aligned} & \{[\ddot{a}_3 + \alpha \dot{a}_3 + a_3(1 - \varepsilon^2/4)]\{1/\varepsilon [1 - \varepsilon^2 E_{21+} E_{12+}] - E_{23+} \varepsilon [E_{32+} - \\ & \varepsilon E_{31+} E_{12+}] - E_{13+} \varepsilon [E_{31+} - \varepsilon E_{21+} E_{32+}]\} + a_1 \{[(2e_{31} - \varepsilon E_{31-}) E_{21+} - \\ & (2e_{21} - \varepsilon E_{21-}) E_{31+}] \varepsilon^3 E_{12+}/4 + [\varepsilon_1 U_1 e_{31} + (\varepsilon U_2 - \varepsilon/2) e_{12} e_{32} + \\ & (\varepsilon U_3 - \varepsilon/2) e_{13}][1 - \varepsilon^2 E_{21+} E_{12+}] - [\varepsilon U_1 e_{21} + (\varepsilon U_2 - \varepsilon/2) e_{12} + \\ & (\varepsilon U_3 - \varepsilon/2) e_{13} e_{23}] \varepsilon [E_{32+} - \varepsilon E_{31+} E_{12+}] - [\varepsilon U_1 + (\varepsilon U_2 - \varepsilon/2) e_{12}^2 + \\ & (\varepsilon U_3 - \varepsilon/2) e_{13}^2] \varepsilon [E_{31+} - \varepsilon E_{21+} E_{32+}]\} + a_2 \{[(2e_{32} - \varepsilon E_{32-}) E_{12+} - \\ & (2e_{12} - \varepsilon E_{12-}) E_{32+}] \varepsilon^3 E_{21+}/4 + [(\varepsilon U_1 - \varepsilon/2) e_{21} e_{31} + \varepsilon U_2 e_{32} + \\ & (\varepsilon U_3 - \varepsilon/2) e_{23}][1 - \varepsilon^2 E_{21+} E_{12+}] - [(\varepsilon U_1 - \varepsilon/2) e_{21}^2 + \varepsilon U_2 + \\ & (\varepsilon U_3 - \varepsilon/2) e_{23}^2] \varepsilon [E_{32+} - \varepsilon E_{31+} E_{12+}] - [(\varepsilon U_1 - \varepsilon/2) e_{21} + \varepsilon U_2 e_{12} + \\ & (\varepsilon U_3 - \varepsilon/2) e_{23} e_{13}] \varepsilon [E_{31+} - \varepsilon E_{21+} E_{32+}]\} + a_3 \{[(\varepsilon U_1 - \varepsilon/2) e_{31}^2 + \\ & (\varepsilon U_2 - \varepsilon/2) e_{32}^2 + \varepsilon U_3][1 - \varepsilon^2 E_{21+} E_{12+}] - [(\varepsilon U_1 - \varepsilon/2) e_{31} e_{21} + \\ & (\varepsilon U_2 - \varepsilon/2) e_{32} + \varepsilon U_3 e_{23}] \varepsilon [E_{32+} - \varepsilon E_{31+} E_{12+}] - [(\varepsilon U_1 - \varepsilon/2) e_{31} + \\ & (\varepsilon U_2 - \varepsilon/2) e_{32} e_{12} + \varepsilon U_3 e_{13}] \varepsilon [E_{31+} - \varepsilon E_{21+} E_{32+}]\} - \{[\varepsilon F_1 e_{31} + \\ & \varepsilon F_2 e_{32} + \varepsilon F_3][1 - \varepsilon^2 E_{21+} E_{12+}] - [\varepsilon F_1 e_{21} + \varepsilon F_2 + \varepsilon F_3 e_{23}] \varepsilon [E_{32+} - \\ & \varepsilon E_{31+} E_{12+}] - [\varepsilon F_1 + \varepsilon F_2 e_{12} + \varepsilon F_3 e_{13}] \varepsilon [E_{31+} - \varepsilon E_{21+} E_{32+}]\} = 0. \end{aligned} \quad (3.29)$$

При устремлении расстояния между второй и третьей примесью на бесконечность можно перейти к системе из трёх уравнений. В этом случае параметры U_3, F_3 и их производные будут равны нулю. Также параметры взаимодействия $E_{p3+} = E_{3n+} = 0$ и $e_{p3} = e_{3n} = 0$. Коллективная переменная третьей моды также будет равна нулю $a_3(t) = 0$. Таким образом, полученная система уравнений будет преобразована к виду:

$$\begin{aligned} & 4 \left\{ \ddot{X}(t) + \frac{\varepsilon}{2} [U'_1 + U'_2] - h(t)/2 + \alpha \dot{X}(t) \right\} + a_1(t) [\varepsilon (F'_1 e_{11} + F'_2 e_{12})] + \\ & a_2(t) [\varepsilon (F'_1 e_{21} + F'_2 e_{22})] + a_1^2(t) [-\varepsilon [U'_1 e_{11} e_{11} + U'_2 e_{12} e_{12}]] + \\ & 2a_1(t) a_2(t) [-\varepsilon [U'_1 e_{11} e_{21} + U'_2 e_{12} e_{22}]] + a_2^2(t) [-\varepsilon [U'_1 e_{21} e_{21} + U'_2 e_{22} e_{22}]] = \\ & 0, \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$[\ddot{a}_1 + \alpha \dot{a}_1 + a_1(1 - \varepsilon^2/4)]\{1/\varepsilon - E_{21+}E_{12+}\varepsilon\} + a_1\{[\varepsilon U_1 + (\varepsilon U_2 - \varepsilon/2)e_{12}^2] - [\varepsilon U_1 e_{21} + (\varepsilon U_2 - \varepsilon/2)e_{12}]\varepsilon E_{12+}\} + a_2\{[(\varepsilon U_1 - \varepsilon/2)e_{21} + \varepsilon U_2 e_{12}] - [(\varepsilon U_1 - \varepsilon/2)e_{21}^2 + \varepsilon U_2]\varepsilon E_{12+}\} - \{[\varepsilon F_1 + \varepsilon F_2 e_{12}] - [\varepsilon F_1 e_{21} + \varepsilon F_2]\varepsilon E_{12+}\} = 0, \quad (3.31)$$

$$[\ddot{a}_2 + \alpha \dot{a}_2 + a_2(1 - \varepsilon^2/4)]\{1/\varepsilon - E_{12+}\varepsilon E_{21+}\} + a_1\{[\varepsilon U_1 e_{21} + (\varepsilon U_2 - \varepsilon/2)e_{12}] - [\varepsilon U_1 + (\varepsilon U_2 - \varepsilon/2)e_{12}^2]\varepsilon E_{21+}\} + a_2\{[(\varepsilon U_1 - \varepsilon/2)e_{21}^2 + \varepsilon U_2] - [(\varepsilon U_1 - \varepsilon/2)e_{21} + \varepsilon U_2 e_{12}]\varepsilon E_{21+}\} - \{[\varepsilon F_1 e_{21} + \varepsilon F_2] - [\varepsilon F_1 + \varepsilon F_2 e_{12}]\varepsilon E_{21+}\} = 0. \quad (3.32)$$

Полученная система уравнения (3.30) – (3.32) совпадает с полученной ранее в работе [104] по исследованию динамики кинка УСГ в системе с двумя одинаковыми примесями. Также из системы (3.23), (3.27) – (3.29) можно перейти к системе с одной примесью $a_1(t) = a_2(t) = a_3(t) = a(t)$, устремив расстояние между ними к бесконечности $d \rightarrow \infty$.

$$4 \left\{ \ddot{X}(t) + \frac{\varepsilon}{2} U_1' - \frac{h(t)}{2} + \alpha \dot{X}(t) \right\} + a_1(t) [\varepsilon F_1' e_{11}] - \varepsilon a_1^2(t) U_1' e_{11} e_{11} = 0, \quad (3.33)$$

$$[\ddot{a}_1 + \alpha \dot{a}_1 + a_1(1 - \varepsilon^2/4)] \frac{1}{\varepsilon} + a_1 \varepsilon U_1 - \varepsilon F_1 = 0. \quad (3.34)$$

В случае $h(t) = \alpha = 0$ система (3.33) – (3.34) сводится к ранее полученной системе (1.43). В отсутствии примесей ($a_1(t) = a_2(t) = a_3(t) = 0$) уравнения (3.23), (3.27) – (3.29) сводится к одному уравнению:

$$\ddot{X}(t) + \alpha \dot{X}(t) - \frac{h(t)}{2} = 0. \quad (3.35)$$

Стоит отметить, что в работе [104], была предложена система уравнений для модели с N -ым количеством точечных примесей с учётом внешней силы и затухания. Из этой системы уравнений можно прийти к искомым уравнениям системы (3.15), (3.16), приняв условия, описанные выше. Далее рассмотрим динамику рассеяния кинка и локализованных в области примесей волн в бездиссипативной модели с тремя точечными примесями.

3.2. Динамика кинка с тремя точечными примесями. Результаты аналитической модели

Исследуем динамику кинка в бездиссипативной модели ($h(t) = \alpha = 0$) с тремя одинаковыми точечными примесями в виде потенциального барьера и ямы. Рассмотрим предельный случай, когда в (3.23), (3.27) – (3.29) примесные моды отсутствуют, т.е. $a_p(t) = 0$. Тогда получим следующее выражение:

$$4 \left\{ \dot{X}(t) + \sum_{k=1}^3 \frac{\varepsilon \operatorname{th}(X(t) - (k-1)d)}{2 \operatorname{ch}^2(X(t) - (k-1)d)} \right\} = 0. \quad (3.36)$$

Умножим (3.36) на $\dot{X}(t)$ и проинтегрируем по времени:

$$\dot{X}^2(t) - \dot{X}^2(0) - \sum_{k=1}^N \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{1}{\operatorname{ch}^2(X(t) - (k-1)d)} - \frac{1}{\operatorname{ch}^2(X(0) - (k-1)d)} \right) = 0. \quad (3.37)$$

В случае больших расстояний $X(0) \rightarrow \infty$ выражение (3.37) можно упростить:

$$\dot{X}^2(t) - \dot{X}^2(0) - \sum_{k=1}^N \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{\operatorname{ch}^2(X(t) - (k-1)d)} = 0. \quad (3.38)$$

Полученное уравнение (3.38) достаточно хорошо описывает критические скорости динамики кинка в случае примеси в виде потенциального барьера ($-1 < \varepsilon < 0$), поскольку отсутствуют локализованные решения бризерного типа. Пусть в начальный момент времени $t_0 = 0$ кинк находится на достаточно большом расстоянии от примесей $X(0) = -15$, и затем, в момент времени t , движется с начальной скоростью $\dot{X}(0)$. На рисунке 3.1 в зависимости от начальной скорости представлены различные случаи динамики кинка: прохождение кинка через все три примеси (кривая 1), отражение от первой примеси (кривая 2), отражение от второй примеси (кривая 3). В случае, когда начальная скорость близка к скорости прохождения, кинк на некоторое время задерживается на примеси (кривая 4), прежде чем её покинуть.

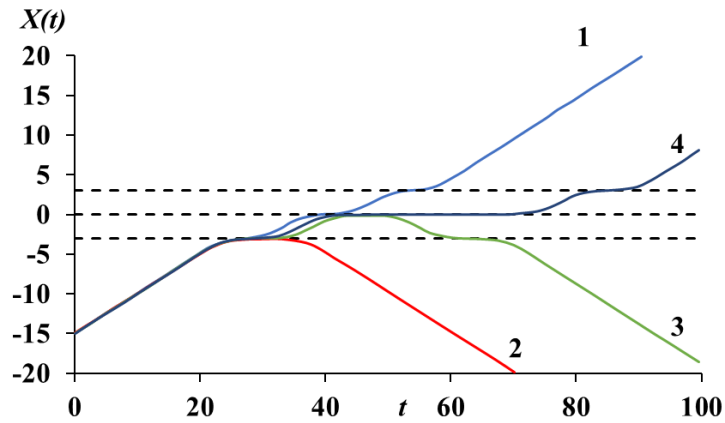


Рисунок 3.1. Зависимость координаты центра кинка $X(t)$ от времени t при $\varepsilon = -0.5$ и $d = 3$: 1) $\dot{X}(0) = 0.51$, 2) $\dot{X}(0) = 0.502$, 3) $\dot{X}(0) = 0.5035$, 4) $\dot{X}(0) = 0.5049083$.

Зависимость критической скорости прохождения кинка от параметра $1 - \varepsilon$, получаемая из уравнения (3.38), представлена на рисунке 3.2.

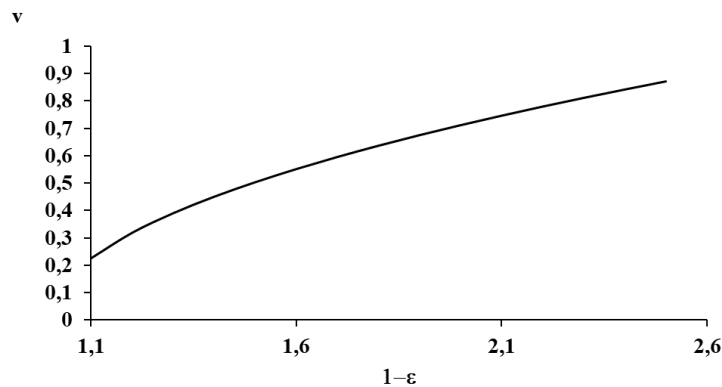


Рисунок 3.2. Зависимость минимальной скорости прохождения кинка от параметра $1 - \varepsilon$ в модели с тремя примесями.

Из рисунка 3.2 видно, что с увеличением параметра $1 - \varepsilon$, необходимая скорость для прохождения трёх примесей увеличивается. На рисунке 3.3 представлены некоторые частные случаи взаимодействия кинка с тремя точечными примесями в виде потенциальной ямы. Основное отличие от случая потенциального барьера заключается в том, что при прохождении кинка на примесях возникают высокоамплитудные волны бризерного типа, существенно влияющие на динамику кинка, поскольку значительная часть энергии затрачивается на их возбуждение, а также возникают резонансные эффекты при взаимодействии кинка с примесями.

В частности, на рисунке 3.3а, помимо прохождения (кривая 1) и отражения (кривая 2) кинка можно выделить резонансное явление, когда кинк проходит через три примеси с начальной скоростью меньшей необходимой для их прохождения (кривая 3), называемое «кванзитуннелированием».

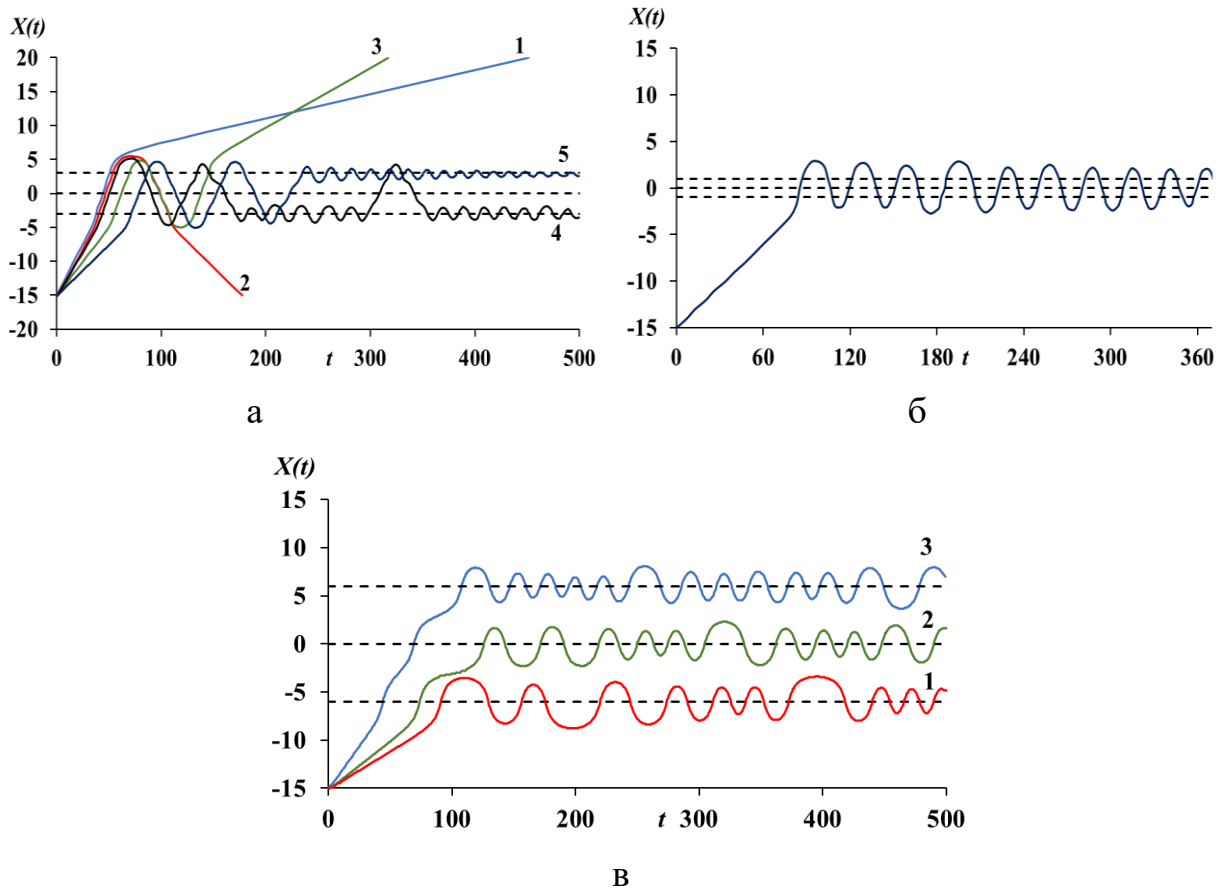


Рисунок 3.3. Зависимость координаты центра кинка $X(t)$ от времени (t) в модели точечных примесей в виде потенциальных ям для случаев: а) $d = 3$, $\varepsilon = 0.5$: 1) $\dot{X}(0) = 0.3$, 2) $\dot{X}(0) = 0.28$, 3) $\dot{X}(0) = 0.2$, 4) $\dot{X}(0) = 0.26$, 5) $\dot{X}(0) = 0.15$; б) $d = 1$, $\varepsilon = 0.5$, $\dot{X}(0) = 0.15$; в) $d = 6$, $\varepsilon = 0.5$: 1) $\dot{X}(0) = 0.078$, 2) $\dot{X}(0) = 0.1$, 3) $\dot{X}(0) = 0.18$.

Также получены случаи, когда центр кинка смещается от одной примеси к другой, так называемый «перескок» кинка между примесями (кривая 4) или более сложный сценарий перескока с последующим пиннингом, т.е. когда центр кинка находится в центре примеси в течении долгого промежутка времени (кривая 5). В случае, когда примеси расположены на расстоянии $d \leq 1$, в зависимости от начальной скорости можно получить случай, когда кинк колеблется на всех трёх примесях, выступающих как одна коллективная (единая), в течение длительного

времени (рисунок 3.3б). При увеличении расстояния между примесями можно наблюдать пиннинг кинка на каждой примеси отдельно (рисунок 3.3в).

3.3. Связанные колебания локализованных на трёх точечных примесях волн. Результаты аналитической модели

Рассмотрим уравнение (3.3) в модели трёх одинаковых точечных примесей, в отсутствие кинка ($X(t) \rightarrow \infty$). В этом случае анзац примет вид:

$$u_a = \sum_{k=1}^3 a_k(t) e^{-\frac{\varepsilon|x-x_k|}{2}}, \quad (3.39)$$

где $x_k = (k-1)d$. Выражение (3.38) есть колебания локализованных, на примесях, волн, возбуждённых в результате прохождения кинка через точечные примеси. Принимая, что $a_n(t)$ – малы (величина порядка ε), то $u_a \ll 1$. Таким образом, система уравнений, полученная в параграфе 3.1, (3.23), (3.27) – (3.29) сводится к системе трёх уравнений

$$\begin{cases} \ddot{a}_1 + a_1\omega_1^2 + a_2k_{12} + a_3k_{13} = 0, \\ \ddot{a}_2 + a_2\omega_2^2 + (a_1 + a_3)k_{21} = 0, \\ \ddot{a}_3 + a_3\omega_1^2 + a_1k_{13} + a_2k_{12} = 0. \end{cases} \quad (3.40)$$

где параметры ω_1^2 , ω_2^2 , k_{12} , k_{13} , k_{21} соответственно равны:

$$\omega_1^2 = 1 - \frac{\varepsilon^2}{4} + \frac{\varepsilon^3 d e_d^2 / 4}{1 - (1 + \varepsilon d + \varepsilon^2 d^2 / 2) e_d^2} \left[1 + e_d^2 + \frac{\varepsilon d (e_d^2 - 1) e_d^2 / 2}{1 - (1 + \varepsilon d) e_d^2} \right], \quad (3.41)$$

$$\omega_2^2 = 1 - \frac{\varepsilon^2}{4} + \frac{\varepsilon^3 d (1 - e_d^2) e_d^2 / 2}{1 - (1 + \varepsilon d + \varepsilon^2 d^2 / 2) e_d^2}, \quad (3.42)$$

$$k_{12} = \frac{\varepsilon^2 [(1 + \varepsilon d) e_d^2 - 1] e_d / 2}{1 - (1 + \varepsilon d + \varepsilon^2 d^2 / 2) e_d^2}, \quad (3.43)$$

$$k_{13} = \frac{\varepsilon^2 e_d^2 / 2}{1 - (1 + \varepsilon d + \varepsilon^2 d^2 / 2) e_d^2} \left[\varepsilon d (1 + e_d^2) / 2 + e_d^2 - 1 + \frac{\varepsilon^2 d^2 (1 - e_d^2) e_d^2 / 4}{1 - (1 + \varepsilon d) e_d^2} \right], \quad (3.44)$$

$$k_{21} = \frac{\varepsilon^2(\varepsilon d e_d^2/2 - 1)(1 - e_d^2)e_d/2}{1 - (1 + \varepsilon d + \varepsilon^2 d^2/2)e_d^2}, \quad (3.45)$$

Общий вид полученной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (3.40), показывает, что колебательная система связанных локализованных волн бризерного вида, в случае когда колебания малы, описывается системой трёх связанных эффективных гармонических осцилляторов. Проведём анализ выражений (3.41) – (3.45) в предельном случае $d \rightarrow \infty$:

$$\lim_{d \rightarrow \infty} e_d = 0, \quad \lim_{d \rightarrow \infty} \omega_1^2 = \lim_{d \rightarrow \infty} \omega_2^2 = 1 - \frac{\varepsilon^2}{4}, \quad (3.46)$$

$$\lim_{d \rightarrow \infty} k_{12} = \lim_{d \rightarrow \infty} k_{13} = \lim_{d \rightarrow \infty} k_{21} = 0.$$

Выражения (3.46) показывают, что, увеличивая расстояние d между примесями, коэффициенты связи k_{12} , k_{13} , k_{21} равны нулю, а ω_1^2 , ω_2^2 переходят в выражения для одиночной δ -функции [3, 22], т.е. колеблются независимо на собственной частоте одиночной примеси, что продемонстрировано на рисунке 3.4.

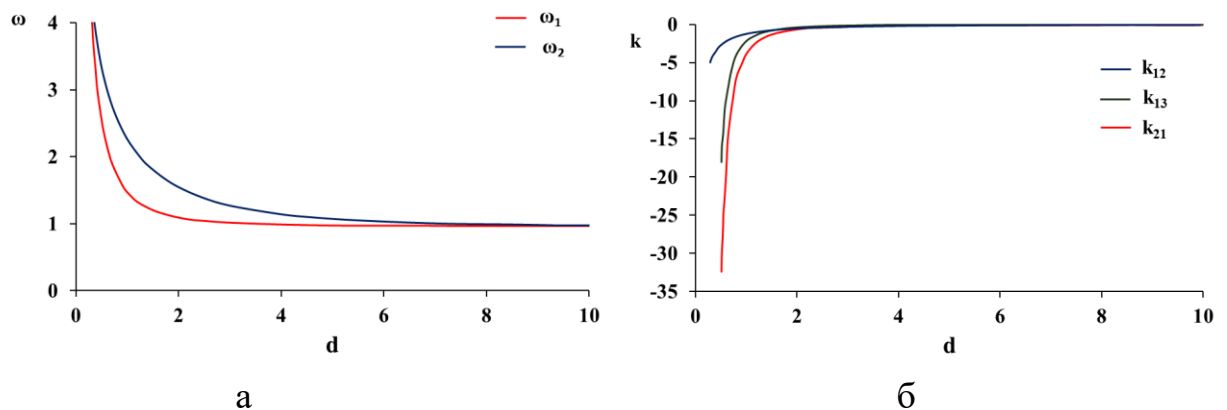


Рисунок 3.4. Зависимость параметров системы связанных эффективных гармонических осцилляторов для $\varepsilon = 0.5$ от расстояния между примесями d :
а) $\omega_{1,2}(\varepsilon, d)$; б) $k_{12}(\varepsilon, d)$, $k_{13}(\varepsilon, d)$, $k_{21}(\varepsilon, d)$

Стоит отметить, что в работах [10, 96] ранее исследовался случай двух точечных и протяжённых примесей, где приближённо для амплитуд примесных мод были получены линейные динамические уравнения, являющимися уравнениями колебательной системы двух осцилляторов с нелинейной связью. Решение системы

(3.40) с тремя связанными осцилляторами с нелинейной связью можно представить в виде суммы трёх гармонических колебаний вида:

$$\begin{aligned} a_1(t) &= a_{01} \cos(\Omega_1 t + \theta_1) + \eta_{12} a_{02} \cos(\Omega_2 t + \theta_2) + \eta_{13} a_{03} \cos(\Omega_3 t + \theta_3), \\ a_2(t) &= \eta_{21} a_{01} \cos(\Omega_1 t + \theta_1) + a_{02} \cos(\Omega_2 t + \theta_2) + \eta_{23} a_{03} \cos(\Omega_3 t + \theta_3), \\ a_3(t) &= \eta_{31} a_{01} \cos(\Omega_1 t + \theta_1) + \eta_{32} a_{02} \cos(\Omega_2 t + \theta_2) + a_{03} \cos(\Omega_3 t + \theta_3), \end{aligned} \quad (3.47)$$

где $\theta_{1,2,3}$ – начальные фазы, a_{01}, a_{02}, a_{03} – константы, определяемые из начальных условий. Найдем значения параметров частот $\Omega_{1,2,3}$ и коэффициентов взаимодействия η_{nm} . Для этого подставим (3.44) в (3.37) и продифференцируем:

$$\begin{aligned} & -\Omega_1^2 a_{01} \cos(\Omega_1 t + \theta_1) - \Omega_2^2 \eta_{12} a_{02} \cos(\Omega_2 t + \theta_2) - \\ & -\Omega_3^2 \eta_{13} a_{03} \cos(\Omega_3 t + \theta_3) + \omega_1^2 a_{01} \cos(\Omega_1 t + \theta_1) + \\ & + \omega_1^2 \eta_{12} a_{02} \cos(\Omega_2 t + \theta_2) + \omega_1^2 \eta_{13} a_{03} \cos(\Omega_3 t + \theta_3) + \\ & + k_{12} \eta_{21} a_{01} \cos(\Omega_1 t + \theta_1) + k_{12} a_{02} \cos(\Omega_2 t + \theta_2) + \\ & + k_{12} \eta_{23} a_{03} \cos(\Omega_3 t + \theta_3) + k_{13} \eta_{31} a_{01} \cos(\Omega_1 t + \theta_1) + \\ & + k_{13} \eta_{32} a_{02} \cos(\Omega_2 t + \theta_2) + k_{13} a_{03} \cos(\Omega_3 t + \theta_3) = 0, \\ & -\Omega_1^2 \eta_{21} a_{01} \cos(\Omega_1 t + \theta_1) - \Omega_2^2 a_{02} \cos(\Omega_2 t + \theta_2) - \\ & -\Omega_3^2 \eta_{23} a_{03} \cos(\Omega_3 t + \theta_3) + \omega_2^2 \eta_{21} a_{01} \cos(\Omega_1 t + \theta_1) + \\ & + \omega_2^2 \eta_{21} a_{01} \cos(\Omega_1 t + \theta_1) + \omega_2^2 a_{02} \cos(\Omega_2 t + \theta_2) + \\ & + \omega_2^2 \eta_{23} a_{03} \cos(\Omega_3 t + \theta_3) + k_{21} (1 + \eta_{31}) a_{01} \cos(\Omega_1 t + \theta_1) + \\ & + k_{21} (\eta_{12} + \eta_{32}) a_{02} \cos(\Omega_2 t + \theta_2) + k_{21} (\eta_{13} + 1) a_{03} \cos(\Omega_3 t + \theta_3) = 0, \\ & -\Omega_1^2 \eta_{31} a_{01} \cos(\Omega_1 t + \theta_1) - \Omega_2^2 \eta_{32} a_{02} \cos(\Omega_2 t + \theta_2) - \\ & -\Omega_3^2 a_{03} \cos(\Omega_3 t + \theta_3) + \omega_1^2 \eta_{31} a_{01} \cos(\Omega_1 t + \theta_1) + \\ & + \omega_1^2 \eta_{32} a_{02} \cos(\Omega_2 t + \theta_2) + \omega_1^2 a_{03} \cos(\Omega_3 t + \theta_3) + \\ & + k_{13} a_{01} \cos(\Omega_1 t + \theta_1) + k_{13} \eta_{12} a_{02} \cos(\Omega_2 t + \theta_2) + \\ & + k_{13} \eta_{13} a_{03} \cos(\Omega_3 t + \theta_3) + k_{12} \eta_{21} a_{01} \cos(\Omega_1 t + \theta_1) + \\ & + k_{12} a_{02} \cos(\Omega_2 t + \theta_2) + k_{12} \eta_{23} a_{03} \cos(\Omega_3 t + \theta_3) = 0, \end{aligned} \quad (3.48)$$

Так как моды колеблются независимо:

$$\begin{aligned} & -\Omega_1^2 + \omega_1^2 + k_{12} \eta_{21} + k_{13} \eta_{31} = 0, \\ & -\Omega_1^2 \eta_{21} + \omega_2^2 \eta_{21} + k_{21} (1 + \eta_{31}) = 0, \\ & -\Omega_1^2 \eta_{31} + \omega_1^2 \eta_{31} + k_{13} + k_{12} \eta_{21} = 0, \\ & -\Omega_2^2 \eta_{12} + \omega_1^2 \eta_{12} + k_{12} + k_{13} \eta_{32} = 0, \\ & -\Omega_2^2 + \omega_2^2 + k_{21} (\eta_{12} + \eta_{32}) = 0, \\ & -\Omega_2^2 \eta_{32} + \omega_1^2 \eta_{32} + k_{13} \eta_{12} + k_{12} = 0. \end{aligned} \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned}
-\Omega_3^2 \eta_{13} + \omega_1^2 \eta_{13} + k_{12} \eta_{23} + k_{13} &= 0, \\
-\Omega_3^2 \eta_{23} + \omega_2^2 \eta_{23} + k_{21} (\eta_{13} + 1) &= 0, \\
-\Omega_3^2 + \omega_1^2 + k_{13} \eta_{13} + k_{12} \eta_{23} &= 0.
\end{aligned}$$

Выражая Ω_1^2 , Ω_2^2 , Ω_3^2 и подставляя в оставшиеся выражения системы (3.48)

получим:

$$\begin{aligned}
\Omega_1^2 &= \omega_1^2 + k_{12} \eta_{21} + k_{13} \eta_{31}, \\
k_{12} \eta_{21} \eta_{21} + \omega_1^2 \eta_{21} - \omega_2^2 \eta_{21} + k_{13} \eta_{31} \eta_{21} - k_{21} (1 + \eta_{31}) &= 0, \\
k_{13} \eta_{31} \eta_{31} + \omega_1^2 \eta_{31} - \omega_2^2 \eta_{31} + k_{12} \eta_{21} \eta_{31} - k_{13} - k_{12} \eta_{21} &= 0, \\
\Omega_2^2 &= \omega_2^2 + k_{21} (\eta_{12} + \eta_{32}), \\
k_{21} (\eta_{12} + \eta_{32}) \eta_{12} + \omega_2^2 \eta_{12} - \omega_1^2 \eta_{12} - k_{13} \eta_{32} - k_{12} &= 0, \\
k_{21} (\eta_{12} + \eta_{32}) \eta_{32} + \omega_2^2 \eta_{32} - \omega_1^2 \eta_{32} - k_{13} \eta_{12} - k_{12} &= 0, \\
\Omega_3^2 &= \omega_1^2 + k_{12} \eta_{23} + k_{13} \eta_{13}, \\
k_{13} \eta_{13} \eta_{13} + \omega_1^2 \eta_{13} - \omega_2^2 \eta_{13} + k_{12} \eta_{23} \eta_{13} - k_{13} - k_{12} \eta_{23} &= 0, \\
k_{12} \eta_{23} \eta_{23} + \omega_1^2 \eta_{23} - \omega_2^2 \eta_{23} + k_{13} \eta_{13} \eta_{23} - k_{21} (1 + \eta_{13}) &= 0.
\end{aligned} \tag{3.50}$$

Решая полученные выражения системы (3.50), получим окончательное решение системы (3.40):

$$\begin{aligned}
a_1(t) &= a_{01} \cos(\Omega_1 t + \theta_1) + \eta_{12} a_{02} \cos(\Omega_2 t + \theta_2) - a_{03} \cos(\Omega_3 t + \theta_3), \\
a_2(t) &= \eta_{21} a_{01} \cos(\Omega_1 t + \theta_1) + a_{02} \cos(\Omega_2 t + \theta_2), \\
a_3(t) &= a_{01} \cos(\Omega_1 t + \theta_1) + \eta_{12} a_{02} \cos(\Omega_2 t + \theta_2) + a_{03} \cos(\Omega_3 t + \theta_3),
\end{aligned} \tag{3.51}$$

где:

$$\begin{aligned}
\Omega_{1,2}^2 &= \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2 + k_{13} \mp \sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2 + k_{13})^2 + 8k_{12}k_{21}}}{2}, \\
\eta_{21} &= \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2 - k_{13} - \sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2 + k_{13})^2 + 8k_{12}k_{21}}}{2k_{12}}, \\
\eta_{12} &= \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2 + k_{13} - \sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2 + k_{13})^2 + 8k_{12}k_{21}}}{4k_{12}}, \\
\Omega_3^2 &= \omega_1^2 - k_{13}.
\end{aligned} \tag{3.52}$$

В предельном случае $d \rightarrow \infty$, $e_d \rightarrow 0$ выражения (3.52) примут вид:

$$\begin{aligned}
\Omega_{1,2,3}^2 &= 1 - \frac{\varepsilon^2}{4}, \\
\eta_{21} &= \frac{\sqrt{8}}{-2} = -\sqrt{2}, \\
\eta_{12} &= \frac{\sqrt{8}}{-4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.
\end{aligned} \tag{3.53}$$

Первая формула системы (3.53) описывает частоту примесной моды для случая одиночной примеси [3]. Прейдем к нормальным и главным координатам [105, 106], каждая из которых колеблется с одной частотой. Сложим и вычтем третье и первое решения:

$$\begin{aligned} a_3(t) + a_1(t) &= 2a_{01} \cos(\Omega_1 t + \theta_1) + 2\eta_{12}a_{02} \cos(\Omega_2 t + \theta_2), \\ a_2(t) &= \eta_{12}a_{01} \cos(\Omega_1 t + \theta_1) + a_{02} \cos(\Omega_2 t + \theta_2), \\ a_3(t) - a_1(t) &= 2a_{03} \cos(\Omega_3 t + \theta_3). \end{aligned} \quad (3.54)$$

Вычитанием первого и третьего с соответствующими коэффициентами переходим к нужному виду:

$$\begin{aligned} \frac{a_3(t) + a_1(t) - 2a_2(t)\eta_{12}}{2(1 - \eta_{12}\eta_{21})} &= a_{01} \cos(\Omega_1 t + \theta_1) = \varphi_1, \\ \frac{2a_2(t) - (a_3(t) + a_1(t))\eta_{21}}{2(1 - \eta_{12}\eta_{21})} &= a_{02} \cos(\Omega_2 t + \theta_2) = \varphi_2, \\ \frac{a_3(t) - a_1(t)}{2} &= a_{03} \cos(\Omega_3 t + \theta_3) = \varphi_3. \end{aligned} \quad (3.55)$$

На рисунке Рисунок 3.5 представлены графики зависимостей $\Omega_{1,2,3}$ от d , которые были построены по формулам (3.52) для случая $\varepsilon = 0.5$ и $\varepsilon = 0.2$.

