

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт физики
металлов имени М.Н. Михеева УрО РАН

На правах рукописи

Расковалов Антон Александрович

**Нелинейные возбуждения в магнетиках со спиральной и
полосовой доменной структурой**

Специальность

1.3.3. Теоретическая физика

Диссертация на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант:
доктор физико-математических наук
Киселёв Владимир Валерьевич

Екатеринбург — 2025

Оглавление

	Стр.
Введение	5
1 НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ В ПОЛОСОВОЙ ДОМЕННОЙ СТРУКТУРЕ ФЕРРОМАГНЕТИКА С АНИЗОТРОПИЕЙ ТИПА «ЛЕГКАЯ ОСЬ»	20
1.1 Модель Ландау – Лифшица для легкоосного ферромагнетика с полосовой доменной структурой. Анализ устойчивости линейных мод	21
1.1.1 Основные уравнения	21
1.1.2 Спектр линейных мод полосовой доменной структуры	23
1.2 Постановка задачи аналитического описания солитонов в полосовой доменной структуре и план ее решения	27
1.2.1 «Затравочное» решение вспомогательной системы	28
1.2.2 План решения задачи методом «одевания»	31
1.3 Решение задачи Римана при наличии солитонов в доменной структуре	37
1.3.1 Односолитонное решение задачи Римана	37
1.3.2 Асимптотические разложения	43
1.3.3 Законы сохранения	45
1.3.4 Взаимодействие солитонов в доменной структуре	47
1.4 Прецессионные солитоны в полосовой доменной структуре	51
1.4.1 Общая характеристика односолитонного решения	51
1.4.2 Неподвижные солитоны	58
1.4.3 Поведение солитонов вблизи границ области их существования	63
1.5 Генерирование солитонов в доменной структуре	68
2 СОЛИТОНЫ И ДИСПЕРГИРУЮЩИЕ ВОЛНЫ В ДОМЕННОЙ СТРУКТУРЕ ДВУХОСНОГО ФЕРРОМАГНЕТИКА	75

2.1	Основные уравнения. Анализ устойчивости доменной структуры в линейном приближении	76
2.2	Процедура интегрирования модели Ландау – Лифшица двухосного ферромагнетика	79
2.2.1	Вспомогательная линейная система и функции Йоста. Задача Римана	79
2.2.2	Односолитонное решение задачи Римана	85
2.2.3	Асимптотические разложения и законы сохранения	89
2.2.4	Диспергирующие спиновые волны	95
2.3	Прецессионные солитоны в доменной структуре двухосного ферромагнетика	99
2.3.1	Сравнительный анализ физических характеристик неподвижных и движущихся солитонов	103
2.3.2	Динамика солитонов вблизи границы спектра бесщелевых мод доменной структуры	109

3	НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА ПОЛУБЕСКОНЕЧНОГО ФЕРРОМАГНЕТИКА С АНИЗОТРОПИЕЙ ТИПА «ЛЕГКАЯ ПЛОСКОСТЬ» И ХИРАЛЬНОГО ФЕРРОМАГНЕТИКА	114
3.1	Постановка задачи: идея интегрирования модели Ландау – Лифшица для полуограниченного ферромагнетика с анизотропией типа «легкая плоскость» методом изображений	115
3.2	Процедура интегрирования уравнения Ландау – Лифшица для легкоплоскостного ферромагнетика на полуоси	119
3.2.1	Матрица параллельного переноса	119
3.2.2	Прямая задача рассеяния	122
3.2.3	Асимптотические разложения функций Йоста	125
3.2.4	Интегралы движения для солитонов и волн в полубесконечном образце	128
3.2.5	Задача Римана	130
3.2.6	Диспергирующие волны	134
3.2.7	Солитонные решения	135
3.3	Взаимодействие солитонов с границей образца	138
3.3.1	Отражение волн поворота намагниченности от границы	138

3.3.2	Взаимодействие бризера с границей образца	144
3.4	Аналитическое описание солитонов полуограниченного ферромагнетика с геликоидальной структурой	147
4	БРИЗЕРЫ И ДВУХКИНКОВЫЕ СОСТОЯНИЯ В СПИРАЛЬНОЙ МАГНИТНОЙ СТРУКТУРЕ	157
4.1	Модель sine–Gordon для спиральной структуры, процедура «одевания» и спектр нелинейных возбуждений	159
4.1.1	Формулировка модели	159
4.1.2	Процедура «одевания» и солитонные решения	163
4.1.3	Спектр нелинейных возбуждений спиральной структуры	168
4.1.4	Нелинейные спиновые волны	171
4.2	Нелинейная динамика комплекса из двух кинков в магнитной спирали	173
4.3	Анализ бризерного возбуждения	180
4.3.1	Общие замечания	180
4.3.2	Форма записи бризерного решения	182
4.3.3	Взаимодействие бризера с отдельной доменной стенкой	184
4.3.4	Неподвижные бризеры	188
4.3.5	Движущиеся бризеры	193
4.4	Поглощение СВЧ-мощности спиновыми волнами и бризерами	196
4.5	Исследование возможностей формирования солитонов в спиральной структуре	205
4.5.1	Возбуждение бризера	205
4.5.2	Возбуждение двух кинков одинаковой хиральности	209
4.6	Применение полученных результатов для аналитического описания солитонов электрической поляризации в мультиферроиках	211
	Заключение	215
	Список литературы	222
	Публикации автора по теме диссертации	233
	Приложение А Техника работы с эллиптическими функциями	236

Введение

Одной из главных особенностей развития современной физики является успешное проникновение в область существенно нелинейных явлений и процессов. Классическим примером нелинейной среды служат магнетики. Магнетики разнообразны по структуре и свойствам, обладают множеством нелинейных образований и возбуждений, которыми можно сравнительно легко управлять посредством внешних полей. Поэтому магнитные материалы находят широкое применение в микроэлектронике, вычислительной технике, различных приборах и устройствах.

В магнитных материалах часто встречаются всевозможные периодические структуры, такие как полосовые доменные структуры ферро- и антиферромагнетиков, а также геликоидальные магнитные структуры, которые теоретически описываются одномерной решеткой солитонов (кинков). Для некоторых кристаллов специальной симметрии (кристаллов без центра инверсии) формирование геликоидальных структур обусловлено взаимодействием Дзялошинского – Мории. Такого рода структуры обнаружены в металлах (MnSi), диэлектриках (CuV₂O₄) и полупроводниках (Cr_{1/3}NbS₂). В последние годы открыты возможности синтеза молекулярных хиральных магнетиков со значительным вкладом взаимодействия Дзялошинского – Мории в магнитные свойства [1–7].

В традиционной феноменологической теории магнитных кристаллов сложные магнитные структуры рассматриваются как совокупность встроенных друг в друга магнитных подрешеток [8–11]. Динамика одноподрешеточного ферромагнетика описывается уравнениями Ландау – Лифшица [11]:

$$\partial_t \mathbf{M} = -\gamma [\mathbf{M} \times \mathbf{H}^{\text{eff}}], \quad \mathbf{H}^{\text{eff}} = -\frac{\delta W}{\delta \mathbf{M}}, \quad \mathbf{M}^2 = M_0^2 = \text{const}, \quad (1)$$

где \mathbf{M} – вектор плотности магнитного момента среды, γ – магнитомеханическое отношение, W – свободная энергия ферромагнетика:

$$W = \int d^3\mathbf{r} \left[\frac{\alpha_{ik}}{2} (\partial_i \mathbf{M} \cdot \partial_k \mathbf{M}) + w^{(a)} + w^{(m)} - (\mathbf{M} \cdot \mathbf{H}_0) \right],$$

α_{ik} – постоянные обменного взаимодействия, $\mathbf{H}_0 = \mathbf{H}_0(\mathbf{r}, t)$ – внешнее магнитное поле, $w^{(a)}$ – плотность энергии магнитной анизотропии кристалла, $w^{(m)}$ – плотность магнитостатической энергии:

$$w^{(m)} = -\frac{1}{2} (\mathbf{M} \cdot \mathbf{H}^{(m)}). \quad (2)$$

Внутреннее магнитное поле кристалла $\mathbf{H}^{(m)}$, обусловленное распределением намагниченности $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$, определяется из уравнений магнитостатики:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}^{(m)} = 0, \quad \operatorname{div}(\mathbf{H}^{(m)} + 4\pi\mathbf{M}) = 0. \quad (3)$$

Уравнения (1)–(3) вместе с подходящими граничными условиями дают полное описание динамики ферромагнетика. В простейшем случае плотности энергии $w^{(a)}$ и $w^{(m)}$ представляют квадратичную форму по компонентам вектора \mathbf{M} :

$$w^{(a)} + w^{(m)} = -\frac{1}{2} (J_1 M_1^2 + J_2 M_2^2 + J_3 M_3^2).$$

В случае $J_1 < J_2 < J_3$ имеем ферромагнетик с двухосной магнитной анизотропией. При $J_1 = J_2 \neq J_3$ получаем ферромагнетик с выделенной осью $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$ эффективной анизотропии (ферромагнетик с одноосной анизотропией). В отсутствие внешнего магнитного поля однородному распределению намагниченности одноосного ферромагнетика соответствует плотность энергии

$$w = -\frac{\tilde{\beta} M_3^2}{2} + \text{const}; \quad \tilde{\beta} = J_3 - J_2. \quad (4)$$

При $\tilde{\beta} > 0$ энергия (4) минимальна, если вектор \mathbf{M} сонаправлен или антипараллелен оси анизотропии: $\mathbf{M} = (0, 0, \pm M_0)$. При $\tilde{\beta} < 0$ минимум энергии (4) реализуется, когда вектор \mathbf{M} лежит в плоскости, перпендикулярной оси анизотропии. Ферромагнетик с $\tilde{\beta} > 0$ ($\tilde{\beta} < 0$) принято называть ферромагнетиком с анизотропией типа «легкая ось» («легкая плоскость»).

В параметризации намагниченности сферическими углами

$$\mathbf{M} = M_0(\sin \Theta \cos \Phi, \sin \Theta \sin \Phi, \cos \Theta)$$

в случае преобладающей легкоплоскостной анизотропии: $\Theta \approx \pi/2$. Для одномерных кристаллов без центра инверсии уравнения Ландау – Лифшица (1)–(3) сводятся к одномерному гиперболическому уравнению синус–Гордон (sine–Gordon):

$$\partial_\xi^2 \Phi - \partial_t^2 \Phi = \sin \Phi, \quad (5)$$

где ξ – пространственная координата, t – время.

Несмотря на кажущуюся простоту феноменологического выражения для энергии магнетиков, в общем случае решение системы (1)–(3) связано со значительными аналитическими трудностями. Условие постоянства длины вектора

намагниченности (1) делает задачи теоретического описания больших отклонений намагниченности от основного состояния существенно нелинейными. Одной из характерных особенностей такого класса задач является наличие солитонов – пространственно локализованных частицеподобных волн, которые восстанавливают свою форму даже после взаимодействия с другими солитонами и нелинейными волнами. Солитоны представляют точные решения уравнений (1)–(3). В нелинейной физике их роль подобна роли квазичастиц в линейной теории. Солитоны несут информацию о структуре и динамике нелинейной среды, определяют кинетические, термодинамические, магнитные, механические и другие свойства конденсированных сред в условиях значительного внешнего воздействия на систему.

В случае двумерных и трехмерных задач уравнения (1)–(3) зачастую не могут быть решены точно. В связи с этим, в последние годы фокус внимания исследователей смещается в область численного моделирования динамики магнетиков с применением хорошо оснащенных вычислительных пакетов микромагнитного моделирования [12; 13].

Данная диссертационная работа посвящена исследованию магнитных солитонов в рамках интегрируемых моделей Ландау – Лифшица и sine-Gordon. К настоящему времени наиболее полно исследованы квазиодномерные солитоны на фоне однородного состояния конденсированных сред [11; 14]. Квазиодномерность означает, что учитывается зависимость только от одной пространственной координаты и времени. В указанном выше случае поиск новых точных решений моделей (1)–(3) во многом можно считать завершенным. Мотивацией работ, лежащих в основе данной диссертации, был поиск аналитических решений полностью интегрируемых моделей магнетизма в двух ситуациях: когда они описывают взаимодействие солитонных возбуждений с доменными стенками и доменами периодической доменной структуры, представляющей основное состояние системы, либо с фиксированной границей образца.

Такие задачи представляют существенную математическую трудность, в связи с чем до сих пор имеется довольно мало работ на подобные темы. В первом из указанных случаев решалась задача для безграничного образца, но на существенно нелинейном неоднородном периодическом фоне. В рамках диссертации найдены новые точные солитонные решения уравнений Ландау – Лифшица для легкоосного и двухосного ферромагнетиков при наличии доменной структуры, а также детально изучены громоздкие и непростые для анализа солитоны и

мультисолитоны в решетке кинков (доменных стенок) геликоидальных магнетиков без центра инверсии в рамках модели sine-Gordon.

Во втором случае строились решения уравнения Ландау – Лифшица на однородном фоне, но не в безграничном, а в полуограниченном образце, который в некоторой точке имеет фиксированную границу. Можно было искать соответствующие решения в разных системах: для изотропного ферромагнетика, ферромагнетика с легкоосной или легкоплоскостной анизотропией, двухосного ферромагнетика, ферримангнетика и т. д. Все соответствующие модели полностью интегрируемы, и для них известны соответствующие $U - V$ -пары (6), (7) [11].

В рамках диссертационной работы более предпочтительным оказалось исследование солитонов полуограниченного одноосного ферромагнетика. Преимущество такой задачи состоит в том, что благодаря известному калибровочному преобразованию, по уже найденным решениям уравнений Ландау – Лифшица для одноосного ферромагнетика можно построить решения еще одной модели, – полубесконечного хирального ферромагнетика на фоне магнитной спирали, за формирование которой отвечает взаимодействие Дзялошинского. В общем случае, наличие оси легкого намагничивания, совпадающей с направлением вектора Дзялошинского, подавляет геликоидальное упорядочение и сохраняет спиральный разворот намагниченности только в локализованных областях внутри образца. Напротив, квадратичная по намагниченности легкоплоскостная анизотропия (базисная плоскость параллельна плоскости поворота спинов) сохраняет геликоидальную структуру на всем протяжении образца. Потому в диссертации исследованы солитоны не в легкоосном, а в полуограниченном легкоплоскостном ферромагнетике.

При построении решений применялся метод обратной задачи рассеяния – нелинейный аналог классического преобразования Фурье для интегрирования эволюционных уравнений в частных производных, которые содержат только одну пространственную координату ξ и время t .

Для возможности применения метода обратной задачи рассеяния исходное нелинейное уравнение необходимо представить в форме условия совместности:

$$[\partial_\xi - U(\lambda), \partial_t - V(\lambda)] \equiv \partial_t U(\lambda) - \partial_\xi V(\lambda) + [U(\lambda), V(\lambda)] = 0 \quad (6)$$

некоторой системы линейных дифференциальных уравнений для вектор-функции $\chi(\lambda)$:

$$\partial_{\xi}\chi = U(\lambda)\chi, \quad \partial_t\chi = V(\lambda)\chi. \quad (7)$$

Величины U , V , χ зависят не только от координат ξ и t , но еще и от дополнительного комплексного параметра λ ; $U(\lambda)$ и $V(\lambda)$ являются мероморфными функциями от параметра λ , т. е. являются аналитическими всюду, за исключением конечного числа полюсов. Матричные функции U и V называют обобщенной парой Лакса, представлением Захарова – Шабата [15], или просто U – V –парой [16; 17].

Представление (6), (7) используется для перехода от исходных динамических переменных (полей) к новым обобщенным переменным (данным рассеяния). В новых переменных нелинейное уравнение распадается на ряд не зацепляющихся линейных дифференциальных уравнений. После того как решение последних найдено, обращением замены переменных получают решение исходного нелинейного уравнения.

Данные рассеяния отвечают допустимым типам возбуждений в системе и разбиваются на две группы: дискретный набор переменных, которым отвечают возбуждения солитонного типа (в магнитных средах это доменные границы, уединенные домены, самолокализованные волны намагниченности и т. д.), и набор переменных, непрерывных по λ , которые описывают волны с преобладающим влиянием дисперсии, расплывающиеся с течением времени.

Классический вариант метода обратной задачи рассеяния связан с изучением свойств аналитичности частных решений вспомогательной линейной системы (6). Последнее представляет достаточно сложную задачу и возможно лишь для быстро убывающих при $x \rightarrow \pm\infty$ решений исходного нелинейного уравнения. Между тем, для построения частных решений уравнений движения в полном исследовании спектральной задачи (7) нет необходимости. Были предложены прямые методы вычисления точных решений, U – V –пара которых рациональным образом зависит от спектрального параметра λ : метод полиномиального замыкания, процедура «одевания» [18–20], метод Хироты [21; 22], преобразования Бэклунда (Дарбу) и другие [23–25].

В данной диссертационной работе используется процедура «одевания». Она наиболее универсальна, технически прозрачна, и вместе с тем, наиболее

близка к классической схеме метода обратной задачи. Процедура «одевания» основана на использовании матричной задачи Римана в комплексной λ -плоскости и позволяет по известному частному решению исходного нелинейного уравнения (6) строить новые точные решения.

Следует отметить, что в моделях (1)–(3), (5) отсутствуют слагаемые, отвечающие за диссипацию энергии. Однако, учет диссипации, в принципе, возможен по теории возмущений, которая позволяет исследовать эволюцию систем, близких к интегрируемым [26–28].

Цель диссертационной работы: получить аналитическое описание нелинейных коллективных возбуждений в доменных структурах ферромагнетиков с одноосной и двухосной анизотропией, в магнетиках без центра инверсии с несоизмеримой периодической структурой и мультиферроиках, а также выявить особенности взаимодействия солитонов с границей образца на примере ферромагнетика с анизотропией типа «легкая плоскость» с однородным основным состоянием и хирального ферромагнетика.

Поставленная цель включает в себя построение соответствующих точных решений в рамках интегрируемых моделей магнетизма, анализ полученных солитонных состояний и выявление способов их возбуждения, обнаружения и управления их свойствами посредством внешних полей.

Для достижения данной цели были поставлены следующие **задачи**:

1) Построить солитонные решения уравнений Ландау – Лифшица для безграничных легкоосного и двухосного ферромагнетиков с основным состоянием, представляющим доменную структуру. Для решения этой задачи была использована процедура «одевания» – модификация метода обратной задачи рассеяния. Метод «одевания» позволяет свести проблему интегрирования исходных сильно нелинейных вещественных уравнений к решению задачи Римана теории функций комплексной переменной. Ввиду наличия доменной структуры, задачу Римана пришлось решать не в комплексной плоскости, а на римановой поверхности, обусловленной периодичностью основного состояния.

2) Построить солитонные решения уравнения Ландау – Лифшица для полуограниченного легкоплоскостного ферромагнетика с однородным основным состоянием. Для выполнения этой задачи удалось использовать процедуру «одевания» в сочетании с методом изображений, используемым при решении краевых задач электростатики. Согласно идее метода изображений, поле намаг-

ниченности продолжено четным образом с полуоси, оканчивающейся границей образца, на всю вещественную ось. Это дает добавочные свойства симметрии, позволяющие встроить процедуру интегрирования уравнения Ландау – Лифшица на полуоси в традиционную схему метода обратной задачи рассеяния.

3) Провести анализ нелинейной динамики солитонов в легкоосном и двухосном ферромагнетиках и на фоне геликоидальной магнитной структуры, а также солитонных возбуждений в полуограниченном образце легкоплоскостного ферромагнетика на однородном фоне. По результатам анализа установить способы возбуждения полученных солитонов и подтвердить их численным экспериментом.

Методология и методы исследования. Отличительная особенность данной диссертационной работы – в том, что все исследуемые в ней магнитные солитоны построены аналитически – как точные решения интегрируемых моделей. Основным методом исследования служит модификация техники обратной задачи рассеяния – наиболее универсального метода современной нелинейной физики, – а именно, процедура «одевания» на основе классической задачи Римана теории функций комплексной переменной.

Положения и результаты, выносимые на защиту:

1) Прецессионные солитоны в доменной структуре легкоосного ферромагнетика являются переносчиками макроскопических трансляций структуры. Колебания ядер неподвижных солитонов приводят к вращениям намагниченности в примыкающих к ним доменах и их продольным смещениям. При определенных условиях солитоны служат зародышами перемагничивания структуры.

2) Солитоны в доменной структуре можно генерировать импульсным перемагничиванием структуры внешним магнитным полем. Высота и ширина начального импульса определяют вызванные солитонами сдвиги структуры, которые обуславливают строение солитонов. Это позволяет генерировать в структуре неподвижные солитоны с необходимыми размерами и частотами прецессии.

3) Модуляционная неустойчивость доменной структуры легкоосного ферромагнетика не сказывается на свойствах прецессионных солитонов в структуре и проявляется только вблизи границы спин-волнового спектра, где солитоны трансформируются в протяженные модуляции, которые могут двигаться без

ограничений на скорость. Данный результат подтверждает, что нелинейность может стабилизировать солитоны в интегрируемых системах с неустойчивым в линейном приближении основным состоянием.

4) При малом отличии постоянных легкоосной и двухосной анизотропии солитоны в доменных структурах легкоосного и двухосного ферромагнетиков качественно схожи. Они существенно различаются только вблизи границ спиноволнового спектра, где учет магнито-дипольных сил приводит к ограничению на скорость движения солитонов.

5) Спектральные разложения интегралов движения позволяют трактовать любое возбужденное состояние существенно нелинейной и неоднородной доменной структуры двухосного ферромагнетика в терминах идеального газа солитонов и магнонов.

6) В полуограниченном образце легкоплоскостного ферромагнетика с частично закрепленными краевыми спинами все солитоны являются движущимися и делятся на волны стационарного профиля (волны поворота намагниченности) и пульсирующие солитоны (бризеры). Отражение волн поворота от границы пороговым образом зависит от величины поля поверхностной анизотропии, а направление поверхностного поля определяет четность или нечетность числа волн поворота в образце. Ядра солитонов при столкновении с границей претерпевают значительные изменения, не поддающиеся описанию в рамках нелинейной теории возмущений.

7) Импульсное перемагничивание одного из доменов геликоидальной магнитной структуры внешним магнитным полем позволяет генерировать в структуре неподвижный бризер требуемой частоты и амплитуды. Частота внутренних пульсаций неподвижного бризера лежит вне спектра стоячих спиновых волн. Бризер колеблется в пределах резонаторного домена, который больше по размеру, чем остальные домены структуры.

8) Движение бризера в геликоидальной структуре может сопровождаться ее сильными продольными модуляциями на переднем и заднем фронте бризера. Разрушение бризера происходит за счет неограниченного увеличения протяженности таких модуляций с ростом его скорости.

9) При добавочной закрутке части геликоидальной структуры (решетки 2π -кинков) в ней возбуждаются два движущихся в противоположных направлениях одинаковых кинка той же хиральности, что и кинки структуры.

Вызванные кинками и бризерами сдвиги структуры можно диагностировать магнитооптическими методами.