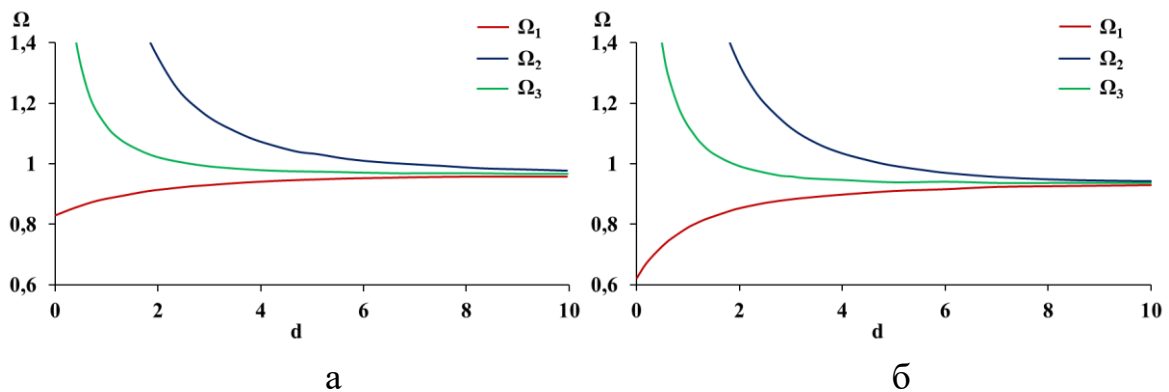


Рисунок 3.5. Зависимость частот $\Omega_{1,2,3}$ от расстояния d между примесями при: а) $\varepsilon = 0.5$; б) $\varepsilon = 0.7$.

Из рисунка 3.5 видно, что при больших расстояниях между примесями частоты стремятся к предельному значению частоты. В случае, если $d \rightarrow 0$, то параметр частоты Ω_1 будет уменьшаться, причем скорость убывания функции зависит от величины ε . Чем она больше, тем быстрее убывает функция, верно и обратное. Параметр частоты Ω_2 в этом случае увеличивается причем $\Omega_2 \rightarrow \infty$, при этом параметр ε не сильно влияет на поведение системы. Параметр Ω_3 , в отличии

от Ω_2 увеличивается медленнее и графически располагается между зависимостями Ω_1 и Ω_2 , и зависимость от значения ε выражена сильнее чем у Ω_2 .

Считая начальные фазы нулевыми $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0$, получим различные типы колебаний, используя различные соотношения начальных амплитуд локализованных волн при определённом наборе параметров ε и d . Рассмотрим случай $\varepsilon = 0.5$, $d = 2$. Тогда подставляя данные параметры в выражения (3.52), получим следующие значения параметров частот и коэффициентов взаимодействия $\Omega_1 \approx 0.9139$, $\Omega_2 \approx 1.351$, $\Omega_3 \approx 1.023$, $\eta_{21} \approx 2.098$, $\eta_{12} \approx -0.5375$. На рисунке 3.6 представлены зависимости амплитуд $a_{1,2,3}(t)$ от времени при возбуждении только одного гармонического колебания, т.е. колебание всех примесных мод проходят с одинаковой частотой, построенные с использованием (3.54).

На рисунке 3.6а представлен случай, когда все примесные моды колеблются в одной фазе. Такой тип колебаний называют синфазным. Параметр частоты в этом случае при проведении Фурье-анализа величина частоты колебаний приближённо составляет $\Omega \approx 0.913$, что с определённой долей погрешности совпадает со значением Ω_1 , полученным из выражения (3.52). Следовательно, можно предположить, что параметр частоты Ω_1 является частотой синфазных колебаний. Можно отметить, что частота этого типа колебаний при уменьшении параметра d , так же уменьшается в соответствии с рисунком 3.5.

На рисунке 3.6в представлен случай, когда первая и третья примесные моды колеблются в противофазе, а вторая не возбуждается между ними. Данный тип колебаний является антифазным. Соответствующее значение частоты при проведённом Фурье-анализе составляет $\Omega \approx 1.022$, что примерно соответствует частоте Ω_3 . На рисунке 3.6б представлен смешанный тип колебаний – синфазно-антифазный. Первая и третья моды колеблются в одинаковой фазе, а вторая между ними – в противоположной им. Значение частоты такого вида колебаний составляет $\Omega \approx 1.350$, что соответствует частоте Ω_2 . Стоит отметить, что частота антифазных колебаний при уменьшении расстояния между примесями увеличивается медленнее, чем частота смешанных колебаний. Варьируя начальными условиями, можно рассмотреть более сложные случаи связанных колебаний примесных мод.

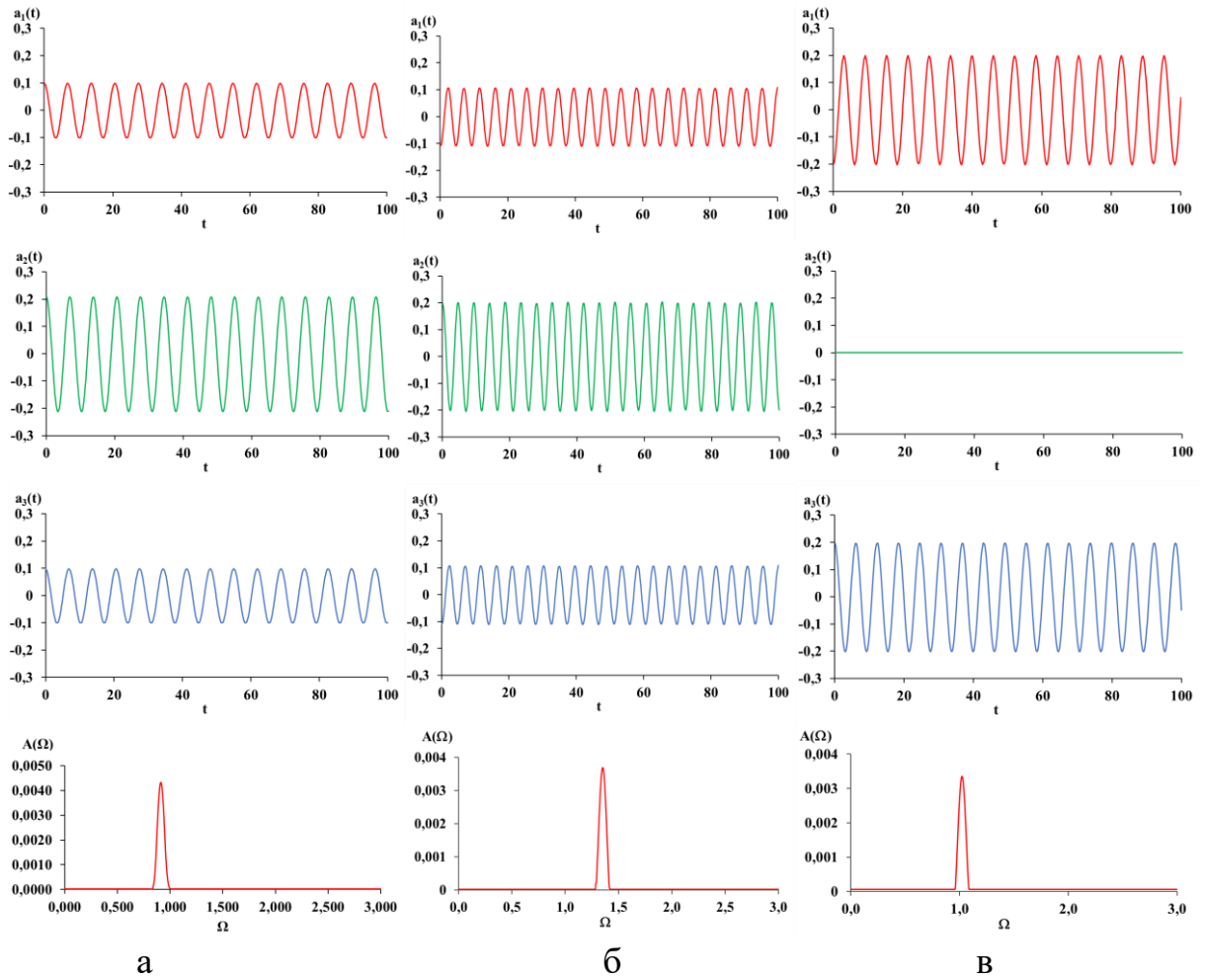


Рисунок 3.6. Зависимость амплитуд $a_{1,2,3}$ от времени при $\varepsilon = 0.5$, $d = 2$ и соответствующее $a_{1,2,3}$ дискретное Фурье-разложение $A(\Omega)$ при начальных условиях: а) $a_1(0) = 0.1$, $a_2(0) = 0.2098$, $a_3(0) = 0.1$, б) $a_1(0) = -0.1095$, $a_2(0) = 0.2$, $a_3(0) = -0.1095$, в) $a_1(0) = -0.2$, $a_2(0) = 0$, $a_3(0) = 0.2$

Так, если исключить вторую $a_{02} = 0$ уравнения (3.51) примут вид:

$$\begin{aligned}
 a_1(t) &= a_{01} \cos(\Omega_1 t + \theta_1) - a_{03} \cos(\Omega_3 t + \theta_3), \\
 a_2(t) &= \eta_{21} a_{01} \cos(\Omega_1 t + \theta_1), \\
 a_3(t) &= a_{01} \cos(\Omega_1 t + \theta_1) + a_{03} \cos(\Omega_3 t + \theta_3).
 \end{aligned} \tag{3.56}$$

Перепишем их в следующем виде:

$$\begin{aligned}
a_1(t) &= 2a_{01} \cos\left(\frac{(\Omega_1 + \Omega_3)t + \theta_1 + \theta_3}{2}\right) \cos\left(\frac{(\Omega_1 - \Omega_3)t + \theta_1 - \theta_3}{2}\right) - \\
&\quad -(a_{03} + a_{01}) \cos(\Omega_3 t + \theta_3), \\
a_2(t) &= \eta_{21} a_{01} \cos(\Omega_1 t + \theta_1), \\
a_3(t) &= 2a_{01} \cos\left(\frac{(\Omega_1 + \Omega_3)t + \theta_1 + \theta_3}{2}\right) \cos\left(\frac{(\Omega_1 - \Omega_3)t + \theta_1 - \theta_3}{2}\right) + \\
&\quad +(a_{03} - a_{01}) \cos(\Omega_3 t + \theta_3).
\end{aligned} \tag{3.57}$$

Из (3.57) следует, что колебания, имеющие вид биений будут наблюдаться на первой и третьей примесях с частотой, равной $|\Omega_1 - \Omega_3|$ и амплитудами, которые меняются от $|a_{01} - a_{03}|$ до $|a_{01} + a_{03}|$. Гармонические колебания будут наблюдаться на второй примеси. Принимая параметры начальных фаз нулевыми, можно взять такие начальные условия, при которых амплитуда биений стремилась к нулю. При $a_{02} = 0$ возьмём $a_{03} = a_{01}$, тогда начальные условия примут вид: $a_1(0) = a_{01} - a_{03} = 0$, $a_2(0) = \eta_{21} a_{01} \approx 2,098 a_{01}$, $a_3(0) = a_{01} + a_{03} = 2a_{01}$. Тогда амплитуды будут меняться от 0 до $2|a_{01}|$ на первой и третьей примесных модах и $|\eta_{21} a_{01}| \approx 2,098|a_{01}|$ на второй примеси (Рисунок 3.7а). Если исключить третью моду $a_{03} = 0$, то систему уравнений (3.51) можно записать в виде:

$$\begin{aligned}
a_1(t) &= a_3(t) = 2a_{01} \cos\left(\frac{(\Omega_1 + \Omega_2)t + \theta_1 + \theta_2}{2}\right) \cos\left(\frac{(\Omega_1 - \Omega_2)t + \theta_1 - \theta_2}{2}\right) \\
&\quad + (\eta_{12} a_{02} - a_{01}) \cos(\Omega_2 t + \theta_2), \\
a_2(t) &= 2a_{02} \cos\left(\frac{(\Omega_1 + \Omega_2)t + \theta_1 + \theta_2}{2}\right) \cos\left(\frac{(\Omega_1 - \Omega_2)t + \theta_1 - \theta_2}{2}\right) + \\
&\quad + (\eta_{21} a_{01} - a_{02}) \cos(\Omega_1 t + \theta_1).
\end{aligned} \tag{3.58}$$

В этом случае колебания имеют вид биений с частотой равной $|\Omega_1 - \Omega_2|$ и амплитудами, меняющимися в пределах от $|a_{01} - \eta_{12} a_{02}|$ до $|a_{01} + \eta_{12} a_{02}|$ на первой и третьей примесях и от $|a_{02} - \eta_{21} a_{01}|$ до $|a_{02} + \eta_{21} a_{01}|$ на второй примеси. Приняв $a_{01} = \eta_{12} a_{02}$, начальные условия для случая $a_{03} = 0$ примут вид: $a_1(0) = a_3(0) = 2\eta_{12} a_{02} \approx -1.075 a_{02}$, $a_2(0) = a_{02} + \eta_{21} a_{01} \approx -0.1277 a_{02}$.

Диапазон изменения амплитуды варьируется от 0 до $1.075|a_{02}|$ на первой и третьей примесях и от $2.128|a_{02}|$ до $0.1277|a_{02}|$ на второй (Рисунок 3.7б). Если исключить первую моду $a_{01} = 0$, то уравнения (3.51) примут вид:

$$\begin{aligned}
a_1(t) &= (a_{03} + \eta_{21}a_{02}) \cos(\Omega_2 t + \theta_2) - \\
&- 2a_{03} \cos\left(\frac{(\Omega_2 + \Omega_3)t + \theta_2 + \theta_3}{2}\right) \cos\left(\frac{(\Omega_2 - \Omega_3)t + \theta_2 - \theta_3}{2}\right), \\
a_2(t) &= a_{02} \cos(\Omega_2 t + \theta_2), \\
a_3(t) &= (\eta_{21}a_{02} - a_{03}) \cos(\Omega_2 t + \theta_2) + \\
&+ 2a_{03} \cos\left(\frac{(\Omega_2 + \Omega_3)t + \theta_2 + \theta_3}{2}\right) \cos\left(\frac{(\Omega_2 - \Omega_3)t + \theta_2 - \theta_3}{2}\right).
\end{aligned} \tag{3.59}$$

Колебания в системе уравнений (3.59) на первой и третьей примесях имеют вид биений с частотой $|\Omega_3 - \Omega_2|$ и амплитудами, меняющимися в пределах от $|a_{03} - \eta_{12}a_{02}|$ до $|a_{03} + \eta_{12}a_{02}|$, на второй примеси колебания гармонические. Принимая $a_{02} = a_{03}/\eta_{12}$ и подставляя в соответствующие пределы по амплитудам, получим следующие начальные условия для случая $a_{01} = 0$ $a_1(0) = \eta_{12}a_{02} - a_{03} = 0$, $a_2(0) \approx -1.860a_{03}$, $a_3(0) = 2a_{03}$. Амплитуды будут меняться в пределах от 0 до $2|a_{03}|$ на первой и третьей примесях, и $|a_{02}| \approx 1,860|a_{03}|$ на второй (Рисунок 3.7в). Колебания в этих случаях аналогичны колебаниям на двух одинаковых примесях, рассмотренных ранее [10].

Рассмотрим случай связанных колебаний примесей с исключёнными ранее модами (Рисунок 3.8). В первом случае возьмём $a_{02} = a_{03} = a_{01}$, тогда начальные условия будут $a_1(0) = \eta_{12}a_{01} \approx -0,5375a_{01}$, $a_2(0) = (\eta_{21} + 1)a_{01} \approx 3,098a_{01}$, $a_3(0) = (2 + \eta_{12})a_{01} \approx 1,4625a_{01}$. Во втором $a_{03} = a_{01} = \eta_{12}a_{02}$, тогда начальные условия будут $a_1(0) = \eta_{12}a_{02} \approx -0,5375a_{02}$, $a_2(0) = (\eta_{21}\eta_{12} + 1)a_{02} \approx -0,1277a_{02}$, $a_3(0) = 3\eta_{12}a_{02} \approx -1,6125a_{02}$. В третьем $a_{02} = a_{03}/\eta_{12} = -a_{01}/\eta_{12}$, тогда начальные условия будут $a_1(0) = -\eta_{12}a_{02} \approx 0,5375a_{02}$, $a_2(0) = (1 - \eta_{21}\eta_{12})a_{02} \approx 2,1277a_{02}$, $a_3(0) = \eta_{12}a_{02} \approx -0,5375a_{02}$.

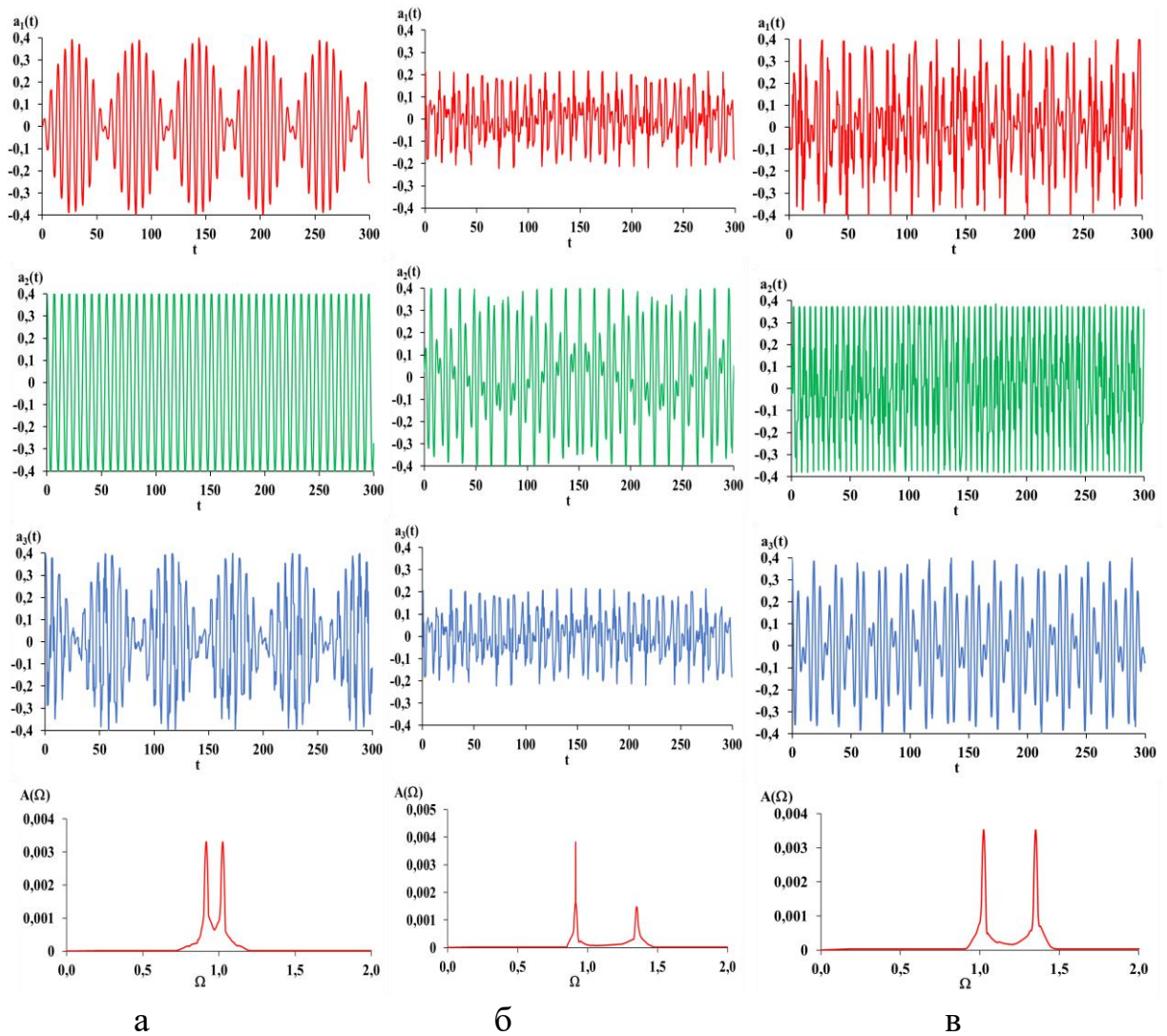


Рисунок 3.7. Зависимость амплитуд $a_{1,2,3}$ от времени при $\varepsilon = 0.5$, $d = 2$ и соответствующее $a_{1,2,3}$ дискретное Фурье-разложение $A(\Omega)$ при начальных условиях: а) $a_{01} = 0.2$, $a_1(0) = 0$, $a_2(0) = 0.4196$, $a_3(0) = 0.4$, б) $a_{02} = -0.2$, $a_1(0) = 0.215$, $a_2(0) = 0.02554$, $a_3(0) = 0.215$, в) $a_{03} = 0.2$, $a_1(0) = 0$, $a_2(0) = 0.372$, $a_3(0) = 0.4$

Колебания второй примесной моды для случая $\varepsilon = 0.5$, $d = 2$, характерны для колебаний представленным на рисунке 3.6 так как в них участвуют только две гармоники. Вид колебаний первой и третьей примеси с добавлением третьей гармоники усложняется. Также стоит отметить, что полученные с помощью Фурье-анализа гармоники (Рисунки 3.7–3.8), показывают хорошее количественное совпадение с полученными аналитическими значениями частот $\Omega_{1,2,3}$.

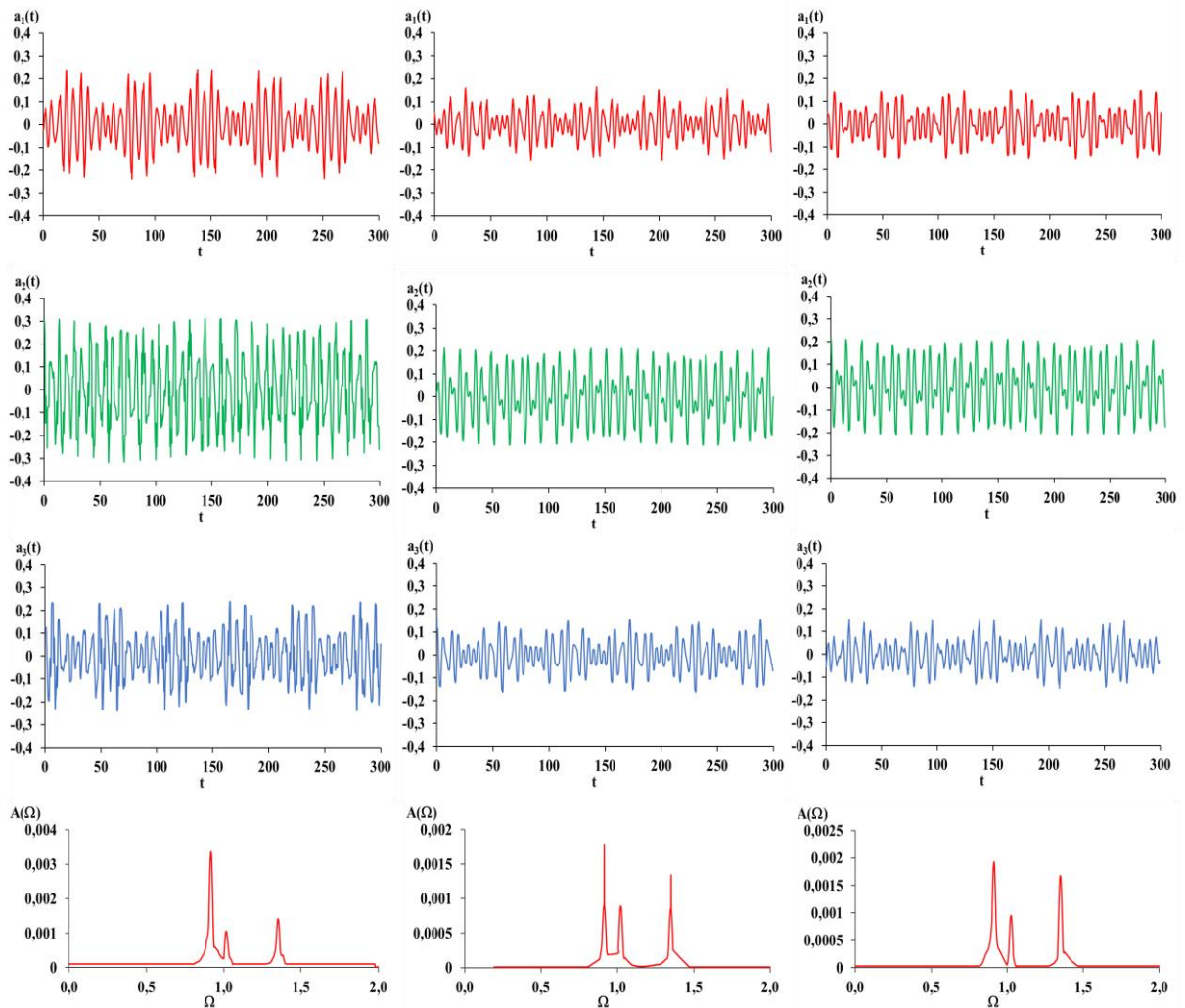


Рисунок 3.8. Зависимость амплитуд $a_{1,2,3}$ от времени при $\varepsilon = 0.5$, $d = 2$ и соответствующее $a_{1,2,3}$ дискретное Фурье-разложение $A(\Omega)$ при начальных условиях:

- а) $a_1(0) = -0.05375$, $a_2(0) = 0.3098$, $a_3(0) = 0.14625$, б) $a_1(0) = 0.05375$,
 $a_2(0) = 0.01277$, $a_3(0) = 0.16125$, в) $a_1(0) = 0.05375$, $a_2(0) = 0.21277$,
 $a_3(0) = 0.05375$

3.4. Численный метод решения уравнения синус-Гордона в модели с тремя примесями

В параграфе 1.3 рассматривался численный метод конечных разностей для решения МУСГ, где был получен его конечно-разностный вид (1.66). В аппроксимации вида (1.65) предполагается, что все узловые функции на $(j - 1)$ -м и j -м временных слоях известны, а нужно найти неизвестный узел U_i^{j+1} (на рисунке 1.1б узел отмечен зелёной точкой). Таким образом, представляется возможным явно выразить узел U_i^{j+1} из выражения (1.66), сгруппировав члены:

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{1}{\Delta t^2} - \frac{\alpha}{2\Delta t}\right) U_i^{j+1} + \frac{1}{\Delta x^2} U_{i-1}^j + \left(-\frac{2}{\Delta x^2} + \frac{2}{\Delta t^2}\right) U_i^j + \frac{1}{\Delta x^2} U_{i+1}^j + \\ & + \left(-\frac{1}{\Delta t^2} + \frac{\alpha}{2\Delta t}\right) U_i^{j-1} - K(x) \sin U_i^j - h(t) \sin \frac{U_i^j}{2} = 0. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Для простоты записи введём обозначение:

$$B_1 = \left(\frac{1}{\Delta t^2} + \frac{\alpha}{2\Delta t}\right)^{-1}. \quad (3.61)$$

Умножим выражение (3.60) на (3.61) и выразим U_i^{j+1} :

$$\begin{aligned} U_i^{j+1} &= \frac{B_1}{\Delta x^2} (U_{i-1}^j + U_{i+1}^j) + B_1 \left(-\frac{2}{\Delta x^2} + \frac{2}{\Delta t^2}\right) U_i^j + \\ &+ B_1 \left(-\frac{1}{\Delta t^2} + \frac{\alpha}{2\Delta t}\right) U_i^{j-1} - B_1 K(x) \sin U_i^j - B_1 h(t) \sin \frac{U_i^j}{2}. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Для случая бездиссипативной модели ($h = \alpha = 0$) полученную итерационную схему можно упростить:

$$\begin{aligned} U_i^{j+1} &= \frac{B_1}{\Delta x^2} (U_{i-1}^j + U_{i+1}^j) + B_1 \left(-\frac{2}{\Delta x^2} + \frac{2}{\Delta t^2}\right) U_i^j - \frac{B_1}{\Delta t^2} U_i^{j-1} - \\ &- B_1 K(x) \sin U_i^j. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Определим условие устойчивости данной схемы. Умножим (3.60) на Δt^2 :

$$\begin{aligned} & \left(-1 - \frac{\alpha\Delta t}{2}\right) U_i^{j+1} + \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} U_{i-1}^j + \left(-\frac{2\Delta t^2}{\Delta x^2} + 2\right) U_i^j + \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} U_{i+1}^j + \\ & + \left(-1 + \frac{\alpha\Delta t}{2}\right) U_i^{j-1} - \Delta t^2 K(x) \sin U_i^j - \Delta t^2 h(t) \sin \frac{U_i^j}{2} = 0. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Принимая во внимание, что в рассматриваемых случаях $K(x)$ изменяется в небольшом диапазоне (порядка с шириной покоящегося кинка) и $0 \leq h \leq 1$, то последние два слагаемых выражения (3.64) можно отбросить, как члены второго порядка малости, т.к. оказывают незначительное влияние на следующий временной слой. Таким образом выражение (3.64) упроститься. Далее разложив в ряд Фурье значения сетчатой функции и подставив в упрощённое выражение (3.64)

предварительно разделив на $\exp(ix_n\beta)$, где x_n – индекс узла сетки, $i = \sqrt{-1}$, β – вещественный параметр, получим:

$$\begin{aligned} & \left(-1 - \frac{\alpha\Delta t}{2}\right)\eta^{j+1} + \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}\eta^j \exp(-i\Delta x\beta) + \left(-\frac{2\Delta t^2}{\Delta x^2} + 2\right)\eta^j \\ & + \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}\eta^j \exp(i\Delta x\beta) + \\ & + \left(-1 + \frac{\alpha\Delta t}{2}\right)\eta^{j-1} = 0, \end{aligned} \quad (3.65)$$

$$U_i^j = \eta^j \exp(ix_i\beta),$$

$$U_{i\pm 1}^j = \eta^j \exp(i(x_i \pm \Delta x)\beta),$$

$$U_i^{j\pm 1} = \eta^{j\pm 1} \exp(ix_i\beta).$$

Запись (3.65) можно привести к более удобной форме, воспользовавшись основными тригонометрическими соотношениями:

$$\eta^{j+1} = 4\eta^j \left(1 - 2\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \sin^2 \frac{\alpha\Delta x\beta}{2}\right) / (\alpha\Delta t + 2) + \frac{\alpha\Delta t - 2}{\alpha\Delta t + 2} \eta^{j-1}. \quad (3.66)$$

Далее для случая трёхслойной схемы сопоставляется матрица перехода [107 – 110] и решается его характеристическое уравнение. Условием устойчивости такой матрицы является условие Неймана, т.е. собственные числа матрицы по модулю не превышали единицу [109].

$$|\lambda_{1,2}| \leq 1. \quad (3.67)$$

Тогда характеристическое уравнение матрицы будет иметь вид:

$$\lambda^2 - 4\left(1 - 2\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \sin^2 \frac{\alpha\Delta x\beta}{2}\right) / (\alpha\Delta t + 2) \lambda - \frac{\alpha\Delta t - 2}{\alpha\Delta t + 2} = 0. \quad (3.68)$$

Учитывая, что параметр $0 \leq \alpha\Delta t < 1$, то:

$$\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \sin^2 \frac{\Delta x\beta}{2} \leq 1. \quad (3.69)$$

Или в случае $\sin^2(\Delta x \beta / 2) = 1$ (предельно допустимый):

$$\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \leq 1. \quad (3.70)$$

Полученный критерий (3.70) является приблизительной оценкой устойчивости схемы [30, 45].