Соответствие диссертации паспорту специальности

Диссертационная работа соответствует пункту 5 Паспорта специальности 1.3.3 «Теоретическая физика»: «Теория конденсированного состояния. Изучение различных состояний вещества и физических явлений в них. Статистическая физика. Теория фазовых переходов. Физическая кинетика».

Структура и объем диссертационной работы

Диссертация состоит из Введения, четырех глав, Заключения и Приложения. Полный объем работы составляет 241 страницу, включая 45 рисунков и 125 наименований цитируемой литературы.

Апробация работы

Основные результаты, изложенные в диссертационной работе, докладывались и обсуждались на XXII, XXIII, XXV Международных конференциях «Новое в магнетизме и магнитных материалах» (Астрахань, 2012 г.; Москва, 2018 г., 2024 г.); XXXIV, XXXV, XXXVI, XXXVII, XL Международных зимних школах физиков-теоретиков «Коуровка» (Новоуральск, 2012 г.; Верхняя Сысерть, 2014 г., 2016 г., 2018 г.; р. Башкортостан, с. Новоабзаково, 2024 г.); Научной сессии ИФМ УрО РАН по итогам 2016 г. (Екатеринбург, 2016 г.); VI, VIII Международной конференциях «Solitons, collapses and turbulence: Achievements, Developments and Perspectives» (Новосибирск, Академгородок, 2012 г.; Москва, Черноголовка, 2017 г.); Международной конференции «Нелинейные уравнения и комплексный анализ 2013» (Уфа, 2013 г.); XXV Научной сессии Совета по нелинейной динамике (Москва, 2016 г.); XIV, XV, XIX, XX, XXIII Всероссийских школах-семинарах по проблемам конденсированного состояния вещества СПФКС (Екатеринбург, 2014 г., 2015 г., 2018 г., 2019 г., 2023 г.); Международной конференции «Фазовые переходы, критические и нелинейные явления в конденсированных средах» (Челябинск, 2015 г.); Конференции «Phycis and Mathematics of Nonlinear Phenomena. 50 years of IST» (Галлиполи, Лечче, Италия, 2017 г.); XVIII Научной школе «Нелинейные волны – 2018» (Нижний Новгород, 2018); VII Евро-азиатский симпозиум «Trends in MAGnetism» (Екатеринбург, 2019 г.), Всероссийской конференции с международным участием

«Электронные, спиновые и квантовые процессы в молекулярных и кристаллических системах» (Уфа, 2024 г.).

Результаты работы были использованы при выполнении НИР, поддерживаемых Фондом «Династия» в рамках программы Президиума РАН «Фундаментальные проблемы нелинейной динамики» (2012-2013 гг.), Стипендией Президента РФ для молодых ученых СП-6342.2013.1. (2013-2015 гг.), проектом УрО РАН №15-8-2-7 «Локализованные структуры, солитоны и их возбуждение в конденсированных средах», грантом РФФИ для молодых ученых «Мой первый грант» №18-32-00143 (2018-2019 гг.), проектом РНФ 19-72-30028 «Турбулентность и когерентные структуры в интегрируемых и неинтегрируемых системах» (2024 г.).

Публикации. По результатам диссертации опубликована 21 статья в журналах, включенных ВАК в Перечень ведущих рецензируемых журналов и индексируемых в Российских и международных базах цитирования, 21 тезис докладов на Всероссийских и международных конференциях.

Достоверность полученных в диссертации результатов обеспечена использованием физически обоснованных теоретических моделей, применением для их исследования хорошо разработанного математического аппарата (метода обратной задачи рассеяния), наиболее полно выявляющего свойства симметрии решений; явным видом полученных решений, что позволяет убедиться в их справедливости непосредственной подстановкой в исходные уравнения (в простейших случаях – вручную, в общем случае – численно), корреляцией полученных решений с известными ранее результатами при соответствующих предельных переходах.

Личный вклад соискателя. Личный вклад автора заключается в постановке цели и задач исследований; все результаты диссертационной работы получены лично автором. Построение точных решений уравнения Ландау – Лифшица на фоне доменной структуры ферромагнетиков с легкоосной и двухосной анизотропией выполнено совместно с д.ф.-м.н. В.В. Киселевым. Численный эксперимент по генерированию солитонов в доменной структуре легкоосного ферромагнетика проведен совместно с к.ф.-м.н. С.В. Баталовым. Научные результаты обсуждались автором с д.ф.-м.н. В.В. Киселевым и д.ф.-м.н., член-корр. РАН А.Б. Борисовым. В списке публикаций авторы указа-

ны в алфавитном порядке, а не по значимости вкладов. Личный вклад автора диссертации является определяющим.

Научная и практическая значимость. Изученные в работе точные солитонные решения интегрируемых моделей магнетизма на нелинейном периодическом фоне представляют интерес как для развития общей теории интегрирования уравнений нелинейной математической физики, так и с точки зрения их применения в исследовании процессов перемагничивания доменной структуры при сильных внешних воздействиях.

Результаты диссертации важны для понимания закономерностей встраивания нелинейных возбуждений в периодическую доменную структуру, характера их взаимодействия с доменами и доменными стенками структуры, возможностей их возбуждения, делокализации и разрушения.

С практической точки зрения, результаты работы можно использовать для планирования экспериментов по обнаружению солитоноподобных возбуждений в доменных структурах одноосного и двухосного ферромагнетиков (главы 1, 2), в геликоидальной структуре магнетиков без центра инверсии и циклоидальной структуре мультиферроиков (глава 4) и управлению их свойствами с помощью внешних полей. Солитоны в геликоидальной магнитной структуре могут служить базовыми элементами при обработке информации в наноустройствах микросистемной техники и в информационно-телекоммуникационных системах. Солитоны в мультиферроиках могут найти применение при конструировании приборов и устройств, работающих без потерь энергии из-за протекания токов.

Результаты главы 3 могут быть использованы для постановки эксперимента по исследованию взаимодействия нелинейных волн намагниченности с границей легкоплоскостного ферромагнетика, а также хирального ферромагнетика с легкоплоскостной анизотропией. Рассчитанный спектр поглощения мощности внешней накачки на частотах стоячих спиновых волн в геликоидальной магнитной структуре (глава 4) имеет практическое значение при постановке экспериментов о возбуждении в геликоидальной структуре солитонов и спиновых волн.

Все представленные в диссертации результаты являются новыми. Новизна работы определяется следующим:

1) Получены новые точные решения одной из базовых моделей магнетизма – модели Ландау – Лифшица для ферромагнетика с анизотропией типа «легкая ось», описывающие солитонные возбуждения на фоне периодического основного состояния – полосовой доменной структуры. Для построения решений приспособлена модификация метода обратной задачи рассеяния – процедура «одевания» частного решения модели, соответствующего доменной структуре. Принципиальная новизна данного подхода состоит в том, что лежащая в его основе задача Римана формулируется не в комплексной плоскости спектрального параметра, как это было в случае однородного основного состояния среды, а на двулистной римановой поверхности, топологически эквивалентной тору. Наличие римановой поверхности обусловлено периодическим основным состоянием. Необходимость его учета приводит к существенным математическим трудностям, связанным с возникновением добавочных «блоховских» множителей при сдвиге решений задачи Римана по пространственной координате или в областях периодичности спектрального параметра задачи рассеяния. Успешное преодоление этих трудностей позволило получить полное решение задачи в терминах хорошо изученных и табулированных эллиптических функций Якоби, допускающих подробный анализ (глава 1).

2) На основе полученных решений впервые представлен детальный анализ прецессионных солитонов в доменной структуре легкоосного ферромагнетика. Выявлено два типа неподвижных солитонов в структуре, которые служат обобщением классических солитонов легкоосного ферромагнетика на фоне однородного основного состояния среды. На примере одного из них обнаружен неочевидный сценарий взаимодействия встроенного в структуру солитона с его периодическим окружением: колебания ядра солитона приводят к продольным смещениям доменной структуры с формированием в ней узлов – выделенных точек, в которых смещения отсутствуют. Установлено, что наличие солитонов приводит к макроскопическим сдвигам структуры. Величина сдвига задается нулями задачи Римана, определяющими физические характеристики солитонов, и тесно связана со строением ядер солитонов (глава 1).

3) Предложен способ возбуждения неподвижного солитона в доменной структуре. Для этого нужно посредством внешнего магнитного поля удлинить и возмутить один из доменов структуры так, чтобы он стал резонатором для ядра солитона. Соответствующая возможность подтверждена численно. Установлены характерные интервалы длины и ширины резонаторного доме-

на, допускающие формирование из него солитона в численном эксперименте (глава 1).

4) Впервые исследован характер вырождения солитонов в доменной структуре легкоосного ферромагнетика вблизи границ области их существования. Выявлено два выделенных случая, в которых солитоны трансформируются в неподвижные апериодические модуляции структуры – аналоги «солитонов Перегринна» в оптоволокне и волн-убийц на воде. Указанные модуляции имеют значительную протяженность и могут охватывать несколько периодов структуры (глава 1).

5) Развитая процедура интегрирования уравнения Ландау – Лифшица для легкоосного ферромагнетика распространена на физически выделенный случай двухосного ферромагнетика с доменной структурой. На основе модификации метода обратной задачи рассеяния впервые получены новые точные решения, описывающие солитоны в доменной структуре двухосного ферромагнетика, а также сингулярное интегральное уравнение для диспергирующих спиновых волн в отсутствие солитонов. Найдены законы сохранения (энергия и импульс) для солитонов и нелинейных спиновых волн на фоне структуры. Проведен сравнительный анализ солитонов легкоосного и двухосного ферромагнетиков. Установлено, что неподвижные солитоны обеих моделей мало отличаются друг от друга, в то время как сценарии вырождения солитонных возбуждений в легкоосном и двухосном ферромагнетиках и соответствующие им аналоги «солитонов Перегринна», напротив, качественно различны (глава 2).

6) Найдены новые точные решения, описывающие отражение движущихся солитонов от границы ферромагнетика с анизотропией типа «легкая плоскость». Взаимодействие солитонов с границей образца перспективно с точки зрения приложений и постановки эксперимента, однако до сих пор практически нет работ, в которых бы предпринимались попытки построить соответствующие точные решения в магнитных средах. Для поиска решений применена техника метода обратной задачи рассеяния в совокупности с «методом изображений», применяемым при решении задач электростатики. Ввиду сложности математического аппарата, цель состояла в том, чтобы построить соответствующие решения хотя бы на однородном фоне и в полубесконечном ферромагнетике – при учете только одной границы. Аналитическое исследование солитонов в конечных образцах (с учетом двух границ) пока что представляется недостижимым (глава 3).

7) На основе полученных решений представлен анализ взаимодействия с границей легкоплоскостного ферромагнетика движущихся волн поворота и бризеров при полном, либо частичном закреплении спинов на границе образца. Показано, что легкоплоскостная анизотропия исключает формирование неподвижных приграничных солитонов. Все полученные солитоны оказываются движущимися. Найдены законы сохранения для солитонов и нелинейных волн в полуограниченном образце (глава 3).

8) Полученные результаты использованы для аналитического описания солитонов в хиральном полубезграничном ферромагнетике с легкоплоскостной анизотропией в рамках модели Ландау – Лифшица, функционал действия которой связан с функционалом действия исходной модели калибровочным преобразованием. Впервые найдены и проанализированы точные решения модели полубезграничного хирального ферромагнетика, описывающие взаимодействие солитонов с его границей (глава 3).

9) На основе метода обратной задачи рассеяния впервые представлен анализ бризеров и комплекса из двух кинков, встроенных в периодическую решетку доменных стенок (кинков) геликоидальной магнитной структуры в рамках модели sine–Gordon. Исследовано взаимодействие двух движущихся кинков друг с другом и с доменными стенками структуры в зависимости от соотношения направлений их закруток (хиральностей). Выявлены особенности взаимодействия неподвижного пульсирующего бризера в структуре с прилегающими к нему доменами и доменными стенками. Как и в случае прецессионного солитона легкоплоскостного ферромагнетика, пульсации бризера приводят к осцилляциям участков доменной структуры между выделенными точками – узлами, в которых намагниченность оказывается прикреплена к структуре (глава 4).

10) При анализе движения бризера в решетке кинков выявлен специфический сценарий его разрушения при условии, когда скорость движения бризера как целого превышает фазовую скорость распространения его пульсаций. Установлено, что на переднем и заднем фронтах бризера поочередно формируются протяженные участки модуляций структуры, которые периодически втягиваются в ядро бризера, а затем образуются вновь. С ростом поступательной скорости движения бризера протяженность таких участков неограниченно возрастает (глава 4).

11) Предложен способ возбуждения бризеров и движущихся кинков в решетке кинков геликоидальной структуры. Для возбуждения неподвижного

бризера необходимо предварительно закрутить один из доменов структуры внешним полем, а затем дополнительно удлинить его на фронте закрутки. Два движущихся кинка той же хиральности, что и кинки решетки, возбуждаются из удлиненного домена, по одну из сторон которого магнитная спираль дополнительно закручена на угол 4π (два оборота спирали). Возможности генерирования неподвижного бризера и комплекса из двух кинков подтверждены численным счетом (глава 4).

12) Вычислен спектр поглощения мощности внешней накачки на частотах стоячих спиновых волн в геликоидальной структуре в постоянном магнитном поле, направленном перпендикулярно оси магнитной спирали. Получены приближенные выражения для резонансных частот поглощения в зависимости от внешнего магнитного поля. Показано, что частоты неподвижного бризера лежат ниже дискретного спектра частот стоячих спиновых волн почти при всех значениях поля (глава 4).

1 НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ В ПОЛОСОВОЙ ДОМЕННОЙ СТРУКТУРЕ ФЕРРОМАГНЕТИКА С АНИЗОТРОПИЕЙ ТИПА «ЛЕГКАЯ ОСЬ»

Одной из базовых моделей теории магнетизма является уравнение Ландау – Лифшица [29–32]. Для квазиодномерных возбуждений такая модель интегрируема. Благодаря этому подробно изучены нелинейные волны и солитоны на фоне однородного основного состояния ферромагнетиков с различными типами анизотропии [11; 14; 33]. В то же время, анализ солитонов в полосовых доменных структурах сталкивается с большими трудностями из-за значительной нелинейности и неоднородности фонового состояния среды. Некоторые результаты в этом направлении получены с помощью алгебро–геометрических методов конечнозонного интегрирования [34–37]. Однако, такой подход не дает эффективного решения указанного класса задач, т. к. приводит к малоизученным многомерным τ -функциям и трансцендентным уравнениям на параметры солитонных состояний.

Аналитическое описание коллективных возбуждений в доменной структуре возможно только в рамках упрощенных моделей с привлечением специальных методов интегрирования. В данной главе для исследования солитонов в легкоосном ферромагнетике с полосовой доменной структурой использован метод интегрирования модели Ландау – Лифшица на основе задачи Римана [38; 39] теории функций комплексной переменной. Наличие полосовой структуры проявляется в том, что задача Римана формулируется не в комплексной плоскости спектрального параметра, как это было в случае однородного основного состояния среды [11], а на римановой поверхности, топологически эквивалентной тору. При сдвигах на периоды по спектральному параметру и/или пространственной координате функции задачи Римана приобретают дополнительные множители. Это осложняет решение задачи.

Образование солитонов в доменной структуре приводит к смещению доменов структуры. В ходе анализа выявлена связь макроскопических сдвигов доменной структуры с параметрами, определяющими строение и скорость солитонов. Интересно и важно, что найденные солитоны оказываются неотделимы от доменной структуры ферромагнетика. Движение и пульсации ядра каждого солитона вызывают деформации и колебания соседних с ним доменных стенок.

Анализ строения солитонов и особенностей их взаимодействия друг с другом и с доменными стенками позволяет указать пути возбуждения солитонов в доменной структуре.

Изложение материала главы основано на работах [А1—А6].

1.1 Модель Ландау – Лифшица для легкоосного ферромагнетика с полосовой доменной структурой. Анализ устойчивости линейных мод

1.1.1 Основные уравнения

Плотность энергии ферромагнетика с анизотропией типа «легкая ось» имеет вид

$$w = \frac{\alpha}{2} (\partial_i \mathbf{M} \cdot \partial_i \mathbf{M}) - \frac{K_a}{2} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{M})^2,$$

где $\alpha > 0$, $K_a > 0$ – постоянные обменного взаимодействия и магнитной анизотропии вдоль выделенной оси $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$. Намагниченность среды $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$ определяется уравнением Ландау – Лифшица:

$$\partial_t \mathbf{M} = -\gamma [\mathbf{M} \times (\alpha \Delta \mathbf{M} + K_a (\mathbf{n} \cdot \mathbf{M}) \mathbf{n})], \quad \mathbf{M}^2 = M_0^2 = \text{const}, \quad (1.1)$$

где M_0 – номинальная намагниченность, γ – магнитомеханическое отношение, t – время.

Далее рассматриваются одномерные возбуждения ферромагнетика с полосовой доменной структурой вдоль оси Ox , поэтому $\mathbf{M} = \mathbf{M}(x, t)$, где x – пространственная координата. С помощью масштабных преобразований:

$$x' = x \sqrt{K_a / \alpha}, \quad t' = \gamma M_0 K_a t, \quad \mathbf{M} = -M_0 \mathbf{S}$$

приведем уравнение (1.1) к виду, удобному для дальнейшего анализа:

$$\partial_{t'} \mathbf{S} = [\mathbf{S} \times \partial_{x'}^2 \mathbf{S}] + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{S}) [\mathbf{S} \times \mathbf{n}], \quad \mathbf{S}^2 = 1. \quad (1.2)$$

«Штрихи» над новыми переменными далее опускаем.

Модель (1.2) учитывает основные взаимодействия, приводящие к образованию доменных стенок в ферромагнетиках. С ее помощью были теоретически описаны процессы перемагничивания в массивных образцах с полосовой доменной структурой [40]. В параметризации

$$\mathbf{S} = (\sin \theta \cos \Phi, \sin \theta \sin \Phi, \cos \theta) \quad (1.3)$$

полосовой доменной структуре $\mathbf{S}^{(0)}$ отвечает следующее решение уравнения (1.2):

$$\begin{aligned} \Phi &= \varphi_0 = \text{const}, & \theta(\chi) &= \theta_0 = \pi/2 - \text{am}(\chi, k); & \chi &= x/k; \\ \sin \theta_0 &= \text{cn}(\chi, k), & \cos \theta_0 &= \text{sn}(\chi, k), & k \partial_x \theta_0 &= \partial_\chi \theta_0 = -\text{dn}(\chi, k). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь $\text{am}(\chi, k)$ – эллиптическая амплитуда Якоби, $\text{sn}(\chi, k)$, $\text{cn}(\chi, k)$, $\text{dn}(\chi, k)$ – эллиптические функции Якоби с модулем $0 \leq k \leq 1$ [41; 42]. Величина k задает период $4Kk$ доменной структуры; $K = K(k)$ – полный эллиптический интеграл первого рода.

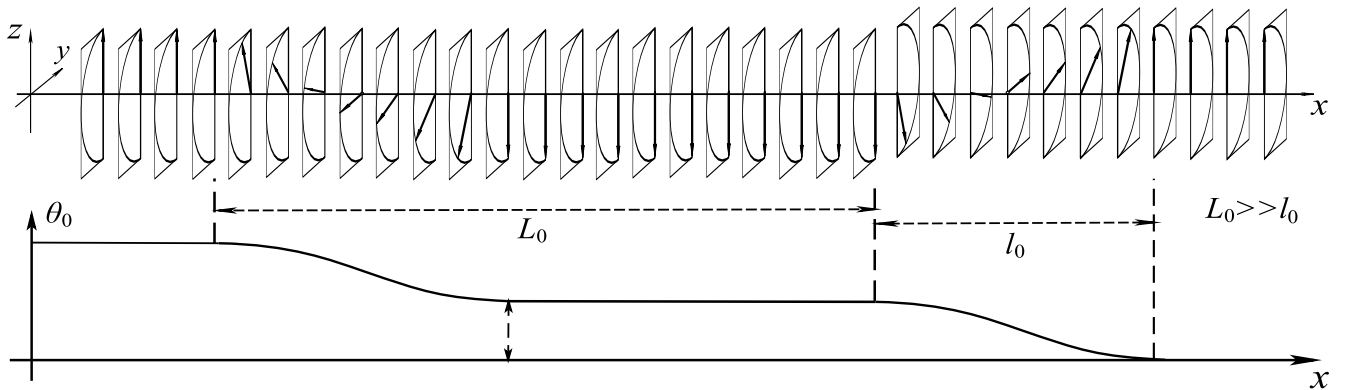


Рисунок 1.1 — Полосовая доменная структура и угол θ_0 разворота намагниченности.

Функция $\partial_x \theta_0$ допускает разложение [11]:

$$\partial_x \theta_0 = -l_0^{-1} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \text{sech}[l_0^{-1}(x - L_0 p)],$$

где p – целое, $l_0 = 2K'k/\pi$, $L_0 = 2Kk$, $k' = \sqrt{1 - k^2}$ – дополнительный модуль, $K' = K(k')$. Отсюда следует, что (1.4) описывает последовательность доменов шириной L_0 , в которых распределение намагниченности $\mathbf{S}^{(0)}$ почти не меняется: $\varphi_0 = \text{const}$, $\theta_0 \approx \pi n$, где n – целое число. Домены разделены переходными слоями – доменными границами толщиной l_0 (рисунок 1.1). В переходных слоях

вектор $\mathbf{S}^{(0)}$ поворачивается так, чтобы соседние домены имели альтернативные равновесные значения намагниченности $(0, 0, \pm 1)$:

$$\mathbf{S}^{(0)} \approx \left(\frac{\cos \varphi_0}{\operatorname{ch} \xi}, \frac{\sin \varphi_0}{\operatorname{ch} \xi}, \operatorname{th} \xi \right), \quad \xi = l_0^{-1}(x - L_0 p).$$

В массивных образцах отношение $L_0/l_0 \sim 10^2$. Это значение сильно меняется в зависимости от формы и размеров образца. В пленках возможны случаи, когда $L_0/l_0 \sim 1$ [31; 32]. В рассматриваемой модели величину отношения L_0/l_0 конкретизирует модуль k эллиптических интегралов:

$$\frac{L_0}{l_0} = \frac{\pi K(k)}{K'}, \quad K' = K(k'). \quad (1.5)$$

Угол φ_0 задает геометрию поворота. В стенках блоховского ($\varphi_0 = \pm\pi/2$) и неелевского ($\varphi_0 = 0, \pi$) типов она становится особенно простой. В этих случаях вектор $\mathbf{S}^{(0)}$ при повороте остается параллельным плоскости Oyz или Oxy соответственно. Доменные границы блоховского типа не создают магнитостатических полей (в них $\operatorname{div} \mathbf{S}^{(0)} = 0$). Поскольку в модели (1.2) магнитостатика не учитывается, она лучше описывает структуры с блоховским типом распределения намагниченности.

1.1.2 Спектр линейных мод полосовой доменной структуры

В следующем разделе мы приступим к интегрированию модели (1.2) на фоне полосовой доменной структуры (1.4). В целях ясности изложения, рассмотрим предварительно спектр малых колебаний намагниченности около равновесных положений

$$\mathbf{S}^{(0)}(x) = (\sin \theta_0 \cos \varphi_0, \sin \theta_0 \sin \varphi_0, \cos \theta_0)$$

в доменной структуре [31; 32], [A2; A3]. Представим векторное поле $\mathbf{S}(x, t)$ в виде:

$$\mathbf{S}(x, t) = D(x) \mathbf{m}(x, t), \quad \mathbf{m}^2 = 1,$$

где ортогональная матрица $D(x)$ равна:

$$D = FT, \quad F = \begin{pmatrix} \sin \varphi_0 & \cos \varphi_0 & 0 \\ -\cos \varphi_0 & \sin \varphi_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_0 & \sin \theta_0 \\ 0 & -\sin \theta_0 & \cos \theta_0 \end{pmatrix}.$$

В такой записи полосовой доменной структуре соответствует вектор $\mathbf{m}_0 = (0, 0, 1)$: $\mathbf{S}^{(0)} = D(x) \mathbf{m}_0$. Значения $\mathbf{m}(x, t) \neq \mathbf{m}_0$ описывают колебания вектора \mathbf{S} около равновесных положений в доменной структуре.

В терминах векторного поля $\mathbf{m}(x, t)$ уравнение Ландау – Лифшица (1.2) примет вид:

$$\partial_t \mathbf{m} = [\mathbf{m} \times \mathbf{H}_{\text{eff}}], \quad \mathbf{H}_{\text{eff}} = -\frac{\delta w_{\text{eff}}}{\delta \mathbf{m}}, \quad (1.6)$$

где

$$w_{\text{eff}} = \frac{1}{2} \int dx [(\partial_x \mathbf{m})^2 + 2 \partial_x \theta_0 (m_3 \partial_x m_2 - m_2 \partial_x m_3) + (\partial_x \theta_0)^2 (m_2^2 + m_3^2) - m_2^2 \sin^2 \theta_0 - m_3^2 \cos^2 \theta_0]. \quad (1.7)$$

Линеаризуем уравнение (1.6) вблизи основного состояния \mathbf{m}_0 : $\mathbf{m} = \mathbf{m}_0 + \tilde{\mathbf{m}}$ ($|\tilde{\mathbf{m}}| \ll 1$). Малые компоненты вектора $\tilde{\mathbf{m}}$ выразим через комплексное поле Ψ :

$$\Psi = \tilde{m}_1 + i \tilde{m}_2, \quad \tilde{m}_3 \approx 1 - \frac{|\Psi|^2}{2}.$$

Оно удовлетворяет линеаризованному уравнению:

$$i \partial_t \Psi + \hat{L} \Psi + \frac{k'^2}{2k^2} \Psi^* = 0; \quad \hat{L} = k^{-2} \partial_\chi^2 - 2 \text{sn}^2 \chi + \frac{1}{2} (1 + k^{-2}). \quad (1.8)$$

Здесь и далее, если не оговорено особо, используются эллиптические функции Якоби с модулем k : $\text{sn} \chi \equiv \sin[\text{am}(\chi, k)]$ и т. д. Поле $\Psi(x, t)$ выражается через решения $\Lambda(u, \chi)$ уравнения Ламе:

$$\hat{L} \Lambda = - \left(\frac{k'^2}{2k^2} + \text{sn}^2 u \right) \Lambda, \quad \text{cnu} \equiv \cos[\text{am}(u, k)]. \quad (1.9)$$

Комплексный спектральный параметр u введен так, чтобы он совпал с таковым для полученных далее солитонных возбуждений.

Выразим солитонные решения модели Ландау – Лифшица (1.2) через эллиптические функции Вейерштрасса с периодами $[4K, 2iK']$. Уравнение Ламе (1.9) имеет два линейно независимых решения $\Lambda(\pm u, \chi)$. В терминах сигма-функций Вейерштрасса $\Lambda(u, \chi)$ записывается в виде [43]:

$$\Lambda(u, \chi) \sim N(u, \chi) e^{i p_\Lambda(u) x}, \quad p_\Lambda(u) = -i k^{-1} Z(u, k);$$

$$N(u, \chi) = \frac{\sigma(\chi - u) \sigma(\chi - u + 2K)}{\sigma(\chi + iK') \sigma(\chi + iK' + 2K)} \exp \left(2 \eta_3 \chi + \frac{\eta_1 u \chi}{K} \right). \quad (1.10)$$

Здесь $Z(u, k)$ – дзета-функция Якоби, параметры η_1, η_3 характеризуют трансформационные свойства функций Вейерштрасса [41; 42].

Осциллирующие во времени решения уравнения (1.9) имеют вид:

$$\psi(u, \chi) \sim a_0(u) \Lambda(u, \chi) e^{i\omega(u)t} + b_0(u) \Lambda^*(u, \chi) e^{-i\omega^*(u)t}, \quad (1.11)$$

где комплексная частота равна:

$$\omega(u) = k^{-1} \operatorname{cnu} \operatorname{dnu},$$

а спектральные плотности $a_0(u)$ и $b_0(u)$ связаны соотношением:

$$\left(\omega(u) + \frac{k'^2}{2k^2} + \operatorname{cn}^2 u \right) a_0 - \frac{k'^2}{2k^2} b_0^* = 0.$$

Здесь знак «*» означает комплексное сопряжение.

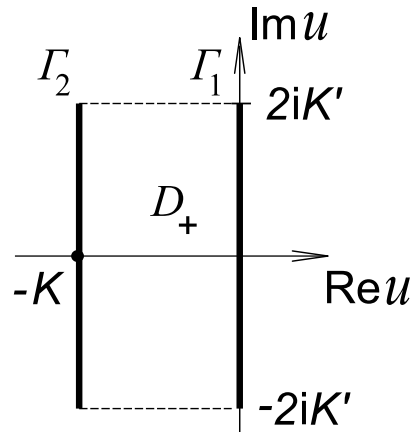


Рисунок 1.2 — Контуры $\Gamma_{1,2}$ и область D_+ в комплексной u -плоскости.

Поскольку в представлении (1.10) функция $N(u, \chi)$ периодична по координате χ : $N(\chi \pm 2K) = -N(\chi)$, пространственная ограниченность функций Ламе при $\chi \rightarrow \pm\infty$ предполагает вещественность квазиимпульса $p_\Lambda(u)$. Это возможно только на интервалах

$$\Gamma_1 = \{u = i\nu, |\nu| \leq 2K'\}, \quad \Gamma_2 = \{u = i\nu - K, |\nu| \leq 2K'\}, \quad \operatorname{mod}(2K, 4iK') \quad (1.12)$$

(рисунок 1.2). Контуры Γ_1 соответствуют линейные колебания доменной структуры с вещественными частотами:

$$\frac{1}{k} \leq \omega_1 = \omega(u = i\nu) = \frac{\operatorname{dn}(\nu, k')}{k \operatorname{cn}^2(\nu, k')} < \infty. \quad (1.13)$$

Это активационная ветвь внутридоменных спин-волновых мод [31; 32]. Приведенный на рисунке 1.3 закон дисперсии $\omega_1 = \omega_1(p_\Lambda)$ в неявном виде определяется соотношениями:

$$\omega_1 = k^{-1} \operatorname{cn}(i\nu, k) \operatorname{dn}(i\nu, k), \quad p_\Lambda(i\nu) = -ik^{-1} Z(i\nu, k).$$

В пределе $k \rightarrow 1$ период полосовой структуры стремится к бесконечности и доменная структура (1.4) превращается в уединенную доменную стенку или в однородное распределение намагниченности. Тогда спин-волновая мода ω_1 дает спектр линейных магнонов однородного основного состояния:

$$\omega_1 = \cos^{-2}\nu, \quad p = \operatorname{tg} \nu; \quad \omega_1 = 1 + p^2.$$

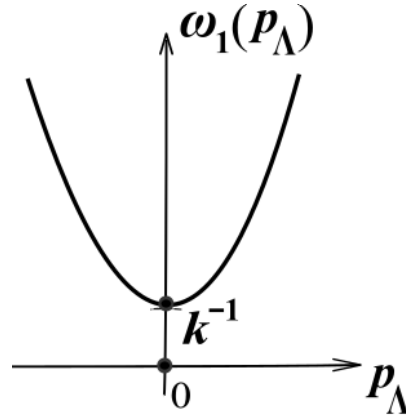


Рисунок 1.3 — Спектр спиновых волн полосовой доменной структуры (1.4).

На контуре Γ_2 частоты второй ветви спектра

$$\omega_2 = \omega(u = i\nu - K) = \frac{ik'^2 \operatorname{sn}(\nu, k') \operatorname{cn}(\nu, k')}{k \operatorname{dn}^2(\nu, k')}. \quad (1.14)$$

оказываются чисто мнимыми всюду, кроме точки $u = -K$. В точке $u = -K$ имеем: $\omega_2 = p_\Lambda = 0$. При $k \rightarrow 1$ точка $\omega_2 = 0, p = 0$ соответствует трансляционной моде доменной стенки. Ее «неустойчивость» связана просто с возможностями сдвига центра доменной стенки, т. к. в модели легкоосного ферромагнетика закон сохранения

$$\int_0^R M_3(x, t) dx = \operatorname{const}$$

(R – размер образца) приводит к запрету на ее движение [11].

Полученные результаты свидетельствуют о неустойчивости доменной структуры (1.4) по линейному приближению. Заметим, однако, что линеаризация не дает полного представления о волновых процессах в доменной

структуре. По мере развития неустойчивости линейное приближение нарушается. Становятся важными эффекты взаимодействия разных мод. Нелинейные взаимодействия могут приводить к локализации возмущений и стабилизации доменной структуры. Данный вывод справедлив и для ряда других интегрируемых систем на фоне основного состояния, модуляционно неустойчивого в линейном приближении [44–46].

Приведем численные оценки инкремента $|\omega_2(\mathbf{v})| = \delta$ затухания линейных мод. Он обращается в нуль при $\mathbf{v} = 0, \pm K'$ и достигает максимального значения $\delta_{\max} = (1 - k)/k^{3/2}$, когда $\mathbf{v} = \pm K'/2$. В образцах с доменной структурой отношение $L_0/l_0 = \pi K(k)/K(k') \gg 1$. Это возможно только, если $k' \ll 1$. При таких k' : $L_0/l_0 \approx 2 \ln(4/k')$. В массивных образцах $L_0/l_0 \sim 10^2$, поэтому инкремент пренебрежимо мал: $\delta_{\max} = O(k'^2)$, $k' \approx 4 \exp(-0.5 \cdot 10^2) \sim 10^{-21}$. В то же время, отношение L_0/l_0 сильно меняется в зависимости от формы и размеров образца. В пленках возможны случаи, когда $L_0/l_0 \approx 1$ [31; 32]. В данной задаче численные расчеты выполнены при условии: $L_0/l_0 \approx 9.5$. При этом значение параметра k близко к единице: $k = 0.9994$ ($K \approx 4.75$, $K' \approx \pi/2$). Тогда доменные стенки структуры интенсивно взаимодействуют между собой. Однако, даже в этом случае $\delta_{\max} = 6 \cdot 10^{-4} \ll 1$.

1.2 Постановка задачи аналитического описания солитонов в полосовой доменной структуре и план ее решения

Нас интересуют точные решения уравнения (1.2), описывающие солитоны на фоне доменной структуры (1.4). Решения модели (1.2) будем искать при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(x, t) \rightarrow \mathbf{S}_2^{(0)} &= (\sin \theta_2 \cos \varphi_0, \sin \theta_2 \sin \varphi_0, \cos \theta_2), & \chi \rightarrow +\infty, \\ \mathbf{S}(x, t) \rightarrow \mathbf{S}_1^{(0)} &= (\sin \theta_1 \cos \varphi_0, \sin \theta_1 \sin \varphi_0, \cos \theta_1), & \chi \rightarrow -\infty, \end{aligned} \quad (1.15)$$

где $\theta_j = \pi/2 - \text{am}(\chi + \Delta_j, k)$; $j = 1, 2$; $\Delta_1 = \Delta$, $\Delta_2 = 0$; $\theta_2 \equiv \theta_0$. Наличие солитонов приводит к макроскопическим сдвигам структуры. В ходе дальнейшего анализа мы свяжем сдвиг структуры Δ с нулями задачи Римана, определяющими строение и скорость солитонов. Величина сдвига $0 < \Delta < 4K$ определена с точностью до периода структуры.

Для построения солитонов на фоне структуры будем использовать модификацию метода обратной задачи рассеяния – процедуру «одевания» частных решений $\mathbf{S}_{1,2}^{(0)}$ уравнения Ландау – Лифшица (1.2) с помощью задачи Римана на торе [47–49]. Впервые одевание с помощью интегральных операторов Шабата было осуществлено в работе [50] при анализе нелинейных возбуждений на пьедестале бегущей кноидальной волны в рамках модели Кортевега – де Вриза. При таком подходе процедура построения требуемых решений оказывается локальной, что отчасти объясняет ее название. Это обстоятельство существенно облегчает аналитическое описание солитонных возбуждений в полосовой доменной структуре. Полученные методом «одевания» окончательные формулы записываются в явном виде и допускают детальный анализ в терминах хорошо изученных и табулированных эллиптических функций.

1.2.1 «Затравочное» решение вспомогательной системы

Для применения метода «одевания» прежде всего нужно переписать задачу в матричном виде. Нам необходимо знать матрицу размерности 2×2 – «затравочное» решение Ψ_0 вспомогательной системы линейных уравнений, условие совместности которых эквивалентно исходному нелинейному уравнению Ландау – Лифшица (1.2). Строго говоря, именно это решение нам предстоит «одевать».

Для уравнения (1.2) вспомогательная система линейных уравнений (так называемая U – V –пара) получена в работе [51]. Она имеет вид:

$$\begin{aligned} \partial_x \Psi &= -\frac{i}{2} [w_1(S_1 \sigma_1 + S_2 \sigma_2) + w_3 S_3 \sigma_3] \Psi \equiv U \Psi, \\ \partial_t \Psi &= -\frac{i}{2} [w_1([\mathbf{S} \times \partial_x \mathbf{S}]_1 \sigma_1 + [\mathbf{S} \times \partial_x \mathbf{S}]_2 \sigma_2) + w_3 [\mathbf{S} \times \partial_x \mathbf{S}]_3 \sigma_3 - \\ &\quad - w_1^2 S_3 \sigma_3 - w_1 w_3 (S_1 \sigma_1 + S_2 \sigma_2)] \Psi \equiv V \Psi, \end{aligned} \quad (1.16)$$

где $w_1 = (\lambda + \lambda^{-1})/2$, $w_3 = (\lambda - \lambda^{-1})/2$ – комплексные параметры, связанные ограничением: $w_1^2 - w_3^2 = 1$, σ_i ($i = 1, 2, 3$) – матрицы Паули:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что условие совместности системы (1.16) равносильно уравнению (1.2).

После подстановки (1.4) в (1.16) и простых интегрирований, находим, что соответствующее доменной структуре «затравочное» решение

$$\Psi_0(\lambda, \chi, t) = \tilde{\Psi}_0(\chi, \lambda, \tau(\lambda)) \exp\left(\frac{i\tau\sigma_3 t}{4}\right) \quad (1.17)$$

линейной системы (1.16) содержит квадратный корень из полинома четвертой степени относительно комплексного спектрального параметра λ :

$$\tau(\lambda) = (\lambda + \lambda^{-1}) \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1 + k'^2}{k^2} + \lambda^2 + \lambda^{-2} \right) \right]^{1/2}.$$

Тем не менее, все компоненты матрицы $\tilde{\Psi}_0(\chi, \lambda, \tau(\lambda))$ оказываются мероморфными функциями (имеют только полюсные особенности) на римановой поверхности $\tau = \tau(\lambda)$. Если с помощью униформизации:

$$\lambda = \exp[i \operatorname{am}(u, k)]; \quad w_1 = \operatorname{cn}(u, k), \quad w_3 = i \operatorname{sn}(u, k), \quad \tau = \frac{2}{k} \operatorname{dn}(u, k) \quad (1.18)$$

перейти к новому спектральному параметру u , то решение (1.17) запишется в терминах мероморфных квазипериодических функций Вейерштрасса [A1–A4]:

$$\begin{aligned} \Psi_0(u, \chi, t) &= \exp\left(-\frac{i\varphi_0}{2}\sigma_3\right) \tilde{M}(u, \chi) \exp(A(u, \chi, t)\sigma_3); \quad \det \Psi_0 = 1; \\ A(u, \chi, t) &= ip(u)\chi + \frac{it}{2k} \operatorname{cn}(u, k) \operatorname{dn}(u, k), \\ p(u) &= \frac{1}{2i} \left(\frac{\operatorname{sn}(u, k) \operatorname{dn}(u, k)}{\operatorname{cn}(u, k)} + \zeta(u + K) + \zeta(u - K) - \frac{\eta_1 u}{K} \right); \\ \tilde{M}(u, \chi) &= M(u, \chi) \operatorname{diag}([\sigma(-u + K + iK')]^{-1}, [\sigma(u + K + iK')]^{-1}); \\ M(u, \chi) &= \begin{pmatrix} \sigma(\chi - u + K + iK') & \sigma(\chi + u - K + iK') e^{\eta_1(\chi + iK' + u)} \\ \sigma(\chi - u - K + iK') e^{\eta_1(\chi + iK' - u)} & \sigma(\chi + u + K + iK') \end{pmatrix} \times \\ &\times m(\chi) \exp\left[\frac{\eta_1 u \chi}{2K}\sigma_3\right]; \quad m(\chi) = \left[\frac{\sigma(iK') \sigma(iK' + 2K)}{2\sigma(\chi + iK') \sigma(\chi + iK' + 2K)} \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Здесь $\sigma(u)$ и $\zeta(u)$ – сигма- и дзета-функции Вейерштрасса с периодами $[4K, 2iK']$; $K' = K(k')$; $k' = \sqrt{1 - k^2}$ – дополнительный модуль эллиптических функций Якоби; трансформационные свойства функций Вейерштрасса определяются вещественным параметром $\eta_1 = \zeta(2K)$ и мнимым параметром $\eta_3 =$

$\zeta(iK')$ [41–43]. Ветвь квадратного корня в определении $m(\chi)$ выбираем так, чтобы выполнялось условие: $m(\chi \pm 4K) = -m(\chi) \exp[\mp 2\eta_1(\chi + iK' + K \pm 2K)]$. Символ «diag» означает диагональную матрицу. Функция $\sigma(u)$ – это целая функция с простыми нулями в вершинах сетки периодов:

$$u = 2Kn + 4iK's,$$

где n, s – целые числа, а $\zeta(u) = d \ln \sigma(u)/du$ является аналитической функцией с простыми полюсами в тех же точках (см. Приложение).

Матрица Ψ_0 (1.17) определена с точностью до произвольного скалярного множителя. При записи решения Ψ_0 в форме (1.19) этот множитель выбран так, чтобы оказалось справедливым соотношение:

$$\det \Psi_0 = 1. \quad (1.20)$$

Доказательство этого и других тождеств в эллиптических функциях осуществляется путем разложения их правых и левых частей либо на «простые множители» по функциям $\sigma(u)$, либо на «простые дроби» по $\zeta(u)$ -функциям Вейерштрасса. В справедливости тождества (1.20) проще всего убедиться первым способом. При этом коэффициент пропорциональности между разложениями левой и правой частей фиксируется условием справедливости равенства при $u = iK'$.

Функция $M(u, \chi)$ периодична по χ с периодом $4K$, а функция $\Psi_0(u, \chi)$ – квазипериодична, – при сдвиге на период она приобретает дополнительный множитель:

$$\Psi_0(u, \chi \pm 4K, t) = \Psi_0(u, \chi, t) \exp[\pm 4K i p(u) \sigma_3].$$

Это означает, что для нее величина $p(u)$ играет роль «блоховского квазиимпульса». Учитывая свойства функции $\zeta(u)$ (см. Приложение), находим:

$$\begin{aligned} p(u \pm 2K) &= p(u), & p(-u) &= -p(u), \\ p^*(u^*) &= -p(u), & p(u \pm 2iK') &= p(u) \pm \pi/(2K). \end{aligned}$$

Выражение для квазиимпульса удобно переписать в терминах более популярной зета-функции Якоби $Z(u)$ [42; 43]:

$$p(u) = \frac{i}{2} Z(u), \quad Z(u) = E(u) - \frac{E u}{K},$$

где $E = E(k)$ и $E(u) = \int_0^u ds \operatorname{dn}^2 s$ – полный и неполный эллиптические интегралы второго рода. Хорошо известные аналитические свойства функции $Z(u)$ [43] приводят к важным неравенствам, справедливым по модулю периодов $[2K, 4iK']$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} p(u) &> 0 && \text{при} && 0 < \operatorname{Re} u < K; \\ \operatorname{Im} p(u) &< 0 && \text{при} && -K < \operatorname{Re} u < 0. \end{aligned}$$

Квазиимпульс $p(u)$ вещественен при значениях u , лежащих на контуре:

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \{u : \operatorname{Im} p(u) = 0\} = \{\operatorname{Re} u = 0, K; \quad |\operatorname{Im} u| \leq 2K'\}, \quad \operatorname{mod}(2K, 4iK').$$

Множеству Γ соответствует непрерывный спектр задачи (1.16). Значения $u \in \Gamma$ параметризуют нелинейные спиновые волны в системе, расплывающиеся со временем из-за эффектов дисперсии.

1.2.2 План решения задачи методом «одевания»

Общая схема процедуры одевания «затравочных» решений $\mathbf{S}_{1,2}^{(0)}$ (1.15) представлена на рисунке 1.4. Она аналогична приведенной в [52] при обсуждении метода обратной задачи рассеяния.

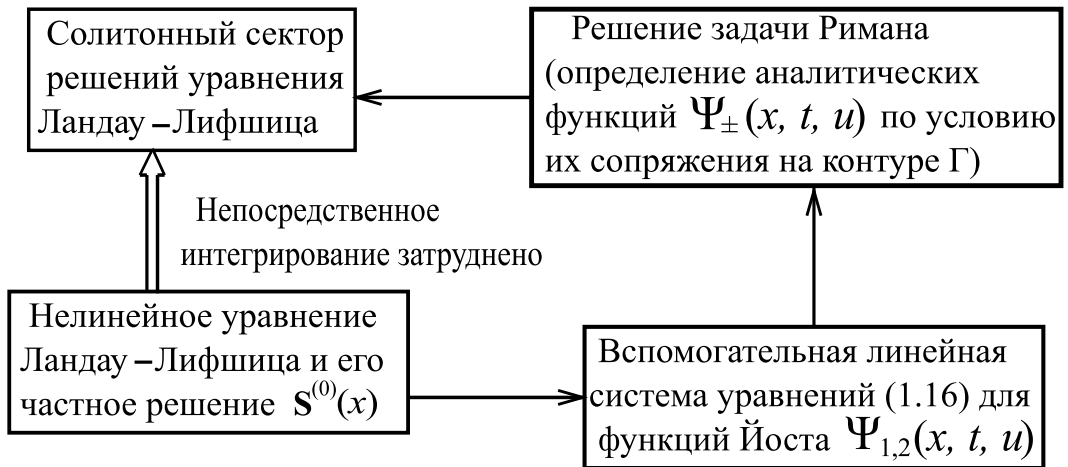


Рисунок 1.4 — Схема решения задачи процедурой «одевания».