Сходимость полученного разностного уравнения (1.66) можно определить, разложив в ряд Тейлора значения функций U в узлах сетки. Подстановка полученных значений в (1.65) позволит вычислить величину невязки, т.е. величину расхождения. В работах [96, 103] было показано, решение уравнения (1.66) можно свести к (3.3), уменьшив шаг интегрирования со вторым порядком относительно параметров Δx и Δt . То есть норма невязки второго порядка стремиться к нулю при уменьшении шагов сетки по пространственной координате x и времени t :

$$\|\delta f\| = O(\Delta x^2 + \Delta t^2), \quad \lim_{\Delta x, \Delta t \rightarrow 0} \|\delta f\| \rightarrow 0. \quad (3.71)$$

Определим начальные и граничные условия. Поскольку схема трёхслойная, то для нахождения $j + 1$ временного слоя нужно задать первые два ($j = 0, 1$).

$$\begin{aligned} U_i^0 &= 4 \operatorname{arctg}(\exp(\delta x)), \\ U_i^1 &= 4 \operatorname{arctg}(\exp(\delta(x - v_0 \Delta t))), \end{aligned} \quad (3.72)$$

где $\delta = \sqrt{1 - v_0^2}$ – ширина кинка, $0 < v_0^2 < 1$. В качестве граничных условий можно принять как граничные условия I рода:

$$U(-L, 0) = 0, U(L, 0) = 2\pi, \quad (3.73)$$

так и граничные условия II рода:

$$\frac{\partial U}{\partial x}(\pm L, 0) = 0. \quad (3.74)$$

Определим основные динамические характеристики кинка. Первая из основных характеристик это центр кинка. За эффективный центр кинка

принимается точка, где пересекается кривая $u(x)$ с прямой $u = \pi$ (Рисунок 3.9). То есть в сетке размером $-N \dots N$ есть узел, параметр которого с определённой точностью соответствует параметру π . Определение такого узла выполняется методом деления отрезка пополам называемый методом бисекции. При выполнении условия $|U_i^j - \pi| \leq e$, где e – малый параметр, определялся номер узла i , который соответствует $U_i^j \approx \pi$, т.е. выполнялся поиск геометрического центра кинка. Однако в момент времени, когда кинк достигает центра примеси, то его динамика описывается более сложными мультисолитонными решениями. В таком случае за центр кинка принимается эффективный «центр масс».

Следующей основной характеристикой нелинейной динамики кинка является его ширина δ_I . Параметр δ_I определяется методом Лилли. Суть метода заключается в нахождении точек перегиба $\partial u(x)/\partial x$ на зависимости $u(x)$, которая получена численно, и строятся касательные к ней. Если таких точек несколько, то рассматриваются две удалённые друг от друга касательные.

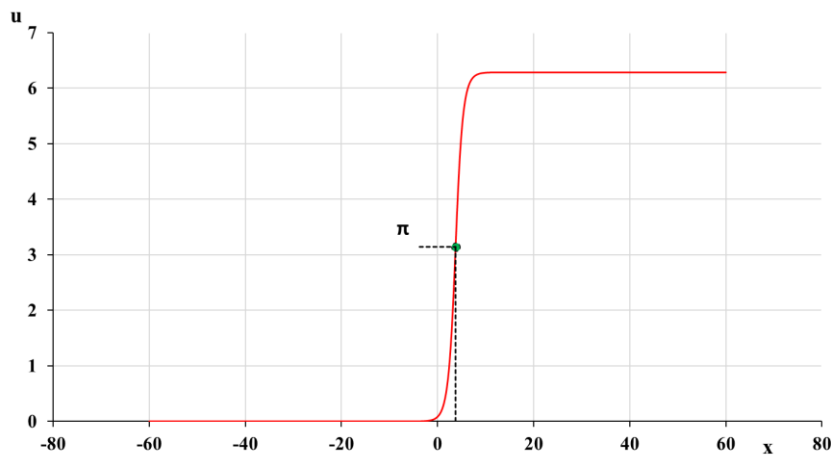


Рисунок 3.9. Геометрический центра кинка, рассчитанного численно из (3.3)

Ширина кинка δ_I определяется как расстояние между точками, которые пересекаются с граничными прямыми, в нашем случае $u = 0$ и $u = 2\pi$.

На рисунке 3.10 видно, что ширина кинка, рассчитанная по методу Лилли, в состоянии покоя составляет $\delta_I = 2\pi$. То есть, если численная зависимость достаточно хорошо описывается точным решением и точка перегиба одна, то нормированная ширина с определённой погрешностью совпадает с шириной кинка δ , которая входит в точное решение кинка (1.6).

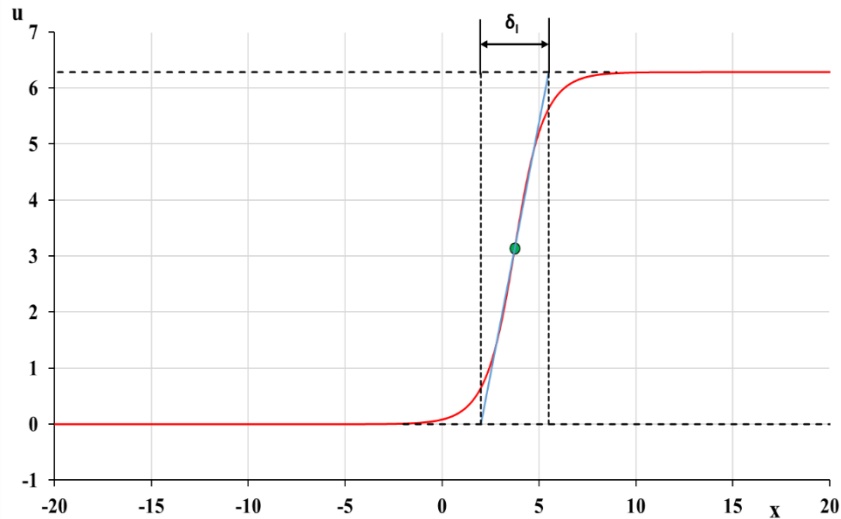


Рисунок 3.10. Пример определения ширины кинка, рассчитанного численно из (3.3)

Ещё одной важной характеристикой является скорость центра кинка. Для нахождения параметра скорости преобразуем частную производную:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} = -\frac{\partial U}{\partial x} v. \quad (3.75)$$

Тогда, учитывая (1.65):

$$v = -\frac{\partial U}{\partial t} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^{-1} = \frac{U_i^{j+1} - U_i^{j-1}}{2\Delta t} \left(\frac{U_{i+1}^j - U_{i-1}^j}{2\Delta x} \right)^{-1} = -\frac{\Delta x}{\Delta t} \frac{U_i^{j+1} - U_i^{j-1}}{U_{i+1}^j - U_{i-1}^j}, \quad (3.76)$$

где узлы $i - 1$ и $i + 1$ выбираются в окрестности найденного геометрического центра кинка. Представленные выше характеристики являются динамическими. Однако важно учитывать также параметры позволяющие описывать потенциальную и кинетическую энергию системы. Кинетическая энергия в разностном виде:

$$E_{kin}^j = \frac{\Delta x}{2} \sum_i^N \left[\left(\frac{U_i^{j+1} - U_i^{j-1}}{2\Delta t} \right)^2 \right]. \quad (3.77)$$

Формула расчета потенциальной энергии:

$$E_{pot}^j = \frac{\Delta x}{2} \sum_i^N \left[\left(\frac{U_{i+1}^j - U_{i-1}^j}{2\Delta x} \right)^2 + 2K(x) \sin^2 \frac{U_i^j}{2} \right]. \quad (3.78)$$

Полная энергия вычисляется как сумма (3.77) и (3.78).

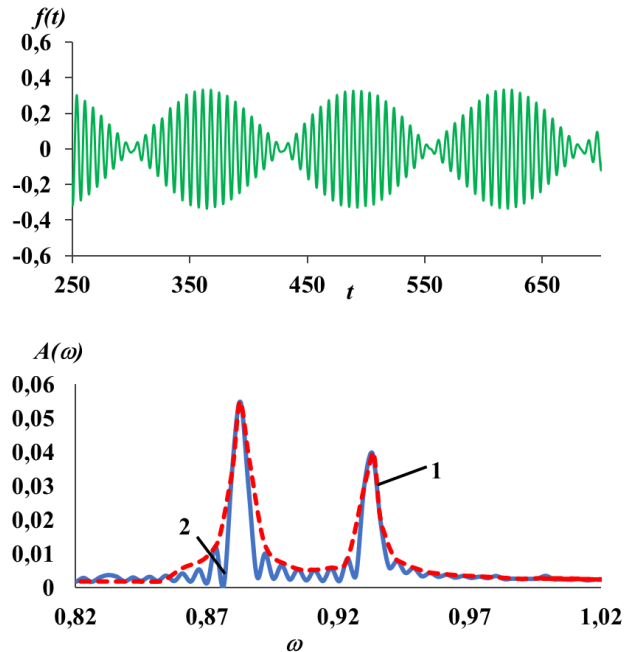


Рисунок 3.11. Пример временной зависимости $f(t)$ и его амплитуды дискретных гармоник $A(\omega)$, полученные в результате ДПФ. Кривая 1 – интерполяция сплайном Акимы зависимости, полученной с использованием алгоритма БПФ, 2 – кривая, рассчитанная БПФ.

Частотный анализ колебаний локализованных волн, полученные в ходе численного моделирования, выполняются с использованием преобразования Фурье. Преобразование Фурье является основным методом в обработке сигналов и анализом данных. Для случая цифровой обработки сигналов используется дискретное преобразование Фурье (ДПФ). Для эффективного вычисления ДПФ чаще всего используется алгоритм быстрого преобразования Фурье (БПФ). Однако использование такого подхода накладывает определённые ограничения на исходный ряд, а именно число точек $N = 2^n$ и равномерность сетки, на которой задан исходный ряд. Пример использования БПФ представлено на рисунке 3.11. Берётся исходная дискретная зависимость $f(t)$. Для разложения Фурье используется часть зависимости по $t = [t_1, t_2]$. На рисунке 3.11 в качестве наглядного примера рассмотрен участок времени от $t_1 = 250$ до $t_2 = 700$.

Кратность дискретных гармоник, полученных благодаря БПФ, рассчитывается по формуле:

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{(t_2 - t_1)}. \quad (3.79)$$

При подстановке параметров $t_{1,2}$ из примера, получим, что данная величина составляет $\Delta\omega \approx 0.014$. Соответствующий частотный спектр $A(\omega)$, представленный на рисунке Рисунок 3.11 не является точным, поскольку содержит несколько максимумов, в итоге определить частоты является затруднительным. Для повышения точности определения частот можно использовать метод интерполяции максимумов с помощью сплайнов. В работе [96] проведено сравнение двух сплайнов: кубической [111] и Акимы [112]. Было отмечено, что, в отличие от кубического, сплайн Акимы наиболее устойчив к появлению резких уклонов исходной кривой, т.е. не искажают её.

Вкратце рассмотрим ход численного эксперимента. Рассмотрим модель с точечными примесями, в которой $h = \alpha = 0$. Пусть в момент времени $t = 0$ на некотором расстоянии от примесей располагается кинк, движущийся с постоянной скоростью v_0 . В момент времени $t = \tau$ кинк проходит через систему, состоящую из трёх точечных примесей. В зависимости от типа примесей (барьер или яма) на них возбуждаются локализованные волны типа бризер (в случае потенциальной ямы). Амплитуда и вид таких волн во многом зависят от начальной скорости набегания кинка на примесь, а также параметров ε и d . Стоит отметить, что локализованные волны на примесях возбуждаются в результате прохождения кинка. Таким образом его начальная скорость может определить начальную разность фаз этих волн, как в случае аналитического решения. Отсюда следует, что получить весь возможный спектр связанных колебаний не представляется возможным. Иллюстрация описанного выше эксперимента для случая примесей в виде потенциальных ям приведена на рисунке 3.12.

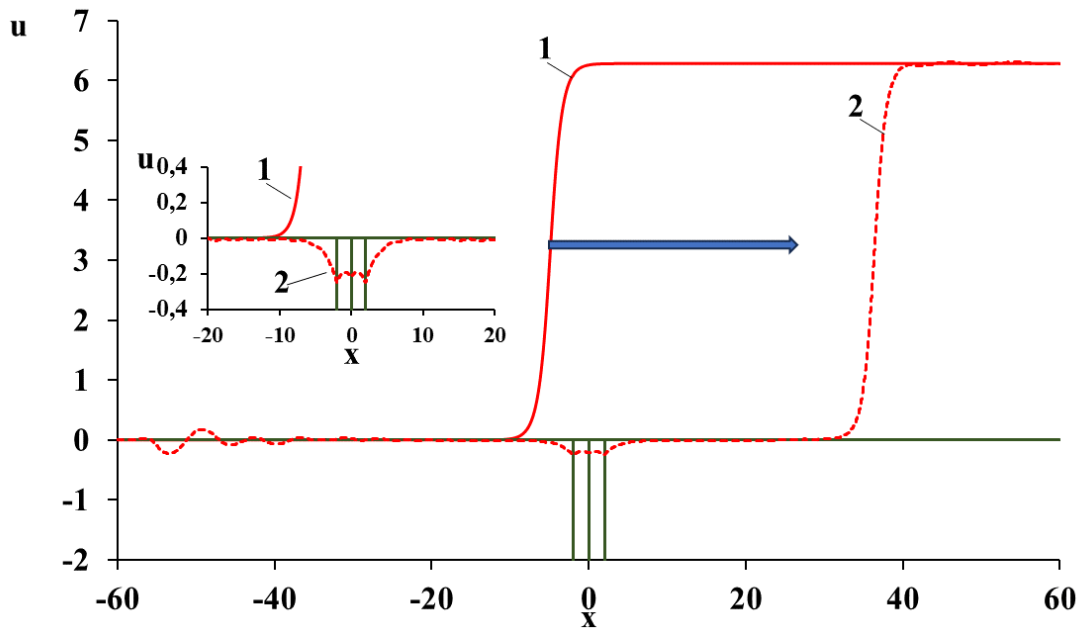


Рисунок 3.12. Иллюстрация численного эксперимента на модели с тремя точечными примесями в виде потенциальных ям в отсутствии внешних сил и диссипации. Кривая 1 – численно рассчитанный профиль кинка из (3.3). Кривая 2 – кинк в момент прохождения всех трёх примесей и возбуждение локализованных волн бризерного типа на примесях.

В результате взаимодействия кинка с примесями появляются нелинейные процессы, называемые «излучениями», которые распространяются на большие расстояния и при достижении границ сетки отражаются от них. Такого рода «шумы» являются характерной особенностью численного решения задачи и не носит физический характер, однако они могут исказить результаты проведённого эксперимента, поэтому на приграничных областях расчетной сетки коэффициент затухания $\alpha = 1$, чтобы исключить искажения результатов. В случае точечной примеси, в ряде случаев, параметр неоднородности $K(x)$ задаётся в виде дельта-функции [7, 10, 51, 52, 57, 102, 113]. Популярности представления точечной примеси в виде дельта-функции объясняется во многом в простоте выполнения аналитических расчетов. В случае численных расчетов, в работах [9, 143] дельта-функцию аппроксимируют в виде ступенчатой функции:

$$\delta_I(x) = \begin{cases} 1/\Delta x, & x = 0, \\ 0, & x \neq 0, \end{cases} \quad (3.80)$$

где Δx – шаг по координате. Помимо ступенчатой функции, существуют варианты описания функции, представленной в гауссовском виде [7, 113]. Воспользуемся для простоты аппроксимацией дельта-функции в виде (3.80).

Изучение основных резонансных эффектов кинка и колебания локализованных на примесях волн в модели с тремя точечными примесями, приведённых в параграфах выше, носит в целом теоретический характер исследуемой системы. Однако, в реальности такие неоднородности материальных параметров могут быть протяжёнными, и ширина таких примесей может меняться в достаточно больших пределах [88, 114].

Для моделирования протяжённых примесей используется следующий вид прямоугольной функции:

$$K(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } |x| > W/2, |x + d| > W/2, |x - d| > W/2, \\ 1 - \Delta K, & \text{если } |x| \leq W/2, |x + d| \leq W/2, |x - d| \leq W/2, \end{cases} \quad (3.81)$$

где ΔK , W – глубина и ширина протяжённой примеси. Стоит отметить, что если параметр изменения $\Delta K > 0$ примесь является потенциальной ямой, а при $\Delta K < 0$ – потенциальным барьером.

Ниже в главе будут приведены результаты численного моделирования системы, состоящей из трёх точечных и протяжённых примесей.

3.5. Динамика кинка для случая трёх точечных примесей. Результаты численного моделирования

Для проверки результатов, полученных в ходе решения уравнения (3.3) численным методом, необходимо сравнить их с известными аналитическими решениями. Рассмотрим динамику кинка при взаимодействии с тремя одинаковыми точечными примесями в виде потенциального барьера. Полагая, что $h(t) = \alpha = 0$, проведём численный эксперимент. Пусть кинк в начальный момент времени находится на расстоянии $X(0) = -15$ от системы трёх примесей, параметры которых $\varepsilon = -0.5$ и $d = 3$. В момент времени t , кинк движется с постоянной скоростью $\dot{X}(0)$. В ходе численного эксперимента кинк пересекает

область примесей, при этом его структура рассчитывается в каждый момент времени. Как и в случае с аналитическим методом решения, приведённого в параграфе 3.4, при различных скоростях кинка, можно получить различные сценарии его взаимодействия с примесями. Так, на рисунке Рисунок 3.13 приведены такие сценарии как прохождение кинка (кривая 1), отражение от первой примеси (кривая 2).

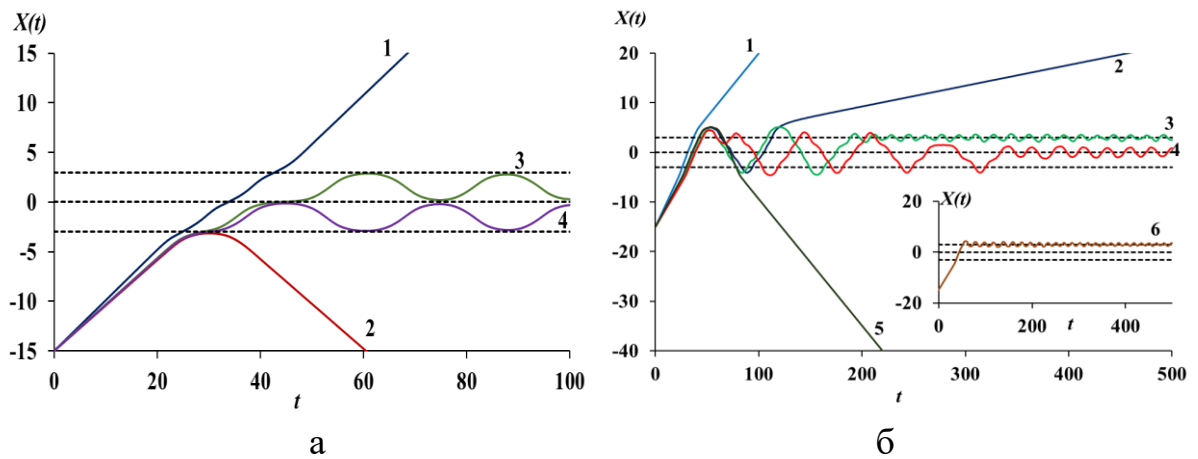


Рисунок 3.13. Зависимость координаты центра кинка $X(t)$ от времени t при различных скоростях набегания кинка на систему: а) состоящую из трёх примесей вида потенциальных барьеров при $\varepsilon = -0.5$ и $d = 3$: 1) $\dot{X}(0) = 0.51$, 2) $\dot{X}(0) = 0.458$, 3) $\dot{X}(0) = 0.468$, 4) $\dot{X}(0) = 0.46445$; б) состоящую из трёх примесей вида потенциальных ям при $\varepsilon = 0.5$ и $d = 3$: 1) $\dot{X}(0) = 0.45$, 2) $\dot{X}(0) = 0.3857505$, 3) $\dot{X}(0) = 0.36$, 4) $\dot{X}(0) = 0.352$, 5) $\dot{X}(0) = 0.38889$, 6) $\dot{X}(0) = 0.3$

Также можно получить такие сценарии, как прохождение кинком барьера с дальнейшим захватом между соседними примесями (кривая 3, 4). Стоит отметить, что полученные ранее результаты взаимодействия кинка с тремя точечными примесями в виде потенциального барьера для аналитического случая из выражения (3.36) были получены без учёта потерь энергии при взаимодействии с примесями. Поскольку в численном случае учитывается параметр полной энергии, то видно, что при прохождении кинком первого или второго барьеров, энергии, после отражения, недостаточно для прохождения предыдущей примеси, что мы и наблюдаем на рисунке 3.13а (кривая 3 и 4).

На рисунке 3.13б представлены различные случаи взаимодействия кинка с тремя примесями в виде потенциальных ям, полученных в ходе численного

моделирования. Из рисунка 3.13б видно, что, как и в случае с аналитическим решением, в зависимости от скорости набегания кинка можно получить разные сценарии взаимодействия кинка с примесями: прохождение (кривая 1), отражение (кривая 5), квазитунелирование (кривая 2), пиннинг на примеси (кривая 6) и перескоки, с дальнейшим пиннингом на примеси (кривые 3, 4).

3.6. Связанные колебания локализованных волн для случая трёх точечных примесей. Результаты численного моделирования

Исследуем локализованные колебания (3.43), используя конечно-разностные методы решения. Для определения частот колебаний, для численного случая воспользуемся Фурье-разложением на частотные компоненты. Постановка численного эксперимента в данном случае схожа с предыдущим случаем, за исключением нескольких изменений. В начальный момент времени кинк, расположен на некотором расстоянии от трёх одинаковых точечных примесей, причем $\varepsilon > 0$ и далее движется на них с постоянной скоростью v_0 . В момент времени $t = \tau$ кинк проходит через область примесей и покидает её $X(t) \rightarrow \infty$. На области трёх точечных примесей возбуждаются связанные локализованные волны бризерного типа. Амплитуда и вид локализованных волн зависит не только от параметров примесей ε и d , но и от начальной скорости кинка. На рисунках 3.14 и 3.15 приведены зависимости амплитуды локализованных волн от времени на каждой примеси при $\varepsilon = 0.5$ и $\varepsilon = 0.7$.

Из рисунков видно, что при параметре $d \leq 1$ наблюдается сильная связь между примесями и они выступают как одна коллективная примесь (Рисунки 3.14а и 3.15а). Таким образом через некоторый промежуток времени локализованные на примесях волны начинают колебаться синфазно, т.е. на одной частоте. Подобное поведение также характерно и для случая двух примесей, рассмотренных ранее в работах [115, 126]. При небольшом удалении примесей друг от друга порядка $d > 1$ видно, что существуют связанные колебания с характерными сильными биениями (Рисунок 3.14б и Рисунок 3.15б). При этом частотные компоненты на спектре располагаются на большом расстоянии друг от друга. При больших

расстояниях $d \geq 6$ между примесями можно получить случай слабых биений, состоящий из трёх частотных компонент и расположенных значительно ближе (Рисунок 3.14в и Рисунок 3.15в).

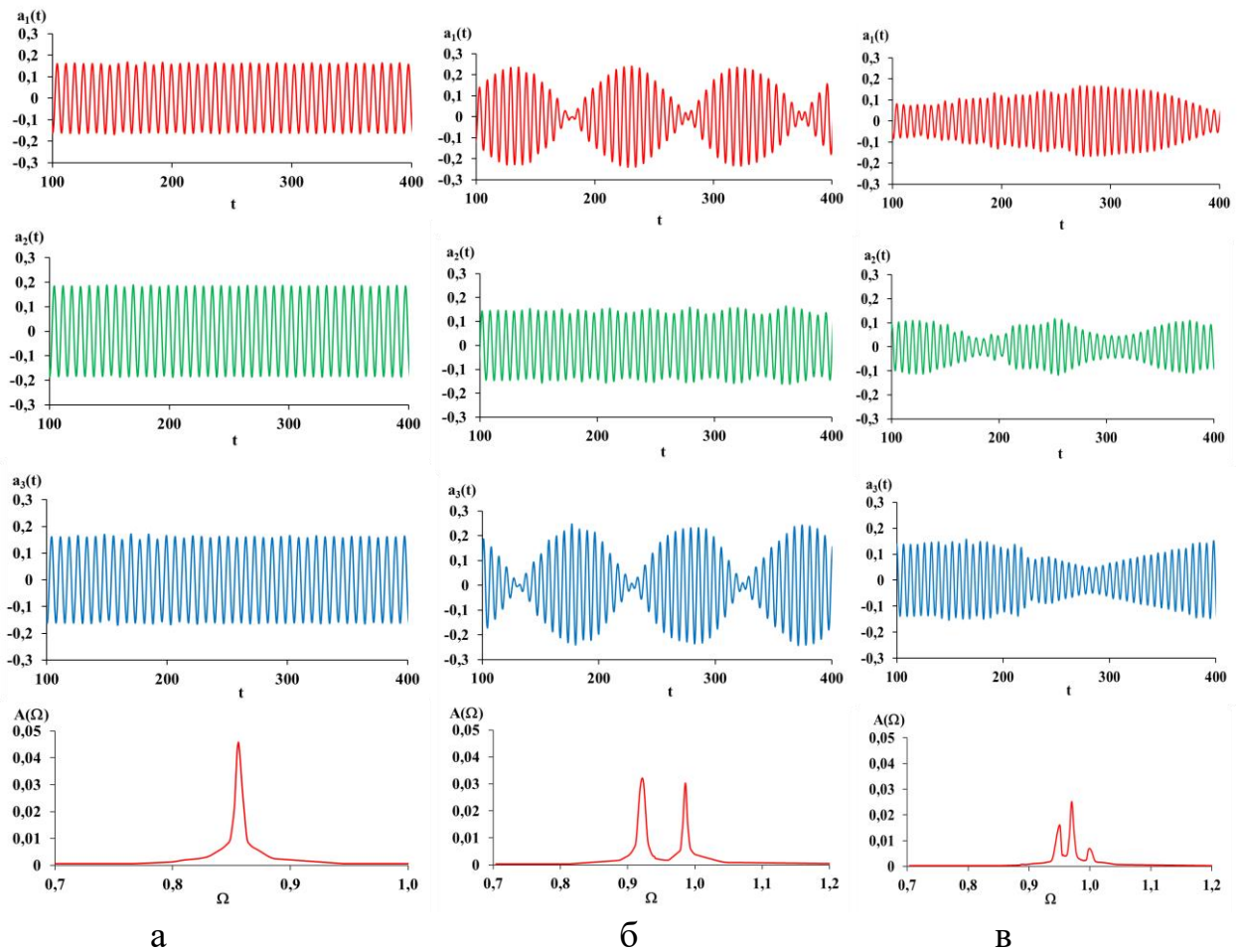


Рисунок 3.14. Зависимость амплитуд первого $a_1(t)$, второго $a_2(t)$ и третьего $a_3(t)$ осцилляторов от времени t , полученные в результате численного решения системы (3.40) и соответствующее Фурье-разложение $A(\omega)$ для случая $\varepsilon = 0.5$ при различных расстояниях между примесями: а) $d = 1$, б) $d = 3$, в) $d = 6$

Сравним, полученные в ходе численного эксперимента, гармоники с аналитическими результатами, приведённых в параграфе 3.3 на рисунке 3.5. Для этого рассчитаем зависимость частот колебаний, локализованных примесных волн, от расстояния между примесями вида потенциальных ям. Сравнение численных и аналитических расчетов для случая трёх потенциальных ям представлена на рисунке 3.16. Сплошными линиями отложены зависимости частот синфазных Ω_1 , смешанных Ω_2 и антифазных Ω_3 колебаний, полученных исходя из аналитического решения (3.52), точками отложены параметры частот, полученных численно при помощи метода Фурье-анализа. Из рисунка 3.16 видно, что наблюдается хорошее

совпадение соответствующих кривых. Для рассмотренных случаев, гармоники, полученные численным методом с точностью до 1%, совпадают с полученными аналитическими зависимостями (3.52) при сравнительно больших расстояниях между примесями. Например, при параметрах примесей $\varepsilon = 0.7$ и $d = 4$ значения частот Ω_1 и Ω_3 для аналитического случая равны 0.898 и 0.947 соответственно, а для численного случая – 0.891 и 0.939. Стоит отметить, что параметры частот Ω_1 и Ω_3 , возбуждаются численно начиная с малых расстояний, между примесями ($2 \leq d \leq 4$) а локализованные волны, содержащие частоту Ω_2 при сравнительно больших расстояниях ($d > 4$). Так, например, при тех же параметрах примесей при $d = 6$ значение частоты Ω_2 в случае аналитического решения составляет 0.970,

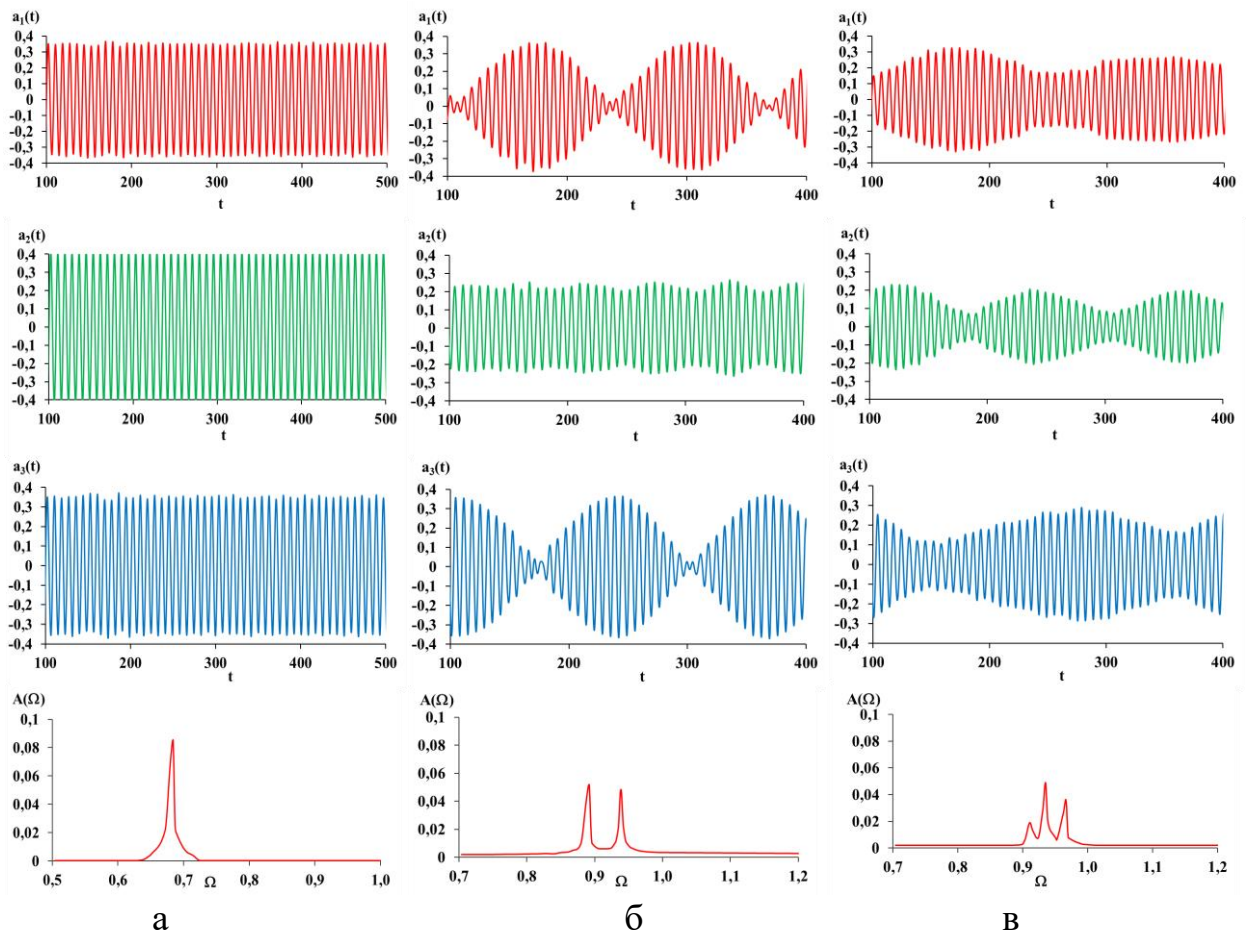


Рисунок 3.15. Зависимость амплитуд первого $a_1(t)$, второго $a_2(t)$ и третьего $a_3(t)$ осцилляторов от времени t , полученные в результате численного решения системы (3.40) и соответствующее Фурье-разложение $A(\omega)$ для случая $\varepsilon = 0.7$ при различных расстояниях между примесями: а) $d = 1$, б) $d = 4$, в) $d = 6$

тогда как при численном моделировании параметр частоты колебаний составляет 0.966. Если рассматривать малые расстояния порядка $d < 2$ наблюдаются

расхождения результатов, полученных численным методом и методом коллективных переменных. Такое расхождение в первую очередь связано с расхождением аналитических выражений для $\Omega_{1,2,3}$ с результатами численного расчета колебаний бризерного типа. Однако полученные численные результаты можно аппроксимировать экспоненциально. Вид экспоненциальной функции удобно представить как:

$$F(x) = a + be^{cx} \quad (3.82)$$

Получим переменные a , b , c для случая точечных примесей с параметрами неоднородности $\varepsilon = 0.5$ и $\varepsilon = 0.7$. Для их нахождения используем метод наименьших квадратов, суть которого заключается в подборе коэффициентов таким образом, чтобы сумма квадратов отклонений была минимальной. Прологарифмировав обе части выражения (3.82), получим:

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= 0.958 - 0.20967e^{-0.563703x} \\ \Omega_2 &= 0.977 + 1.74734e^{-0.677198x}, \quad \varepsilon = 0.5, \\ \Omega_3 &= 0.968 + 0.113802e^{-0.64739x} \end{aligned} \quad (3.83)$$

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= 0.927 - 0.2820539e^{-0.5237x} \\ \Omega_2 &= 0.946 + 12.91917e^{-1.07662x}, \quad \varepsilon = 0.7. \\ \Omega_3 &= 0.927 - 0.256296e^{-0.76121x} \end{aligned} \quad (3.84)$$

Для случая $d > 4$ при сравнительно больших расстояниях от примесей частота колебаний локализованных примесных волн бризерного типа асимптотически стремятся к предельному значению частоты (3.51). В данной области при разной скорости набегания кинка можно получить как синфазные, так и антифазные колебания или случай слабых биений, как для двух, так и для трёх точечных примесей.

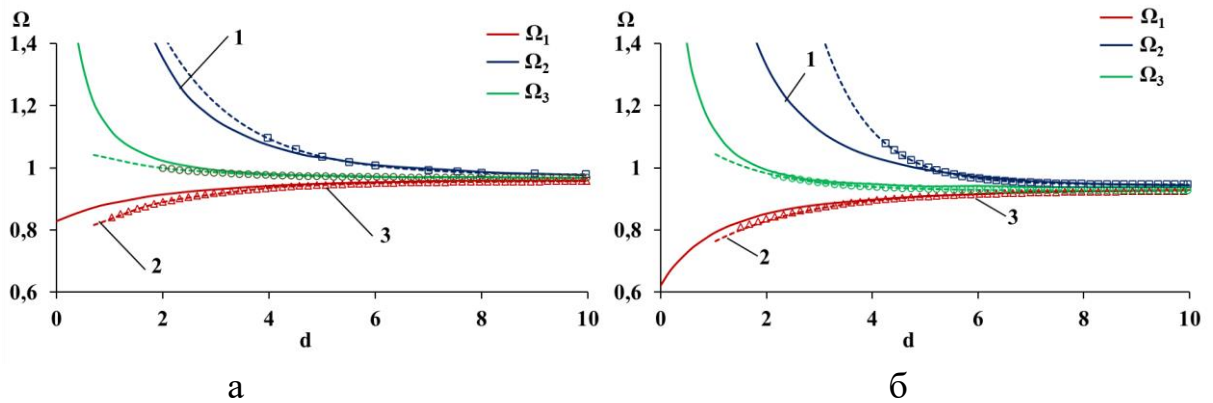


Рисунок 3.16. Зависимость частот колебаний локализованных примесных волн от расстояния между примесями d при: а) $\varepsilon = 0.5$, б) $\varepsilon = 0.7$. Ω_1 – частота синфазных колебаний, Ω_2 – частота смешанных колебаний, Ω_3 – частота антифазных колебаний. 1) аналитическое решение (3.50), 2) аппроксимация точек, полученных в ходе численного моделирования колебаний локализованных волн МУСГ, 3) точки, полученные при численном моделировании колебаний

В случае $2 \leq d \leq 4$ наблюдается сильное взаимодействие локализованных на примесях волн (биения). В этой зоне возможно возбудить синфазные и антифазные колебания, а также случай сильных биений. В этом случае возбуждение на центральной примеси может колебаться как синфазно с первой или третьей, так и антифазно относительно соседних примесей. В этом случае данная примесь выступает в качестве усиления амплитуды синфазных колебаний. Наглядная иллюстрация данного явления продемонстрирована на рисунке 3.15б, где колебания, исходя из зависимости амплитуд от времени, второй и третьей примесей синфазны, а первая антифазна по отношению к ним. В случае малых расстояний ($d < 2$) численно удалось получить лишь синфазные колебания на трёх примесях.

3.7. Динамика кинка для случая трёх протяжённых примесей. Результаты численного моделирования

С практической точки зрения интересно изучить динамику кинка в модели МУСГ с тремя одинаковыми протяжёнными примесями. Функция пространственной модуляции периодического потенциала $K(x)$ в уравнении (3.3) будем моделировать в виде (3.81). Также положим, что протяжённые примеси расположены на одинаковом расстоянии друг от друга. Как было показано в предыдущих параграфах примеси точечного вида можно исследовать как

аналитическими, так и численными методами. В случае с протяжёнными дефектами ситуация иная. В случае малых колебаний МУСГ в модели с протяжёнными примесями можно решить аналитическим методом путем линеаризации (3.3), что подробнее будет рассмотрено в параграфе 3.8. В остальных «произвольных» случаях подобные модели представляется возможным решить только численными методами.

Пусть в начальный момент времени кинк, движущийся с постоянной скоростью, располагается на некотором расстоянии от примесей. Исследуем возможные сценарии взаимодействия кинка с тремя протяжёнными примесями и сравним их с аналитически полученными результатами в модели с тремя точечными примесями. Т.к. последний является предельным случаем очень тонкой примеси, для случая протяженных примесей. Рассмотрим вначале случай, потенциальных барьеров. Начало координат положим, для простоты, в центре второго барьера. Центры двух соседних барьеров будут находиться по обе стороны от второй. Безразмерная координата центра первой примеси $x_1 = -3$, второй – $x_3 = 3$. Также пусть параметры примесей, соответственно, будут равны $W = 1$ и $K = 2$. Результаты численного анализа динамики кинка в системе протяжённых примесей в виде потенциальных барьеров представлены на рисунке 3.17а. Из рисунка видно, что при разных значениях скорости набегания кинка возможны следующие сценарии изменения его динамики. При значении $v_0 = 0.59$ можно получить случай отражения кинка от первого потенциального барьера (кривая 1). При увеличении скорости можно получить случаи отражения кинка от второго потенциального барьера (кривая 3), замкнутое движение между первым и вторым барьерами (кривая 2) или между вторым и третьим (кривая 4) и прохождение всех трёх барьеров (кривая 5). Колебания кинка, в случаях, описываемые кривыми 2 и 4, носят не гармонический характер. Также стоит отметить, что для рассматриваемого случая помимо режимов динамики кинка, которые получены для точечных примесей аналитическим методом (Рисунок 3.1), так и режимы, которые были получены при решении системы точечных примесей численным методом (Рисунок 3.13а), а именно случай замкнутого движения кинка между примесями,

называемый пиннингом. Сравнивая величины скоростей кинка до и после взаимодействия, можно отметить, что значения таких скоростей одинаковы, что говорит о практически упругом взаимодействии системы «кинк-примесь». На рисунке 3.17б представлена зависимость минимального значения скорости прохождения кинка через три протяжённые примеси для разных параметров их ширины $W = 0.5$ и $W = 1$.

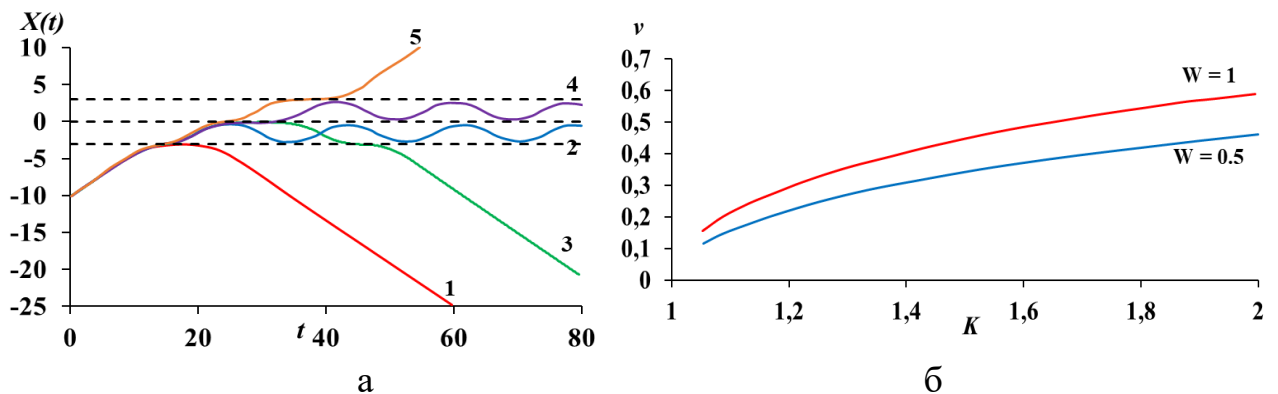


Рисунок 3.17. а) Зависимость координаты центра кинка $X(t)$ от времени t для случая трёх протяжённых примесей с параметрами $W = 1$, $K = 2$, $d = 3$. Линии: 1) $v_0 = 0.59$; 2) $v_0 = 0.595$; 3) $v_0 = 0.59855$; 4) $v_0 = 0.5986$; 5) $v_0 = 0.602$. б) Зависимость минимально допустимой скорости прохождения кинка через три примеси от параметра K

Рассмотрим случай системы трёх примесей в виде потенциальных ям ($\Delta K > 0$). Возможные сценарии динамики кинка для случая $K = 0.5$, $W = 1$, $d = 3$ показаны на рисунке 3.18. Так при разном значении начальной скорости кинка можно получить такие сценарии: пиннинг на первой яме при (Рисунок 3.18а), резонансное отражение кинка (Рисунок 3.18б), прохождение всех трёх примесей (Рисунок 3.18в) и случай резонансного прохождения или «квантитуннелирования» кинка (Рисунок 3.18г). Из рисунков видно, что взаимодействие кинк-примесь неупругое и сопровождается «излучением» свободных волн и возбуждением локализованных на примесях волн типа «бризер».

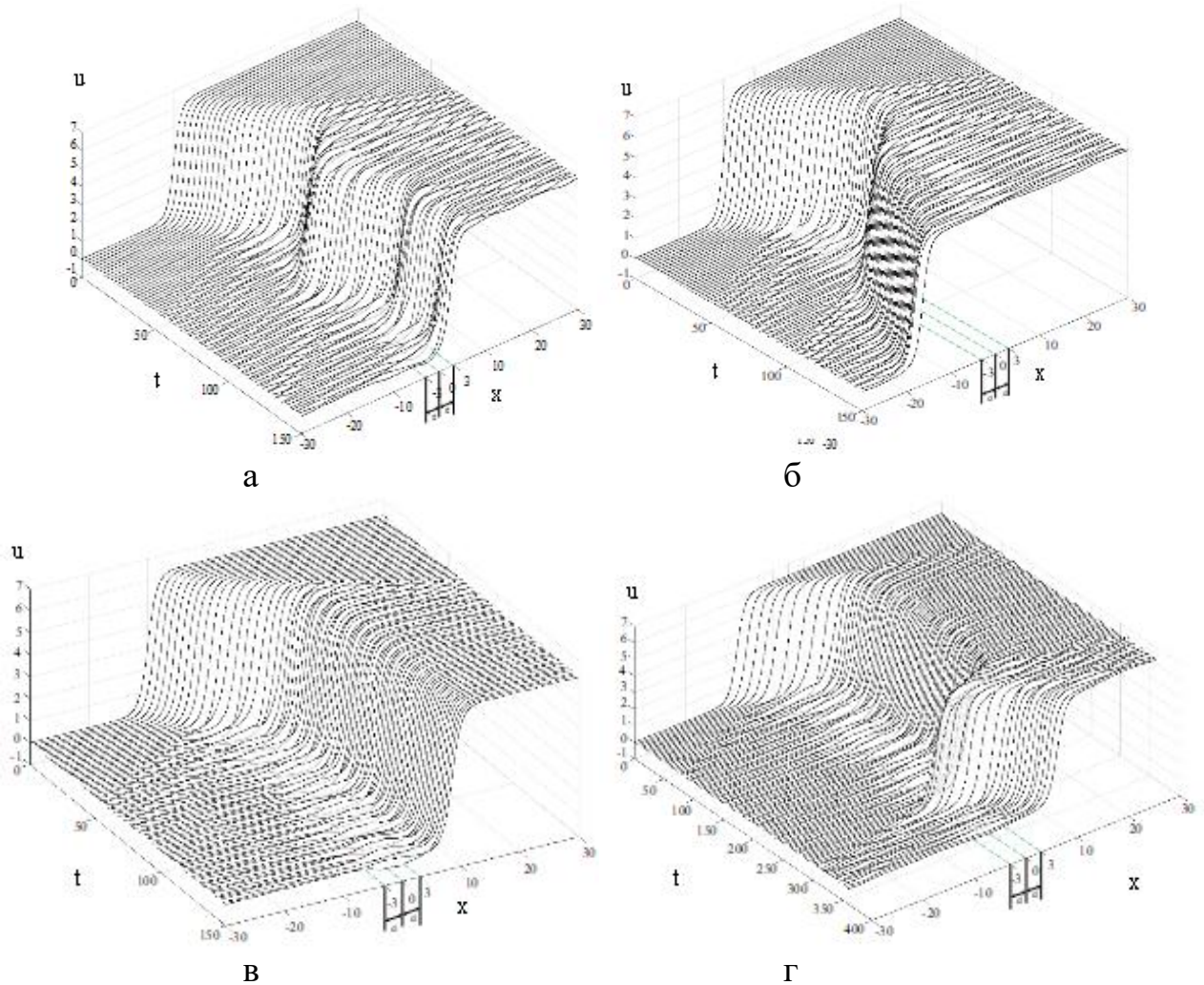


Рисунок 3.18. Динамика прохождения кинка через область трёх протяжённых примесей в виде потенциальных ям при $K = 0.5$, $W = 1$, $d = 2$. а) $v_0 = 0.28$, б) $v_0 = 0.33$, в) $v_0 = 0.343$, г) $v_0 = 0.3426$

При значении начальной скорости кинка меньше критической v_c можно наблюдать пиннинг на первой, второй и третьей примесях (кривые 1, 2, 3 на рисунке 3.20а). Из рисунка 3.20а, можно видеть, что такие колебания носят не гармонический характер, но через некоторое время колебания осцилляторов синхронизируются, становясь более гармоническими. Также можно получить сценарий пиннинга с перескоком кинка из одной примеси к другой (Рисунок 3.20б). В случае протяжённых примесей такое поведение кинка, обусловлено не только потерей энергии на возбуждение локализованных колебаний бризерного типа и их взаимодействие между собой, но и потерей на «излучение», а также возбуждением внутренних степеней свободы кинка (например, пульсационной моды кинка). При значениях скоростей меньше v_c наблюдается эффект резонансного отражения кинка от притягивающих примесей (кривая 4,

рисунок 3.20а), который также наблюдается для случаев одной и двух примесей [7, 144, 145]. Кинк, проходя через области примесей, замедляется до полной остановки. Потом начинает двигаться в противоположную начальной сторону со скоростью $v_f = 0.19$. Данный эффект носит резонансный характер, который связан со взаимодействием кинка с локализованными на примесях волнами. Уменьшение конечной скорости по сравнению с начальной связано с потерей кинетической энергии кинка на генерацию бризеров и свободных колебаний.

Как и в работе [48] для двух притягивающих примесей, можно получить такой резонансный эффект, как «квазитуннелирование», когда кинк, имея скорость меньше минимально необходимой для прохождения области трёх примесей (кривая 6, рисунок 3.19а) проходит их. При увеличении скорости v_0 до значения v_c , кинк уходит на бесконечность (кривая 5, рисунок 3.19а).

Разные сценарии динамики кинка так же можно получить, изменяя расстояние d между примесями. Так при увеличении расстояния между примесями, помимо случаев, представленных на рисунке 3.19а, можно получить случай «чистого пиннинга», т.е. захватывается на примеси без переходных процессов. Динамика кинка для данного случая представлен на рисунке 3.20. Примечательно, что для случая $d = 2$ и $d = 3$ при начальной скорости набегания кинка $v_0 = 0.28$ сценарий его поведения разный (Рисунок 3.21а, кривая 1 и 2 соответственно).

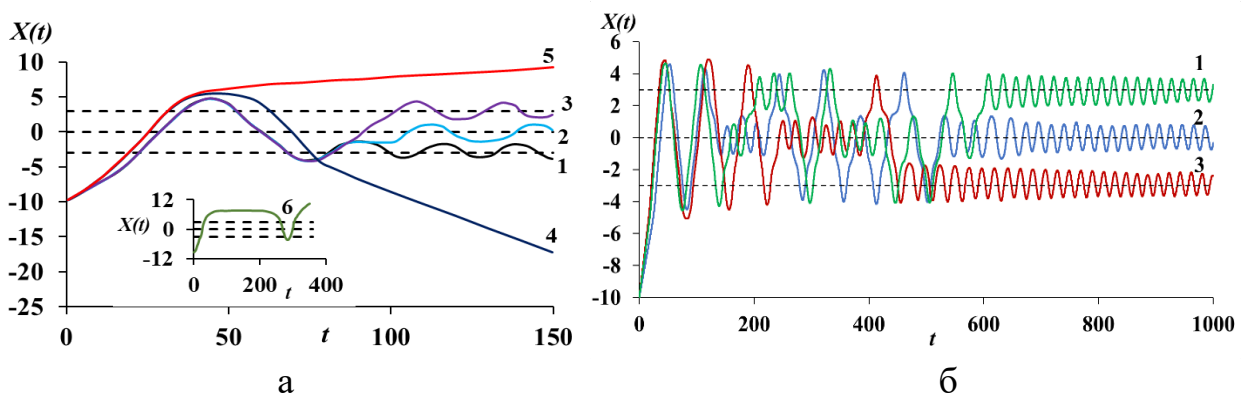


Рисунок 3.19. Зависимость координаты центра кинка $X(t)$ от времени t для случая трёх протяжённых примесей в виде потенциальных ям (а) при $W = 1$, $K = 0.5$, $d = 3$. а) Линии: 1) $v_0 = 0.28$; 2) $v_0 = 0.283043899$; 3) $v_0 = 0.2849$; 4) $v_0 = 0.33$; 5) $v_0 = 0.343$; 6) $v_0 = 0.59$. б) 1) $v_0 = 0.27$; 2) $v_0 = 0.2$; 3) $v_0 = 0.30$

Таким образом представляется возможным получить те же сценарии динамики кинка, изменяя параметр d , но не меняя его начальной скорости и параметров самих примесей. Рассмотрим это на примере системы с параметрами $W = 1$, $K = 0.5$ и $v_0 = 0.1$. Можно, качественно выделить несколько областей. Первая область $1.505 < d < 2.3$, где кинк колеблется в области эффективной примеси с последующим захватом на одной из единичных примесей. При $d = 1.52$ колебания носят неустойчивый характер и кинк перескакивает между единичными примесями и эффективной (Рисунок 3.21б, кривая 2). В случае $d = 1.55$ кинк совершает неполное колебание в области эффективной примеси и захватывается на первой единичной примеси (Рисунок 3.21б, кривая 3), по аналогии со сценарием, показанным на рисунке 3.21а, кривой 1.

Стоит отметить, что при расстояниях d между примесями ниже некоторой величины $d_1 \approx 1.505$ кинк колеблется в области всех трёх примесей, т.е. они действуют как одна эффективная (Рисунок 3.21б, кривая 1). При дальнейшем увеличении расстояния до параметра $d_2 \approx 2.3$ характер динамики кинка меняется. В случае $2.3 \leq d < 2.485$ кинк проходит через примеси и уходит в бесконечность (Рисунок 3.21в, кривые 2, 4).

В области $2.485 \leq d < 3.64$ кинк захватывается на единичных примесях без переходных процессов. Однако, такие сценарии неустойчивы и пропадают при небольшом изменении расстояния d (Рисунок 3.21в, кривые 1, 3, 5). В области $3.64 \leq d < 3.8$ наблюдается сценарий «чистого пиннинга» на третьей примеси (Рисунок 3.21г, кривая 1). При дальнейшем увеличении в области $d \geq 3.8$ можно получить случаи «чистого пиннинга» на второй (Рисунок 3.21г, кривая 2) и третьей (Рисунок 3.21г, кривая 3) примесях. Для рассматриваемого случая, можно отметить, что минимальная скорость, необходимая кинку для прохождения одной примеси равна 0.12.

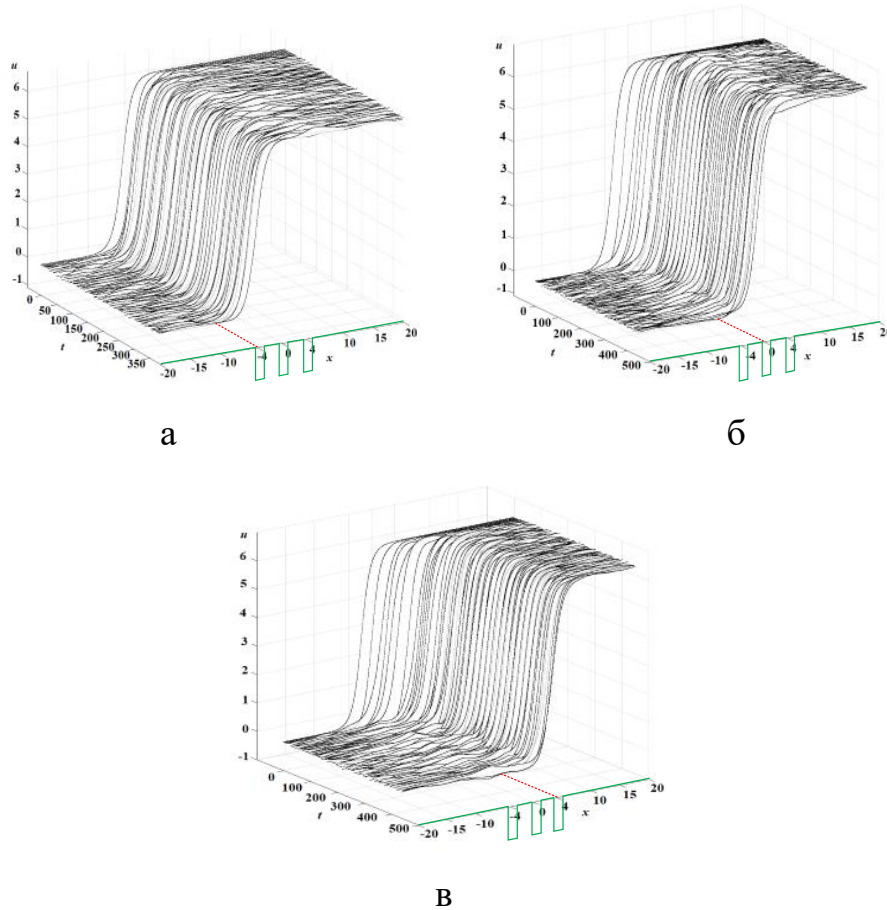


Рисунок 3.20. Динамика эволюции кинка через область трёх протяжённых примесей в виде потенциальной ямы при $K = 0.5$, $W = 1$, $d = 3$. а) $v_0 = 0.2$, б) $v_0 = 0.28$, в) $v_0 = 0.292$

Похожие сценарии динамики кинка могут быть получены путём изменения параметров примеси K и W . Например, изменяя величину K при неизменных параметрах $W = 1$, $d = 2$, $v_0 = 0.2$ можно получить различные сценарии пиннинга кинка на примесях с перескоком между примесями и дальнейшим захватом на одной из них (Рисунок 3.22)

Зависимость конечной скорости кинка v_k от начальной для случая $W = 1$, $K = 0.5$, $d = 2$ приведена на рисунке 3.23. Из рисунка видно, что данная зависимость содержит много резонансных скоростей и как в случае одной и двух примесей, они появляются с определённой периодичностью.