Граничным условиям (1.15) соответствуют фундаментальные решения Йоста вспомогательной линейной системы (1.16) с асимптотическими условиями:

$$\begin{aligned}\Psi_1 &\rightarrow \Psi_1^{(0)} = \Psi_\Delta^{(0)} && \text{при } \chi \rightarrow -\infty; \\ \Psi_2 &\rightarrow \Psi_2^{(0)} = \Psi_0 && \text{при } \chi \rightarrow +\infty,\end{aligned}\quad (1.21)$$

где

$$\Psi_\Delta^{(0)}(u, \chi, t) = \exp\left(-\frac{i\varphi_0}{2}\sigma_3\right) \tilde{M}(u, \chi + \Delta) \exp\left(A(u, \chi, t)\sigma_3 - \frac{\eta_1 u \Delta}{2K}\sigma_3\right). \quad (1.22)$$

Решения $\Psi_{1,2}(\chi, t, u)$ вспомогательной линейной системы (1.16) называются функциями Йоста. Функции Йоста $\Psi_{1,2}$ удовлетворяют уравнениям:

$$\begin{aligned}\Psi_1(\chi) &= \Psi_1^{(0)}(\chi) \left(1 + \int_{-\infty}^{\chi} d\chi' \left[\Psi_1^{(0)}(\chi')\right]^{-1} \left(U(\chi') - U_1^{(0)}(\chi')\right) \Psi_1(\chi')\right); \\ \Psi_2(\chi) &= \Psi_2^{(0)}(\chi) \left(1 - \int_{\chi}^{+\infty} d\chi' \left[\Psi_2^{(0)}(\chi')\right]^{-1} \left(U(\chi') - U_2^{(0)}(\chi')\right) \Psi_2(\chi')\right).\end{aligned}\quad (1.23)$$

Здесь $U_{1,2}^{(0)}$ – значения матрицы U (1.16) при $\mathbf{S} = \mathbf{S}_{1,2}^{(0)}$. Последовательные итерации уравнений (1.23) приводят к представлению их решений $\Psi_{1,2}$ в виде рядов по степеням $\Psi_{1,2}^{(0)}$. Ряды сходятся, когда решения модели Ландау – Лифшица достаточно быстро (быстрее любой степени x) стремятся к асимптотическим значениям (1.21). Аналитические свойства столбцов матриц $\Psi_{1,2}(u)$ определяются расстановкой пределов интегрирования по $\chi = x/k$ в рядах для $\Psi_{1,2}(u)$, а также знаком величины $\text{Im}p(u)$.

В дальнейшем анализе мы следуем работам [A7; A8] и придерживаемся тех же обозначений. На контуре Γ функции Йоста $\Psi_{1,2}$ определены одновременно, и потому связаны между собой:

$$\Psi_1(u) = \Psi_2(u)T(u), \quad u \in \Gamma. \quad (1.24)$$

Отсюда получаем представление:

$$T(u, t) = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} (\Psi_2(u, \chi, t))^{-1} \Psi_1(u, \chi, t). \quad (1.25)$$

Матрица $T(u)$ зависит только от спектрального параметра u и называется матрицей перехода.

Свойства симметрии вспомогательной линейной системы (1.16) и асимптотических условий (1.21) приводят к ограничениям на функции Йоста Ψ_j ($j = 1, 2$):

$$\begin{aligned}\Psi_j(u \pm 2iK') &= \sigma_3 \Psi_j(u) \sigma_3 \exp[\mp 2\Delta_j \eta_3 \sigma_3]; & \Psi_j^*(-u^*) &= \sigma_2 \Psi_j(u) \sigma_2; \\ \Psi_j^*[(u \pm 2K)^*] &= -i \sigma_1 \Psi_j(u) Q(u) \exp[\mp \Delta_j \eta_1 \sigma_3];\end{aligned}\quad (1.26)$$

где $\Delta_1 = \Delta$, $\Delta_2 = 0$, $Q(u) = \text{diag}(q(u), q^{-1}(u))$ (см. (1.28)), и конкретизируют вид $T(u)$:

$$\begin{aligned}T(u) &= \begin{pmatrix} a(u) & -\bar{b}(u) \\ b(u) & \bar{a}(u) \end{pmatrix}, & \bar{a}(u) &= a^*(-u^*), & \bar{b}(u) &= b^*(-u^*), & (1.27) \\ a(u) \bar{a}(u) + b(u) \bar{b}(u) &= 1; \\ \bar{a}(u \pm 2iK') &= \bar{a}(u) e^{\pm 2\eta_3 \Delta}, & a(u \pm 2iK') &= a(u) e^{\mp 2\eta_3 \Delta}, \\ \bar{b}(u \pm 2iK') &= -\bar{b}(u) e^{\pm 2\eta_3 \Delta}, & b(u \pm 2iK') &= -b(u) e^{\mp 2\eta_3 \Delta}, \\ a^*[(u \pm 2K)^*] &= a(u) e^{\mp \eta_1 \Delta}, & b^*[(u \pm 2K)^*] &= b(u) e^{\mp \eta_1 \Delta} q^2(u), \\ \bar{a}^*[(u \pm 2K)^*] &= \bar{a}(u) e^{\pm \eta_1 \Delta}, & \bar{b}^*[(u \pm 2K)^*] &= \bar{b}(u) e^{\pm \eta_1 \Delta} q^{-2}(u).\end{aligned}$$

Компонента $a(u)$ матрицы перехода называется «коэффициентом прохождения», а компонента $b(u)$ – «коэффициентом отражения» задачи рассеяния. Из (1.26) следует, что коэффициенты матрицы перехода $T(u)$ и решения Йоста $\Psi_{1,2}$ приобретают дополнительные множители при сдвигах по спектральному параметру u . Входящий в (1.26), (1.27) множитель $q(u)$ может быть записан двояко – в терминах сигма-функций Вейерштрасса с периодами $[4K, 2iK']$, либо через эллиптические функции Якоби:

$$q(u) = \frac{1}{i} \frac{\sigma(u - K + iK')}{\sigma(u + K + iK')} e^{\eta_1(u + iK')} = \frac{\text{dn}(u, k)}{1 + k \text{sn}(u, k)} = \frac{1 - k \text{sn}(u, k)}{\text{dn}(u, k)}. \quad (1.28)$$

Связь различных форм записи (1.28) устанавливается в [41; 43].

Наша цель состоит в том, чтобы решить задачу Римана, т. е. найти две функции $\Psi_+(\chi, t, u)$ и $\Psi_-(\chi, t, u)$, аналитические, соответственно, в областях

$$\begin{aligned}D_+ &= \{u : \text{Im}p(u) > 0\} = \{-K < \text{Re}u < 0, \quad |\text{Im}u| \leq 2K'\}, \text{ mod}(2K, 4iK'), \\ D_- &= \{u : \text{Im}p(u) < 0\} = \{0 < \text{Re}u < K, \quad |\text{Im}u| \leq 2K'\}, \text{ mod}(2K, 4iK')\end{aligned}$$

(см. рисунок 1.5), которые на контуре $\Gamma = \{u : \text{Im}p(u) = 0\}$, связывающем эти области, удовлетворяют условию сопряжения (см. (1.36)).

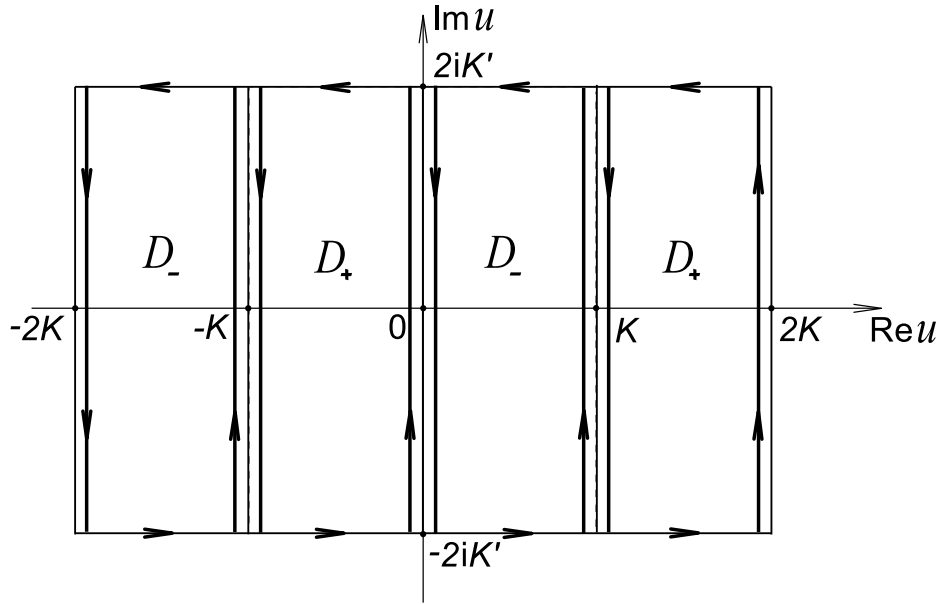


Рисунок 1.5 — Области D_{\pm} в фундаментальном прямоугольнике со сторонами $[4K, 4iK']$.

Матричные функции $\Psi_{\pm}(\chi, t, u)$ получаются комбинированием разных столбцов функций Йоста $\Psi_{1,2}(\chi, t, u)$. Для работы с ними необходимо сформулировать редукции – правила, в соответствии с которыми преобразуются точки римановой поверхности при операциях, связанных с комплексным сопряжением, и преобразованиях, сохраняющих неизменной форму записи вспомогательной линейной системы (1.16).

В данной задаче функции $\Psi_{\pm}(u)$ имеют вид:

$$\Psi_{-}(u) = \left(\Psi_{1}^{(1)}(u), \Psi_{2}^{(2)}(u) \right), \quad \Psi_{+}(u) = \left(\Psi_{2}^{(1)}(u), \Psi_{1}^{(2)}(u) \right),$$

где введено обозначение $\Psi^{(i)}$ для i -ого столбца матрицы Ψ ($i = 1, 2$). В данном случае мы имеем задачу Римана на торе, т. к. функции $\Psi_{\pm}(u)$ являются квазипериодическими с периодами $[4K, 4iK']$.

Из (1.24), (1.26) следует, что в областях своей аналитичности функции $\Psi_{\pm}(u)$ удовлетворяют редукциям:

$$\begin{aligned} \Psi_{+}(u \pm 2iK') &= \sigma_3 \Psi_{+}(u) \sigma_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\pm 2\eta_3 \Delta} \end{pmatrix}, \\ \Psi_{-}(u \pm 2iK') &= \sigma_3 \Psi_{-}(u) \sigma_3 \begin{pmatrix} e^{\mp 2\eta_3 \Delta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \\ \Psi_{+}^*[(u \pm 2K)^*] &= -i \sigma_1 \Psi_{+}(u) Q(u) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\pm \eta_1 \Delta} \end{pmatrix}, \\ \Psi_{-}^*[(u \pm 2K)^*] &= -i \sigma_1 \Psi_{-}(u) Q(u) \begin{pmatrix} e^{\mp \eta_1 \Delta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (1.29)$$

а на контуре Γ могут быть выражены друг через друга:

$$\Psi_+(u) = \sigma_2 \Psi_-^*(-u^*) \sigma_2, \quad u \in \Gamma. \quad (1.30)$$

Условие (1.30) является иной формой записи связи (1.24). Используя соотношение (1.30), получаем цепочку связей между решениями $\Psi_{1,2}$, Ψ_{\pm} на контуре Γ :

$$\begin{aligned} \Psi_+ &= \Psi_1 \begin{pmatrix} \bar{a} & 0 \\ -b & 1 \end{pmatrix} = \Psi_2 \begin{pmatrix} 1 & -\bar{b} \\ 0 & \bar{a} \end{pmatrix}, \\ \Psi_- &= \Psi_1 \begin{pmatrix} 1 & \bar{b} \\ 0 & a \end{pmatrix} = \Psi_2 \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Отсюда находим асимптотические условия для функций $\Psi_{\pm}(u)$:

$$\begin{aligned} \Psi_+ &\rightarrow \Psi_2^{(0)} \begin{pmatrix} 1 & -\bar{b} \\ 0 & \bar{a} \end{pmatrix} && \text{при } \chi \rightarrow +\infty; \\ \Psi_- &\rightarrow \Psi_2^{(0)} \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} && \text{при } \chi \rightarrow +\infty; \\ \Psi_+ &\rightarrow \Psi_1^{(0)} \begin{pmatrix} \bar{a} & 0 \\ -b & 1 \end{pmatrix} && \text{при } \chi \rightarrow -\infty; \\ \Psi_- &\rightarrow \Psi_1^{(0)} \begin{pmatrix} 1 & \bar{b} \\ 0 & a \end{pmatrix} && \text{при } \chi \rightarrow -\infty. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Из формул (1.31) также следуют равенства:

$$a(u) = \det \Psi_-(u), \quad \bar{a}(u) = \det \Psi_+(u), \quad (1.33)$$

которые показывают, что элементы $a(u)$ и $\bar{a}(u)$ матрицы перехода аналитически продолжаются с контура Γ в области D_- и D_+ соответственно.

Если функции $a(u)$ и $\bar{a}(u)$ имеют нули в областях своей аналитичности, то их множество соответствует дискретному спектру задачи (1.16), (1.21). Далее для определенности считаем все нули простыми. Тогда, в силу редукций (1.29), нули функции $\bar{a}(u)$ в областях D_+ должны иметь вид:

$$u = \mu_s, \quad \mu_s^* - 2K, \quad s = 1, 2, \dots, N, \quad \text{mod}(4K, 2iK'). \quad (1.34)$$

Нули коэффициента $a(u)$ редукциями (1.27) связаны с нулями (1.34):

$$u = -\mu_s^*, \quad -\mu_s + 2K, \quad s = 1, 2, \dots, N, \quad \text{mod}(4K, 2iK'). \quad (1.35)$$

Связь решений Йоста на контуре Γ (1.24) эквивалентна условию сопряжения аналитических функций $\Psi_{\pm}(u)$ на том же контуре:

$$\Psi_{-}(u) = \frac{\Psi_{+}(u)}{\bar{a}(u)} \begin{pmatrix} 1 & \bar{b}(u) \\ b(u) & 1 \end{pmatrix}, \quad u \in \Gamma. \quad (1.36)$$

В общем случае существуют два типа коллективных возбуждений на фоне доменной структуры. Первый из них соответствует регулярной задаче Римана, когда $b(u), \bar{b}(u) \neq 0$, а функции $a(u)$ и $\bar{a}(u)$ не имеют нулей в областях своей аналитичности. Решение регулярной задачи Римана описывает нелинейные диспергирующие волны в полосовой доменной структуре. Особый интерес представляет второй класс возбуждений – солитоны, которые подобно частицам движутся через доменную структуру, восстанавливая свою форму и скорость после взаимодействия друг с другом, с диспергирующими волновыми пакетами или доменными стенками структуры. Солитонам отвечают решения задачи Римана (1.36) с нулями коэффициентов $a(u)$ и $\bar{a}(u)$, когда $b(u) = \bar{b}(u) \equiv 0$. В этом случае свойство унимодулярности матрицы перехода (см. (1.27)) сводится к равенству:

$$a(u)\bar{a}(u) = 1. \quad (1.37)$$

Принимая во внимание, что для любой невырожденной 2×2 матрицы справедливо тождество:

$$A^{-1} = \frac{\sigma_2 A^T \sigma_2}{\det A},$$

где «Т» означает транспонирование, из (1.30), (1.33) получаем соотношение:

$$\Psi_{-}^{-1}(u) = \Psi_{+}^{\dagger}(-u^*)/a(u), \quad (1.38)$$

где символ «†» означает эрмитово сопряжение. С учетом (1.38), (1.37), условие сопряжения солитонных матриц $\Psi_{-}(u)$ и $\Psi_{+}(u)$ на контуре Γ выражается в терминах одной из них:

$$\Psi_{+}^{\dagger}(-u^*)\Psi_{+}(u) = \Psi_{+}(u)\Psi_{+}^{\dagger}(-u^*) = I, \quad u \in \Gamma. \quad (1.39)$$

Для солитонных возбуждений функции $\Psi_{+}(u)$ и $\bar{a}(u)$ мероморфны в фундаментальном прямоугольнике со сторонами $4K$, $4iK'$. В областях D_{+} они

вырождены в точках (1.34), а в областях D_- имеют полюсы, совпадающие с нулями (1.35) коэффициента $a(u) = \det \Psi_+^\dagger(-u^*)$.

Квазипериодическая мероморфная функция $\bar{a}(u)$ восстанавливается по своим нулям, полюсам и редукциям [11; 43]. Для N -солитонного состояния она имеет вид:

$$\bar{a}_{\text{sol}}(u) = \prod_{s=1}^N \frac{\sigma(u - \mu_s)\sigma(u - \mu_s^* + 2K)}{\sigma(u + \mu_s^*)\sigma(u + \mu_s + 2K)} e^{\eta_1(\mu_s + \mu_s^*)}. \quad (1.40)$$

Здесь $\mu_s \in D_+$, периоды сигма-функций Вейерштрасса $-[4K, 2iK']$. Представление (1.40) приводит к верным трансформационным свойствам (1.27) функции $\bar{a}(u)$ только при условии, что положения ее нулей связаны со сдвигом Δ доменной структуры:

$$\sum_{s=1}^N (\mu_s + \mu_s^*) = -\Delta/2, \quad \text{mod}(4K). \quad (1.41)$$

Далее, для определенности, полагаем $-K < \text{Re}\mu_s < 0$, $|\text{Im}\mu_s| < K'$.

1.3 Решение задачи Римана при наличии солитонов в доменной структуре

1.3.1 Односолитонное решение задачи Римана

Перейдем к построению матричной функции $\Psi_+(\chi, t, u)$ для односолитонного возбуждения в полосовой доменной структуре. Представим $\Psi_+(\chi, t, u)$ в виде:

$$\Psi_+(\chi, t, u) = \Psi(\chi, t, u)\Psi_{\Delta/2}^{(0)}(\chi, t, u), \quad (1.42)$$

где $\Psi_{\Delta/2}^{(0)}(\chi, t, u)$ определена в (1.22); $\det \Psi_{\Delta/2}^{(0)} = 1$.

Для односолитонного состояния ($N = 1$) матричная функция $\Psi(u)$ будет иметь нули (1.34) и полюсы (1.35) (индекс $s = 1$ далее опускаем). Из (1.29),

(1.39) следуют редукции:

$$\begin{aligned}\Psi(u \pm 2iK') &= \sigma_3 \Psi(u) \sigma_3 \exp[\pm \Delta \eta_3]; \\ \Psi^*[(u \pm 2K)^*] &= \sigma_1 \Psi(u) \sigma_1 \exp[\pm \Delta \eta_1/2]; \\ \Psi^*(-u^*) &= \sigma_2 \Psi(u) \sigma_2 \bar{a}^{-1}(u), \quad u \in \Gamma.\end{aligned}\tag{1.43}$$

Последняя из формул (1.43) приводит к условию:

$$\Psi(-u) \Psi^\dagger(u^*) = I, \quad u \in \Gamma.\tag{1.44}$$

Из-за наличия в (1.43) множителей $\exp[\pm \Delta \eta_3]$, $\exp[\pm \Delta \eta_1/2]$ матрица $\Psi(u)$ не является двоякопериодической, что затрудняет ее построение. Обойдем эту трудность. Для этого сначала построим мероморфную функцию $f^\dagger(u^*)$ с периодами $[4K, 4iK']$, удовлетворяющую ограничениям:

$$f(u \pm 2iK') = \sigma_3 f(u) \sigma_3, \quad f(-u \pm 2K) = \sigma_3 f(u) \sigma_3, \quad f(-u) f^\dagger(u^*) = I,\tag{1.45}$$

в которых лишние множители отсутствуют. Второе соотношение (1.45) служит аналогом двух последних редукций (1.43).

Задача построения функции $f^\dagger(u^*)$ близка к рассмотренной в работах [53—55] для пульсирующего солитона – бризера – на фоне нелинейной волны на магнитичности. Согласно (1.45), односолитонная функция $f^\dagger(u^*)$ будет иметь в параллелограмме периодов четыре нуля:

$$u = \mu^*, \quad \mu^* - 2iK', \quad -\mu^* + 2K, \quad -\mu^* - 2K + 2iK',\tag{1.46}$$

и четыре полюса $u = \mu_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$):

$$\mu_1 = -\mu, \quad \mu_2 = -\mu + 2iK', \quad \mu_3 = \mu + 2K, \quad \mu_4 = \mu - 2K - 2iK'.\tag{1.47}$$

По модулю периодов $[4K, 4iK']$ сумма нулей (1.46) соизмерима с суммой полюсов (1.47). Будем искать $f^\dagger(u^*)$ в виде разложения по квазипериодическим дзета-функциям Вейерштрасса с периодами $[4K, 4iK']$:

$$f^\dagger(u^*) = A_0 + A \zeta_1 + B \zeta_2 + C \zeta_3 + D \zeta_4, \quad \zeta_i \equiv \zeta(u - \mu_i).\tag{1.48}$$

Здесь A_0, A, B, C, D – независимые от u матричные коэффициенты; дзета-функции обладают свойствами [43]:

$$\begin{aligned}\zeta(u \pm 4iK') &= \zeta(u) \pm 2\eta_3, & \zeta(u \pm 4K) &= \zeta(u) \pm 2\eta_1, & \zeta(-u) &= -\zeta(u); \\ \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 &= 0, & \eta_2 &= -\zeta(2K + 2iK'), & \eta_1 &= \zeta(2K), & \eta_3 &= \zeta(2iK').\end{aligned}$$

Подставляя (1.48) в первые два соотношения (1.45), находим:

$$f^\dagger(u^*) = \left[I + \begin{pmatrix} \tilde{B}_{11}\varphi(u) & \tilde{B}_{12}\gamma(u) \\ \tilde{B}_{21}\gamma(u) & \tilde{B}_{22}\varphi(u) \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix},$$

$$\varphi(u) = \zeta_1 + \zeta_2 - \zeta_3 - \zeta_4, \quad \gamma(u) = \zeta_1 + \zeta_3 - \zeta_2 - \zeta_4 + 2\eta_1, \quad (1.49)$$

где \tilde{B}_{ij} ($i, j = 1, 2$) и r_1, r_2 – неизвестные скалярные функции. Сумма вычетов функции $f^\dagger(u^*)$ (1.49) в полюсах, лежащих в параллелограмме периодов $[4K, 4iK']$, оказывается равной нулю, что гарантирует ее двоякопериодичность [43].