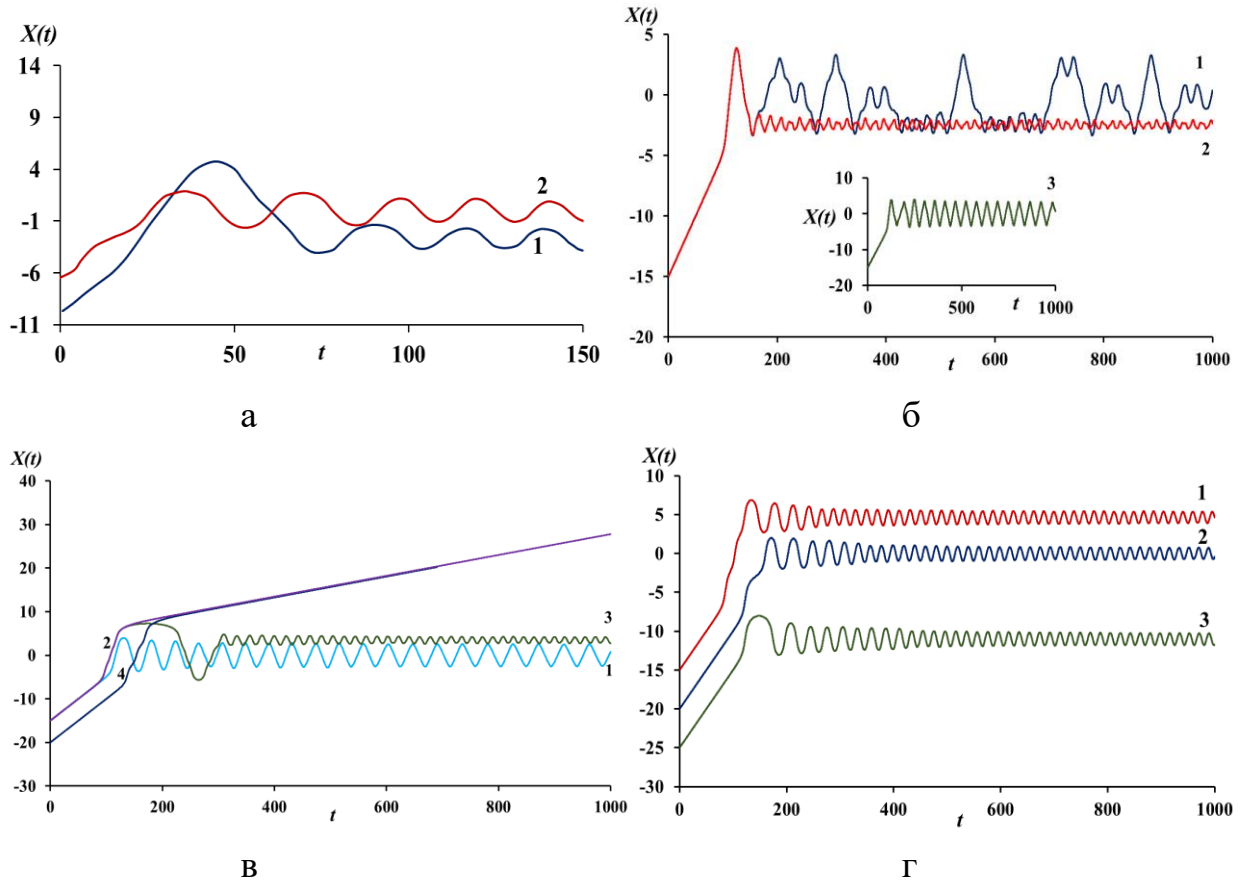


Рисунок 3.21. Зависимость координаты центра кинка $X(t)$ от времени t в модели трёх примесей в виде потенциальной ямы при разном d для случаев: а: $v_0 = 0.28$ 1) $d = 2$, 2) $d = 3$, б: $v_0 = 0.1$ 1) $d = 1.52$, 2) $d = 1.55$, 3) $d = 1.505$, в: $v_0 = 0.1$ 1) $d = 1$, 2) $d = 2.485$, 3) $d = 2.5$, 4) $d = 3.5$ г: $v_0 = 0.1$ 1) $d = 3.64$, 2) $d = 5$, 3) $d = 10$

Стоит отметить, что чем значение скорости кинка ближе к пороговой скорости v_c прохождения области примесей, тем наиболее часто появляются резонансные скорости. Случай $v_f = 0$ соответствует пиннингу на одной из примесей, $v_f < 0$ соответствует резонансному отражению кинка от примесей, а $v_f > 0$ прохождению кинка через примесь (или эффект «квазитуннелирования»). В области $v_f > v_c$ скорость кинка нелинейно возрастает и описывается формулой (3.85), полученная в работе [22], которая с хорошей точностью описывает численно рассчитанные данные. Зависимость, представленная на рисунке 3.25, характерна не только для случая трёх примесей, но и для случая одной и двух [9, 10].

$$v_f^2 = c(v_0^2 - v_c^2), \quad (3.85)$$

где c – константа, подбираемая с помощью аппроксимации.

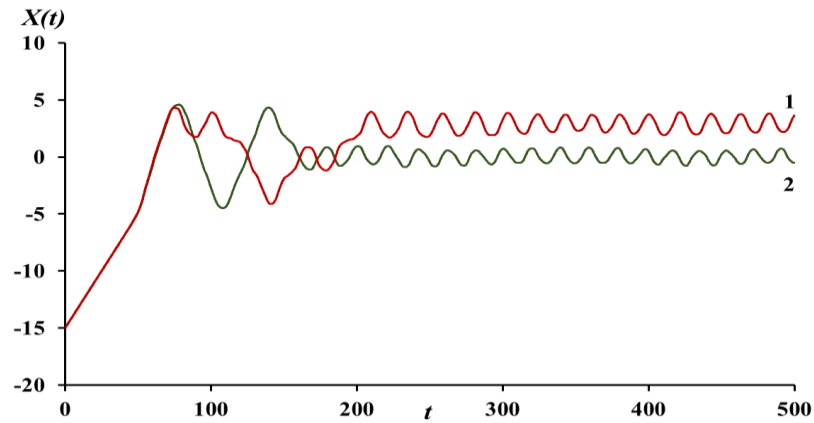


Рисунок 3.22. Зависимость координаты центра кинка $X(t)$ от времени t в модели трёх примесей в виде потенциальной ямы с параметрами $W = 1$, $d = 2$, $v_0 = 0.2$ при разном K . Линии: 1) $K = 0.45$, 2) $K = 0.5$

В нашем рассматриваемом случае $W = 1$, $K = 0.5$, $d = 2$ формула (3.80) при значении константы $c = 1.47$ хорошо описывает величину конечной скорости кинка.

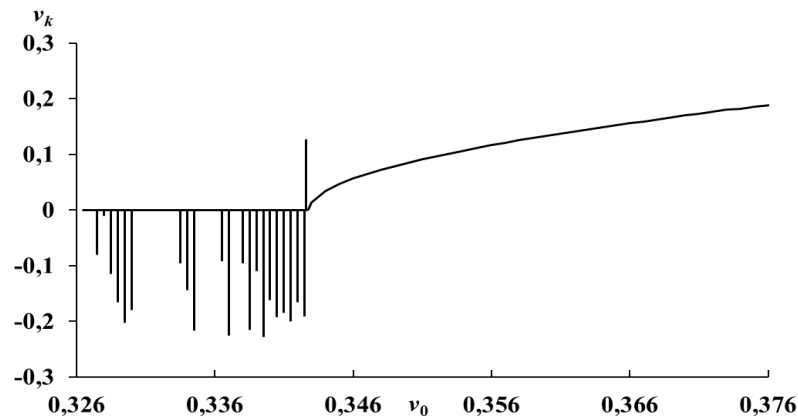


Рисунок 3.23. Зависимость конечной скорости движения кинка v_k от начальной v_0 для случая $W = 1$, $K = 0.5$, $d = 2$

Анализ результатов, полученных в ходе численного решения, показал, что коэффициент c является функцией от параметров W , K , d и n – параметр, отвечающий за количество примесей в модели. Приблизённо эту зависимость можно представить в виде:

$$c_{theor} = \frac{WKdn}{2}. \quad (3.86)$$

Например, для рассматриваемого нами случая параметр $c_{theor} = 1.5$ с небольшой погрешностью совпадает со значением $c = 1.47$, которая была получена в ходе численного эксперимента.

3.8. Связанные колебания локализованных на трёх протяжённых примесях волн бризерного типа. Результаты численного моделирования

Далее исследуем подробнее случай, когда кинк проходит через три примеси. Ранее, в параграфе 3.3 для случая модели трёх точечных примесей в виде потенциальных ям была построена аналитическая модель, качественно описывающая колебания, локализованных на примесях, волн. В параграфе 3.6 было получено численное решение для данной модели, результаты которого качественно совпадали с аналитическими результатами. Рассмотрим случай протяжённых примесей и исследуем, используя численное моделирование, эволюцию локализованных, в области примесей, нелинейных волн бризерного типа, возникающих после пересечения кинком всех трёх примесей (Рисунок 3.24).

Из приведённого ранее анализа численных расчетов и аналитической модели (3.49) для случая точечных примесей было показано, что на характер возникающих колебаний в примесях можно повлиять, изменяя такие параметры как начальная скорости кинка v_0 и расстояние между примесями d . На рисунке 3.24 видно, что при различных параметрах скорости и расстояния между протяжёнными примесями можно получить случай синфазных, антифазных и смешанных колебаний, а также случай биений.

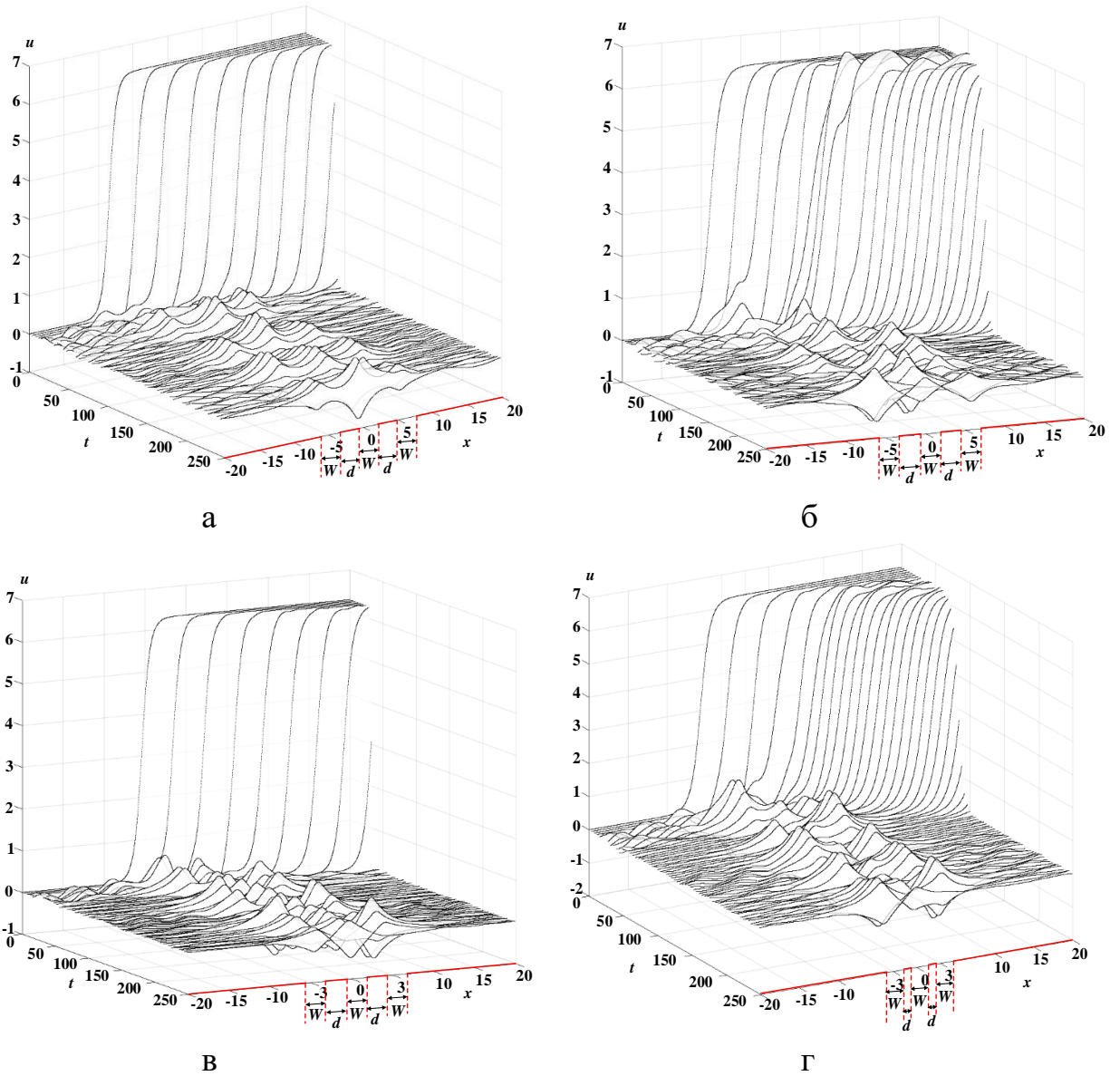


Рисунок 3.24. Возбуждение и эволюция бризеров в области протяжённых примесей с различными параметрами расстояния d между ними и начальной скорости кинка v_0 при $\Delta K = 1.2$, $W = 1$: а) $d = 4$, $v_0 = 0.785$, б) $d = 4$, $v_0 = 0.585$, в) $d = 2$, $v_0 = 0.8$, г) $d = 2$, $v_0 = 0.653$.

При уменьшении расстояния между примесями $d < 1$ можно наблюдать случай перехода трёх взаимодействующих волн в одну (Рисунок 3.25). Как для случая точечных примесей, построим зависимость амплитуд от времени и проведём частотный Фурье-анализ.

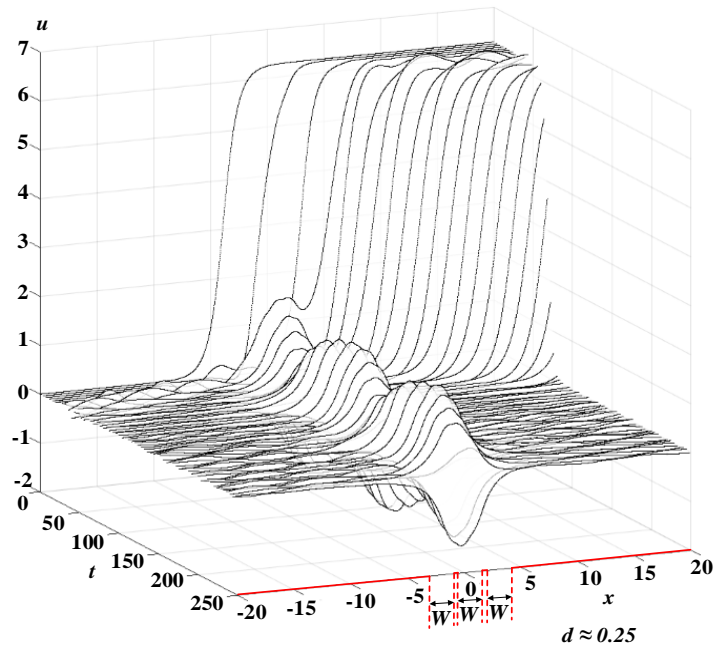


Рисунок 3.25 – Возбуждение и эволюция бризеров в области протяжённых примесей при $\Delta K = 1.2$, $W = 1$ для случая малых d

Из рисунков 3.24 и 3.25 можно сделать вывод, что, при изменении параметра d изменяется и тип связи связанных локализованных нелинейных волн. Поскольку примесные моды возбуждаются через некоторый промежуток времени Δt , то можно предположить, что на начальную разность фаз колебаний может повлиять и начальная скорость кинка v_0 . Важно отметить, что из-за взаимодействия самих примесных волн появляется зависимость амплитуды от времени (периодический обмен энергией между примесными волнами (см. Рисунок 3.24)). Случаи синфазных (Рисунок 3.24а) или антифазных (Рисунок 3.24б, в) колебаний встречаются в случаях, где частота и амплитуда бризера определяются параметрами примеси (ΔK , W) и начальной скоростью кинка [96, 103] и в целом не зависят от времени. Наиболее типичным и часто встречающимся типом колебаний является случай биений (Рисунок 3.24г).

При малых значениях d (Рисунок 3.26а), при любом значении начальной скорости кинка v_0 , разность фаз примесных волн сокращается до нуля и через определённый промежуток времени они начинают колебаться синфазно.

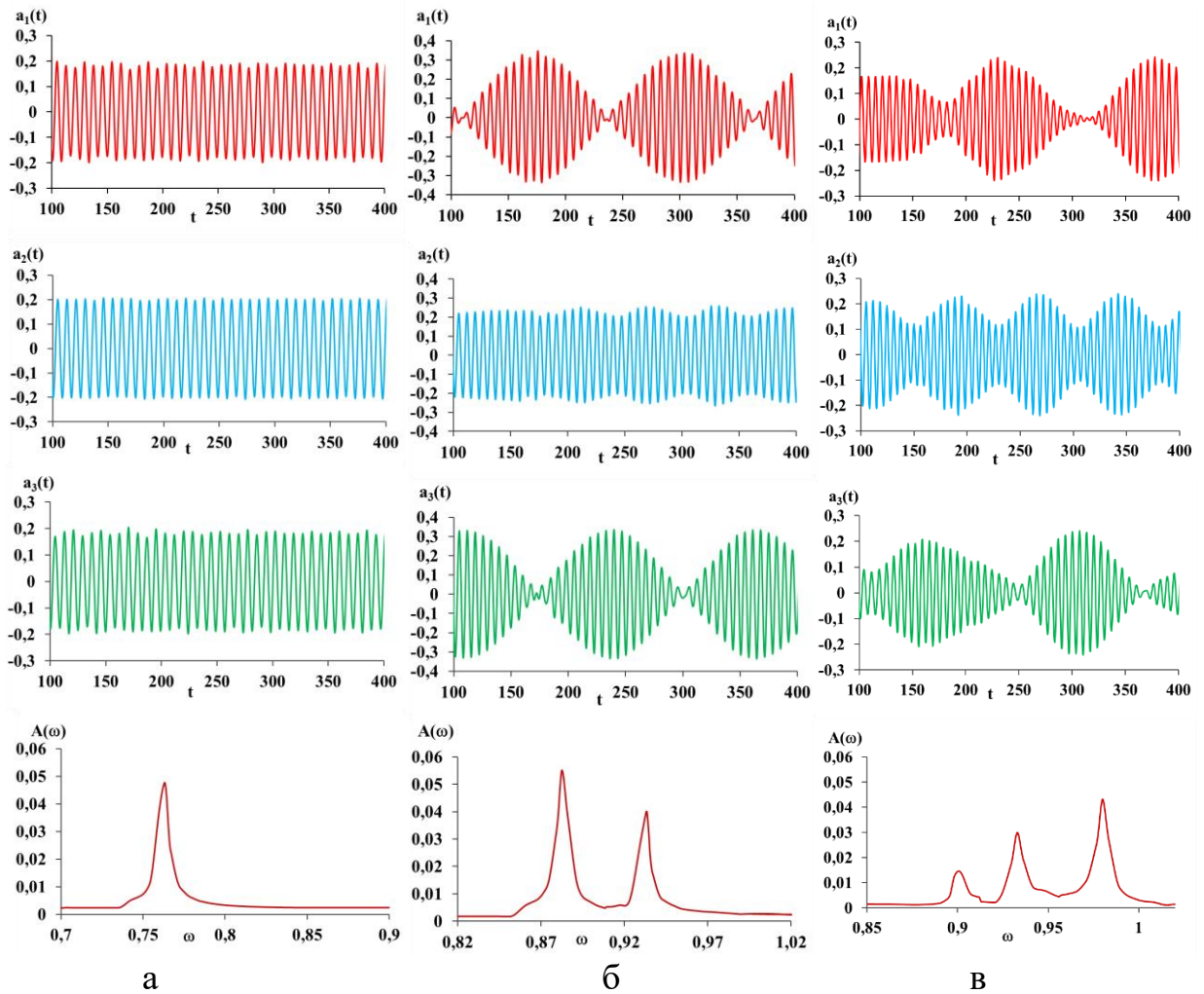


Рисунок 3.26. Зависимость амплитуд первого $a_1(t)$, второго $a_2(t)$ и третьего $a_3(t)$ осцилляторов от времени t , полученные в результате численного решения системы (3.37) и соответствующее Фурье-разложение $A(\omega)$ для случая протяжённых примесей с параметрами $\Delta K = 0.8$, $W = 1$ при различных расстояниях между примесями:

$$\text{а) } d = 0.25, v_0 = 0.45, \text{ б) } d = 3, v_0 = 0.62, \text{ в) } d = 4, v_0 = 0.52$$

Антисимметричные колебания становятся не устойчивыми и возбудить такой режим не удаётся, поскольку энергия связи при $d \rightarrow 0$ начинает превышать энергию колебаний примесных волн, что приводит «синхронизации» их колебаний [115]. Таким образом все три частотные компоненты, присутствующие в частотном спектре (за исключением синфазных и антифазных колебаний) не зависят от параметра v_0 . Аналогичное поведение можно наблюдать и при других значениях d . На рисунке 3.27 кривые 1, 2 и 3 показывают зависимость найденных численно трёх частот от расстояния между примесями d . При этом кривые 2 и 3 не начинаются с нуля, т.к. при малых d устойчивостью обладают лишь синфазные колебания.

В модели для трёх точечных примесей в параграфе 3.3 было показано, что колебания локализованных на примесях волн можно описать системой трёх гармонических осцилляторов со связью упруго типа, получаемых системой обыкновенных дифференциальных уравнений, полученных приближённым аналитическим методом коллективных координат (3.40). В случае численного метода (см. параграф 3.4) полученные результаты показали качественную сходимость с аналитическим методом в случае больших d . Также было показано, что полученные в ходе численного моделирования собственные частоты колебаний можно аппроксимировать экспоненциальной функцией вида (3.82). Поэтому, по аналогии с точечными примесями, проведём аппроксимацию собственных частот, полученных в результате численного метода решения, для протяжённых примесей:

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= 0.852 - 0.356e^{-0.605x} \\ \Omega_2 &= 0.848 + 0.016e^{-0.136x}, \quad \Delta K = 1.2, W = 1, \\ \Omega_3 &= 0.855 + 0.466e^{-0.630x}\end{aligned}\quad (3.87)$$

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= 0.937 - 0.184e^{-0.417x} \\ \Omega_2 &= 0.928 + 0.078e^{-0.639x}, \quad \Delta K = 0.2, W = 1. \\ \Omega_3 &= 0.934 - 0.629e^{-0.618x}\end{aligned}\quad (3.88)$$

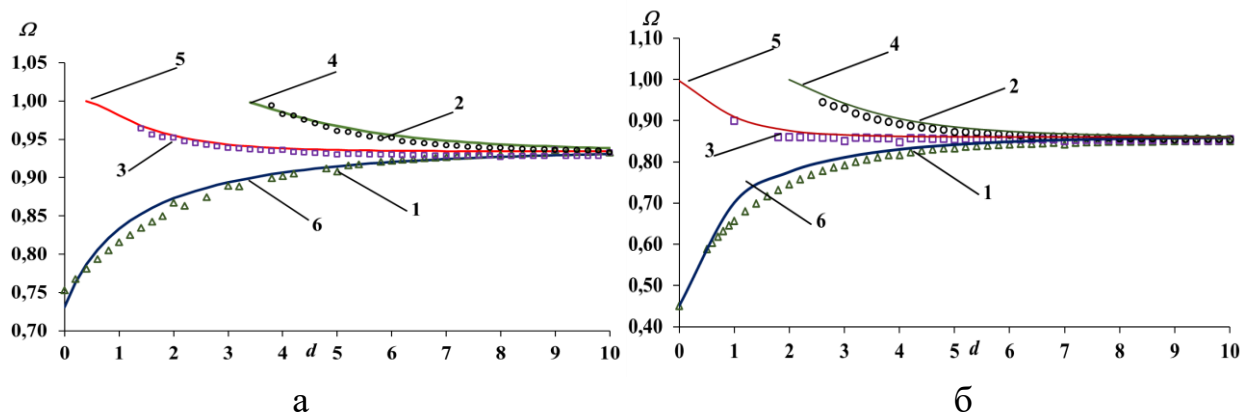


Рисунок 3.27. Зависимость частот локализованных на примесях волн от расстояния d между ними при $W = 1$: а) $\Delta K = 0.2$, б) $\Delta K = 1.2$. Кривые 1, 2 и 3 численно рассчитанные частоты для синфазных, антифазных и смешанных колебаний соответственно. Кривые 4, 5 и 6 аналитически рассчитанные частоты для синфазных, антифазных и смешанных колебаний соответственно

Для детального анализа полученного численного решения желательно получить аналитическое решение. В работе [96] было показано, что для одиночной и двойной малой протяжённой примеси, путем линеаризации исходного УСГ,

можно получить уравнение Шрёдингера, решение которого качественно совпадает с результатами численного моделирования. Данная задача была рассмотрена для модели с одной и двумя протяжёнными примесями, для случая малых колебаний. Представляется возможным рассмотреть случай трех примесей, когда параметр периодического потенциала $K(x)$ является функцией вида (3.81). В первой области пространства уравнение переписется в виде:

$$\psi_{xx} + (\omega^2 - 1)\psi = 0. \quad (3.89)$$

Соответствующее ему характеристическое уравнение запишется в виде:

$$l^2 + \omega^2 - 1 = 0, \quad l = \sqrt{1 - \omega^2}. \quad (3.90)$$

В области примеси уравнение переписется в виде:

$$\psi_{xx} + (\omega^2 - 1 + \Delta K)\psi = 0. \quad (3.91)$$

Характеристическое уравнение для него:

$$n_0^2 + \omega^2 - 1 + \Delta K = 0, \quad n_0 = i\sqrt{\omega^2 + \Delta K - 1}, \quad n = \sqrt{\omega^2 + \Delta K - 1}. \quad (3.92)$$

При этом полагаем, что $1 - \omega^2 > 0$ и $\omega^2 + \Delta K - 1 > 0$, то есть $\Delta K > 1 - \omega^2 > 0$. Разобьём пространство на семь зон, где для области вне примеси, решение ищем в виде экспоненциальных функций, а для области примеси, решение ищем в виде тригонометрических функций:

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= A_1 e^{-lx} + B_1 e^{lx}, \\ \psi_2(x) &= A_2 \sin nx + B_2 \cos nx, \\ \psi_3(x) &= A_3 e^{-lx} + B_3 e^{lx}, \\ \psi_4(x) &= A_4 \sin nx + B_4 \cos nx, \\ \psi_5(x) &= A_5 e^{-lx} + B_5 e^{lx}, \\ \psi_6(x) &= A_6 \sin nx + B_6 \cos nx, \\ \psi_7(x) &= A_7 e^{-lx} + B_7 e^{lx}. \end{aligned} \quad (3.93)$$

Производные от (3.93):

$$\psi_{1x}(x) = -lA_1 e^{-lx} + lB_1 e^{lx}, \quad (3.94)$$

$$\begin{aligned}
\psi_{2x}(x) &= nA_2 \cos nx - nB_2 \sin nx, \\
\psi_{3x}(x) &= -lA_3 e^{-lx} + lB_3 e^{lx}, \\
\psi_{4x}(x) &= nA_4 \cos nx - nB_4 \sin nx, \\
\psi_{5x}(x) &= -lA_5 e^{-lx} + lB_5 e^{lx}, \\
\psi_{6x}(x) &= nA_6 \cos nx - nB_6 \sin nx, \\
\psi_{7x}(x) &= -lA_7 e^{-lx} + lB_7 e^{lx}.
\end{aligned}$$

Граничные условия берем в виде равенства функций и производных от функций по координате на границах областей, в бесконечности функции стремятся к нулю:

$$\begin{aligned}
\psi_1(-\infty) &= 0, \\
\psi_1(0) &= \psi_2(0), \psi_{1x}(0) = \psi_{2x}(0), \\
\psi_2(w) &= \psi_3(w), \psi_{2x}(w) = \psi_{3x}(w), \\
\psi_3(w+d) &= \psi_4(w+d), \psi_{3x}(w+d) = \psi_{4x}(w+d), \\
\psi_4(2w+d) &= \psi_5(2w+d), \psi_{4x}(2w+d) = \psi_{5x}(2w+d), \\
\psi_5(2w+2d) &= \psi_6(2w+2d), \psi_{5x}(2w+2d) = \psi_{6x}(2w+2d), \\
\psi_6(3w+2d) &= \psi_7(3w+2d), \psi_{6x}(3w+2d) = \psi_{7x}(3w+2d), \\
\psi_7(\infty) &= 0.
\end{aligned} \tag{3.95}$$

Подставив соответствующие выражения (3.93), (3.94) в (3.95) и, используя основные тригонометрические тождества, получим дисперсионное соотношение:

$$\begin{aligned}
(2 \ln \operatorname{ctg} nW + l^2 - n^2)^3 &= 2e^{-2ld} (2 \ln \operatorname{ctg} nW + l^2 - n^2)(l^2 + n^2)^2 + \\
&= (l^2 + n^2)^2 (2 \ln \operatorname{ctg} nW - l^2 + n^2) e^{-4ld}.
\end{aligned} \tag{3.96}$$

Можно отметить, что решение (3.93) содержит в себе ряд интересных частных случаев. Так, например, если в (3.93) $A_2 = A_4 = A_6 = 0$, то локализованные нелинейные волны колеблются синфазно или в случае $A_2 = B_4 = A_6 = 0$, колебания имеют противофазную природу. Так же можно получить комбинацию смешанных колебаний $A_2 = A_4 = B_6 = 0$. При больших расстояниях между примесями $d \rightarrow \infty$ полученное соотношение (3.96) преобразуется к виду

$$2 \ln \operatorname{ctg} nW + l^2 - n^2 = 0, \tag{3.97}$$

Выражение (3.97) является дисперсионным соотношением для одной примеси. В случае малых расстояний $d \rightarrow 0$ выражение (3.96) преобразуется к виду:

$$2\ln \operatorname{ctg}^3 nW - 6\ln \operatorname{ctg} nW + 3(l^2 - n^2) \operatorname{ctg}^2 nW - (l^2 - n^2) = 0, \quad (3.98)$$

который совпадает с дисперсионным соотношением для ямы утроенной ширины:

$$2\ln \operatorname{ctg} 3nW + l^2 - n^2 = 0. \quad (3.99)$$

Расписав в (3.99) $\operatorname{ctg} 3nW$:

$$\operatorname{ctg} 3nW = \frac{\operatorname{ctg}^2 nW - 3}{3 \operatorname{ctg}^2 nW - 1} \operatorname{ctg} nW, \quad (3.100)$$

и подставив в (3.100) можно привести к следующему виду:

$$2\ln \operatorname{ctg}^3 nw - 6\ln \operatorname{ctg} nw + 3(l^2 - n^2) \operatorname{ctg}^2 nw - (l^2 - n^2) = 0. \quad (3.101)$$

Подставляя в дисперсионное соотношение (3.97) значения $l = \sqrt{1 - \omega^2}$ и $n = \sqrt{\omega^2 + \Delta K - 1}$:

$$\begin{aligned} & \left(2\sqrt{1 - \omega^2} \sqrt{\omega^2 + \Delta K - 1} \operatorname{ctg} \sqrt{\omega^2 + \Delta K - 1} W + 2 - 2\omega^2 - \Delta K \right)^3 = \\ & = \Delta K^2 \left[2 \left(2\sqrt{1 - \omega^2} \sqrt{\omega^2 + \Delta K - 1} \operatorname{ctg} \sqrt{\omega^2 + \Delta K - 1} W + 2 - 2\omega^2 - \Delta K \right) \right. \\ & \quad \left. + \left(2\sqrt{1 - \omega^2} \sqrt{\omega^2 + \Delta K - 1} \operatorname{ctg} \sqrt{\omega^2 + \Delta K - 1} W - 2 + 2\omega^2 + \Delta K \right) e^{-2\sqrt{1 - \omega^2} d} \right] e^{-2\sqrt{1 - \omega^2} d}. \end{aligned} \quad (3.102)$$

С помощью выражения (3.102) была построена зависимость $\Omega(d)$, представлена на рисунке 3.27 сплошными линиями. Из рисунка видно, что полученное дисперсионное выражение показывает хорошее количественное совпадение с численно рассчитанными значениями частот (представленными точечными кривыми).

3.9. Генерация локализованных на трёх протяжённых примесях волн солитонного типа. Результаты численного моделирования

Для случаев одной и двух примесей в работах [65, 103] было показано, что при увеличении площади протяжённых примесей путём изменения параметров W , ΔK могут возникнуть локализованные решения солитонного типа. На рисунке 3.29 продемонстрированы полученные численно возможные сценарии генерации солитонов на примесях в зависимости от начальной скорости набегания кинка. Так, например, можно получить случай, когда амплитуда колебаний связанных солитонов отрицательная (антисолитон) (Рисунок 3.29а) или положительная (солитон) (Рисунок 3.29б). Также можно получить случай разных значений амплитуд солитонов на примесях, например, два положительных и один отрицательный (Рисунок 3.29в) или наоборот (Рисунок 3.29г).