Выразим $\varphi(u)$ и $\gamma(u)$ через более популярные и табулированные эллиптические функции Якоби $\operatorname{sn}u, \operatorname{cn}u, \operatorname{dn}u$ [41–43]:

$$\gamma(u) = \frac{\operatorname{cn}u \operatorname{dn}u}{\operatorname{sn}u + \operatorname{sn}\mu}, \quad \varphi(u) - \varphi(\mu^*) = -\frac{\operatorname{cn}\mu \operatorname{dn}\mu}{(\operatorname{sn}\mu + \operatorname{sn}\mu^*)} \left(\frac{\operatorname{sn}u - \operatorname{sn}\mu^*}{\operatorname{sn}u + \operatorname{sn}\mu} \right). \quad (1.50)$$

Здесь и далее все функции Якоби имеют модуль k .

Соотношения (1.50) и им подобные проще всего проверить разложением их левых и правых частей на «множители» или «простые дроби» по функциям Вейерштрасса с периодами $[4K, 2iK']$. Постоянные в разложениях фиксируются значениями функций в какой-либо точке [43].

Требование отсутствия полюсов в произведении $f(-u)f^\dagger(u^*) = I$ эквивалентно одному независимому матричному уравнению $\tilde{B}^\dagger f^\dagger(u^*)|_{u=\mu^*} = 0$. Оно имеет нетривиальное решение, только когда матрица \tilde{B} вырождена: $\tilde{B}_{ij} = m_i X_j$ ($i, j = 1, 2$) [11; 18]. Отсюда получаем:

$$X_1 = -\frac{m_1^*}{|m_1|^2\varphi(\mu^*) + |m_2|^2\gamma(\mu^*)}, \quad X_2 = -\frac{m_2^*}{|m_2|^2\varphi(\mu^*) + |m_1|^2\gamma(\mu^*)}, \quad (1.51)$$

где $m_{1,2}$ – пока неизвестные функции от x, t . Знаменатели в (1.51) можно устранить переопределением элементов $r_{1,2}$. Тогда $f^\dagger(u^*)$ примет вид:

$$f^\dagger(u^*) = \begin{pmatrix} |m_2|^2 - |m_1|^2\beta(u) & -m_1 m_2^* \alpha(u) \\ -m_2 m_1^* \alpha(u) & |m_1|^2 - |m_2|^2\beta(u) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix}. \quad (1.52)$$

Входящие в (1.52) коэффициенты

$$\alpha(u) \equiv \frac{\gamma(u)}{\gamma(\mu^*)} = \frac{\operatorname{cn}u}{\operatorname{cn}\mu^*} \left(\frac{\operatorname{sn}\mu + \operatorname{sn}\mu^*}{\operatorname{sn}u + \operatorname{sn}\mu} \right),$$

$$\beta(u) \equiv \frac{\varphi(u) - \varphi(\mu^*)}{\gamma(\mu^*)} = -\frac{\operatorname{cn}\mu}{\operatorname{cn}\mu^*} \left(\frac{\operatorname{sn}u - \operatorname{sn}\mu^*}{\operatorname{sn}u + \operatorname{sn}\mu} \right)$$

разлагаются по сигма-функциям Вейерштрасса с периодами $[4K, 2iK']$:

$$\begin{aligned}\beta^*(u^*) &= -\frac{g_1(u) \kappa(\mu)}{g_2(u) \kappa^*(\mu)}, & \alpha^*(u^*) &= \frac{g_3(u)}{g_2(u)} \kappa(\mu); \\ g_1(u) &= \frac{\sigma(u - \mu)}{\sigma(u + \mu^*)}, & g_2(u) &= \frac{\sigma(u - \mu^* + 2K)}{\sigma(u + \mu + 2K)} e^{\eta_1(\mu + \mu^*)}, \\ g_3(u) &= \frac{\sigma(u + K) \sigma(u - K)}{\sigma(u + \mu^*) \sigma(u + \mu + 2K)} \exp \left[\eta_1 \left(u + \frac{\mu - \mu^*}{2} \right) \right], \\ \kappa(\mu) &= \frac{\sigma(\mu + \mu^*) \sigma(\mu - \mu^* + 2K)}{\sigma(\mu + K) \sigma(\mu - K)} \exp \left[\frac{\eta_1}{2} (3\mu^* - \mu) \right],\end{aligned}\tag{1.53}$$

и удовлетворяют соотношениям:

$$\begin{aligned}\alpha(u) &= \beta(u) \alpha^*(-u^*), & \beta(u) \beta^*(-u^*) &= 1; \\ \alpha(u) \alpha^*(-u^*) - \beta(u) - \beta^*(-u^*) &= 2(1 + |\operatorname{sn} \mu|^2) |\operatorname{cn} \mu|^{-2}.\end{aligned}\tag{1.54}$$

С их помощью, из условия $f(-u)f^\dagger(u^*) = I$ находим модули элементов $r_{1,2}$:

$$|r_1|^{-2} = |r_2|^{-2} \equiv |r|^{-2} = |m_1|^4 + |m_2|^4 + 2|m_1 m_2|^2 (1 + |\operatorname{sn} \mu|^2) |\operatorname{cn} \mu|^{-2}.\tag{1.55}$$

Используя (1.52)–(1.55), нетрудно заметить, что произведение $f(u)g_2(u)$ имеет полюсы (1.35), которые должны быть у решения $\Psi(u)$ исходной задачи Римана (1.43), (1.44). Покажем, что решение задачи Римана (1.43), (1.44) имеет вид:

$$\Psi(u) = f(u) g_2(u).\tag{1.56}$$

Прежде всего, заметим, что функции $g_i(u)$ (1.53) ($i = 1, 2, 3$) удовлетворяют соотношениям

$$g_{1,2}^*(-u^*) = \frac{1}{g_{1,2}(u)}, \quad g_3^*(-u^*) = -\frac{g_3(u)}{g_1(u)g_2(u)},$$

обеспечивающим переход (1.43), (1.44) от функции $\Psi(u)$ (1.56) к функции $\Psi^{-1}(u) = \Psi^\dagger(-u^*)$. Кроме того, с точностью до экспоненциальных множителей $g_i(u)$ задают представление группы редукций (1.43):

$$\begin{aligned}g_{1,2}^*[(u \pm 2K)^*] &= g_{2,1}(u) e^{\mp \eta_1(\mu + \mu^*)}, & g_3^*[(u \pm 2K)^*] &= g_3(u) e^{\mp \eta_1(\mu + \mu^*)}; \\ g_{1,2}(u \pm 2iK') &= g_{1,2}(u) e^{\mp 2\eta_3(\mu + \mu^*)}, & g_3(u \pm 2iK') &= -g_3(u) e^{\mp 2\eta_3(\mu + \mu^*)},\end{aligned}$$

причем, согласно (1.41): $\mu + \mu^* = -\Delta/2$. Отсюда следует, что функция (1.56) действительно удовлетворяет первым двум редукциям (1.43) при выполнении условия

$$\operatorname{diag}(r_1, r_2) = |r| e^{-i\nu\sigma_3},\tag{1.57}$$

где $|r|$ определен равенством (1.55), ν – пока неизвестная вещественная фаза. Наконец, с учетом (1.57) проверяем, что определитель $\Psi(u)$, как и положено (см. (1.33), (1.42), (1.40)), равен: $\det \Psi(u) = \bar{a}(u) = g_1(u)g_2(u)$. Так мы убеждаемся в согласованности вычислений.

В подробной записи односолитонная матрица $\Psi(\chi, t, u)$ (1.56) имеет вид:

$$\Psi(\chi, t, u | \boldsymbol{\mu}, \mathbf{m}) = e^{i\nu\sigma_3} \left| \frac{r}{\kappa} \right| \times \\ \times \begin{pmatrix} |m_2|^2 g_2(u) \kappa^* + |m_1|^2 g_1(u) \kappa & -|\kappa|^2 g_3(u) m_1 m_2^* \\ -|\kappa|^2 g_3(u) m_2 m_1^* & |m_1|^2 \kappa^* g_2(u) + |m_2|^2 g_1(u) \kappa \end{pmatrix} \quad (1.58)$$

Комплексные параметры $\boldsymbol{\mu}$ ($-K < \operatorname{Re} \boldsymbol{\mu} < 0$, $|\operatorname{Im} \boldsymbol{\mu}| < 2K'$) и зависящие от x , t векторы \mathbf{m} с компонентами $m_{1,2}$ конкретизируют Ψ , поэтому в левой части (1.58) они указаны после вертикальной черты. Выражение (1.58) схоже с решением задачи Римана [A7–A9] для бризера в спиральной магнитной структуре.

Отметим, однако, что хотя используемая нами схема «одевания» и может быть описана как алгоритм, однако с ее помощью решение (1.58) нельзя получить бездумно, действуя автоматически. Зависимость матрицы $\Psi(\chi, t, u)$ от функций $g_i(u)$ ($i = 1, 2, 3$) и сами функции $g_i(u)$ практически пришлось угадывать.

Перейдем к определению функций $m_{1,2}(x, t)$. Используя представление (1.42), из линейной системы (1.16) выразим матрицы $U(u)$ и $V(u)$ через $\Psi(u)$. Поскольку $\Psi^{-1}(u) = \Psi^\dagger(-u^*)$, имеем:

$$U(u) = -\Psi(u)[\partial_x - U_{\Delta/2}(u)]\Psi^\dagger(-u^*), \quad V(u) = -\Psi(u)[\partial_t - V_{\Delta/2}(u)]\Psi^\dagger(-u^*), \quad (1.59)$$

где операторы $U_{\Delta/2}$ и $V_{\Delta/2}$ получаются из U, V формальной заменой: $\Phi \rightarrow \boldsymbol{\varphi}_0 = \text{const}$, $\theta \rightarrow \theta_{\Delta/2}^{(0)} = \pi/2 - \operatorname{am}(\chi + \Delta/2, k)$. Левая часть (1.59) содержит лишние полюсы, происходящие от солитонных матриц $\Psi(u)$ и $\Psi^\dagger(-u^*)$. Требование обращения в нуль вычетов в этих полюсах дает зависимость от x, t вектора \mathbf{m} с компонентами $m_{1,2}$ в виде [11; 18]:

$$\mathbf{m} = \Psi_{\Delta/2}^{(0)}(\chi, t, \boldsymbol{\mu}) \mathbf{c} = \\ = \exp\left(-\frac{i\boldsymbol{\varphi}_0}{2} \sigma_3\right) \tilde{M}\left(\boldsymbol{\mu}, \chi + \frac{\Delta}{2}\right) \exp\left[A(\boldsymbol{\mu}, \chi, t) \sigma_3 - \frac{\eta_1 \boldsymbol{\mu} \Delta}{4K} \sigma_3\right] \mathbf{c}, \quad (1.60)$$

где \mathbf{c} – произвольный постоянный комплексный вектор.

Покажем, что фаза ν в (1.58) фиксируется требованием совпадения асимптотик решения $\Psi_+(u)$ (1.42) с формулами (1.32). Поскольку параметр ν не зависит от u , для упрощения расчетов положим $u = K$, тогда $g_3(u = K) = 0$, $A(u = K, \chi, t) = 0$. Учтем асимптотические выражения:

$$\begin{aligned} e^{i\varphi_0} m_1/m_2 &\rightarrow iq(\chi - \mu^*) && \text{при } \chi \rightarrow +\infty; \\ e^{i\varphi_0} m_1/m_2 &\rightarrow iq^{-1}(\tilde{\chi} - \mu) && \text{при } \chi \rightarrow -\infty, \end{aligned} \quad (1.61)$$

где $q(u)$ определено в (1.28), $\tilde{\chi} = \chi + \Delta/2$, $\Delta/2 = -\mu - \mu^*$, и формулу:

$$\frac{\sigma(\chi + iK' + 2K)}{\sigma(\chi + iK')} e^{-n_1\chi} = -\frac{i}{k'} e^{n_1(K+iK')} [\operatorname{dn}\chi + k \operatorname{cn}\chi].$$

Тогда проверка условий (1.32) сводится к использованию тождества в эллиптических функциях:

$$\frac{|q(\chi - \mu)|^2 + n}{1 + |q(\chi - \mu)|^2 n} = \frac{\operatorname{dn}\chi + k \operatorname{cn}\chi}{\operatorname{dn}\tilde{\chi} + k \operatorname{cn}\tilde{\chi}}, \quad n \equiv \left| \frac{1 - \operatorname{sn}\mu}{1 + \operatorname{sn}\mu} \right|. \quad (1.62)$$

С его помощью легко показать, что краевые условия (1.32) будут выполнены только при $\nu = 0$.

Для доказательства (1.62) полезно переписать $|q|^2$ в виде произведения qq^* и выполнить аналитическое продолжение функций по переменной χ с вещественной оси в комплексную плоскость. После этого достаточно убедиться в эквивалентности разложений по нулям и полюсам двойкопериодических мероморфных по χ функций в левых и правых частях полученного равенства. В качестве точки нормировки равенства (1.62) удобно выбрать $\chi = -K - iK'$.

По найденному решению $\Psi_+(u)$ (1.42) линейной системы (1.16) восстанавливаем точное решение исходной существенно нелинейной модели. Приравнивая вычеты в точке $u = -iK'$ от левой и правой частей первого из «одевающих» соотношений (1.59), получаем явное решение модели Ландау – Лифшица (1.2), описывающее солитонное возбуждение в полосовой доменной структуре:

$$S_k \sigma_k = \Psi(u) (S_{\Delta/2}^{(0)})_k \sigma_k \Psi^\dagger(-u^*)|_{u=-iK'}, \quad (1.63)$$

где $S_{\Delta/2}^{(0)} = (\sin \theta_{\Delta/2}^{(0)} \cos \varphi_0, \sin \theta_{\Delta/2}^{(0)} \sin \varphi_0, \cos \theta_{\Delta/2}^{(0)})$, $\theta_{\Delta/2}^{(0)} = \pi/2 - \operatorname{am}(\chi + \Delta/2, k)$.

Отметим, что по построению решение Ψ_+ (1.42) системы (1.16) удовлетворяет условиям (1.32). Потому предложенная процедура дает солитонное решение (1.63) с требуемыми краевыми условиями на бесконечности (1.15).

1.3.2 Асимптотические разложения

Для дальнейшего анализа нам потребуется информация об асимптотическом поведении функций $\Psi_{1,2}(u)$ и $\bar{a}(u)$ вблизи особых точек $u = iK'$, $\text{mod}(2K, 2iK')$ вспомогательной линейной системы (1.16), в которых обращаются в бесконечность сразу все три эллиптические функции Якоби $\text{sn}u$, $\text{cn}u$, $\text{dn}u$.

Асимптотические разложения «затравочных» решений $\Psi_{1,2}^{(0)}(u)$ при $u = iK' + \varepsilon$ ($|\varepsilon| \ll 1$) нетрудно получить из (1.19), (1.22). При вычислениях используем тождества:

$$\begin{aligned} \zeta(u) &= \frac{1}{2} [E(u) - u] + \frac{1 + \text{cn}u \text{dn}u}{2 \text{sn}u} + \frac{u}{12} (1 + k^2); \\ \eta_1 &= \zeta(2K) = E - K + \frac{K}{6} (1 + k^2) = 2 \zeta(K) - 1; \\ \zeta(u + K) + \zeta(u - K) - \frac{\eta_1 u}{K} &= Z(u) - \frac{\text{sn}u \text{dn}u}{\text{cn}u}; \\ Z(u + K) &= Z(u) - k^2 \frac{\text{sn}u \text{cn}u}{\text{dn}u}; \\ \tilde{M}(u = iK', \chi + \Delta_j) &= \exp \left[\frac{i \theta_j \sigma_2}{2} + \frac{\pi i}{4K} (\chi + \Delta_j) \sigma_3 \right], \\ \theta_j &\equiv \pi/2 - \text{am}(\chi + \Delta_j, k), \quad \Delta_1 = \Delta, \quad \Delta_2 = 0; \\ \zeta(\chi + \Delta_j - K) - \zeta(\chi + \Delta_j + K) + \eta_1 &= -\frac{\text{dn}(\chi + \Delta_j)}{\text{cn}(\chi + \Delta_j)} = \frac{\partial_\chi \theta_j}{\sin \theta_j}; \quad j = 1, 2. \end{aligned} \tag{1.64}$$

Матрица $\tilde{M}(u, \chi)$ определена в (1.19); $E(u)$ и E – соответственно, неполный и полный эллиптические интегралы второго рода.

В результате находим:

$$\begin{aligned} \Psi_j^{(0)}(iK' + \varepsilon) &= \exp \left(-\frac{i \varphi_0 \sigma_3}{2} \right) \exp \left(\frac{i \theta_j \sigma_2}{2} \right) \left[1 + \frac{\varepsilon}{2} \partial_\chi \theta_j \sigma_1 + O(\varepsilon^2) \right] \times \\ &\times \exp \left[-\Delta_j \eta_3 \sigma_3 + \frac{\chi}{2} \sigma_3 \left(Z(\varepsilon) + \frac{\text{cn} \varepsilon \text{dn} \varepsilon}{\text{sn} \varepsilon} \right) + \frac{\varepsilon}{2} \sigma_3 [1 - Z(\chi + \Delta_j)] + O(\varepsilon^2) \right] \times \\ &\times \exp \left[-\frac{i}{2k^2} \frac{\text{cn} \varepsilon \text{dn} \varepsilon}{\text{sn}^2 \varepsilon} t \sigma_3 - \frac{\eta_1 \Delta_j}{2K} \sigma_3 \varepsilon \right]. \end{aligned} \tag{1.65}$$

Асимптотический ряд для решения Йоста $\Psi_1(u, x, t)$ при $u = iK' + \varepsilon$ ($|\varepsilon| \ll 1$) будем искать в виде:

$$\Psi_1 = \exp \left(-\frac{i \Phi \sigma_3}{2} \right) \exp \left(\frac{i \theta \sigma_2}{2} \right) g \exp \left(-\frac{i \theta_1 \sigma_2}{2} \right) \exp \left(\frac{i \varphi_0 \sigma_3}{2} \right) \Psi_1^{(0)}, \tag{1.66}$$

где углы Φ и θ задают параметризацию (1.3) вектора намагниченности, а θ_1 , φ_0 – его асимптотику (1.15) при $\chi \rightarrow -\infty$. Тогда первое из равенств системы (1.16) дает уравнение для расчета g :

$$\partial_x g = R g - g R_0, \quad (1.67)$$

где

$$R = -\frac{i}{2} \left(\sigma_1 \sin \theta [(w_1 + w_3) \cos \theta - \partial_x \Phi] + \partial_x \theta \sigma_2 + \right. \\ \left. + \sigma_3 \left[\frac{w_3 - w_1}{2} + \frac{w_3 + w_1}{2} \cos(2\theta) - \cos \theta \partial_x \Phi \right] \right),$$

а матрица R_0 получается из R заменой $\Phi \rightarrow \varphi_0 = \text{const}$, $\theta \rightarrow \theta_1(x)$. При $u = iK' + \varepsilon$, $|\varepsilon| \ll 1$, коэффициенты $w_{1,3}$ допускают степенные разложения: $w_1(iK' + \varepsilon) = -ik^{-1} \varepsilon^{-1} + O(\varepsilon)$, $w_3(iK' + \varepsilon) = ik^{-1} \varepsilon^{-1} + O(\varepsilon)$.

В соответствии с (1.21), матричная функция g должна удовлетворять асимптотическому условию:

$$g \rightarrow I \quad \text{при} \quad x \rightarrow -\infty.$$

Решение $g(u, x, t)$ уравнения (1.67) будем искать в виде:

$$g = (I + X) \exp[h \sigma_3 + Y], \quad (1.68)$$

где недиагональная X и диагональная Y матрицы разлагаются в ряды по степеням ε :

$$X = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n X_n, \quad Y = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n Y_n.$$

После простых вычислений получаем:

$$h = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^x dx' \partial_{x'} \Phi \cos \theta; \\ Y_1 = -\frac{k}{4} \sigma_3 \int_{-\infty}^x dx' [(\partial_{x'} \theta)^2 - (\partial_{x'} \theta_1)^2 + (\partial_{x'} \Phi)^2 \sin^2 \theta + \sin^2 \theta - \sin^2 \theta_1]; \\ X_1 = \frac{k}{2} [\partial_x \theta \sigma_1 + \sin \theta \partial_x \Phi \sigma_2 - \exp(h \sigma_3) \sigma_1 \exp(-h \sigma_3) \partial_x \theta_1]. \quad (1.69)$$

Используя формулы (1.25), (1.65), (1.66), (1.68), (1.69), находим асимптотическое разложение функции $\bar{a}(u)$ вблизи особой точки $u = iK'$:

$$\ln \bar{a}(u = iK' + \varepsilon) = \Delta \eta_3 + \frac{i}{2} P + \frac{\varepsilon k}{2} H + O(\varepsilon^2). \quad (1.70)$$

Коэффициенты P и H играют роль импульса и энергии локализованного возбуждения на фоне полосовой доменной структуры:

$$P = - \int_{-\infty}^{\infty} dx \partial_x \Phi \cos \theta;$$

$$H = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \int_{-\infty}^x dx' [(\partial_{x'} \theta)^2 - (\partial_{x'} \theta_1)^2 + (\partial_{x'} \Phi)^2 \sin^2 \theta + \sin^2 \theta - \sin^2 \theta_1] + \frac{Z(\chi + \Delta) - Z(\chi)}{k} + \frac{\eta_1 \Delta}{K k} \right).$$

Предел выражения для H существует, т. к. при $x \rightarrow +\infty$ имеем:

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^x dx' [(\partial_{x'} \theta_2)^2 - (\partial_{x'} \theta_1)^2 + \sin^2 \theta_2 - \sin^2 \theta_1] \approx \frac{Z(\chi) - Z(\chi + \Delta)}{k} + \text{const.}$$

1.3.3 Законы сохранения

Динамическая стабильность солитонов в полосовой доменной структуре поддерживается серией интегралов движения. Для их построения следует отделить вклад периодической фоновой структуры. В безграничной среде он бесконечен. Предложенная процедура содержит путь преодоления этой трудности. Элемент $\bar{a}(u)$ матрицы перехода не зависит от времени, и потому является производящей функцией интегралов движения [11; 56]. Для односолитонного состояния явный вид $\bar{a}(u)$ найден ранее (см. (1.40)):

$$\bar{a}_{\text{sol}}(u) = \frac{\sigma(u - \mu) \sigma(u - \mu^* + 2K)}{\sigma(u + \mu^*) \sigma(u + \mu + 2K)} e^{\eta_1(\mu + \mu^*)}.$$

Периоды сигма-функций Вейерштрасса равны $[4K, 2iK']$. Первые члены асимптотического разложения функции $\ln \bar{a}_{\text{sol}}(u)$ около особой точки $u = iK'$ (1.70) сразу дают импульс P_{sol} и энергию H_{sol} солитона:

$$P_{\text{sol}} = -2i [\ln \bar{a}_{\text{sol}}(iK') - \eta_3 \Delta];$$

$$H_{\text{sol}} = \frac{2}{k} \frac{\partial}{\partial u} \ln \bar{a}_{\text{sol}}(u)|_{u=iK'} = -\frac{4}{k} \text{Re} \left(Z(\mu, k) - \frac{\eta_1 \mu}{K} \right),$$

где $\Delta = -2(\mu + \mu^*)$ – сдвиг доменной структуры из-за образования в ней солитона. При вычислении H_{sol} учтены третья и четвертая формулы (1.64).