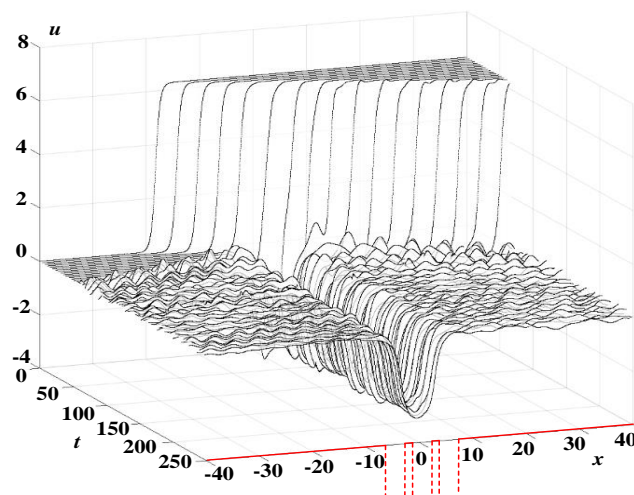


Рисунок 3.28. Возбуждение и эволюция солитонов в области протяжённых примесей при $K = -1.4$, $W = 1.7$ для случая малых d

Как и в случае с бризерами в протяжённых ямах, представляется возможным, посмотреть генерацию солитонов при малых расстояниях между примесями (Рисунок 3.28). Из рисунка 3.28 видно, что в случае малых расстояний между примесями, можно наблюдать, переход трёх взаимодействующих волн в одну. Похожий сценарий наблюдался и для случая локализованных, на протяженных примесях, нелинейных волн бризерного типа. Изменяя один из параметров примеси, например ширину, при это не изменяя параметры начальной скорости

кинка, расстояния между примесями и глубины можно получить похожие сценарии локализованных примесных мод (Рисунок 3.30).

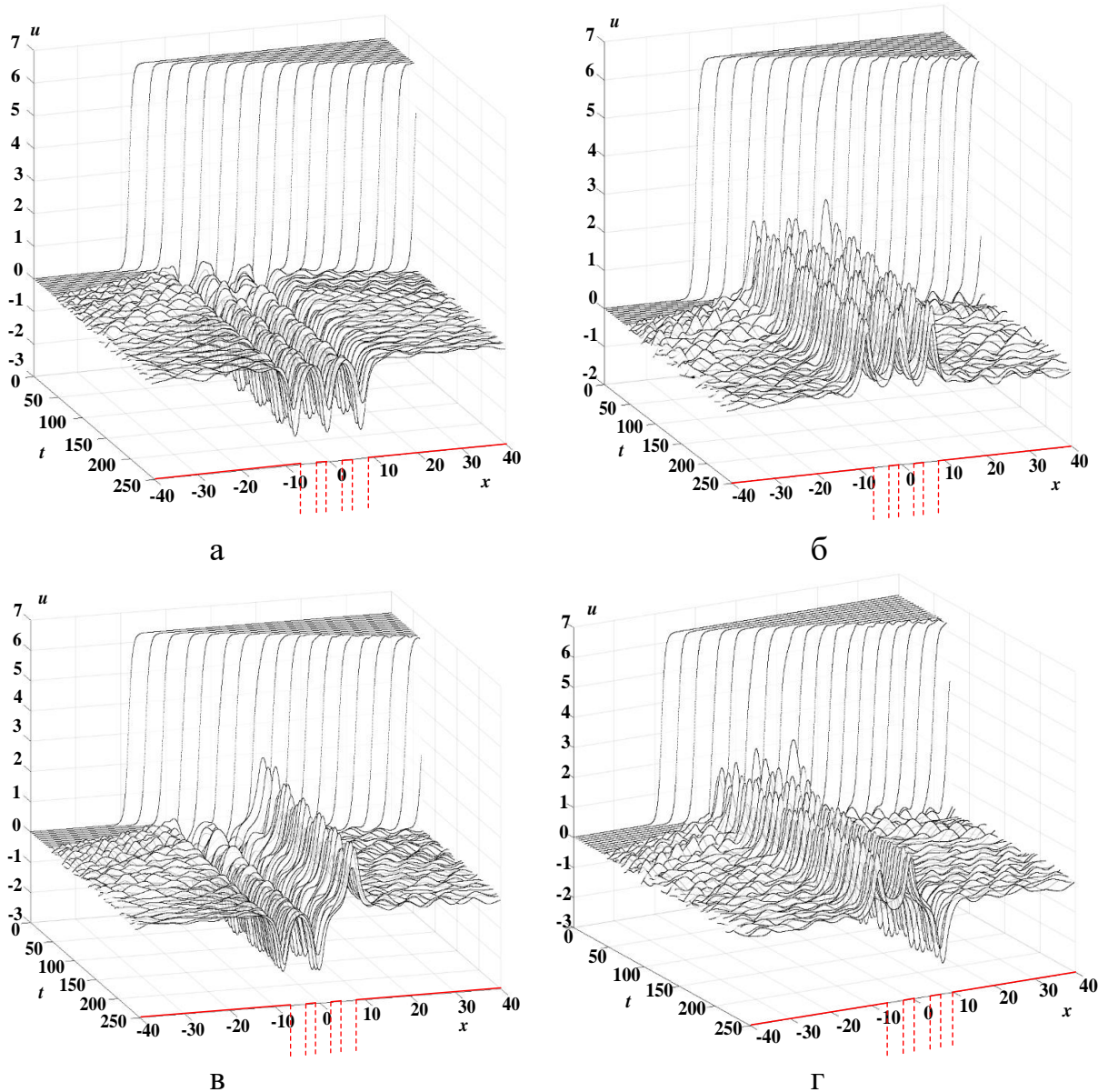


Рисунок 3.29. Генерация локализованных волн солитонного типа на трёх примесях при $W = 1.7$, $K = -1.4$, $d = 6$, при различных параметрах начальной скорости кинка v_0 : а) $v_0 = 0.890$, б) $v_0 = 0.84536$, в) $v_0 = 0.860$, г) $v_0 = 0.84236$

Рассмотрим подробнее эволюцию возникновения связанных солитонов. В качестве начальных условий рассмотрим случай, приведенный на рисунке 3.29в. Опишем поведение локализованных нелинейных волн в протяжённых примесях на разных промежутках времени. В промежуток времени от 20 до 50 (Рисунок 3.31а) в процессе прохождения кинком через область трёх потенциальных ям в них возникают локализованные нелинейные волны, в первых двух примесях волны

солитонного типа, т.е. амплитуда волны больше нуля, а в третьей – бризерного, амплитуда колебаний изменяется в пределах от a до $-a$.

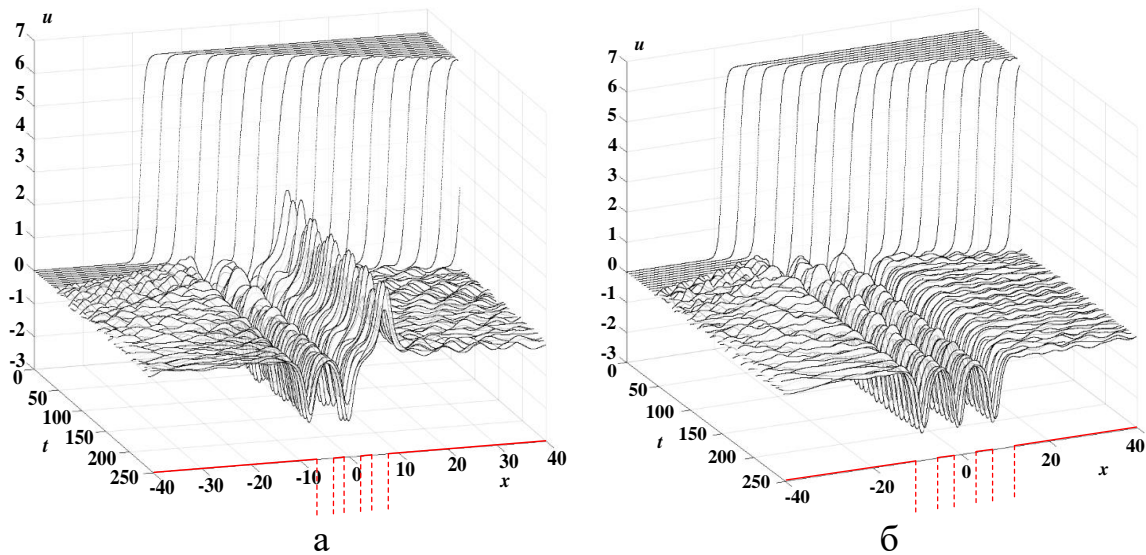


Рисунок 3.30. Генерация локализованных волн солитонного типа на трёх примесях при $K = -1.4$, $d = 6$, $v_0 = 0.86$ при различных параметрах W примеси: а) $W = 1.7$ в первых двух ямах амплитуда колебаний локализованных связанных волн отрицательная, в третьей – положительная, б) $W = 2$ во всех ямах амплитуда колебаний отрицательная

Также на краях кинка, после прохождения области примесей возникают «излучения», что существенно повлияет на динамику колебаний в дальнейшем. В промежутке времени от 50 до 150 колебание на третьей примеси приобретает устойчивый характер и переходит в солитон (Рисунок 3.31б). В момент времени при $t > 150$ на всех трёх примесях возникают устойчивые солитоны, амплитуда «излучений» становится меньше (Рисунок 3.31в). При достаточно больших значениях t порядка 10^3 колебания становятся более устойчивыми, а амплитуда «излучений» стремиться к нулю (Рисунок 3.31г), а полная энергия $E_{\text{полн}} < 0$ ($E_{\text{полн}} \approx -0.19142$), т.е. энергия таких состояний меньше, чем однородного состояния. Следовательно оно является энергетически выгодным.

В заключение приведем диаграмму параметров примеси для некоторого постоянного расстояния между ними и некоторой постоянной начальной скорости (рисунок 3.32). Результаты численного счета показывают, что до определенных значений параметров на примесях регистрируются колебания бризерного типа

(область 1). Далее, увеличивая площадь примесей на них регистрируются переходы бризерных колебаний в солитонные (область 2).

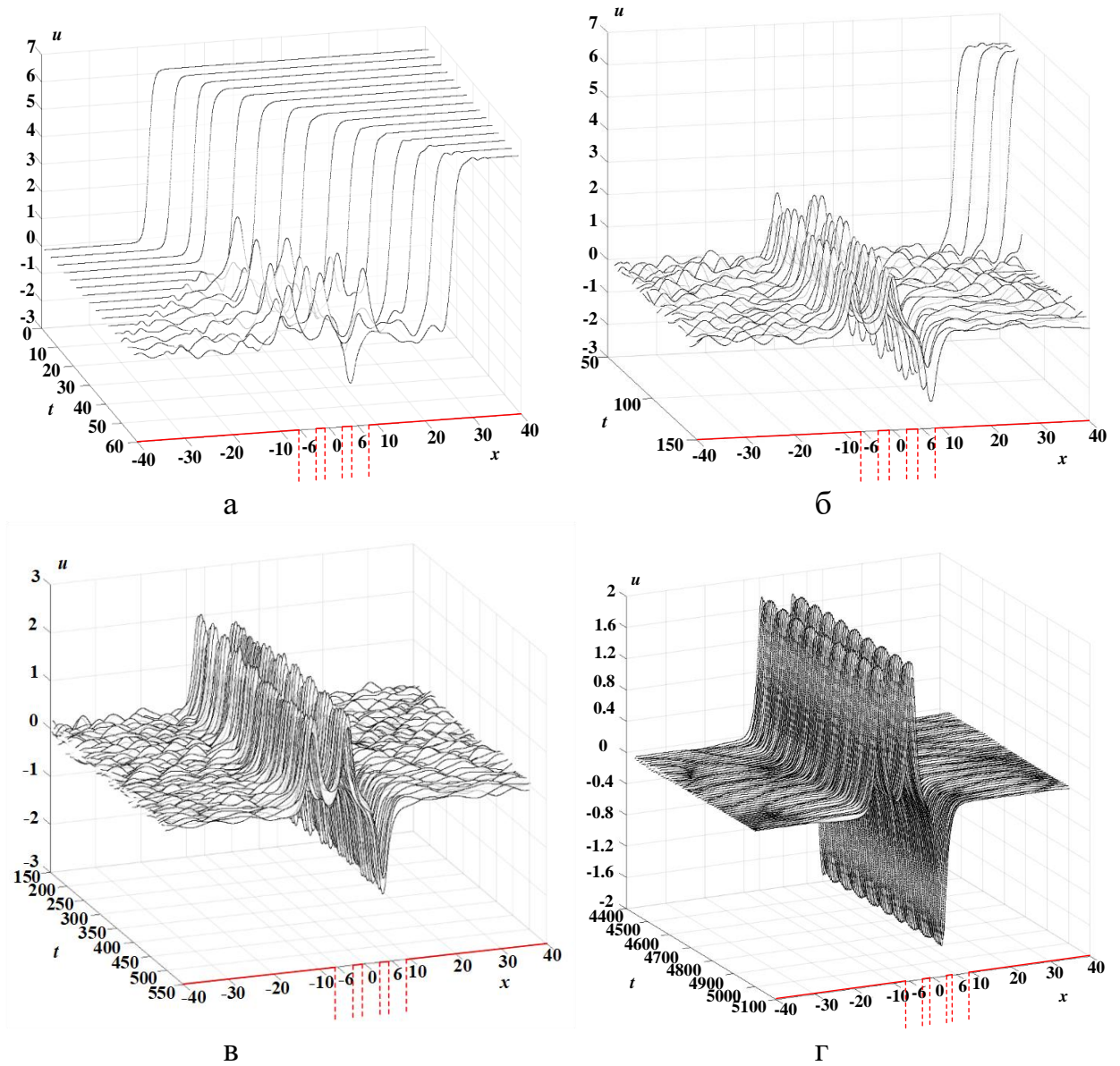


Рисунок 3.31. Эволюция солитонных решений для разных промежутков времени для параметров примесей и начальной скорости рисунка 3.29в.

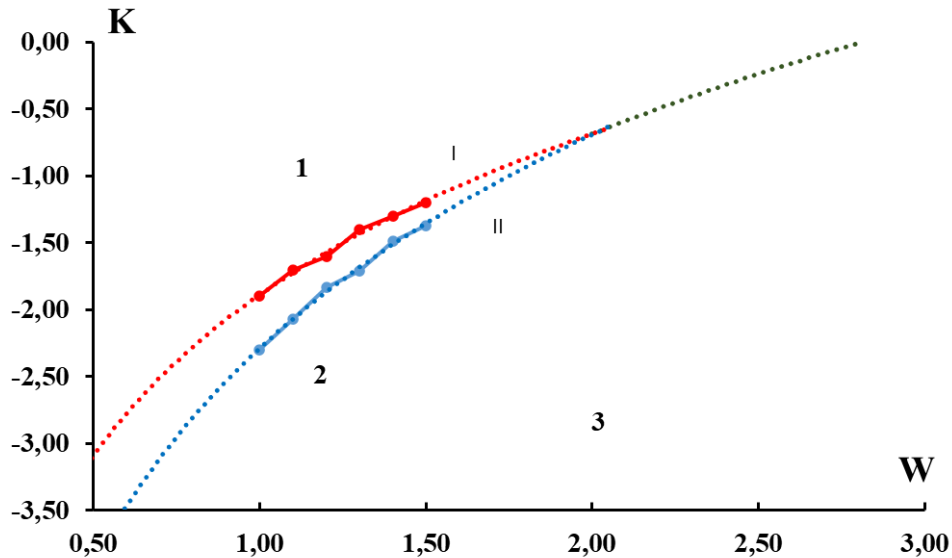


Рисунок 3.32. Фазовая картина колебаний, локализованных в области притягивающих примесей при $d = 6$, $v_0 = 0.9$, $X(0) = -15$.

Этот переход связан с потерями энергии бризерных колебаний, которые возникают из-за «излучения» бризеров. После дальнейшего увеличения параметров, на примесях образуются сразу колебания солитонного типа (область 3).

3.10. Управление структурой и динамикой локализованных на протяжённой примеси волн бризерного и солитонного типа методами авторезонанса

Далее рассмотрим возможность управления динамическими параметрами бризера и солитона. Ранее было показано, что управление структурой и динамикой солитонов возможно при приложении переменной внешней силы [117, 118] и учёте затухания в системе авторезонансным методом. Такие модели управления позволяют существенно уменьшить величины внешнего взаимодействия на систему [117–121]. Ниже подробнее рассмотрим использование такого метода для случая УСГ.

Явление авторезонанса исследовалось и для случая УСГ [2, 121]. Однако, в данных работах уже предполагалось наличие в системе солитонов и бризеров. Ниже рассмотрим генерацию и авторезонансную модель управления параметрами бризера и солитона уравнения синус-Гордона в модели с протяжёнными

примесями, переменной внешней силой малой амплитуды и диссипации в системе, используя численный метод конечных разностей, описание которого приведён в параграфе 3.4.

Для простоты рассмотрим поведение бризеров и солитонов на примере одной протяжённой примеси в виде потенциальной ямы. В одномерном случае $K(x)$ для одной протяжённой примеси будет иметь вид:

$$K(x) = \begin{cases} 1, & |x| > W/2, \\ K, & |x| < W/2, \end{cases} \quad (3.103)$$

где W , K – ширина и глубина протяжённой примеси соответственно. Параметр диссипации α задаётся кусочно-постоянной функцией вида:

$$\alpha = \begin{cases} 1, & x \leq x_l + D_d, \quad x \geq x_r - D_d, \\ \alpha_0, & x_l + D_d < x < x_r - D_d, \end{cases} \quad (3.104)$$

где D_{diss} – ширина области поглощения (обычно 3 – 5 % от ширины всей моделируемой области), α_0 – значение параметра диссипации в основной области. Использование (3.104) приводит к практически полному затуханию всех волн, дошедших до краев сетки. Модель с одной примесью соответствует трехслойной ферромагнитной структуре, состоящей из двух широких одинаковых слоев магнетика, разделенных тонким магнитным слоем с измененными значениями магнитной анизотропии.

Рассмотрим вначале случай локализованных волн бризерного типа. Пусть в начальный момент кинк находится на некотором расстоянии от протяжённой примеси, например, $u(0,0) = -10$. Далее кинк движется со скоростью, достаточную для прохождения области примеси. После прохождения кинком, на примеси возбуждается локализованная высокоамплитудная нелинейная волна типа солитонов или бризеров (Рисунок 3.33). Амплитуда возбуждаемого на примеси бризера убывает со временем, а его колебания сопровождаются «излучением» малоамплитудных волн. Далее результаты были получены с учетом коэффициента затухания $\alpha = 0.001$. Численный счет показывает, что если рассматривать случай без учёта внешней силы, то со временем амплитуда бризера становится меньше, что показано на рисунке 3.34. Отметим, что на представленном рисунке, временная

шкала начинается с момента возбуждения бризера в области примеси. Интересно рассмотреть данную систему с учётом переменной внешней силой $h(t)$, когда с помощью резонансных эффектов можно добиться колебаний большей амплитуды. Как известно [120, 122, 123] в нелинейной системе её собственная частота зависит от амплитуды, поэтому с ростом амплитуды резонанс не сохраняется. Тем не менее, решения с растущей амплитудой могут возникать при подходящем изменении частоты внешнего воздействия. Функцию $h(t)$, аналогично [117], будем брать в виде:

$$h = h_0 \cos(\omega t), \quad (3.105)$$

с частотой, являющейся линейной функцией времени:

$$\omega = \omega_0 - \mu t, \quad (3.106)$$

где ω_0 – собственная частота бризера локализованного в области примеси, μ – малый параметр. Ранее аналитически [121] было показано, что с помощью функции (3.106) можно ожидать резкого роста амплитуды бризера. Численное моделирование показывает, что в случае притягивающей примеси собственная частота бризера слабо зависит от амплитуды, и при определённых параметрах становится постоянной. Поэтому, в этом случае достаточно в функции $h(t)$ взять величину частоты бризера равной собственной частоте локализованных колебаний бризерного типа. В других работах [124] существует другой подход, где используется частота накачки «пилообразного» вида, которая позволяет менять амплитуду бризера при величине резонансной частоты, лежащей в определённом диапазоне частот $[\omega_{min}, \omega_{max}]$.

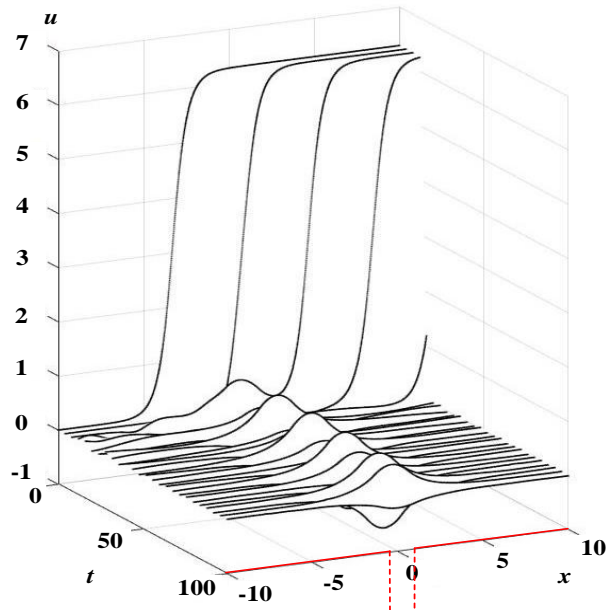


Рисунок 3.33. Прохождение кинка с постоянной начальной скоростью 0.85 через примесь при параметрах $W = 2$, $K = -0.2$, $h = 0$, $\alpha = 0$

Представляется возможным рассмотреть два случая внешнего возбуждения частот: линейный рост от ω_{min} и линейное уменьшение ω_{max} частоты внешней накачки при условии малого параметра μ . Поскольку два случая слабо отличаются, исследуем только линейное уменьшение частоты по закону (3.105). В численном эксперименте начальная частота задавалась равной известной собственной частоте бризера (Рисунок 3.35). Из рисунка 3.35 видно, что при $\alpha = 0.001$ (кривая 1) и при начальной частоте бризера 0.63 за время $t = 30$ амплитуда бризера увеличивается в два раза. С уменьшением величины параметра затухания на порядок (см. рисунок 3.35 кривая 2) при той же частоте за тоже время происходит увеличение амплитуды бризера примерно в три раза. Стоит отметить, что при колебаниях бризер излучает волны, которые усиливаются с ростом его амплитуды. Такого рода излучения (для рассматриваемого случая на рисунке 3.35 данное состояние достигает при $u \rightarrow 6$) приводят к замедлению роста амплитуды бризера и в дальнейшем к выходу на некоторое стационарное значение.

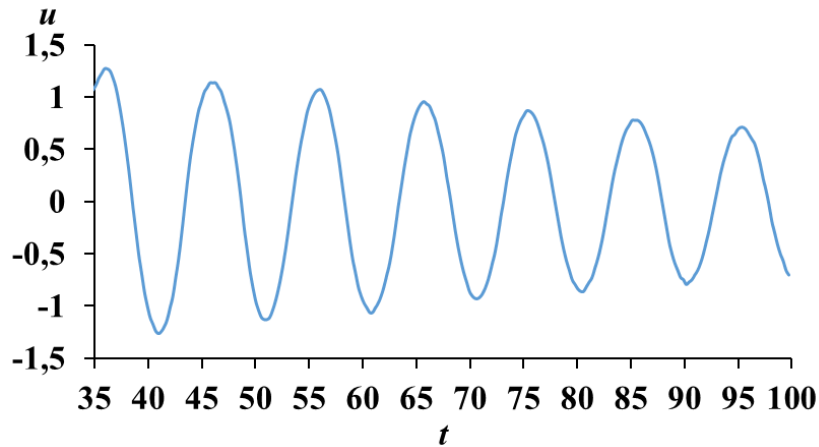


Рисунок 3.34. Зависимость амплитуды колебаний бризера от времени при $W = 2$, $K = -0.2$, $\alpha = 0.001$

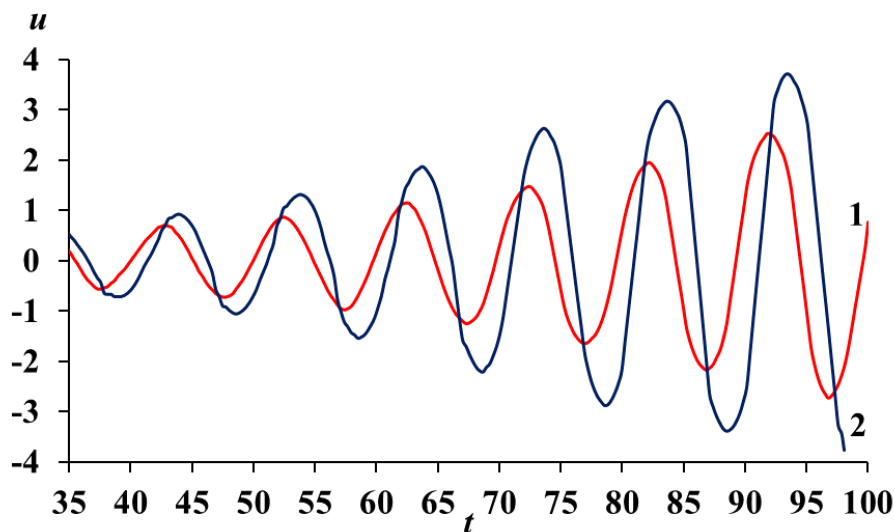


Рисунок 3.35. Зависимость амплитуды колебаний бризера от времени при $W = 2$, $K = -0.2$, $\omega_0 = 0.63$, $\mu = 0.01$ с учетом внешнего воздействия $h_0 = 0.1$ для случаев: Линии 1) $\alpha = 0.001$, 2) $\alpha = 0.0001$

Рассмотрим теперь влияние величины внешней силы h_0 на амплитуду бризера. Амплитуду накачки будем считать малой $h_0 \ll 1$. Из рисунка 3.36а видно, что в случае $h_0 = 0.1$ происходит резонансное увеличение амплитуды бризера. В случае уменьшения амплитуды накачки до $h_0 = 0.05$ в начальный период времени t наблюдается небольшой рост амплитуды бризера и далее при $t > 100$ постепенно уменьшается и выходит на стационарный режим с амплитудой $u < 3$ (Рисунок 3.36в). На рисунке 3.36в изображены огибающие амплитуды для двух случаев h_0 , поскольку в масштабах времени $t < 500$ линий, описывающие колебания будут сливаться друг с другом. При амплитуде закачки равной $h_0 = 0.01$ резонансных эффектов не наблюдается, происходит постепенное затухание бризера (Рисунок

3.36б). Из результатов численного эксперимента можно сделать вывод, что для каждого из параметров примеси W , K имеется минимальное пороговое значение начальной амплитуды, приводящее к резонансу.

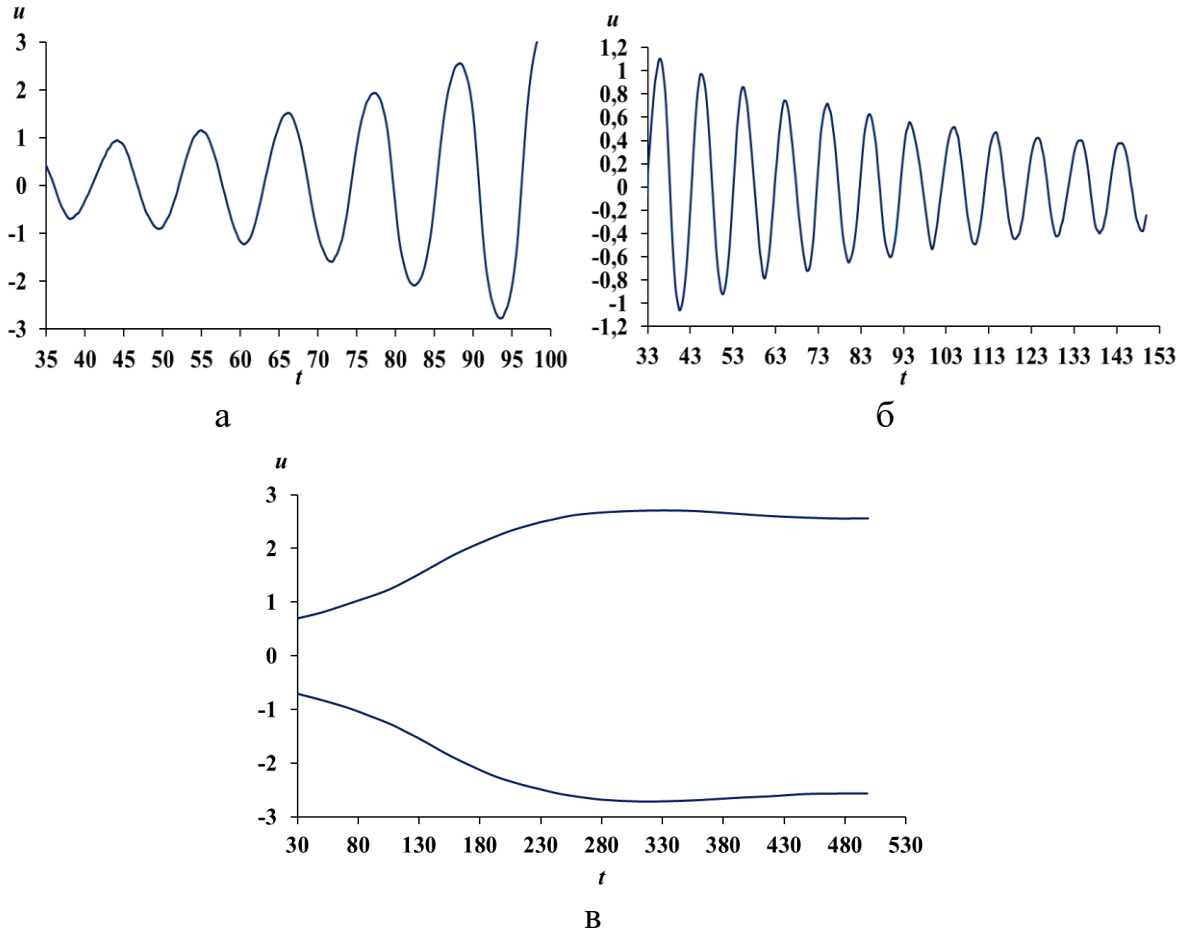


Рисунок 3.36. Зависимость амплитуды колебаний бризера от времени при $W = 2$, $K = -0.2$, $\omega_0 = 0.63$, $\mu = 0.01$, $\alpha = 0.001$ для случаев а), $h_0 = 0.1$, б), $h_0 = 0.01$, в) $h_0 = 0.05$

Далее рассмотрим влияние резонансного увеличения амплитуды бризера при изменении величины параметров W , K . На рисунке 3.37 показана зависимость изменения амплитуды от времени при различных значениях W . Важно отметить, что собственная частота бризера сильно зависит от величины параметров протяжённой примеси [14]. Так, например, на рисунке Рисунок 3.37б собственная частота бризера $\omega_0 = 0.58$ при $W = 2$, а для $W = 1$ параметр $\omega_0 = 0.86$ (Рисунок 3.37в). Из рисунков 3.37б и 3.37в видно, что при увеличении величины W , при учёте постоянства h_0 , процесс увеличения амплитуды колебаний бризера по времени будет проходить быстрее, а при уменьшении медленнее. Однако

при $W > 2$ увеличивать амплитуду бризера с использованием резонансных эффектов не удаётся (Рисунок 3.37а). При больших параметрах ширины области примеси центр колеблющегося бризера не остается в её геометрическом центре и начинают возбуждаться ещё и его трансляционные колебания.