Заметим, что в модели (1.2) уравнение для проекции намагниченности на ось анизотропии Ox_3 имеет вид дифференциального закона сохранения:

$$\partial_t S_3 = \partial_x [\mathbf{S} \times \partial_x \mathbf{S}]_3.$$

На больших расстояниях от солитона в полосовой доменной структуре (1.4) имеем: $[\mathbf{S} \times \partial_x \mathbf{S}]_3 = 0$. Отсюда следует, что:

$$\int_{-L_1}^{L_2} dx S_3(x, t) = \text{const}, \quad (1.71)$$

где $L_{1,2} \gg 1$ (мы используем безразмерные переменные).

Интеграл движения (1.71) не содержится в серии (1.70). Однако, его также легко вычислить. Для этого воспользуемся солитонным решением $\Psi_+(u, x, t)$ вспомогательной линейной системы (1.16). В его представлении (1.42) матрица $\Psi(u, x, t)$ диагональна при $u = -K$. Поэтому из первого уравнения (1.16) находим:

$$\int_{-L_1}^{L_2} dx [(S_{\Delta/2}^{(0)})_3 - S_3] = 2 \ln[\Psi_{11}(u = -K, x = L_2, t)/\Psi_{11}(u = -K, x = -L_1, t)].$$

Используя формулы (1.61), (1.62) и соотношение [42]:

$$\begin{aligned} \int_{-L_1}^{L_2} dx (S_{\Delta/2}^{(0)})_3 &= \int_{-L_1}^{L_2} dx \operatorname{sn}(\chi + \Delta/2, k) = \\ &= -k \ln \left[\frac{\operatorname{dn}(\tilde{L}_2 + \Delta/2) + k \operatorname{cn}(\tilde{L}_2 + \Delta/2)}{\operatorname{dn}(-\tilde{L}_1 + \Delta/2) + k \operatorname{cn}(-\tilde{L}_1 + \Delta/2)} \right], \end{aligned}$$

после простых вычислений получаем:

$$\int_{-L_1}^{L_2} dx S_3(x, t) = k \ln[(\operatorname{dn}(-\tilde{L}_1 + \Delta) + k \operatorname{cn}(-\tilde{L}_1 + \Delta))/(\operatorname{dn}\tilde{L}_2 + k \operatorname{cn}\tilde{L}_2)], \quad (1.72)$$

где $\tilde{L}_{1,2} = L_{1,2}/k$.

Результат (1.72) зависит от выбора пределов интегрирования. Пусть в отсутствие солитона образец имеет большую длину и в каждой из своих половинок содержит четное число доменов: $\tilde{L}_{1,2} \equiv L/k = 4Km$, где $m \gg 1$. Тогда после возбуждения в нем солитона:

$$\int_{-L}^L dx S_3(x, t) = k \ln[(\operatorname{dn}\Delta + k \operatorname{cn}\Delta)/(1 + k)].$$

1.3.4 Взаимодействие солитонов в доменной структуре

Перед тем, как перейти к анализу односолитонного возбуждения (1.63), обсудим динамику солитонов в полосовой доменной структуре на примере двухсолитонного состояния. Чтобы получить качественное представление о взаимодействии двух солитонов в структуре, достаточно построить соответствующее решение задачи Римана и вычислить его асимптотики, поочередно переходя в системы отсчета, связанные с первым и вторым солитоном.

Для построения двухсолитонного возбуждения заметим, что решение линейной системы (1.16) останется таковым после его умножения справа на независящую от x, t матрицу, а преобразование $\chi \rightarrow \chi + \delta$, где $\delta = \text{const}$, только сдвинет его вдоль оси Ox . После перечисленных преобразований односолитонного решения (1.42), (1.58) и переопределения постоянных получим следующее частное решение вспомогательной системы (1.16):

$$\Psi_+^{(1)}(u, \chi, t | \mu_1, \mathbf{n}^{(1)}) = \Psi(u, \chi, t | \mu_1, \mathbf{n}^{(1)}) \Psi_{\Delta/2}^{(0)}(u, \chi, t). \quad (1.73)$$

Матрицы Ψ и $\Psi_{\Delta/2}^{(0)}$ определены формулами (1.58) и (1.22), μ_s ($s = 1, 2$) – нули двухсолитонной функции $\Psi_+^{(2)}(u)$; $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$, где $\Delta_s = -2(\mu_s + \mu_s^*)$; $\mathbf{n}^{(1)} = \Psi_{\Delta/2}^{(0)}(\mu_1, \chi, t) \mathbf{d}^{(1)}$, $\mathbf{d}^{(1)}$ – произвольный постоянный комплексный вектор.

Будем трактовать (1.73) как «затравочное» решение системы (1.16). Тогда, в соответствии с изложенной схемой «одевания», ее новым решением будет:

$$\Psi_+^{(2)}(u, \chi, t | \mu_1, \mu_2, \mathbf{n}^{(1)}, \mathbf{n}^{(2)}) = \Psi(u, \chi, t | \mu_2, \mathbf{n}^{(2)}) \Psi_+^{(1)}(u, \chi, t | \mu_1, \mathbf{n}^{(1)}). \quad (1.74)$$

Здесь $\mathbf{n}^{(2)} = \Psi_+^{(1)}(\mu_2, \chi, t) \mathbf{d}^{(2)}$, $\mathbf{d}^{(2)}$ – произвольный постоянный комплексный вектор.

Прямой проверкой можно убедиться, что (1.74) удовлетворяет дифференциальным ограничениям и трансформационным свойствам, которые требуются от двухсолитонного решения системы (1.16) с граничными условиями (1.32):

$$\begin{aligned} \Psi_+^{(2)} &\rightarrow \Psi_2^{(0)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \bar{a}(u) \end{pmatrix} && \text{при } \chi \rightarrow +\infty; \\ \Psi_+^{(2)} &\rightarrow \Psi_1^{(0)} \begin{pmatrix} \bar{a}(u) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} && \text{при } \chi \rightarrow -\infty. \end{aligned} \quad (1.75)$$

В частности, получаем верное значение коэффициента $\bar{a}(u)$:

$$\bar{a}(u) = \det \Psi_+^{(2)}(u) = \prod_{s=1}^2 g_1(u|\mu_s)g_2(u|\mu_s).$$

Сформулированная схема размножения решений системы (1.16), а значит и модели Ландау – Лифшица (1.2) носит рекуррентный характер. На ее $N-1$ -ом шаге получаем описание N солитонов в полосовой доменной структуре.

Двухсолитонное решение модели Ландау – Лифшица имеет вид:

$$S_k^{(2)} \sigma_k = \Psi(u|\mu_2, \mathbf{n}^{(2)})\Psi(u|\mu_1, \mathbf{n}^{(1)})(S_{\Delta/2}^{(0)})_k \sigma_k \Psi^\dagger(-u^*|\mu_1, \mathbf{n}^{(1)})\Psi^\dagger(-u^*|\mu_2, \mathbf{n}^{(2)})|_{u=-iK'}.$$

Пространственная локализация солитонов описывается экспоненциальными множителями: $e^{\pm A(\mu_s, \chi, t)}$, $e^{\pm A^*(\mu_s, \chi, t)}$ ($s = 1, 2$), где

$$\begin{aligned} A(\mu_s, \chi, t) &= [-q^{(s)}(x - V^{(s)}t) + i(\eta^{(s)}x - \omega^{(s)}t)]/2; \\ \kappa^{(s)} &= -k^{-1} \operatorname{Re}Z(\mu_s) > 0, \quad \eta^{(s)} = k^{-1} \operatorname{Im}Z(\mu_s), \\ V^{(s)} &= -[q^{(s)}k]^{-1} \operatorname{Im}(\operatorname{cn}\mu_s \operatorname{dn}\mu_s), \quad \omega^{(s)} = -k^{-1} \operatorname{Re}(\operatorname{cn}\mu_s \operatorname{dn}\mu_s). \end{aligned}$$

Здесь $\eta^{(s)}$ и $\omega^{(s)}$ – волновые числа и частоты прецессии намагниченности в ядрах солитонов, $V^{(s)}$ – скорости движения солитонов, величины $(q^{(s)})^{-1}$ определяют характерные длины областей наиболее значительных изменений намагниченности в солитонах.

Перейдем в систему отсчета, связанную со вторым солитоном, и проследим за его изменениями до и после столкновения с первым солитоном. С математической точки зрения, эта задача сводится к вычислению пределов решения (1.74) при $t \rightarrow \mp\infty$ с ограничением $\xi_2 = x - V^{(2)}t = \operatorname{const}$, которое означает, что:

$$\begin{aligned} 2A(\mu_2, \chi, t) &= -q^{(2)}\xi_2 + i[\eta^{(2)}\xi_2 - \omega^{(2)}t + \eta^{(2)}V^{(2)}t], \\ 2A(\mu_1, \chi, t) &= -q^{(2)}[\xi_2 + (V^{(2)} - V^{(1)})t] + i[\eta^{(1)}\xi_2 - \omega^{(1)}t + \eta^{(1)}V^{(2)}t]. \end{aligned} \quad (1.76)$$

Пусть для определенности скорость второго солитона больше скорости первого: $V^{(2)} - V^{(1)} > 0$. Учитывая второе соотношение (1.76) и формулы (1.32), находим:

$$\begin{aligned} \Psi(u, \chi, t|\mu_1, \mathbf{n}^{(1)})\Psi_{\Delta/2}^{(0)}(u, \chi, t)|_{\xi_2=\operatorname{const}, t \rightarrow +\infty} &\rightarrow \Psi_{\Delta_2/2}^{(0)}(u, \chi, t) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \bar{a}^{(1)}(u) \end{pmatrix}; \\ \Psi(u, \chi, t|\mu_1, \mathbf{n}^{(1)})\Psi_{\Delta/2}^{(0)}(u, \chi, t)|_{\xi_2=\operatorname{const}, t \rightarrow -\infty} &\rightarrow \Psi_{\Delta_1+\Delta_2/2}^{(0)}(u, \chi, t) \begin{pmatrix} \bar{a}^{(1)}(u) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1,77) \end{aligned}$$

где $\bar{a}^{(1)}(u) = g_1(u|\mu_1)g_2(u|\mu_1)$.

Соотношения (1.77) сразу дают предельные значения вектора $\mathbf{n}^{(2)}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}^{(2)} \rightarrow \mathbf{p} &= \Psi_{\Delta_2/2}^{(0)}(\mu_2, \chi, t) \begin{pmatrix} d_1^{(2)} \\ \bar{a}^{(1)}(\mu_2)d_2^{(2)} \end{pmatrix} && \text{при } t \rightarrow +\infty; \\ \mathbf{n}^{(2)} \rightarrow \mathbf{q} &= \Psi_{\Delta_1+\Delta_2/2}^{(0)}(\mu_2, \chi, t) \begin{pmatrix} \bar{a}^{(1)}(\mu_2)d_1^{(2)} \\ d_2^{(2)} \end{pmatrix} && \text{при } t \rightarrow -\infty. \end{aligned} \quad (1.78)$$

Отсюда следует, что предельные значения $\Psi_+^{(2)}$ имеют вид

$$\Psi_+^{(2)}|_{\xi_2=\text{const}, t \rightarrow +\infty} \rightarrow \Psi(u, \chi, t|\mu_2, \mathbf{p})\Psi_{\Delta_2/2}^{(0)}(u, \chi, t) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \bar{a}^{(1)}(u) \end{pmatrix}, \quad (1.79)$$

$$\Psi_+^{(2)}|_{\xi_2=\text{const}, t \rightarrow -\infty} \rightarrow \Psi(u, \chi, t|\mu_2, \mathbf{q})\Psi_{\Delta_1+\Delta_2/2}^{(0)}(u, \chi, t) \begin{pmatrix} \bar{a}^{(1)}(u) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.80)$$

Второй солитон при удалении от первого имеет такое же строение, что и одиночный солитон (1.63), т. к. описывается функциями (1.79), (1.80) того же вида, что и (1.42). Второй солитон движется быстрее, поэтому при $t \rightarrow +\infty$ он оказывается справа от первого. Асимптотические значения функции (1.79) при $\xi_2 \rightarrow +\infty$ и $\xi_2 \rightarrow -\infty$ дают представление об изменении доменной структуры справа и слева от центра второго солитона при $t \rightarrow +\infty$. Соответствующие пределы легко вычисляются с помощью (1.32):

$$\begin{aligned} \Psi_+^{(2)}|_{\xi_2 \rightarrow +\infty, t \rightarrow +\infty} &\rightarrow \Psi_0(u, \chi, t) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \bar{a}(u) \end{pmatrix}, \\ \Psi_+^{(2)}|_{\xi_2 \rightarrow -\infty, t \rightarrow +\infty} &\rightarrow \Psi_{\Delta_2}^{(0)}(u, \chi, t) \begin{pmatrix} \bar{a}^{(2)}(u) & 0 \\ 0 & \bar{a}^{(1)}(u) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (1.81)$$

где $\bar{a}^{(2)}(u) = g_1(u|\mu_2)g_2(u|\mu_2)$, $\bar{a}(u) = \bar{a}^{(1)}(u)\bar{a}^{(2)}(u)$. Отсюда следует, что движение второго солитона происходит на фоне полосовой доменной структуры и сопровождается ее локальным сдвигом вдоль оси Ox на величину $k\Delta_2$. Первое из соотношений (1.81), как и положено, воспроизводит краевое условие (1.75) при $\chi \rightarrow +\infty$.

Второе выражение (1.80) соответствует ситуации, когда второй солитон оказывается левее первого и на большом расстоянии от него. Изменения

доменной структуры справа и слева от второго солитона в этом случае характеризуются выражениями:

$$\begin{aligned}\Psi_+^{(2)}|_{\xi_2 \rightarrow +\infty, t \rightarrow -\infty} &\rightarrow \Psi_{\Delta_1}^{(0)}(u, \chi, t) \begin{pmatrix} \bar{a}^{(1)}(u) & 0 \\ 0 & \bar{a}^{(2)}(u) \end{pmatrix}; \\ \Psi_+^{(2)}|_{\xi_2 \rightarrow -\infty, t \rightarrow -\infty} &\rightarrow \Psi_{\Delta}^{(0)}(u, \chi, t) \begin{pmatrix} \bar{a}(u) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (1.82)$$

Характер деформирования полосовой структуры вторым солитоном остается прежним: солитон является элементарным переносчиком макроскопического сдвига $k\Delta_2$ доменной структуры. Второе из соотношений (1.82) приводит к верному краевому условию (1.75) при $\chi \rightarrow -\infty$ для двухсолитонного решения.

В то же время, из-за наличия первого солитона доменные структуры, в которых движется второй солитон при $t \rightarrow +\infty$ и $t \rightarrow -\infty$ сдвинуты относительно друг друга на величину $-k\Delta_1$ вдоль оси Ox (ср. формулы (1.81) и (1.82)).

Другое отличие (1.79), (1.80) от функции изолированного солитона в полосовой структуре (1.75) состоит в перенормировке постоянного вектора $\mathbf{d}^{(2)}$. В пределе $t \rightarrow +\infty$ компоненты вектора $\mathbf{d}^{(2)} = (d_1^{(2)}, d_2^{(2)})$ приобретают дополнительные множители (см. (1.78)): $d_1^{(2)} \rightarrow d_1^{(2)}$, $d_2^{(2)} \rightarrow \bar{a}^{(1)}(\mu_2)d_2^{(2)}$.

Область локализации уединенного второго солитона описывается аналогом выражения (1.63) и зависит от отношения $n_1^{(2)}/n_2^{(2)}$. С учетом явного вида векторов $\mathbf{n}^{(2)}$ и \mathbf{p} , это означает, что в пределе $t \rightarrow +\infty$ координата центра второго солитона

$$x = V^{(2)}t + \frac{1}{q^{(2)}} \ln \left| \frac{d_1^{(2)}}{d_2^{(2)}} \right|$$

сдвигается на величину

$$\delta x(t \rightarrow +\infty) = -\frac{1}{q^{(2)}} \ln |\bar{a}^{(1)}(\mu_2)|, \quad (1.83)$$

а начальная фаза прецессии намагниченности в солитоне приобретает приращение:

$$\delta \varphi(t \rightarrow +\infty) = -\arg \bar{a}^{(1)}(\mu_2). \quad (1.84)$$

До столкновения с первым солитоном (при $t \rightarrow -\infty$) перечисленные параметры у второго солитона отличаются знаком от значений (1.83), (1.84).

Для того, чтобы проследить за первым солитоном при его рассеянии на втором, следует осуществить факторизацию (1.74) в обратном порядке. Новая

форма записи того же решения удобна для исследования его асимптотик в другом предельном случае: $x - V^{(1)}t = \text{const}$, $t \rightarrow \pm\infty$. Вычисления дают близкие результаты.

Таким образом, солитоны в полосовой доменной структуре, как и дислокации в кристаллах [57; 58], служат элементарными переносчиками макроскопических трансляций структуры. Столкновение солитонов в структуре является упругим: приводит к сдвигу центров солитонов и изменяет начальную фазу их прецессии, оставляя неизменным строение их ядер.

При $\omega \rightarrow 0$ солитоны служат зародышами перемагничивания материала. Сильное взаимодействие солитонов с доменной структурой задает сценарии процессов перемагничивания. Они могут сопровождаться значительными колебаниями прилегающих к солитону доменных границ структуры. Соответствующий анализ приведен в следующем разделе.

1.4 Прецессионные солитоны в полосовой доменной структуре

1.4.1 Общая характеристика односолитонного решения

В этом разделе представлен детальный анализ солитонного возбуждения (1.63). В подробной форме записи решение (1.63) модели Ландау – Лифшица (1.2), описывающее солитон на фоне полосовой доменной структуры (1.3), (1.4), имеет вид [A3; A4]:

$$S_3 = \frac{(|\alpha|^2 - |\beta|^2)\tilde{s} + (\beta^*\alpha + \alpha^*\beta)\tilde{c}}{|\alpha|^2 + |\beta|^2}, \quad S_1 - iS_2 = \frac{(\alpha^2 - \beta^2)\tilde{c} - 2\alpha\beta\tilde{s}}{|\alpha|^2 + |\beta|^2} e^{-i\varphi_0}, \quad (1.85)$$

где $\alpha = c_\mu|m_2|^2 + c_\mu^*|m_1|^2$, $\beta = -im_1m_2^*(s_\mu + s_\mu^*)$,

$$m_1 = a_-e^{y+i\gamma} + b_+e^{-y-i\gamma}, \quad m_2 = b_-e^{y+i\gamma} + a_+e^{-y-i\gamma};$$

$$a_\pm = m(\tilde{\chi}) \frac{\sigma(\tilde{\chi} + K + iK' \pm \mu)}{\sigma(K + iK' \pm \mu)} \exp \left[\mp \frac{\eta_1\mu\tilde{\chi}}{2K} \right],$$

$$b_\pm = m(\tilde{\chi}) \frac{\sigma(\tilde{\chi} - K + iK' \pm \mu)}{\sigma(K + iK' \pm \mu)} \exp \left[\mp \frac{\eta_1\mu\tilde{\chi}}{2K} + \eta_1(\tilde{\chi} + iK' \pm \mu) \right],$$

$$m(\tilde{\chi}) = \left[\frac{\sigma(iK') \sigma(iK' + 2K)}{2 \sigma(\tilde{\chi} + iK') \sigma(\tilde{\chi} + iK' + 2K)} \right]^{1/2},$$

$$y = \operatorname{Re} \left[A(\mu, \chi, t) - \frac{\eta_1 \mu \Delta}{4K} \right] + y_0, \quad \gamma = \operatorname{Im} \left[A(\mu, \chi, t) - \frac{\eta_1 \mu \Delta}{4K} \right] + \gamma_0.$$

Здесь введены обозначения: $c_\mu = \operatorname{cn} \mu$, $s_\mu = \operatorname{sn} \mu$, $\tilde{s} = \operatorname{sn} \tilde{\chi}$, $\tilde{c} = \operatorname{cn} \tilde{\chi}$; $\tilde{\chi} = \chi + \Delta/2$, $\Delta = 4\rho$; y_0, γ_0 – произвольные вещественные постоянные. Непосредственной проверкой убеждаемся, что полученное решение удовлетворяет заложенной в формулировку модели (1.2) условию: $\mathbf{S}^2 = 1$.