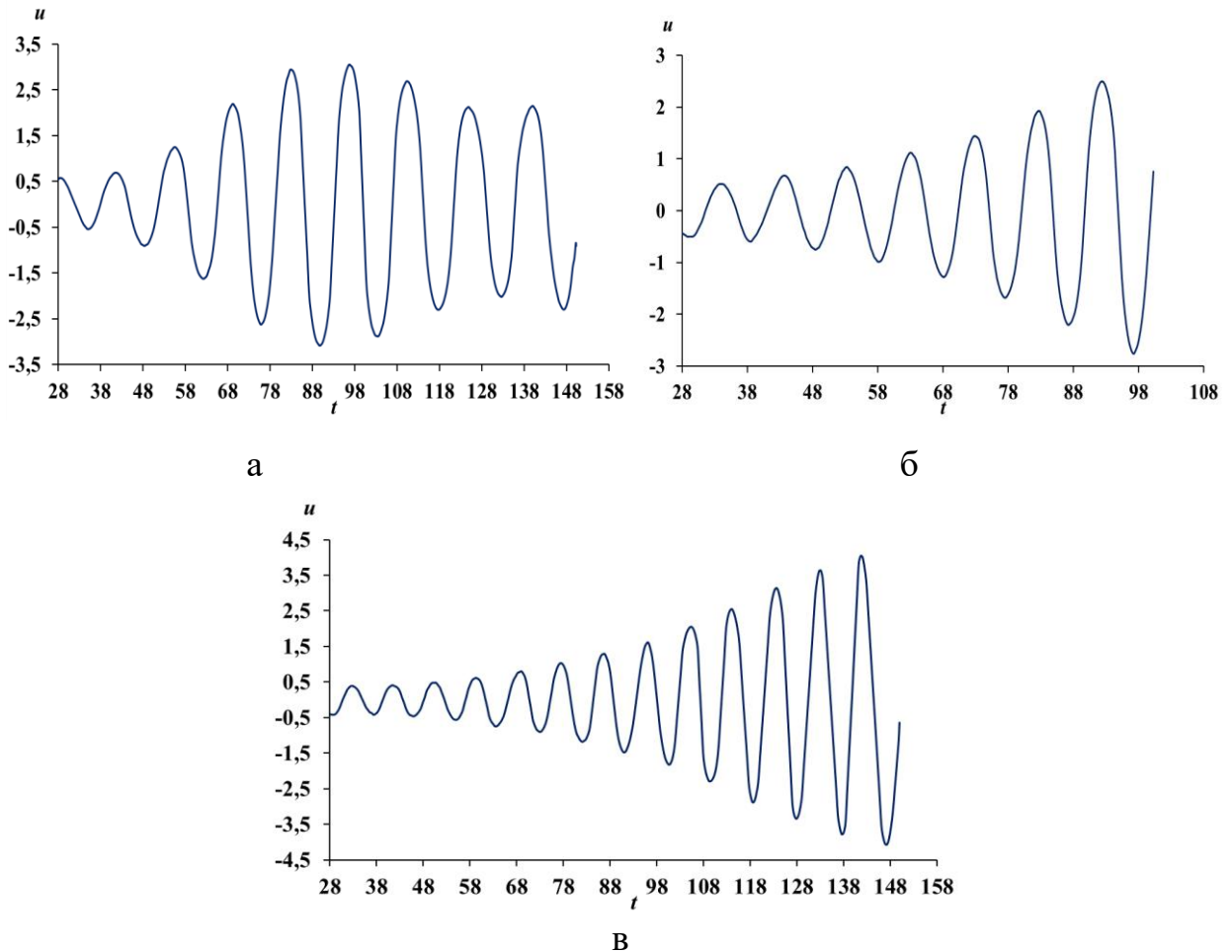
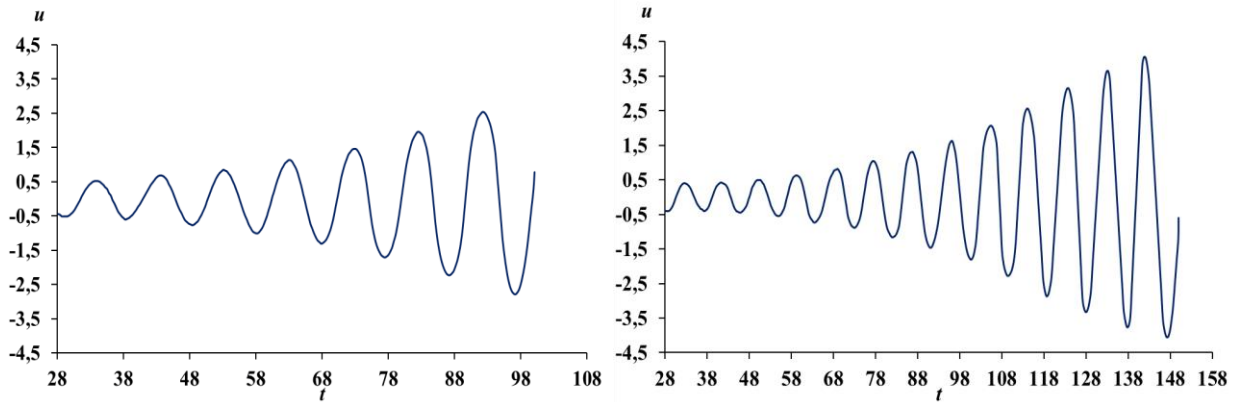


Рисунок 3.37. Зависимость амплитуды колебаний бризера от времени при $K = -0.2$, $h_0 = 0.1$, $\mu = 0.01$, $\alpha = 0.001$ для случаев а) $W = 3$, $\omega_0 = 0.44$, б) $W = 2$, $\omega_0 = 0.58$, в) $W = 1$, $\omega_0 = 0.86$

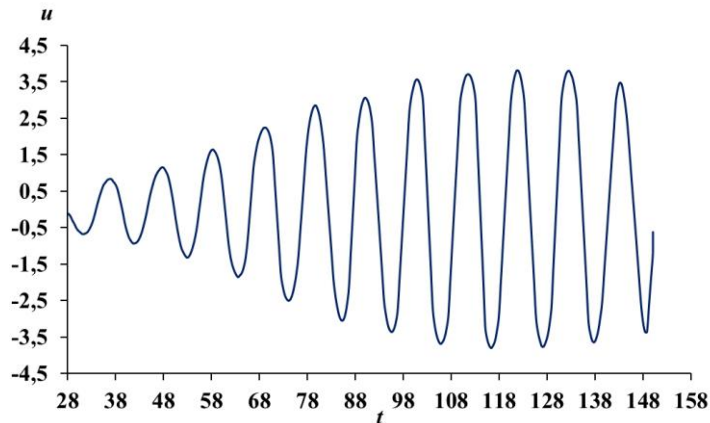
Аналогичная картина наблюдается и с изменением параметра K (Рисунок 3.38). При уменьшении K происходит быстрый рост амплитуды колебаний бризера, но при большем изменении величины параметра глубины примеси, например при $K = -0.5$ также не удаётся раскачать амплитуду бризера с использованием резонансных эффектов (Рисунок 3.38в). При отрицательных значениях K колебания бризера хоть и становятся больше, но у излучаемых им волн амплитуда становится больше, что приводит к большим потерям энергии бризера. Однако убыль энергии для случая протяжённой примеси можно компенсировать,

уменьшая параметр K . На рисунках 3.38а и 3.38б показано, что с уменьшением параметра K при неизменном значении h_0 можно быстрее увеличивать амплитуду бризера.



а

б



в

Рисунок 3.38. Зависимость амплитуды колебаний бризера от времени в переменном поле амплитуды $h_0 = 0.1$, $\alpha = 0.001$, $W = 2$, $\mu = 0.01$ при различной глубине слоя: а) $K = -0.2$, $\omega_0 = 0.63$, б) $K = -0.1$, $\omega_0 = 0.68$, в) $K = -0.3$, $\omega_0 = 0.58$

Как было показано выше, при дальнейшем увеличении параметров W , K до определённой критической величины в области примеси после прохождения кинка возбуждается локализованная волна типа солитон (Рисунок 3.39). Если приложить постоянную внешнюю силу определённого знака, то можно ожидать, при некоторой критической её величине, переключения знака амплитуды солитона, т.е. переходные состояния. Например, для $W = 2$, $K = -2$ при большой величине, превышающей значение $h = 0.5$, численно наблюдалось подобное переключение и превращение солитона в антисолитон. Рассмотрим случай применения переменной

внешней силы и использование явления авторезонанса для динамического управления амплитудой солитона более слабой по величине внешней силой.

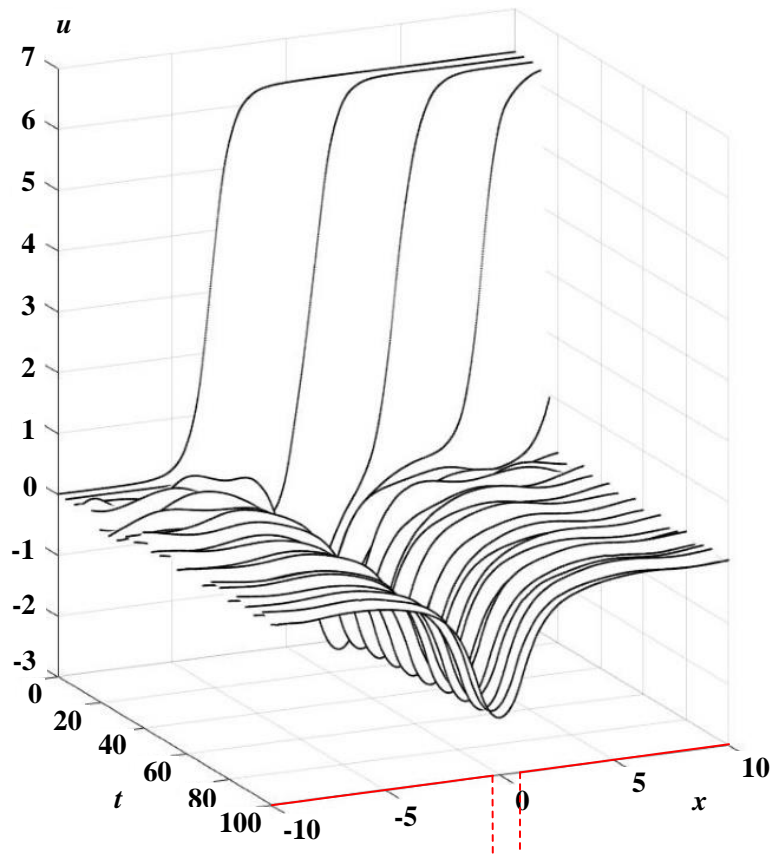


Рисунок 3.39. Прохождение кинка с постоянной скоростью 0.85 через примесь с возбуждением локализованного солитона на ней при параметрах $W = 2$, $K = -1.4$, $h = 0$, $\alpha = 0$

Как и в случае бризера, частоту переменной внешней силы будем описывать линейной функцией от времени:

$$\omega = \omega_0 + \mu t. \quad (3.107)$$

Рассмотрим случай при $W = 2$, $K = -1.4$, где после прохождения кинка через примесь генерируется локализованная волна солитонного типа. При параметрах переменной внешней силы $h_0 = 0.1$, $\mu = 0.001$ и собственной частоте $\omega_0 = 0.83$ будем наблюдать генерацию антисолитона (Рисунок 3.40 кривая 1). Если в случае $h = 0$ колебания амплитуды солитона со временем затухают, то для случая с внешней силой определённой частоты, связанной с собственной частотой колебаний амплитуды солитона на примеси, величина амплитуды антисолитона

возрастает в два раза (Рисунок 3.40 кривая 2), но дальнейший рост величины амплитуды колебаний антисолитона ограничивается за счет излучения волн.

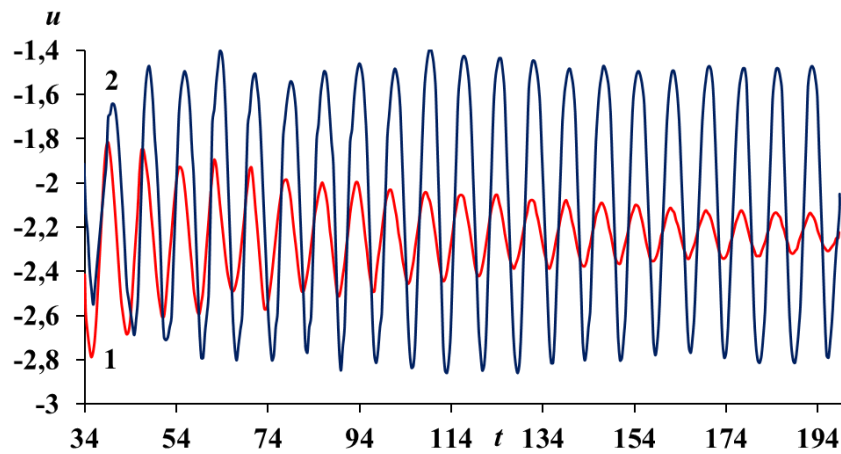


Рисунок 3.40. Зависимость амплитуды колебаний солитона от времени без поля (кривая 1), и в переменном поле (кривая 2), где $h_0 = 0.1$, параметр $\mu = 0.01$, $\omega_0 = 0.83$, параметры ямы $W = 2$, $K = -1.4$.

При уменьшении параметра K будет наблюдаться аналогичная ситуация, амплитуда колебаний антисолитона вырастает в два раза, только с измененной частотой, так как частота колебаний антисолитона зависит от параметров примеси. Такое ограничение на увеличение амплитуды колебаний вызвано тем, что центр антисолитона уже не остается в центре примеси, а возбуждается еще и трансляционная мода его колебаний вдоль координаты x , сопровождающаяся большим излучением волн. Однако, для случая достаточно малой ширины примеси, можно реализовать сценарий, приводящий к исчезновению трансляционной моды колебаний амплитуды солитона. Здесь можно добиться большей величины амплитуды колебаний солитона (практически на порядок) по сравнению со случаем $h = 0$.

3.11. Выводы по главе 3

Для уравнения синус Гордона в модели с тремя точечными и протяженными примесями, с учетом возможности возбуждения примесных мод, наличия внешней силы и затухания, описана структура и резонансная динамика кинков. При помощи метода коллективных переменных для случая точечных примесей получена система

дифференциальные уравнения для координаты центра кинка и амплитуд примесных мод. Для связанных колебаний примесных мод в отсутствие кинка она переходит в систему дифференциальных уравнений аналогичную системе, полученной для модели связанных трех гармонических осцилляторов. Анализ решений данных систем уравнений показал, что значительные различия наблюдаются при взаимодействии кинка с отталкивающей и притягивающей примесью. Так, резонансные эффекты отражения от и прохождения над примесями наблюдаются только для случая притягивающих примесей. Колебания системы трех связанных примесных мод представляют собой сумму трёх типов гармонических колебаний: синфазного, синфазно-антифазного и антифазного. При уменьшении расстояния между примесями частота синфазных колебаний уменьшается, частота синфазно-антифазных колебаний увеличивается, частота антифазных колебаний увеличивается не так быстро по сравнению с синфазно-антифазным случаем.

Для проверки области применимости аналитической модели был разработан метод численного решения модифицированного уравнения синус-Гордона с использованием метода конечной разности с явной схемой интегрирования. Проанализированы основные характеристики итерационных схем, а также подобраны параметры аппроксимации, позволяющие существенно повысить точность и скорость решения численной задачи. Для определения вида колебаний использовался частотный Фурье-анализ. В ходе численного решения, для случая точечных примесей, наблюдались как сценарии взаимодействия кинка с примесями, которые были получены аналитическим способом, так и новые сценарии. Для случая притягивающих точечных примесей получены зависимости амплитуд примесных мод от времени и частот колебаний от расстояния между примесями. Сравнение с результатами аналитической модели показало хорошую корреляцию с аналитическими результатами.

Установлено, что найденные сценарии динамики кинка для трех протяженных примесей прямоугольного вида качественно похожи на сценарии, полученные численно для точечных примесей, описываемых с помощью, дельта-

функции. Проведён анализ влияния параметров системы и начальных скоростей на возможные сценарии динамики кинка. Найдены критические и резонансные скорости кинка, как функции от параметров примеси. Показано, что, меняя расстояние между примесями, можно эффективно управлять величиной кинк-примесного взаимодействия. Найдены критические величины расстояния между примесями, когда три примеси действуют на кинк как одна эффективная и когда примеси действуют на кинк практически независимо друг от друга.

Построены графики зависимости амплитуд примесных мод от времени и зависимость частот колебаний от расстояния между примесями. В случае возбуждения одной гармоники наблюдаемые колебания гармонические. При возбуждении двух гармоник возникают биения, колебания похожи на колебания в случае двух одинаковых примесей. При возбуждении трёх гармоник форма колебаний сильно усложняется. Используя метод линеаризации для случая малых колебаний, были определены частоты синфазных, антифазных и смешанных колебаний для точечных и протяжённых примесей. Полученная аналитическая зависимость, хорошо согласуется с результатами численных расчетов. Показано, что, увеличивая площадь протяжённых примесей можно получить новый тип локализованных волн – солитон. Были найдены возможные структуры связанных колебаний локализованных волн солитонного типа при различных скоростях начальной скорости кинка и параметрах примеси.

Возможность изменения динамических параметров локализованных волн бризерного и солитонного типа для уравнения синус-Гордон в модели с протяженной притягивающей примесью, переменной внешней силой и диссипацией исследована методом авторезонанса. Показано, что при помощи внешней переменной силы малой амплитуды специального вида (с частотой, линейно зависящей от времени) можно резонансно повысить амплитуды колебаний локализованных волн бризерного типа. Переключать локализованные волны типа солитон в антисолитон и обратно можно с помощью большой по величине внешней постоянной силой. Уменьшая или увеличивая площадь примеси, можно увеличивать или уменьшать амплитуду колебаний бризера и солитона, а также

ускорять или замедлять время для её роста. Найдено, что для каждой протяжённой примеси существует величина пороговой амплитуды внешней силы, приводящей к авторезонансному росту амплитуды локализованных волн.

Показано, что рассмотренная модель УСГ с тремя примесями может быть использована для описания и управления динамикой волн намагниченности в семислойных магнетиках. При этом модель с одной примесью соответствует трехслойной ферромагнитной структуре, состоящей из двух широких одинаковых слоев магнетика, разделенных тонким магнитным слоем с измененными значениями магнитного параметров. Модель с тремя примесями соответствует ферромагнитной структуре, состоящей из четырех широких одинаковых слоев магнетика, разделенных тремя тонкими магнитным слоем с измененными значениями магнитной анизотропии.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Для уравнения φ^4 исследовано взаимодействие между кинками и протяженной примесью, описываемую функцией прямоугольного вида. На основе метода линий разработана программа для вычисления резонансной динамики солитонов. Изучены возможные сценарии динамики кинков при наличии протяженных примесей. В случае отталкивающих примесей кинк, в зависимости от начальной скорости, может либо отражаться, либо проходить через область примеси. Неупругое взаимодействие кинка с примесью возникает только при больших начальных скоростях кинка. Притягивающие примеси для уравнения φ^4 могут еще захватывать кинк, отражать или пропускать его. После кинк-примесного взаимодействия на кинке возбуждается внутренняя мода частотой $\sqrt{3/2}$ и его можно считать воблинг кинком. Для найденной численно зависимости конечной скорости кинка от начальной, большей критической скорости прохождения через область примеси, применима формула, предложенная для уравнения синус Гордона с притягивающими примесями. Найдено, что на зависимости конечной скорости кинка от начальной, есть большое число резонансных окон, в которых лежат резонансные скорости отражения от примеси. Между резонансными окнами не наблюдались, описанные для случая точечных примесей, особые случаи динамики кинка, названные «квазирезонансом». Найдены особые значения резонансной скорости «квазитуннелирования», при которых кинк, имея скорость меньше критической, проходит над примесью. Особенности резонансного взаимодействия в модели φ^4 кинка с протяженной примесью, как и для случая точечной примеси, в отличие от случая уравнения синус-Гордона, связаны с тем, что кинк взаимодействует уже не с одним осциллятором (примесной модой), а с двумя (добавляются еще внутренние моды колебаний кинка). Показано, что для уравнения φ^4 протяженную примесь прямоугольного вида можно использовать как генератор для возбуждения, с помощью кинк-примесного взаимодействия, долгоживущих локализованных волн типа воблинг бризера. Рассмотрено линейное приближение, допускающее аналитическое решение задач о локализованных волнах и найдены границы ее применимости для данной модели.

2. Для уравнения синус Гордона в модели с тремя примесями, с учетом возможности возбуждения примесных мод, наличия внешней силы и затухания, описана резонансная динамика кинков. Рассмотренная модель УСГ с примесями может быть использована для описания и управления динамикой волн намагниченности в семислойных магнетиках. При помощи метода коллективных переменных, для случая точечных примесей, получена система интегро-дифференциальных уравнения для координаты центра кинка и амплитуд примесных мод. Она показала значительные различия, наблюдаемые при взаимодействии кинка с отталкивающей и притягивающей примесями. Так, резонансные эффекты отражения от и прохождения над примесями наблюдаются только для случая притягивающих примесей. Для связанных колебаний примесных мод в отсутствие кинка она переходит в систему дифференциальных уравнений аналогичную системе, полученной для модели связанных трех гармонических осцилляторов. Связанные колебания трех примесных мод представляют собой сумму трёх типов гармонических колебаний: синфазного, синфазно-антифазного и антифазного.

3. На основе метода конечных разностей, с использованием явной схемы интегрирования, создана программа для вычисления резонансной динамики солитонов УСГ. С ее помощью найдены возможные сценарии динамики кинков при наличии трех точечных и протяженных примесей при отсутствии внешней силы и затухания в системе. Для случая точечных примесей наблюдались, как сценарии взаимодействия кинка с примесями, полученные аналитическим способом, так и новые сценарии. Найденные сценарии динамики кинка для случая протяженных примесей прямоугольного вида качественно похожи на сценарии, полученные численно для точечных примесей, описываемых с помощью дельта-функции. Найден критические и резонансные скорости кинка, как функции от вида и параметров примеси. Показано, как меняя расстояние между примесями, можно эффективно управлять величиной кинк-примесного взаимодействия. Используя метод линеаризации УСГ для случая трех локализованных волн малой амплитуды, были определены частоты синфазных, антифазных и смешанных локализованных

на примесях колебаний как функции от параметров примесей и расстояния между ними. Эти зависимости качественно согласуются с результатами численных расчетов для связанных локализованных волн бризерного типа. Увеличивая площадь потенциальных ям, создаваемых протяжёнными примесями, можно получить три связанные локализованные волны солитонного типа. Показано, что при наличии затухания в модели синус Гордона с протяженной примесью, с помощью внешней переменной силы малой амплитуды методом авторезонанса можно повысить амплитуды колебаний локализованных волн бризерного и солитонного типа. А с помощью постоянной внешней силы большой амплитуды переключать локализованные волны типа солитон в антисолитон и обратно.

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

УСГ – уравнение синус-Гордона

МУСГ – модифицированное уравнение синус-Гордона

МКК – метод коллективных-координат

БПФ – быстрое преобразование Фурье

ДПФ – дискретное преобразование Фурье

АВТОРСКИЙ СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ

Публикации в журналах, рекомендованных ВАК для опубликования результатов диссертационной работы

А.1 Екомасов Е.Г. Управление с помощью внешнего магнитного поля параметрами магнитного бризера в трехслойной ферромагнитной структуре / Е.Г. Екомасов, В.Н. Назаров, А.М. Гумеров, К.Ю. Самсонов, Р.Р. Муртазин // Письма о материалах. – 2020 – Т.10. – №2. – С. 141–146.

А.2 Екомасов Е.Г. Возможность управления динамикой и структурой магнитного солитона в трехслойной ферромагнитной структуре / Е.Г. Екомасов, В.Н. Назаров, К.Ю. Самсонов, Р.Р. Муртазин // Письма в журнал технической физики. – 2021. – Т.47. – №10 – С. 15 – 18.

А.3 Ekomasov E.G. Changing the Dynamic Parameters of Localized Breather and Soliton Waves in the Sine-Gordon Model with Extended Impurity, External Force, and Decay in the Autoresonance Mode / E.G. Ekomasov, V.N. Nazarov, K. Yu. Samsonov // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. – 2022. – Vol. 18. – No. 2.– P. 217 – 229.

А.4 Екомасов Е.Г. Структура и динамика локализованных нелинейных волн уравнения синус-Гордона в модели с одинаковыми примесями / Е.Г. Екомасов, К.Ю. Самсонов, А.М. Гумеров, Р.В. Кудрявцев // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2022. – Т. 30. – №. 6. – С. 749 – 765.

А.5 Кабанов Д.К. Одномерная динамика доменной границы в мультислойной ферромагнитной структуре. / Д.К. Кабанов, К.Ю. Самсонов, В.Н. Назаров, Е.Г. Екомасов // Физика твёрдого тела. – 2023. – Т. 65. – №. 4. – С. 558–564.

А.6 Назаров В.Н. Одномерная динамика доменной границы в семислойной ферромагнитной структуре / В.Н. Назаров, К.Ю. Самсонов, Е.Г. Екомасов // Известия Уфимского научного центра РАН. – 2023. – №. 1. – С. 18–22.

A.7 Fakhretdinov M.I. Kink Dynamics in the φ^4 model with Extended impurity / M.I. Fakhretdinov, K.Y. Samsonov, S.V. Dmitriev, E.G. Ekomasov // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. – 2023. – Vol. 19. – No. 3. – P. 303 – 320.

Публикации в других изданиях

A.8 Самсонов К.Ю. Динамика солитонов уравнения синус-Гордона с учётом трех примесей, внешней силы и затухания / К.Ю. Самсонов, Р.В. Кудрявцев, А.М. Гумеров // сборник тезисов ВНКСФ-25. – Республика Крым, Севастополь. – 2019. – С. 55.

A.9 Кудрявцев Р.В. Кинк-примесные взаимодействия в модели синус-Гордона с учетом внешней силы и неоднородного затухания / Р.В. Кудрявцев А.М. Гумеров, К.Ю. Самсонов, Е.Г. Екомасов // сборник тезисов конференции «Электронные, спиновые и квантовые процессы в молекулярных и кристаллических системах». – Уфа. – 2019. – С. 116.

A.10 Кудрявцев Р.В. «Нелинейная динамика солитонов уравнения синус-Гордона в модели с примесями» / Р.В. Кудрявцев, А.М. Гумеров, Г.И. Антонов, К.Ю. Самсонов, Р.К. Салимов, В.Н. Назаров, Е.Г. Екомасов // сборник тезисов Международной научной конференции «Уфимская осенняя математическая школа». – Уфа. – 2019. – С. 119-121.

A.11 Кудрявцев Р.В. Динамика солитонов в модели синус-Гордона с притягивающими точечными примесями / Р.В. Кудрявцев, Е.Г. Екомасов, А.М. Гумеров, К.Ю. Самсонов // сборник тезисов Международной научной конференции «Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения». – оз. Банное, Уфа. – 2020. – С. 36.

A.12 Самсонов К.Ю. Динамика нелинейных волн уравнения синус-Гордона в модели с тремя притягивающими примесями / К.Ю. Самсонов, А.М. Гумеров, Р.В. Кудрявцев, Е.Г. Екомасов // сборник тезисов Международной конференции «XIX научная школа "Нелинейные волны – 2020"». – Нижний Новгород. – 2020. – С. 216–217.

A.13 Кудрявцев Р.В. Резонансные кинк-примесные взаимодействия в модели синус-Гордона с учетом внешней силы и неоднородного затухания / Р.В. Кудрявцев, А.М. Гумеров, Е.Г. Екомасов, К.Ю. Самсонов // сборник тезисов Международной конференции «Уфимская осенняя математическая школа – 2020». – Уфа. – 2020. – С. 35–36.

A.14 Самсонов К.Ю. Нелинейные локализованные волны уравнения синус-Гордона в модели с примесями / К.Ю. Самсонов, А.М. Гумеров, Р.В. Кудрявцев, Е.Г. Екомасов // сборник тезисов Международной конференции «Уфимская осенняя математическая школа – 2020». – Уфа. – 2020. – С. 36–38.

A.15 Назаров В.Н. Применение модифицированного уравнения синус-Гордона для описания динамики локализованных магнитных неоднородностей в мультислойных структурах / В.Н. Назаров, А.Т. Харисов, К.Ю. Самсонов, Е.Г. Екомасов // сборник тезисов «Уфимская осенняя математическая школа – 2020». – Уфа. – 2020. – С. 84–86.

A.16 Самсонов К.Ю. Описание динамики нелинейных волн в одномерной модели с тремя притягивающими примесями с помощью уравнения синус-Гордона / К.Ю. Самсонов, А.М. Гумеров, Р.В. Кудрявцев, Е.Г. Екомасов // сборник тезисов «Уфимская осенняя математическая школа – 2020». – Уфа. – 2020. – С. 240–242.

A.17 K. Samsonov The Structure and Dynamics of Magnetic Vortices and Solitons in Multilayer Ferromagnetic Nanostructures / K. Samsonov, S. Stepanov, G. Antonov, A. Ekomasov, R. Kudryavtsev, A. Gumerov, K. Zvezdin and E. Ekomasov // abstracts collection of MMM 2020 Virtual Conference 65th Annual conference on magnetism and magnetic materials. – 2020. – P. 80.

A.18 Кудрявцев Р.В. Теоретическое исследование резонансных кинк-примесных взаимодействий в модели синус-Гордона с учётом внешней силы и затухания / Р.В. Кудрявцев, Е.Г. Екомасов, А.М. Гумеров, К.Ю. Самсонов // сборник тезисов III Международной научно-практической конференции «Физика конденсированного состояния и её приложения». – 2020. – Стерлитамак. – С. 252–253.

A.19 Самсонов К.Ю. Описание динамики нелинейных волн в модели с тремя притягивающими примесями с помощью уравнения синус-Гордона / К.Ю. Самсонов, Р.В. Кудрявцев, А.М. Гумеров, Е.Г. Екомасов // сборник тезисов III Международной научно-практической конференции «Физика конденсированного состояния и её приложения». – 2020. – Стерлитамак. – С. 272 – 274.

A.20 Самсонов К.Ю. Описание динамики нелинейных локализованных волн уравнения син-Гордона в модели с тремя притягивающими примесями / К.Ю. Самсонов, Р.В. Кудрявцев, Д.Ф. Нерадовский, Е.Г. Екомасов // сборник тезисов международной научной конференции «Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения». – 2021. – оз. Банное, Уфа. – С. 63.

A.21 Екомасов Е.Г. Авторезонансный метод управления характеристиками бризера и солитона уравнения синус-Гордона в модели с притягивающими примесями, силой и затуханием / Е.Г. Екомасов, В.Н. Назаров, К.Ю. Самсонов, Р.Р. Муртазин // Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения: сборник тезисов Международной научной конференции. – оз. Банное, Уфа. – 2021. – С. 32–33

A.22 Назаров В.Н. Динамика магнитных солитонов и бризеров в многослойной ферромагнитной структуре в режиме авторезонанса / В.Н. Назаров, Е.Г. Екомасов, К.Ю. Самсонов // Сборник трудов международной конференции "Фазовые переходы, критические и нелинейные явления в конденсированных средах", посвященной 90-летию Дагестанского государственного университета. – 2021. – г. Махачкала. – С. 72–75.

A.23 K.Y. Samsonov Description of the dynamic of nonlinear localizes waves of the sin-Gordon equation in the framework of the model with threee attracting impurities / R.V. Kudryavtsev, D.F. Neradovsky, E.G Ekomasov // abstracts collection of International conference Marchuk scientific readings 2021. – 2021. – Akademgorodok, Novosibirsk. – P. 51.

А.24 Бердюгина Е.А. Метод усреднения для решения модифицированного уравнения \sin -Гордона / Е.А. Бердюгина, Д.Ф. Нерадовский, К.Ю. Самсонов // *Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании: спутник международной научной конференции «Уфимская осенняя математическая школа – 2021»*, тезисы докладов XII Международной школы-конференции студентов, аспирантов и молодых ученых, посвященной 100-летию профессора БашГУ Фарзтдинова Миркашира Минигалиевича. – 2021. – С. 57.

А.25 Самсонов К.Ю. Описание динамики нелинейных волн уравнения Клейна-Гордона в модели с примесями / К.Ю. Самсонов, М.И. Фахретдинов, Е.Г. Екомасов // *сборник тезисов Международной научной конференции «Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения»*. – оз. Банное, Уфа. – 2022. – С. 61.

А.26 Самсонов К.Ю. Нелинейные волны уравнения Клейна-Гордона в модели с точечными примесями. Структура и динамика кинка / К.Ю. Самсонов, Д.К. Кабанов // *сборник тезисов I Всероссийской молодёжной школы-конференции «Современные физика, математика, цифровые и нанотехнологии в науке и образовании (ФМЦН-22)»*. – Уфа. – 2022. – С. 24.

А.27 К. Yu. Samsonov Numerical simulation of the structure and dynamics of magnetic vortices and solitons in multilayer ferromagnetic nanostructures / К. Yu. Samsonov, S. V. Stepanov, G.I. Antonov, K.A. Zvezdin, E.G. Ekomasov // *VIII Euro-Asian Symposium «Trends in MAGnetism»*. – 2022. – Kazan, Russia. – P. 390.

А.28 К.Ю. Самсонов Динамика нелинейных волн уравнений синус-Гордона и φ^4 в модели с протяжёнными примесями / К.Ю. Самсонов, Е.Г. Екомасов, М.И. Фахретдинов, Р.Р. Муртазин, В.Н. Назаров // *сборник тезисов Международной научной конференции «Уфимская осенняя математическая школа – 22»*. – Уфа. – 2022. – С. 74–75.

А.29 Екомасов Е.Г. Нелинейные волны уравнений синус-Гордона и φ^4 в модели с примесями / Е.Г. Екомасов, С.В. Дмитриев, М.И. Фахретдинов, К.Ю. Самсонов, Д.К. Кабанов, В.Н. Назаров // *сборник тезисов конференции*

«Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения». – 2023. – оз. Банное, Уфа. – С. 51.

А.30 Самсонов К.Ю. Динамика нелинейных волн уравнения Клейна-Гордона в модели с протяжёнными примесями / К.Ю. Самсонов, М.И. Фахретдинов, Е.Г. Екомасов, Д.К. Кабанов // Сборник трудов IV Международной научно-практической конференции «Физика конденсированного состояния и её приложения». – Стерлитамак. – 2022. – С. 209–211.

Патенты и авторские свидетельства на программное обеспечение

А.31 Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2021661447: Численное моделирование высокоамплитудных нелинейных волн уравнения синус-Гордона в модели с несколькими протяжёнными притягивающими примесями, внешней силой и затуханием / Екомасов Е.Г., Самсонов К.Ю. – Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2021661447 от 12.07.2021. Роспатент.

А.32 Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2022684315: Численное моделирование нелинейных волн уравнения фи-4 в модели с протяженной примесью прямоугольного вида / Екомасов Е.Г., Фахретдинов М.И., Самсонов К.Ю. – Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2022684315 от 13.12.2022. Роспатент.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Додд, Р. Солитоны и нелинейные волновые уравнения / Р. Додд, Дж. Эйлбек, Дж. Гиббон, Х. Моррис. Пер. с англ. – М.: Мир, 1988. – С. 694.
2. Шамсутдинов, М.А. Ферро- и антиферромагнитодинамика. Нелинейные колебания, волны и солитоны / М.А. Шамсутдинов, И.Ю. Ломакина, В.Н. Назаров, А.Т. Харисов, Д.М. Шамсутдинов. – М.: Наука, 2009. – С. 456.
3. Браун, О.М. Модель Френкеля-Конторовой: Концепции, методы, приложения / О.М. Браун, Ю.С. Кившарь. Пер. с англ. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – С. 536.
4. P. Kevrekidis A Dynamical Perspective on the φ^4 Model: Past, Present and Future (Non-linear Systems and Complexity, Vol. 26) / P. Kevrekidis J. Cuevas-Maraver // Springer. – 2019. – P. 311.
5. J. Cuevas-Maraver The Sine-Gordon Model and Its Applications: From Pendula and Josephson Junctions to Gravity and High-Energy Physics / J. Cuevas-Maraver, P. Kevrekidis, F. Williams (Eds.) // Cham: Springer. – 2014. – P. 263.
6. Yamaletdinov R. D. Kinks and antikinks of buckled graphene: a testing ground for the φ^4 field model / Yamaletdinov R. D., Slipko V. A., Pershin Y. V. // Physical Review B. – 2017. – V. 96. – No. 9. – P. 094306. DOI: 10.1103/PhysRevB.96.094306
7. Белова Т.И. Солитоны и их взаимодействия в классической теории поля / Т.И. Белова, А.Е. Кудрявцев // УФН. – 1997. – Т. 167. – №4 – С. 377 – 406. DOI: 10.3367/UFNr.0167.199704b.0377
8. Piette V. Scattering of sine-Gordon kinks on potential wells / Piette V., Zakrzewski W. J. // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. – 2007. – V. 40. – No. 22. – P. 5995. DOI: 0.1088/1751-8113/40/22/016
9. Гумеров А.М. Трансформация солитонов уравнения синус-Гордона в моделях с переменными коэффициентами и затуханием / А.М. Гумеров, Е.Г. Екомасов, Р.Р. Муртазин, В.Н. Назаров // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2015. – Т. 55, № 4. – С. 631–640. DOI: 10.7868/S0044466915040031

10. Ekomasov, E. G. Multisoliton Dynamics in the Sine-Gordon Model with Two Point Impurities / Ekomasov, E. G., Gumerov A. M., Kudryavtsev R. V., Dmitriev S. V., Nazarov V. N. // *Braz. J. Phys.*, 2018, vol. 48, no. 6, P. 576–584. DOI: 10.1007/s13538-018-0606-4
11. Fei Z. Resonant kink-impurity interactions in the φ^4 model / Fei Z., Kivshar Y. S., Vázquez L. // *Physical Review A*. – 1992. – V. 46. – No. 8. – P. 5214. DOI: 10.1103/PhysRevA.46.5214
12. Lizunova M. A. Kinks and realistic impurity models in φ^4 -theory / Lizunova M.A., Kager J., Stan de Lange, Jasper van Wezel // *International Journal of Modern Physics B*. – 2022. – V. 36. – No. 05. – P. 2250042. DOI: 10.1142/S0217979222500424
13. Lizunova M.A. Emergence of oscillons in kink-impurity interactions / Lizunova M.A., Kager J., Stan de Lange, Jasper van Wezel // *J. Phys. A: Math. Theor.* – 2021 – Vol.54. – P. 315701. DOI: 10.1088/1751-8121/ac0d36
14. Russell J.S. Report on waves / J.S. Russell // 14th meeting of the British Association for the Advancement of Science. – Vol. 311. – [S.l.: s.n.]. – 1884. – P. 390.
15. Korteweg D. J. XLI. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves / D. J. Korteweg, G. De Vries // *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*. – 1895. – Vol. 39, no. 240. – P. 422–443.
16. Корпел А. Эвристический подход к нелинейным волновым уравнениям / Корпел А., Банерджи П.П. // *ТИИЭР*. 1984. – Т. 72. – № 9. – С. 6–30.
17. Рыскин Н. М. Нелинейные волны / Н. М. Рыскин, Д. И. Трубецков. – М.: Физматлит, 2000. – С. 306.
18. Кудряшов Н.А. Нелинейные волны и солитоны // *Соросовский образовательный журнал*. – 1997. – № 2. – С. 85–91.
19. Алфимов Г.Л. О размерности множества решений нелокального нелинейного волнового уравнения. // *Нелинейная динамика*. – 2021. – Т. 7. – № 2. – С. 209–226.

20. Шаповалов А.В. Солитоны уравнения синус-Гордона: Учебное пособие / А.В. Шаповалов, Л.А. Краснобаева. – Томск: Томский государственный университет. – 2009. – С.192.
21. Saadatmand D. Interaction of sine-Gordon kinks and breathers with a parity-time-symmetric defect / Saadatmand D., Dmitriev S. V., Borisov D. I., Kevrekidis P. G. // *Phys. Rev. E.* – 2014. – Vol. 90, No. 5. – P. 052902. DOI: 10.1103/PhysRevE.90.052902
22. Zhang, F. Resonant kink-impurity interactions in the sine-Gordon model / F. Zhang, Yu. S. Kivshar, L. Vazquez // *Phys. Rev. A.* – 1992. – Vol. 45, no. 8. – P. 6019-6030. DOI: 10.1103/PhysRevA.46.5214
23. Лонгрэн К. Солитоны в действии / К. Лонгрэн, Э. Скотт. – М. : Мир, 1981. – С. 312.
24. Новокшенов В.Ю. Математические модели в естествознании (Введение в теорию солитонов): Учебное пособие / В.Ю. Новокшенов. – Уфимск. гос. авиац. техн. унт. Уфа, 1999. – С. 98.
25. Захаров В.Е. Теория солитонов: метод обратной задачи / В.Е. Захаров, С.В. Манаков, С.П. Новиков, Л.П. Питаевский. – М.: Наука, 1980. – С. 321.
26. Kalberman G. The sine-Gordon wobble // *J. Phys. A: Math. Gen.* – 2004. – Vol. 37. – P. 11603 – 11612. DOI: 10.1088/0305-4470/37/48/006
27. Ferreira L.A. Wobbles and other kink-breather solutions of sine-Gordon model / L.A. Ferreira, B. Piette, W.J. Zakrzewski // *Phys. Rev. E.* – 2008. – Vol. 77. – P. 036616. DOI: 10.1103/PhysRevE.77.036613
28. Косевич А. М. Введение в нелинейную физическую механику / А.М. Косевич, А.С. Ковалев. – Киев: Наукова думка, 1989. – С. 304.
29. Конторова Т.А. К теории пластической деформации и двойникования / Конторова Т.А., Френкель Я. И. // *ЖЭТФ* – Т. 8. – № 1 – 1938. С. 89–95.
30. Самарский, А.А. Теория разностных схем / А.А. Самарский. – М.: Наука, 1989. – С. 616.
31. Rosenau Ph. Dynamics of non-linear mass-spring chains near the continuous limit // *Phys. Lett. A* 118, 1986. P. 222–227. DOI: 10.1016/0375-9601(86)90170-2

32. Fogel M.B. Dynamics polarizability of the Sine-Gordon soliton / Fogel M.B., Trullinger S.E., Bishop A.R. // *Phys. Lett. A.* – 1976. – V. 59. – No 2. – P. 81–83.
33. McLaughling D.W. Perturbation analysis of fluxon dynamics / McLaughling D.W., Scott A.C. // *Phys. Rev. A.* – 1978. – V. 18, № 4. – P. 1652–1680. DOI: 10.1103/PhysRevA.18.1652
34. Шаповалов А.В., Краснобаева Л.А., Солитоны уравнения синус-Гордона: Учебное пособие. – Томск: Томский государственный университет, 2009. – С. 192.
35. Ivancevic V.G. Sine-Gordon Solitons, Kinks and Breathers as Physical Models of Nonlinear Excitations in Living Cellular Structures / Vladimir G. Ivancevic, Tijana T. Ivancevic // *Journal of Geometry and Symmetry in Physics.* – 2013. – V. 31. – P. 1–56.
36. Johnson S. Breather Dynamics of the Sine-Gordon Equation / Stephen Johnson, Anjan Biswas // *Communications in Theoretical Physics.* – 2013 – V. 59, №. 6. – P. 664–670.
37. Шамсутдинов, М.А. Введение в теорию доменных стенок и солитонов в ферромагнетиках. Учебное пособие / М.А. Шамсутдинов, В.Н. Назаров, А.Т. Харисов. – Уфа: БашГУ, 2010. – С. 148.
38. Cuenda S. Nonlinear excitations in DNA: Aperiodic models versus actual genome sequences / Cuenda S., Sanchez A. // *phys. Rev. E.* – 2004. – V. 70. – P. 051903-1– 051903-8. DOI: 10.1103/PhysRevE.70.051903
39. Cuenda S. Disorder and fluctuation in nonlinear excitation in DNA / Cuenda S., Sanchez A. // *Fluctuation and Noise Letters.* – 2004. – V. 4. – P. 491–504. DOI: 10.1117/12.548346
40. Sanchez A. Collective coordinates and length-scale competition in spatially inhomogeneous soliton-bearing equations / Sanchez A., Bishop A. R. // *SIAM Rev.* 1998. – V. 40. – P. 570 – 615. DOI: 10.1137/S0036144597317418
41. Dauxois T., *Physics of solitons* / T. Dauxois, M. Peyrard. – New York: Cambridge University Press, 2010. – P. 436.

42. Крылов, В.И. Начала теории вычислительных методов. Уравнения в частных производных / В.И. Крылов, В.В. Бобков, П.И. Монастырный. – Минск: Наука и техника, 1986. – С. 311.
43. Бахвалов, Н.С. Численные методы / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. – М.: БИНОМ, 2008. – С. 636.
44. Самарский, А.А. Теория разностных схем / А.А. Самарский. – М.: Наука, 1989. – С. 616.
45. Кунин, С. Вычислительная физика / С. Кунин. Пер. с англ. – М.: Мир, 1992. – С. 518.
46. Kivshar, Y.S. Resonant soliton-impurity interactions / Yuri S. Kivshar, Zhang Fei, Luis Vazquez // *Physical Review Letters*. – 1991. – V. 67. – P. 1177–1180. DOI: 10.1103/PhysRevLett.67.1177
47. Екомасов, Е.Г. Изучение зарождения и эволюции магнитных неоднородностей типа солитонов и бризеров в магнетиках с локальными неоднородностями анизотропии / Е.Г. Екомасов, Ш.А. Азаматов, Р.Р. Муртазин // *Физика металлов и металловедение*. – 2008. – Т. 105, № 4. – С. 341–349.
48. Екомасов, Е.Г., Временная эволюция кинков модифицированного уравнения синус-Гордона при наличии пространственной неоднородности параметров / Екомасов Е.Г., Шабалин М.А., Азаматов Ш.А. // *Препринт*. Уфа: РИО БашГУ. – 2005. – С. 40.
49. Tao, T. Breather Dynamics in the Perturbed sine-Gordon Equation / Tu Tao, Cheng Geng // *Communications in Theoretical Physics*. – 2003. – V. 40, № 4. – P. 390–392. DOI: 10.1088/0253-6102/40/4/390
50. Johnson, S. Breather Dynamics of the Sine-Gordon Equation / Stephen Johnson, Anjan Biswas // *Communications in Theoretical Physics*. – 2013. – V. 59, № 6. – P. 664–670. DOI: 10.1088/0253-6102/59/6/02
51. Gumerov A.M. Localized magnetic inhomogeneities generation on defects as a new channel of damping for a moving domain wall / Gumerov A.M., Ekomasov E.G., Kudryavtev R.V., Fakhredinov M.I // *Letters on Materials* 8 (3). – 2018. – P. 299-304. DOI: 10.22226/2410-3535-2018-3-299-304

52. Gumerov A.M. One-dimensional dynamics of magnetic inhomogeneities in a three- and five-layer ferromagnetic structure with different values of the magnetic parameters / Gumerov A.M., Ekomasov E.G., Kudryavtsev R.V. // *Journal of Physics: Conference Series*. – 2019. – Vol. 1389. – P.012004. DOI: 10.1088/1742-6596/1389/1/012004
53. Закирьянов, Ф.К. Управление динамикой кинка модифицированного уравнения синус-Гордона внешним воздействием с меняющимися параметрами / Ф.К. Закирьянов, Л.В. Якушевич // *Компьютерные исследования и моделирование*. – 2013. – Т. 5, № 5. – С. 821–834. DOI: 10.20537/2076-7633-2013-5-5-821-834
54. Quintero N.R. Existence of internal modes of sine-Gordon kinks / N.R. Quintero, A. Sanchez, F.G. Mertens // *Physical Review E*. – 2000. – V. 62, №1. – P. R60–R63. DOI: 10.1103/PhysRevE.62.R60
55. Klein O. Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie // *Z. Physik*. – 1926. – Vol. 37. – P. 895–906.
56. Gordon W. Der Comptoneffekt nach der Schrödingerschen Theorie // *Z. Physik*. – 1926. – Vol. 40. – P. 117–133.
57. Zhang F. Resonant kink-impurity interactions in the φ^4 model / Zhang F., Kivshar Y.S., Vazquez L. // *Physical review A*. – 1992. – Vol. 46. – No 8. – P. 5214 – 5220. DOI: 10.1103/PhysRevA.46.5214
58. Malomed B.A. Perturbative analysis of the interaction of a φ^4 kink with inhomogeneities // *J. Phys. A: Math. Gen.* – 1992. – Vol. 25. – P. 755 – 764. DOI: 10.1088/0305-4470/25/4/015
59. Saadatmand D. Effect of the φ^4 Kink's Internal Mode at Scattering on a PT-Symmetric Defect / Saadatmand D., Dmitriev S.V., Borisov D.I., Kevrekidis P.G., Fatykhov M.A., and Javidan K. // *JETP Letters*. – 2015. – Vol. 101. – No. 7. – P. 497 – 502. DOI: 10.1134/S0021364015070140
60. Ghahraman A. Dynamics of φ^4 kinks by Using Adomian Decomposition Method // *American Journal of Numerical Analysis*. – 2016. – Vol. 4. – No. 1. – P. 8–10.
61. Ekomasov E.G. Interaction of sine-Gordon solitons in the model with attracting impurities / Ekomasov E.G., Gumerov A.M., Murtazin R.R. // *Mathematical*

- Methods in The Applied Sciences. – 2017. – Vol. 40. – no. 17. – P. 6178–6186.
DOI: 10.1002/mma.3908
62. Ekomasov E.G. Resonance dynamics of kinks in the sine-Gordon model with impurity, external force and damping / Ekomasov E.G., Gumerov A.M., Kudryavtsev R.V. // J. Comput. Appl. Math. – 2017. – Vol. 312. – P. 198 – 208.
DOI: 10.1016/j.cam.2016.04.013
63. Saadatmand D. Interaction of sine-Gordon kinks and breathers with a parity-time-symmetric defect / Saadatmand D., Dmitriev S. V., Borisov D. I., Kevrekidis P. G. // Phys. Rev. E. – 2014. – Vol. 90, no. 5. – P. 052902. DOI: 10.1103/PhysRevE.90.052902
64. Schiesser W. E. The numerical method of lines: integration of partial differential equations. // San Diego: Academic Press. – 1991. – P. 326.
65. Schiesser W. E. A Compendium of Partial Differential Equation Models. Method of Lines Analysis with Matlab/ W. E. Schiesser, G. W. Griffiths // Cambridge university press. – 2009 – P. 476.
66. Ames, W. F. Numerical methods for partial differential equations / W. F. Ames. — Florida: Academic Press, 1992. – P. 378.
67. Della Torre E. A one-dimensional model for wall motion coercivity in magneto optic media / E. Della Torre, C.M. Perlov // J.Appl.Phys. –1991. –V.69. –№ 9. – P.4596-4598. DOI: 10.1063/1.348322
68. Филиппов, Б.Н. Нелинейная динамика вихревой доменной границы в магнитных пленках с плоскостной анизотропией / Б.Н. Филиппов, Л.Г. Корзунин // ФТТ. –1996. – т. 38. – С.2442–2450.
69. Осипов, С.Г. Динамика двумерной доменной границы в ферромагнитной пленке с одноосной анизотропией / С.Г. Осипов, М.М. Хапаев // ЖЭТФ. – 1990. –т. 90. – вып. 4(10). – С.1354–1363.
70. Balbashov, A.M. / A.M. Balbashov, A.V. Zaleski, V.G. Krivenko, E.V. Sinitsyn // Letters to the Journal of Technical Physics. –1998. –14. –P. 293.
71. Пирумов У.Г. Численные методы учебник и практикум для академического бакалавриата / У.Г. Пирумов и др. // под ред. У.Г. Пирумова. – 5-е изд. перераб. и доп. – М.: Издательство Юрайт. – 2014. – С. 421.

72. Griffiths G.W. Traveling Wave Analysis of Partial Differential Equations / G.W. Griffiths, Schiesser W.E. // ELSEVIER. – 2012. – P. 447. DOI: 10.1016/c2009-0-64536-0
73. Ablowitz M. J. Solitary wave collisions / Ablowitz M. J., Kruskal M. D., Ladik J. F. //SIAM Journal on Applied Mathematics. – 1979. – V. 36. – No. 3. – P. 428–437.
74. R. Goodman Kink-antikink collisions in the φ^4 equation: The n-bounce resonance and the separatrix map / R. Goodman, R. Haberman // SIAM J. Appl. Dyn. Syst. – 2005 – Vol.4 – No. 4. – P. 1195 – 1228.
75. Gani V. A. Kink interactions in the (1+1)-dimensional φ^6 model / Gani V. A., Kudryavtsev A. E., Lizunova M. A. // Physical Review D. – 2014. – Vol. 89. – No. 12. – P. 125009. DOI: 10.1103/PhysRevD.89.125009
76. Marjaneh A. M. High energy density in the collision of N kinks in the φ^4 model / Marjaneh A. M., Saadatmand D., Zhou K., Dmitriev S. V., Zomorrodian M. E. // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. – 2017. – Vol. 49. – P. 30-38. DOI: 10.1016/j.cnsns.2017.01.022
77. Yan H. Kink-antikink collision in a lorentz-violating φ^4 model / Yan H., Zhong Y., Liu Y. X., Maeda K. I. // Physics Letters B. – 2020. – Vol. 807. – P. 135542.
78. Aubry S. A unified approach to the interpretation of displacive and order-disorder systems. II. Displacive systems // The Journal of Chemical Physics. – 1976. – Vol. 64. – No. 8. – P. 3392-3402.
79. Schneider T. Molecular-dynamics study of a three-dimensional one-component model for distortive phase transitions / Schneider T., Stoll E. // Physical Review B. – 1978. – Vol. 17. – No. 3. – P. 1302.
80. Bishop A. R. Defect states in polyacetylene and polydiacetylene // Solid State Communications. – 1980. – Vol. 33. – No. 9. – P. 955-960.
81. Rice M. J. Phenomenological theory of soliton formation in lightly-doped polyacetylene / Rice M. J., Mele E. J. // Solid State Communications. – 1980. – Vol. 35. – No. 6. – Pp. 487-491.

82. Yamaletdinov R. D. Kinks and antikinks of buckled graphene: a testing ground for the φ^4 field model / Yamaletdinov R. D., Slipko V. A., Pershin Y. V. // *Physical Review B*. – 2017. – Vol. 96. – No. 9. – P. 094306.
83. Yamaletdinov R. D. Manipulating graphene kinks through positive and negative radiation pressure effects / Yamaletdinov R. D., Romańczukiewicz T., Pershin Y. V. // *Carbon*. – 2019. – Vol. 141. – P. 253-257.
84. Saadatmand D. Collective-coordinate analysis of inhomogeneous nonlinear Klein–Gordon field theory / Saadatmand D., Javidan K. // *Brazilian Journal of Physics*. – 2013. – Vol. 43. – No. 1. – P. 48-56.
85. Ghahraman A. Dynamics of φ^4 Kinks by Using Adomian Decomposition Method // *American Journal of Numerical Analysis*. – 2016. – Vol. 4. – No. 1. – P. 8-10.
86. Kälbermann G. Soliton tunneling // *Physical Review E*. – 1997. – Vol. 55. – No. 6. – P. R6360.
87. Piette B. Scattering of sine-Gordon kinks on potential wells / Piette B., Zakrzewski W. J. // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. – 2007. – Vol. 40. – No. 22. – P. 5995.
88. Goodman R. H. Interaction of sine-Gordon kinks with defects: the two-bounce resonance / Goodman R. H., Haberman R. // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. – 2004. – Vol. 195. – No. 3-4. – P. 303-323.
89. Gonzalez J. A. Arbitrarily large numbers of kink internal modes in inhomogeneous sine-Gordon equations / Gonzalez J. A., Bellorin A., García-Ñustes M. A., Guerrero L. E., Jiménez S., Vázquez L // *Physics Letters A*. – 2017. – Vol. 381. – No. 24. – P. 1995-1998.
90. Lizunova M. A. et al. Kinks and realistic impurity models in φ^4 -theory // *International Journal of Modern Physics B*. – 2022. – Vol. 36. – No. 05. – P. 2250042.
91. Piette B. Dynamical properties of a soliton in a potential well / Piette B., Zakrzewski W. J. // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. – 2006. – Vol. 40. – No. 2. – P. 329.

92. Goodman R. H., Haberman R. Interaction of sine-Gordon kinks with defects: the two-bounce resonance // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. – 2004. – Vol. 195. – No. 3-4. – P. 303-323.
93. Goodman R. H., Haberman R. Interaction of sine-Gordon kinks with defects: the two-bounce resonance // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. – 2004. – Vol. 195. – No. 3-4. – P. 303-323.
94. Marjaneh A., Simas F., Bazeia D. Collisions of kinks in deformed φ^4 and φ^6 models. // *Chaos, Solitons & Fractals* – 2022 – Vol.164. DOI: 10.1016/j.chaos.2022.112723.
95. Paul D. I. Soliton theory and the dynamics of a ferromagnetic domain wall // *Journal of Physics C: Solid State Physics*. – 1979. – V. 12. – No. 3. – P. 585.
96. Гумеров А.М. Резонансная динамика солитонов в модели синус-Гордона с притягивающими примесями. и: спец. 01.04.02 «Теоретическая физика»: дис. на соискание ученой степени канд. Физико-математических наук. Уфа, 2013. 178 с
97. M. B. Fogel Dynamics of sine-Gordon solitons in the presence of perturbations / M. B. Fogel, S. E. Trullinger, A. R. Bishop, J. A. Krumhandl // *Phys. Rev. B*. — 1977. — Vol. 15. — P. 1578–1592.
98. Алфимов, Г. Л. Нелокальное уравнение синус-Гордона: решения типа «кинк» в пределе слабой нелокальности / Г. Л. Алфимов // *Нелинейная динамика*. — 2009. — Т. 5, № 4. — С. 585–602.
99. Ferreira L. A. Wobbles and other kink breather solutions of sine-Gordon model / L. A. Ferreira, B. Piette, W. J. Zakrzewski // *Phys. Rev. E*. — 2008. — Vol. 77. — P. 036616.
100. Bratsos, A. G. The solution of the twodimensional sineGordon equation using the method of lines / A. G. Bratsos // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. — 2007. — Vol. 206, no. 1. — P. 251–277.
101. Екомасов, Е. Г. Возбуждение нелинейных уединенных изгибных волн в движущейся доменной границе / Е. Г. Екомасов, Ш. А. Азаматов, Р. Р. Муртазин // *Физика Металлов и Металловедение*. — 2009. — Т. 108, № 6. — С. 1–6.

102. Гумеров А.М. Влияние затухания и внешнего магнитного поля на резонансную динамику доменной границы в пятислойной ферромагнитной структуре / Гумеров А.М., Екомасов Е.Г., Кудрявцев Р.В., Фахретдинов М.И. // *Letters on Materials* 10 (3). – 2020. – с. 260 – 265. DOI: 10.22226/2410-3535-2020-3-260-265
103. Муртазин Р.Р. Топология и динамика магнитных неоднородностей в магнетиках с одно- и двумерными дефектами: Дис... канд. физ.-мат. наук: 01.04.07 / Р.Р. Муртазин, БашГУ. – Уфа: БашГУ, 2013. – С. 152.
104. Кудрявцев Р.В. Динамика солитонов уравнения синус-Гордона в модели с притягивающими примесями, внешней силой и затуханием: Дис... канд. физ.-мат. наук: 01.04.02 / Р.В. Кудрявцев, БашГУ. – Уфа: БашГУ, 2018. – С. 160.
105. Рыскин Н.М., Трубецков Д.И. Нелинейные волны. Учеб. пособие для вузов. М.: Наука, Физмалит, – 2000. – С. 272.
106. Магнус К. Колебания: Введение в исследование колебательных систем. М.: Мир. – 1982. – С. 304.
107. Gustafsson B. High Order Difference Methods for Time Dependent PDE / B. Gustafsson. – Berlin : SpringerVerlag, 2007. – P. 345.
108. Macías-Díaz, J. E. Two finite-difference schemes that preserve the dissipation of energy in a system of modified wave equations [Electronic resource] / J. E. Macías Díaz, S. Jerez-Galiano // arXiv:1112.0594 [math.NA]. – 2011. – URL:<http://arxiv.org/abs/1112.0594v1>.
109. Gustafsson, B. Time dependent problems and difference methods / B. Gustafsson, H. O. Kreiss, J. Olinger. – New Jersey: John Wiley and Sons, 2013. – P. 528.
110. Min M. S. The instability of the Yee scheme for the magic time step / M. S. Min, C. H. Teng // *Journal of Computational Physics*. – 2001. – Vol. 166. – No. 2. – P. 418–424. DOI:10.1006/jcph.2000.6650
111. Амосов, А. А. Вычислительные методы для инженеров / А. А. Амосов, Ю. А. Дубинский, Н. В. Копченова. – М. : Изд-во МЭИ, 2003. – С. 600.

112. Akima H. A new method of interpolation and smooth curve fitting based on local procedures / H. Akima // *Journal of the ACM*. – 1970. – Vol. 17, no. 4. – P. 589–602. DOI: 10.1145/321607.321609
113. Белова Т. И. О взаимодействии солитона с примесью в теории $\lambda\varphi_2^4$ / Т. И. Белова, А. Е. Кудрявцев // *ЖЭТФ*. – 1995. – Т. 108, № 4. – с. 1489–1500.
114. Kivshar, Yu. S. Resonant solitonimpurity interactions / Yu. S. Kivshar, F. Zhang, L. Vazquez // *Phys. Rev. Lett.* – 1991. – Vol. 67. – P. 1177–1180. DOI: 10.1103/PhysRevLett.67.1177
115. Рабинович, М. И. Введение в теорию колебаний и волн / М. И. Рабинович, Д. И. Трубецков. – М. : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. – С. 560.
116. Рабинович, М. И. Введение в теорию колебаний и волн / М. И. Рабинович, Д. И. Трубецков. – М. : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. – С. 560.
117. Nazarov, V. N. Autoresonance Parametric Excitation of the Magnetic Breather in a Uniaxial Ferromagnet / Nazarov, V. N., Kalyakin, L. A. and Shamsutdinov, M. A. // *Solid State Phenomena*. – 2011. – vols. 168–169. – P. 81–84. DOI: 10.4028/www.scientific.net/SSP.168-169.81
118. Batalov S. V. Generation of Solitons in a Ferromagnetic Domain Structure / Kiselev V.V. and Raskovalov, A. A. // *Comput. Math. Math. Phys.* – 2019. – Vol. 59. – No. 8. – PP. 1324–1332. DOI: 10.1134/S0965542519080037
119. Kalyakin L.A. Autoresonance in a Dynamic System in Contemporary Mathematics and Its Applications. – Tbilisi. – Institute of Cybernetics. – 2003. – Vol. 5. – P. 79–108.
120. Nazarov V.N. Autoresonance Control Model of Nonlinear Dynamics of Magnetization in a Three-Layer Antiferromagnetic Structure in the Presence of Attenuation / Nazarov, V.N. and Ekomasov, E.G. // *Mater. Lett.* – 2018. – Vol. 8, No. 2 – P. 158–164. DOI: 10.22226/2410-3535-2018-2-158-164

121. Friedland L., Emergence and Control of Breather and Plasma Oscillations by Synchronizing Perturbations / Friedland L. and Shagalov, A.G // Phys. Rev. E. – 2006. – Vol. 73. – No. 6. – 066612 P. 8.

122. Kalyakin, L.A. Asymptotic Analysis of a Model of Nuclear Magnetic Autoresonance./ Kalyakin, L.A., Sultanov O. A., and Shamsutdinov M. A., // Theoret. and Math. Phys. – 2011. – Vol. 167. – No. 3. – P. 762–771. DOI: 10.4213/tmf6651

123. Batalov S.V. Resonance Control of Solitons of Spin Waves / Batalov S.V. and Shagalov A.G. // Phys. Met. Metallogr. – 2013. – vol. 114. – P. 826–832. DOI: 10.4213/tmf6651

124. Gumerov A. M. Transformation of sine-Gordon Solitons in Models with Variable Coefficients and Damping / Gumerov A. M., Ekomasov E. G., Murtazin R. R., and Nazarov V. N. // Comput. Math. Math. – Phys. – 2015. – Vol. 55, No. 4. – P. 628–637. DOI:10.1134/S096554251504003X