Величина $\Delta = 4\rho$ определяет сдвиг доменной структуры, сопутствующий образованию солитона. Для коэффициентов a_\pm, b_\pm справедливы тождества:

$$a_+ b_- - a_- b_+ = \frac{i k \tilde{c} s_\mu}{d_\mu}, \quad a_+ b_- + a_- b_+ = \frac{i \tilde{d}}{d_\mu}, \quad a_- a_+ + b_+ b_- = \frac{k \tilde{s} c_\mu}{d_\mu}, \quad (1.86)$$

$$a_- a_+ - b_+ b_- = 1; \quad \frac{b_\pm}{a_\pm} = \frac{i \operatorname{dn}(\tilde{\chi} \pm \mu)}{1 + k \operatorname{sn}(\tilde{\chi} \pm \mu)} = \frac{i(d_\mu - k \tilde{s} c_\mu)}{\tilde{d} \pm k \tilde{c} s_\mu} = \frac{i(\tilde{d} \mp k \tilde{c} s_\mu)}{d_\mu + k \tilde{s} c_\mu}.$$

Вдали от центра солитона (при $|y| \gg 1$) решение (1.85) описывает малоамплитудную прецессию намагниченности вокруг ее равновесных положений в доменной структуре:

$$\mathbf{S} = S_R \mathbf{e}_1(\chi) + S_I \mathbf{e}_2 + \left[1 + O(e^{-4|y|}) \right] \mathbf{e}_3(\chi).$$

Векторы \mathbf{e}_i ($i = 1, 2, 3$) образуют ортонормированный репер. При $y \gg 1$ имеем:

$$\mathbf{e}_1 = c_0 s_4 \mathbf{i} + s_0 s_4 \mathbf{j} - c_4 \mathbf{k}, \quad \mathbf{e}_2 = -s_0 \mathbf{i} + c_0 \mathbf{j}, \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{S}_2^{(0)};$$

$$S_R \approx -\operatorname{Re}[a X_-], \quad S_I \approx -\operatorname{Im} X_-; \quad (1.87)$$

$$X_- = \frac{2 s_\rho}{c_\theta d_\theta} \left(\frac{c_3 s_\theta d_\theta + c_\theta s_3 d_3}{1 - k^2 s_3^2 s_\rho^2} \right) \frac{d_\mu}{a_- b_-} e^{-2y-2i\gamma} \sim$$

$$\sim \frac{\sigma(\chi + 3\rho + i\theta) \sigma(\chi + 3\rho + i\theta + 2K)}{\sigma(\chi + 4\rho + iK') \sigma(\chi + 4\rho + iK' + 2K)} e^{-2y-2i\gamma} \sim$$

$$\sim \Lambda^*(\chi + \Delta, -\mu^*) e^{-i\omega^*(-\mu^*)t};$$

а при $y \ll -1$:

$$\mathbf{e}_1 = c_0 s_\chi \mathbf{i} + s_0 s_\chi \mathbf{j} - c_\chi \mathbf{k}, \quad \mathbf{e}_2 = -s_0 \mathbf{i} + c_0 \mathbf{j}, \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{S}_1^{(0)};$$

$$S_R \approx -\operatorname{Re}[a X_+], \quad S_I \approx -\operatorname{Im} X_+; \quad (1.88)$$

$$X_+ = \frac{2 s_\rho}{c_\theta d_\theta} \left(\frac{c_1 s_\theta d_\theta - c_\theta s_1 d_1}{1 - k^2 s_1^2 s_\rho^2} \right) \frac{d_\mu}{a_+ b_+} e^{2y+2i\gamma} \sim$$

$$\sim \frac{\sigma(\chi + \rho - i\theta) \sigma(\chi + \rho - i\theta + 2K)}{\sigma(\chi + 2\rho + iK') \sigma(\chi + 2\rho + iK' + 2K)} e^{2y+2i\gamma} \sim \Lambda(\chi, \mu) e^{i\omega(\mu)t}.$$

Здесь коэффициент $a = k c_\mu / d_\mu$; $s_4 = \operatorname{sn}(\chi + 4\rho)$, $c_4 = \operatorname{cn}(\chi + 4\rho)$, $s_\chi = \operatorname{sn}\chi$, $c_\chi = \operatorname{cn}\chi$; $s_1 = \operatorname{sn}(\chi + \rho)$, $c_1 = \operatorname{cn}(\chi + \rho)$, $d_1 = \operatorname{dn}(\chi + \rho)$, $s_3 = \operatorname{sn}(\chi + 3\rho)$, $c_3 = \operatorname{cn}(\chi + 3\rho)$, $d_3 = \operatorname{dn}(\chi + 3\rho)$; $s_\rho = \operatorname{sn}\rho$, $s_\theta = \operatorname{sn}(i\theta)$, $c_\theta = \operatorname{cn}(i\theta)$, $d_\theta = \operatorname{dn}(i\theta)$; $s_0 = \sin \varphi_0$, $c_0 = \cos \varphi_0$; сигма-функции Вейерштрасса имеют периоды $[4K, 2iK']$. При $k = 0.9994$ коэффициент $a \approx 1$. Потому конец вектора \mathbf{S} в плоскости Oe_1e_2 движется по эллипсу, близкому к окружности малого радиуса $|X_\pm|e^{-2|y|}$.

Функция

$$\Lambda(u, \chi) \sim N(u, \chi) e^{i p_\Lambda(u) x}, \quad p_\Lambda(u) = -i k^{-1} Z(u, k);$$

$$N(u, \chi) = \frac{\sigma(\chi - u) \sigma(\chi - u + 2K)}{\sigma(\chi + iK') \sigma(\chi + iK' + 2K)} \exp\left(2\eta_3 \chi + \frac{\eta_1 u \chi}{K}\right)$$

представляет собой решение уравнения Ламе:

$$[k^{-2} \partial_\chi^2 - 2 \operatorname{sn}^2(\chi, k)] \Lambda = -[k^{-2} + \operatorname{cn}^2(u, k)] \Lambda.$$

При выводе (1.87), (1.88) использованы тождества:

$$s_\mu + s_\mu^* = -\frac{2 s_\rho c_\theta d_\theta}{1 - k^2 s_\rho^2 s_\theta^2}, \quad c_\mu = \frac{c_\rho c_\theta - s_\rho s_\theta d_\rho d_\theta}{1 - k^2 s_\rho^2 s_\theta^2}, \quad c_\mu^* = \frac{c_\rho c_\theta + s_\rho s_\theta d_\rho d_\theta}{1 - k^2 s_\rho^2 s_\theta^2};$$

$$c_4 c_2 + s_4 s_2 = \frac{c_\rho^2 - s_\rho^2 d_3^2}{c_\rho^2 + s_\rho^2 d_3^2}, \quad c_4 c_2 - s_4 s_2 = \frac{c_3^2 - s_3^2 d_\rho^2}{c_\rho^2 + s_\rho^2 d_3^2},$$

$$s_4 c_2 + c_4 s_2 = \frac{2 s_3 c_3 d_\rho}{c_\rho^2 + s_\rho^2 d_3^2}, \quad s_4 c_2 - c_4 s_2 = \frac{2 s_\rho c_\rho d_3}{c_\rho^2 + s_\rho^2 d_3^2},$$

где $s_2 = \operatorname{sn}(\chi + 2\rho)$, $c_2 = \operatorname{cn}(\chi + 2\rho)$. Окончательное выражение для величины X_- (1.87) получено с учетом следующих разложений комбинаций функций Якоби по сигма-функциям Вейерштрасса с периодами $[4K, 2iK']$:

$$\frac{1}{1 - k^2 s_\rho^2 s_3^2} = \left[\frac{e^{4\eta_3 K}}{\sigma^2(iK') \sigma^2(iK' + 2K)} \right] e^{-4\eta_3(\rho+K)} e^{-2\eta_1 \rho} \times$$

$$\times \frac{\sigma^2(\rho + iK') \sigma^2(\rho + iK' + 2K)}{\sigma(\chi_3 + iK' - \rho) \sigma(\chi_3 + iK' + 2K - \rho)} \times$$

$$\times \frac{\sigma^2(\chi_3 + iK') \sigma^2(\chi_3 + iK' + 2K)}{\sigma(\chi_3 + iK' + \rho) \sigma(\chi_3 + iK' + \rho + 2K)},$$

$$c_\theta s_3 d_3 + c_3 s_\theta d_\theta = \left[\frac{\sigma^4(iK') \sigma^4(iK' + 2K)}{\sigma(2K) \sigma(iK' + K) \sigma(iK' - K)} e^{-8\eta_3 K} \right] \times$$

$$\times e^{(2\eta_3 + \eta_1)\chi_3} e^{(\eta_1 + 6\eta_3)i\theta} e^{8\eta_3 K} \times$$

$$\times \frac{\sigma(\chi_3 + iK') \sigma(\chi_3 + i\theta + 2K) \sigma(i\theta - \chi_3 - K - iK') \sigma(i\theta - \chi_3 + K - iK')}{\sigma^2(\chi_3 + iK') \sigma^2(\chi_3 + iK' + 2K) \sigma^2(i\theta + iK') \sigma^2(i\theta + iK' + 2K)},$$

$\chi_3 = \chi + 3\rho$. Выражение для X_+ (1.88) находим из (1.87) заменой $\theta \rightarrow -\theta$, $\chi_3 \rightarrow \chi_1 = \chi + \rho$.

Согласно граничным условиям (1.15), солитон (1.85) сдвигает доменную структуру на величину $k\Delta = -4k \operatorname{Re}\mu$. Большая часть сдвига локализована вблизи центра солитона – в области, которую мы будем условно называть «ядром» солитона. Подобно дислокациями в кристаллах [57; 58], солитон (1.85) служит элементарным переносчиком макроскопических трансляций структуры. Однако, в отличие от дислокаций, сдвиг $k\Delta = 4k\rho$ ($0 < \rho < K$) определяет размер ядра солитона, но не связан с периодом $4K(k)k$ структуры (параметры ρ и k независимы).

Функция $A(\mu, \chi, t)$ в (1.85) линейна по x, t :

$$A = [-l_0^{-1}(x - Vt) + i(\eta x - \omega t)]/2, \quad l_0 = -k [\operatorname{Re}Z(\mu)]^{-1} > 0, \quad (1.89)$$

$$\eta = k^{-1} \operatorname{Im}Z(\mu), \quad V = -l_0 k^{-1} \operatorname{Im}(\operatorname{cn}\mu \operatorname{dn}\mu), \quad \omega = -k^{-1} \operatorname{Re}(\operatorname{cn}\mu \operatorname{dn}\mu).$$

Здесь η и ω – волновое число и частота прецессии намагниченности в ядре солитона, V – скорость движения солитона как целого. Направление скорости (1.89) задается знаком $\operatorname{sign}V = -\operatorname{sign}\theta$. Области резкого изменения намагниченности слева и справа от ядра солитона (1.85) имеют ширину $\sim l_0$ (1.89). В этих областях пульсации ядра солитона приводят к осцилляциям доменной структуры. Таким образом, мы можем оценить полный размер солитона в доменной структуре как $d + 2l_0$, где d – размер ядра солитона, $2l_0$ – характерный размер прилегающей к ядру области осцилляций структуры. Величина l_0 может меняться в широких пределах от размера одной доменной стенки до ширины нескольких доменов. Максимальные значения l_0 достигаются при $\rho \rightarrow 0$ и $\rho \rightarrow K$.

Заметим, что при замене $\mu \rightarrow \mu \pm 2iK'$ величины V, ω, l не меняются, волновое число η приобретает добавочный сдвиг $\eta \pm 2\pi/L_0$, где $L_0 = 2Kk$ – период структуры, а матрица $M(\mu, \chi)$ (1.19) преобразуется следующим образом:

$$M(\mu \pm 2iK', \chi) = \sigma_3 M(\mu, \chi) \sigma_3 \exp[\pm \pi i x / L_0].$$

Отсюда следует, что солитонные решения с параметрами μ и $\mu \pm 2iK'$ отличаются только несущественным переопределением произвольных постоянных.

Для дальнейшего анализа положим $\mu = -\rho + i\theta$, где $0 < \rho < K, -K' < \theta \leq K'$ (см. рисунок 1.6). В окрестностях точек $\mu = \pm i(K' - \delta) - \rho, 0 < \delta < \delta_m \approx 1/2, 0 < \rho < \rho_m \approx 1/2$ солитоны в доменной структуре, так же, как и

на фоне однородного основного состояния среды [11], становятся более узкими, чем позволяет континуальное приближение. Такие значения параметров ρ , θ мы далее не рассматриваем.

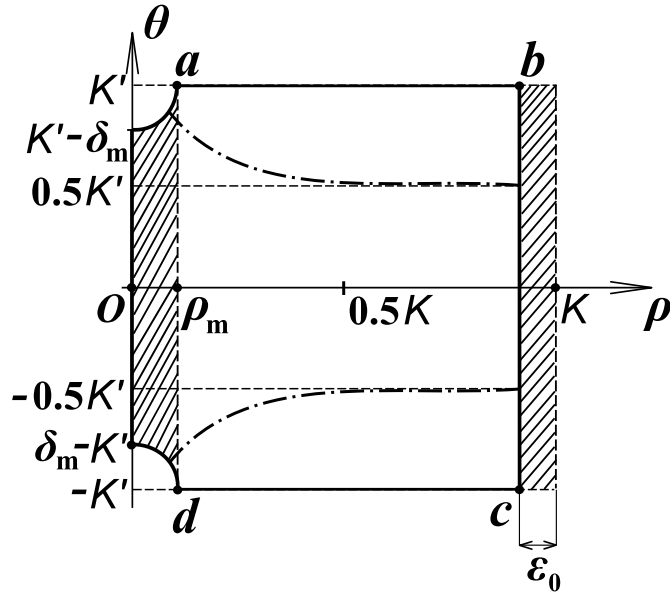


Рисунок 1.6 — Плоскость параметров ρ , θ для солитона (1.85).

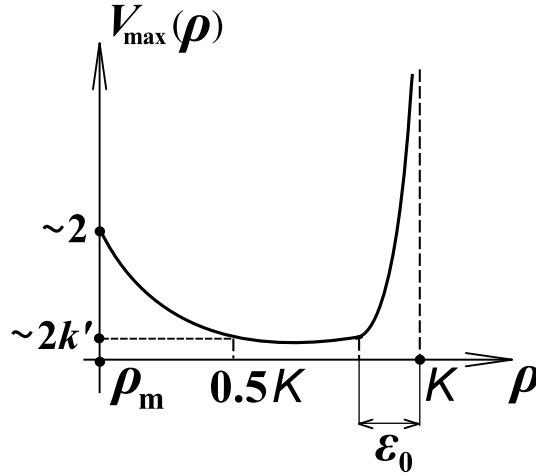


Рисунок 1.7 — Зависимость $V_{\max}(\rho)$ (1.90).

Вещественные параметры ρ и θ определяют все характеристики солитона: его частоту, волновой вектор, скорость, область локализации и амплитуду. Скорость солитона V и волновое число η представляют собой нечетные, а величины ω и l_0 — четные функции параметра θ . В детальной форме записи скорость (1.89) солитона принимает вид:

$$V = -\frac{i s_\rho s_\theta (d_\rho^2 d_\theta^2 + k^2 c_\rho^2 c_\theta^2)}{(1 - k^2 s_\rho^2 s_\theta^2) [k^2 s_\rho c_\rho d_\rho s_\theta^2 - (1 - k^2 s_\rho^2 s_\theta^2) Z(\rho, k)]}, \quad (1.90)$$

где $s_\rho = \operatorname{sn} \rho$, $c_\rho = \operatorname{cn} \rho$, $d_\rho = \operatorname{dn} \rho$, $s_\theta = \operatorname{sn}(i\theta)$, $c_\theta = \operatorname{cn}(i\theta)$, $d_\theta = \operatorname{dn}(i\theta)$.

Когда движущийся солитон находится в центре одного из доменов структуры, его ядро напоминает солитон с почти круговой прецессией вектора \mathbf{S} на фоне однородного распределения намагниченности [11; 14]. При прохождении солитона через каждую доменную стенку структуры проекция поля S_3 в его центре меняет знак на противоположный. Солитон как бы «опрокидывается», не меняя своей формы.

Солитон неподвижен при $\theta = 0$ и $\theta = \pm iK$ ($\mu \in ab$, $\mu \in cd$ на рисунке 1.6). Соответствующие волновые числа: $\eta = 0$ и $\eta = \pm\pi/L_0$. С ростом $|\theta|$ от нуля до K' скорость V по абсолютной величине возрастает, достигая предельного значения $V_{\max}(\rho)$, а затем спадает до нуля. Соответствующие максимальной скорости солитона значения параметров ρ и θ отмечены штрих-пунктирными линиями на рисунке 1.6. Скорость $V_{\max}(\rho)$ существенно зависит от ρ (см. рисунок 1.7). Разным значениям ρ сопутствуют различные сценарии поведения намагниченности в солитоне.

При $\rho \rightarrow 0$ значения $\mu = i\theta$, $-K' < \theta < K'$ соответствуют внутримоменным спиновым волнам [31] с вещественными частотами (1.13):

$$\frac{1}{k} \leq \omega_1 = \frac{\operatorname{dn}(\theta, k')}{k \operatorname{cn}^2(\theta, k')} < \infty.$$

При малых $\rho \leq 0.1K$, $\theta \neq \pm K'$ – в узкой заштрихованной области левее отрезка ad на рисунке 1.6 – солитон (1.85) не локализован в пределах домена. Решение (1.85) представляет «обрезанную» малоамплитудную волну протяженностью $\sim \rho^{-1}$:

$$\begin{aligned} \tilde{S}_1 &\approx -\frac{2\rho d_\theta \tilde{s}}{\operatorname{ch}(2y)} \operatorname{Re}[m_1 m_2^*], & \tilde{S}_2 &\approx \tilde{c} + \frac{2\rho d_\theta \tilde{s}}{\operatorname{ch}(2y)} \operatorname{Im}[m_1 m_2^*], \\ S_3 &\approx \tilde{s} - \frac{2\rho d_\theta \tilde{c}}{\operatorname{ch}(2y)} \operatorname{Im}[m_1 m_2^*]; \\ m_1 m_2^* &= -2 \operatorname{sh}(2y) a_- b_+ + a_-^2 e^{2i\gamma} - b_+^2 e^{-2i\gamma}, & a_- &= a_+^*, & b_- &= -b_+^*, \\ 2y &= \frac{\rho}{k} \left[x \left(\frac{E}{K} - d_\theta^2 \right) + i t s_\theta (d_\theta^2 + k^2 c_\theta^2) \right] + 2y_0, \\ 2\gamma &= -i\chi \left[\frac{s_\theta d_\theta}{c_\theta} + \zeta(K + i\theta) - \zeta(K - i\theta) - \frac{\eta_1 i \theta}{K} \right] + \frac{t}{k} c_\theta d_\theta + 2\gamma_0. \end{aligned}$$

Здесь для удобства из выражения (1.85) выделен поворот на угол φ_0 в плоскости Oxy :

$$(S_1 - iS_2) \exp\left(i\left[\varphi_0 - \frac{\pi}{2}\right]\right) \equiv \tilde{S}_1 - i\tilde{S}_2.$$

Для полосовой структуры блоховского типа ($\varphi_0 = \pm\pi/2$) вектор намагниченности \mathbf{S} в новых обозначениях будет иметь компоненты: $\mathbf{S} = (\pm\tilde{S}_1, \pm\tilde{S}_2, S_3)$.

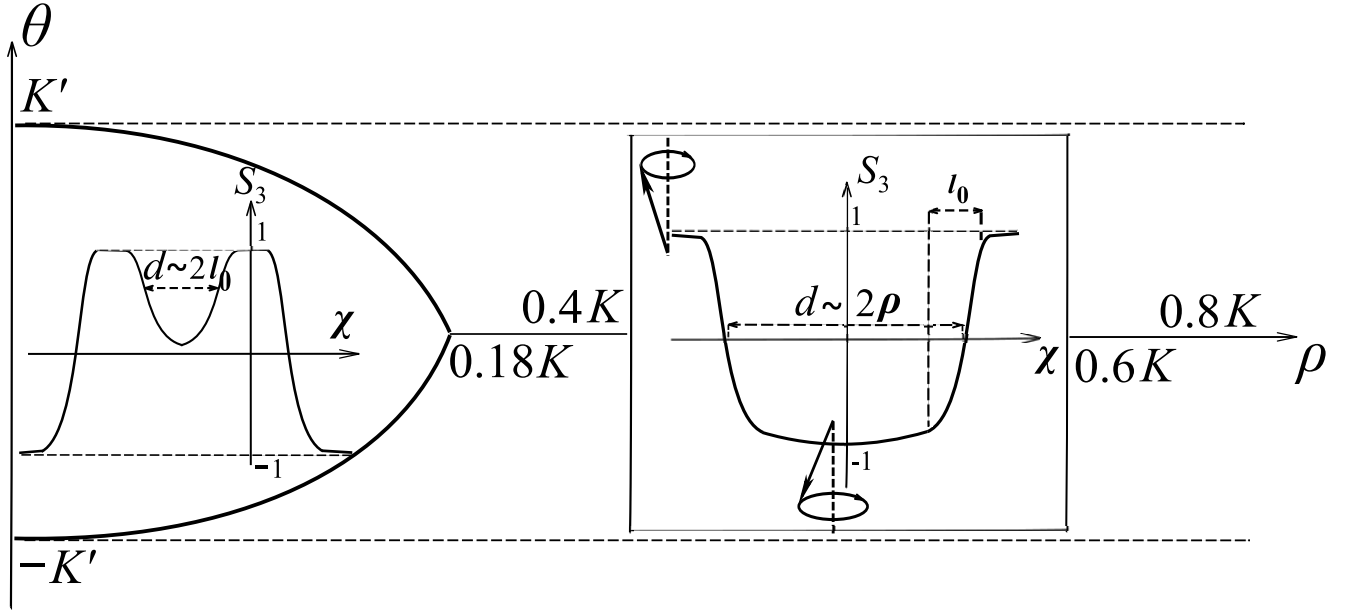


Рисунок 1.8 — Движущийся солитон (1.85) при значениях $0.1K \leq \rho \leq 0.4K$ (вставка слева) и $0.4K \leq \rho \leq 0.6K$ (вставка справа).

При $0.1K \leq \rho \leq 0.4K$ колебания проекции S_3 (1.85) локализованы в конечной области, ширина которой (по переменной χ) меньше длины $2K$ отдельного домена структуры: $0.2K \leq d \leq 0.7K$ ($d \approx 2l_0$). При $0.4K \leq \rho \leq 0.6K$, $\theta \neq \pm K'$ частота солитона (1.85) мала: $\omega(\rho, \theta) \approx 0$. Его скорость, согласно рисунку 1.7, также достигает минимальных значений: $V(\rho, \theta) \ll 1$ — и слабо зависит от ρ и θ . Ширина ядра d линейно растет с ростом ρ :

$$0.8K \leq d \approx \text{Arcch} \left[\frac{\text{ch}^2(2\rho) - 2 - \text{ch}(2\rho) \cos(2\theta)}{\text{ch}(2\rho) + \cos(2\theta)} \right] \approx 2\rho \leq 1.8K,$$

но остается меньше ширины отдельного домена структуры. Такой солитон можно трактовать как зародыш перемагничивания (см. рисунок 1.8). К нему примыкают участки малоамплитудной прецессии намагниченности вокруг локальных направлений $\mathbf{e}_3 = \mathbf{S}_{1,2}^{(0)}$ (1.15). Прецессия экспоненциально спадает при удалении от центра солитона. Протяженность областей, где она еще различима, слабо зависит от ρ и θ и составляет величину $\sim K$ справа и слева от ядра солитона.

В случае, когда размер ядра превышает размер домена, макроскопический сдвиг структуры связан с возвратно-поступательными колебаниями ближайших к ядру доменных стенок и процессами вращения намагниченности в небольшой группе соседних доменов. При таком сценарии доменная структура

сдвигается на расстояние, которое хотя и превышает размер домена, но меньше периода структуры: $2Kk < k\Delta < 4Kk$. Выражения (1.87), (1.88) показывают, что при $0.8K \leq \rho < K$ ядро солитона вызывает сильные протяженные модуляции доменной структуры, которые при малых θ распространяются на большие расстояния, превышающие период структуры. Особый интерес представляет поведение решений в областях неустойчивости структуры по линейному приближению. Предельный случай таких солитонов мы обсудим отдельно.

При $\rho \rightarrow K$ значения $\mu = -K + i\theta$, $-K' < \theta < K'$ соответствуют мнимым частотам второй ветви линейных мод (1.14):

$$\omega_2 = \frac{ik'^2 \operatorname{sn}(\theta, k') \operatorname{cn}(\theta, k')}{k \operatorname{dn}^2(\theta, k')}.$$

В области $K - \varepsilon_0 \approx 0.9K < \rho < K$ правее отрезка bc на рисунке 1.6 солитон (1.85) представляет аналог сдвигового солитона в ангармонической цепочке, составленной из доменных стенок [59].

Реальные частота, размер и скорость солитонов получаются из безразмерных значений этих величин умножением на множители $\gamma M_0 K_a$, $\sqrt{\alpha/K_a}$, $\gamma M_0 \sqrt{\alpha K_a}$ соответственно. Параметры магнитных материалов могут меняться в широких пределах. Полагая $M_0 \sim 10^3 \text{ Гс}$, $\gamma \sim 10^7 \text{ Гц/Гс}$, $K_a \sim 10 - 100$, $\alpha \sim 10^3 - 10^4 a^2$, где $a \sim 10^{-8} \text{ см}$ – постоянная решетки, находим: $\gamma M_0 K_a \sim 10^{11} - 10^{12} \text{ с}^{-1}$, $\sqrt{\alpha/K_a} \sim 10 - 100 a \sim 10^{-7} - 10^{-6} \text{ см}$, $\gamma M_0 \sqrt{\alpha K_a} \sim 10^2 - 10^3 \text{ м/с}$. В указанных диапазонах лежат значения соответствующих параметров для железа и кобальта [31; 32].

1.4.2 Неподвижные солитоны

Наиболее просты и удобны для наблюдения неподвижные солитоны [A2–A5]. Им соответствуют значения $\theta = 0$, $\theta = \pm iK'$.

Рассмотрим вначале неподвижный солитон в случае $\theta = 0$ ($\mu = -\rho$). Тогда решение (1.85) принимает вид:

$$\begin{aligned} \tilde{S}_1 &= -\frac{2g_0}{A_0} \cos(2\gamma), & \tilde{S}_2 &= \tilde{c} + \frac{2g_0}{A_0} [f_0 \tilde{s} - g_0 \tilde{c}] + \frac{2h_0 g_0}{A_0} \tilde{s} \sin(2\gamma), \\ S_3 &= -\tilde{s} + \frac{2g_0}{A_0} [f_0 \tilde{c} + g_0 \tilde{s}] + \frac{2h_0 g_0}{A_0} \tilde{c} \sin(2\gamma), \end{aligned} \quad (1.91)$$

$$\begin{aligned}
A_0 &= [h_0 \sin(2\gamma) + f_0]^2 + \cos^2(2\gamma) + g_0^2, & h_0 &= k c_\rho / d_\rho, \\
g_0 &= \frac{d_\rho}{s_\rho} \left[\frac{s_3 a_-^2 e^{2y}}{1 + k s_3} + \frac{s_1 a_+^2 e^{-2y}}{1 + k s_1} \right], & f_0 &= \frac{1}{s_\rho} \left[\frac{c_3 a_-^2 e^{2y}}{1 + k s_3} + \frac{c_1 a_+^2 e^{-2y}}{1 + k s_1} \right]; \\
2y &= \chi Z(\rho, k) + 2y_0, & 2\gamma &= -\omega t + 2\gamma_0, & \omega &= k^{-1} c_\rho d_\rho, \\
s_1 &= \operatorname{sn}(\chi + \rho), & s_3 &= \operatorname{sn}(\chi + 3\rho), & c_1 &= \operatorname{cn}(\chi + \rho), & c_3 &= \operatorname{cn}(\chi + 3\rho); \\
s_\rho &= \operatorname{sn}\rho, & c_\rho &= \operatorname{cn}\rho, & d_\rho &= \operatorname{dn}\rho; & y_0 &= \operatorname{const}, & \gamma_0 &= \operatorname{const}.
\end{aligned}$$

При выводе (1.91) использованы соотношения (1.86) и тождества:

$$c_\rho \tilde{s} \pm \tilde{c} s_\rho \operatorname{dn}(\tilde{\chi} \pm \rho) = d_\rho \operatorname{sn}(\tilde{\chi} \pm \rho), \quad c_\rho \tilde{c} \mp \tilde{s} s_\rho \operatorname{dn}(\tilde{\chi} \pm \rho) = \operatorname{cn}(\tilde{\chi} \pm \rho);$$

коэффициенты a_\pm – вещественны, b_\pm – чисто мнимые.

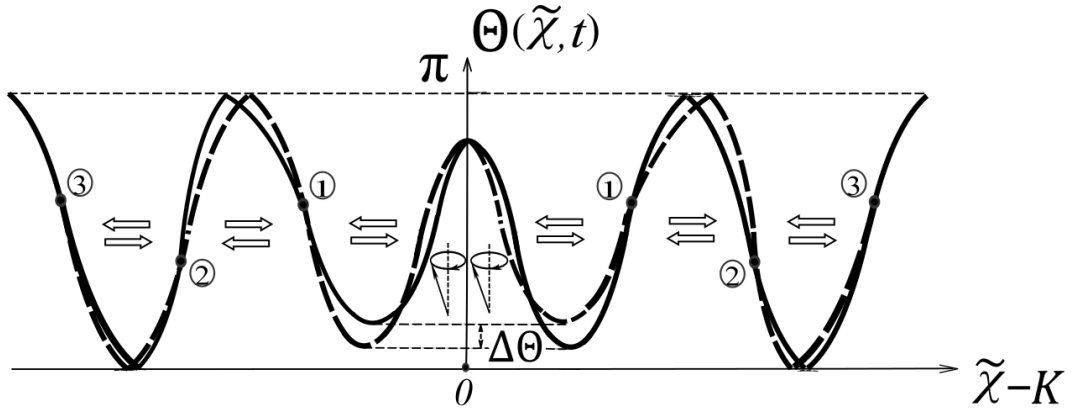


Рисунок 1.9 — Характер колебаний доменной структуры около ядра прецессионного солитона (1.91).

На рисунке 1.9 $\Theta = \operatorname{Arccos} S_3(\tilde{\chi}, t)$; центр солитона (1.91) помещен в середину одного из доменов структуры. В этом случае значение $2y_0$ в формуле (1.91) определяется условием:

$$e^{4y}|_{\tilde{\chi}=K} = (1 + k s_\rho) / (1 - k s_\rho).$$

В пределе $k \rightarrow 1$ решение (1.91) сводится к хорошо известному солитону на фоне однородного основного состояния легкоосного ферромагнетика [11; 14]:

$$S_3 = 1 - \frac{2 \operatorname{sh}^2 \rho}{\operatorname{sh}^2 \rho + \operatorname{ch}^2 y}, \quad S_1 - i S_2 = -\frac{2 i \operatorname{sh} \rho \operatorname{ch} y}{\operatorname{sh}^2 \rho + \operatorname{ch}^2 y} e^{-i\varphi}; \quad (1.92)$$

где $y = -(x - x_0) \operatorname{th} \rho$, $\varphi = \varphi_0 + (t - t_0) \operatorname{ch}^{-2} \rho$, $x_0 = \operatorname{const}$, $t_0 = \operatorname{const}$. В области локализации солитона (1.92) во всех точках вектор \mathbf{S} вращается с одной и той же фазой.

Как и для солитона на однородном фоне (1.92), начальная фаза прецессии $2\gamma_0$ вектора \mathbf{S} вокруг оси Oz неизменна в области ядра солитона (1.91) (см. конусы прецессии на рисунке 1.9). Частота прецессии $\omega(\rho) = k^{-1}c_\rho d_\rho \approx \text{ch}^{-2}\rho$ конечна, а размер ядра всегда удовлетворяет континуальному приближению.

Эллиптичность и неоднородность прецессии намагниченности в ядре солитона (1.91) приводит к продольным колебаниям доменной структуры. Вдали от центра солитона (при $|y| \gg 1$) они имеют узловые точки:

$$\begin{aligned} \chi_n &= 2Kn - 3\rho, & n &= 1, 2, 3\dots & \text{при} & y \gg 1; \\ \chi_m &= 2Km - \rho, & m &= 0, 1, 2, 3\dots & \text{при} & y \ll -1. \end{aligned}$$

На рисунке 1.9 узлы обозначены жирными точками и пронумерованы цифрами в кружочках. Ядро солитона расположено между узлами с номером 1. В узлах солитон (1.91) «прикреплен» к структуре и его намагниченность

$$\mathbf{S} = (c_0\tilde{c}, s_0\tilde{c}, -\tilde{s}) \quad (1.93)$$

при любых t совпадает с равновесными состояниями доменной структуры $\mathbf{S}_{1,2}^{(0)}$; в записи (1.93) использованы обозначения: $c_0 \equiv \cos \varphi_0$, $s_0 \equiv \sin \varphi_0$. Соседние узлы отстоят друг от друга на $2K$ – полпериода по переменной $\chi = x/k$. При переходе от узла к узлу направление вектора \mathbf{S} (1.93) меняется на противоположное. Колебания намагниченности сосредоточены в промежутках между узлами. Части доменов, расположенные между узлами $2j - 1$ и $2j$ ($2j$ и $2j + 1$), $j = 1, 2, 3\dots$, правее и левее центра бризера периодически смещаются вдоль структуры синфазно по отношению друг к другу и в противофазе (в фазе) с ядром бризера (см. рисунок 1.9).

Проекция намагниченности S_3 в центре солитона ($\tilde{\chi} = K$) меняется в пределах: $1 - 2s_\rho^2 \leq S_3(\tilde{\chi} = K) \leq 1 - 2k^2s_\rho^2$, принимая каждое из граничных значений дважды за период. Сплошная и штриховая линии на рисунке 1.9 соответствуют углу $\Theta = \text{Arccos } S_3$ в моменты времени $t = 0$ и $t = T/2$, когда $S_3(\tilde{\chi} = K)$ достигает максимума (T – период колебаний).

Напомним, что параметр ρ задает макроскопический сдвиг $\Delta = 4\rho$ доменной структуры при образовании в ней солитона. В зависимости от ρ строение ядра солитона меняется. При малых значениях $0 < \rho < 0.1K$ солитон (1.91) представляет собой «обрезанную» малоамплитудную стоячую волну прецессии с нулевым квазиимпульсом на фоне доменной структуры. Ее протяженность

$\sim \rho^{-1}$. При $0.1K \leq \rho \leq 0.5K$ ядро солитона локализовано в пределах одного домена структуры, где компонента S_3 пульсирует: $\Delta\Theta \sim 0.1 - 0.15\pi$ при $0.1K \leq \rho \leq 0.3K$ и $\Delta\Theta \sim 0.05\pi$ при $0.4K \leq \rho \leq 0.5K$ (см. рисунок 1.9).

С ростом ρ в интервале $0.4K \leq \rho \leq 0.6K$ в центре солитона $S_3(\tilde{\chi} = K) \approx -1$. Частота прецессии мала: $0.01 < |\omega| < 0.1$. Ядро солитона (1.91) представляет собой зародыш перемагничивания шириной $d \approx 2\rho \sim K$. Зародыш ограничен доменными стенками толщиной $l_0 \ll d$. Слева и справа к ним примыкают области малоамплитудной прецессии протяженностью порядка ширины домена структуры. Некруговая прецессия в области локализации солитона вызывает периодические синфазные смещения доменов вдоль структуры на величину $\Delta\chi \sim 0.1 - 0.4K$. На рисунке 1.9 взаимные направления смещений указаны стрелками. Вне ядра солитона они экспоненциально затухают.

С дальнейшим ростом ρ (при $0.6K < \rho < 0.8K$) ширина примыкающих к ядру солитона областей малоамплитудной прецессии быстро растет. При $\rho \approx 0.8K$ их протяженность $\sim 4K - 4.5K$ превышает период структуры.

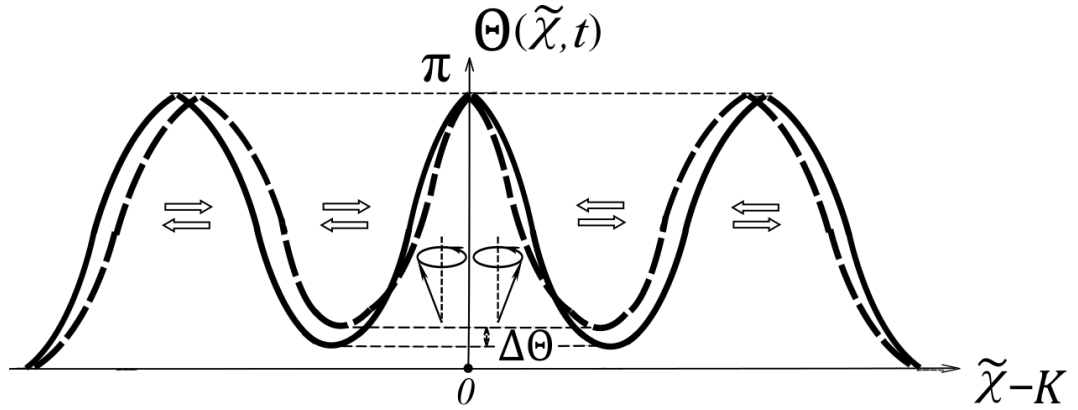


Рисунок 1.10 — Прецессионный солитон (1.94). Обозначения на рисунке 1.10 аналогичны таковым на рисунке 1.9.

Случай второго неподвижного солитона ($\mu = -\rho \pm iK'$) следует считать выделенным. Распределение намагниченности в нем имеет вид:

$$\begin{aligned} \tilde{S}_1 &= -\frac{2g}{A} \sin(2\tilde{\gamma}), & \tilde{S}_2 &= -\tilde{c} + \frac{2g}{A} [g\tilde{c} - f\tilde{s}] - \frac{2hg}{A} \tilde{s} \cos(2\tilde{\gamma}), \\ S_3 &= -\tilde{s} + \frac{2g}{A} [f\tilde{c} + g\tilde{s}] + \frac{2hg}{A} \tilde{c} \cos(2\tilde{\gamma}), \end{aligned} \quad (1.94)$$

$$A = [h \cos(2\tilde{\gamma}) + f]^2 + \sin^2(2\tilde{\gamma}) + g^2;$$

$$g = c_\rho \left[\frac{\tilde{a}_-^2 e^{2y}}{1 + s_3} - \frac{\tilde{a}_+^2 e^{-2y}}{1 + s_1} \right], \quad f = s_\rho \left[\frac{d_3 \tilde{a}_-^2 e^{2y}}{1 + s_3} + \frac{d_1 \tilde{a}_+^2 e^{-2y}}{1 + s_1} \right], \quad h = \frac{d_\rho}{c_\rho};$$

$$2y = \chi \operatorname{Re}[Z(iK' - \rho)] + 2y_0; \quad \rho = \Delta/4; \quad 2\tilde{\gamma} = \omega t + 2\tilde{\gamma}_0, \quad \omega = -\frac{d_\rho c_\rho}{(k s_\rho)^2};$$

$$s_1 = \operatorname{sn}(\chi + \rho), \quad s_3 = \operatorname{sn}(\chi + 3\rho); \quad s_\rho = \operatorname{sn}\rho, \quad c_\rho = \operatorname{cn}\rho, \quad d_\rho = \operatorname{dn}\rho;$$

$$s_\mu = -\frac{1}{k s_\rho}, \quad c_\mu = \frac{i d_\rho}{k s_\rho}; \quad \frac{\tilde{b}_+}{\tilde{a}_+} = \frac{c_1}{1 + s_1}, \quad \frac{\tilde{b}_-}{\tilde{a}_-} = -\frac{c_3}{1 + s_3};$$

$y_0 = \operatorname{const}$, $\tilde{\gamma}_0 = \operatorname{const}$. Коэффициенты \tilde{a}_\pm , \tilde{b}_\pm вещественны. Они отличаются от a_\pm , b_\pm множителями:

$$\frac{a_\pm}{\tilde{a}_\pm} = \frac{b_\pm}{\tilde{b}_\pm} = \exp \left[\mp \frac{\pi i \tilde{\chi}}{4K} \right].$$

При выводе (1.94) учтены соотношения (1.86) и тождества:

$$d_\rho \operatorname{sn}(\tilde{\chi} \pm \rho) \tilde{s} + \operatorname{cn}(\tilde{\chi} \pm \rho) \tilde{c} = c_\rho, \quad \tilde{s} \operatorname{cn}(\tilde{\chi} \pm \rho) - \tilde{c} d_\rho \operatorname{sn}(\tilde{\chi} \pm \rho) = \mp s_\rho \operatorname{dn}(\tilde{\chi} \pm \rho).$$

При $k \rightarrow 1$ из (1.94) получаем солитон на однородном фоне [11; 14]:

$$S_3 = 1 - \frac{2 \operatorname{ch}^2 \rho}{\operatorname{ch}^2 \rho + \operatorname{sh}^2 y}, \quad S_1 - i S_2 = \mp \frac{2 \operatorname{ch} \rho \operatorname{sh} y}{\operatorname{ch}^2 \rho + \operatorname{sh}^2 y} e^{-i\varphi}, \quad (1.95)$$

где $y = -(x - x_0) \operatorname{cth} \rho$, $\varphi = \varphi_0 - (t - t_0) \operatorname{sh}^{-2} \rho$, $x_0 = \operatorname{const}$, $t_0 = \operatorname{const}$. В центре солитона (1.95): $\mathbf{S}(y = 0) = (0, 0, -1)$.

Как и в случае (1.95), особенность солитона (1.94) состоит в том, что в его центре намагниченность постоянна:

$$\mathbf{S} = (-c_0 \tilde{c}, -s_0 \tilde{c}, -\tilde{s}).$$

Здесь введены обозначения: $c_0 \equiv \cos \varphi_0$, $s_0 \equiv \sin \varphi_0$. Фазы вращения намагниченности вокруг оси Oz правее и левее центра обоих солитонов (1.95), (1.94) различаются на π .

Как и ранее, вследствие некруговой прецессии ядро солитона периодически меняет свой размер. Однако, ограничивающие его доменные стенки теперь колеблются в противофазе. Их колебания передаются соседним доменам, вызывая малые продольные смещения их доменных стенок. Колебания намагниченности в доменах слева (справа) от ядра солитона синфазны (см. рисунок 1.10). В остальном, поведение намагниченности качественно такое же, как и для солитона первого типа. Так при $0.4K < \rho < 0.6K$ ядро солитона представляет собой зародыш перемагничивания с малой прецессией: $0.01 < |\omega| < 0.1$. Заметим, что при $\rho \ll 1$ частота прецессии возбуждения (1.94) становится большой: $\omega(\rho) \approx -\operatorname{sh}^{-2} \rho = O(\rho^{-2})$, а область резкого изменения намагниченности – малой: $l_0 \sim \rho$. Поэтому может нарушиться условие применимости

длинноволнового приближения. Значения ρ следует ограничить условием:

$$d \sim \frac{k}{2 \operatorname{Im} \rho(\mu)} \sqrt{\frac{K_a}{\alpha}} \gg a, \quad (1.96)$$

где d – ширина ядра солитона, a – постоянная кристаллической решетки; $\alpha > 0$, $K_a > 0$ – постоянные обменного взаимодействия и магнитной анизотропии. В формуле (1.96) мы перешли к размерным переменным.

1.4.3 Поведение солитонов вблизи границ области их существования

Особый интерес представляет поведение решений в областях неустойчивости структуры по линейному приближению (при $\mu = -K + |\varepsilon| + i\theta$, $|\varepsilon| \ll 1$). В пределе $\rho \rightarrow K$ ($\mu = -K + i\theta + \varepsilon$, $0 < \varepsilon \ll 1$), бризер (1.85) описывается выражением:

$$\begin{aligned} \tilde{S}_1 &= -\frac{2g_1}{A_1} \operatorname{sh}(2y), & \tilde{S}_2 &= -\tilde{c} + \frac{2g_1}{A_1} [g_1 \tilde{c} - f_1 \tilde{s}] - \frac{2h_1 g_1}{A_1} \tilde{s} \operatorname{ch}(2y), \\ \tilde{S}_3 &= -\tilde{s} + \frac{2g_1}{A_1} [f_1 \tilde{c} + g_1 \tilde{s}] + \frac{2h_1 g_1}{A_1} \tilde{c} \operatorname{ch}(2y), \end{aligned} \quad (1.97)$$

$$A_1 = [h_1 \operatorname{ch}(2y) + f_1]^2 + \operatorname{sh}^2(2y) + g_1^2,$$

$$g_1 = 2 \left(k + \frac{d_\theta}{c_\theta} \right) \operatorname{Re} \left[\frac{a_-^2 \operatorname{sn}(\tilde{\chi} - \mu)}{1 + k \operatorname{sn}(\tilde{\chi} - \mu)} e^{2i\gamma} \right],$$

$$f_1 = \frac{2d_\theta}{k'} \left(k + \frac{d_\theta}{c_\theta} \right) \operatorname{Re} \left[\frac{a_-^2 \operatorname{cn}(\tilde{\chi} - \mu)}{1 + k \operatorname{sn}(\tilde{\chi} - \mu)} e^{2i\gamma} \right], \quad h_1 = i k s_\theta;$$

$$\frac{b_+}{a_-^*} = -\frac{a_+^*}{b_-} = \frac{i(k c_\theta + d_\theta)}{k'}; \quad 2y = \chi \varepsilon \left(\frac{k'^2}{d_\theta^2} - \frac{E}{K} \right) + \frac{it}{k} \frac{k'^2 s_\theta}{d_\theta^2} + 2y_0,$$

$$\begin{aligned} 2\gamma &= -i\chi \left[-\frac{c_\theta}{s_\theta d_\theta} + \zeta(i\theta) + \zeta(i\theta - 2K) + \eta_1 - \frac{\eta_1 i\theta}{K} \right] + \\ &\quad + \frac{t|\varepsilon| k'^2}{k d_\theta^3} c_\theta (1 + k^2 s_\theta^2) + 2\gamma_0. \end{aligned}$$

При условии $\theta \neq 0$ вдали от центра бризера (при $|y| \gg 1$) в формулах для намагниченности (1.97) можно пренебречь вкладом вторых слагаемых в

квадратных скобках, и решение (1.97) принимает простой вид:

$$\begin{aligned}\tilde{S}_1 &\approx \mp \frac{4g_1}{d_\theta^2} e^{\mp 2y}, & \tilde{S}_2 &\approx -\operatorname{cn} \left[\tilde{\chi} - \left(\frac{4ik s_\theta}{\tilde{d} d_\theta^2} \right) g_1 e^{\mp 2y} \right], \\ S_3 &\approx -\operatorname{sn} \left[\tilde{\chi} - \left(\frac{4ik s_\theta}{\tilde{d} d_\theta^2} \right) g_1 e^{\mp 2y} \right], & e^{\mp 2y} &\ll 1.\end{aligned}\quad (1.98)$$

Согласно (1.98), неустойчивость приводит к протяженным модуляциям доменной структуры, которые, в общем случае, движутся с большой скоростью: $V \sim l \sim \varepsilon^{-1}$. Система как бы стремится избавиться от модуляций. Лучше поддаются наблюдению случаи $\mu = -K + 0$ и $\mu = -K + iK' + 0$, когда модуляции структуры неподвижны [A3; A4]. При таких значениях μ солитон сдвигает доменную структуру на период. Потому при $\chi \rightarrow +\infty$ и $\chi \rightarrow -\infty$ решение (1.85) имеет одно и то же асимптотическое поведение: $\mathbf{S} \rightarrow \mathbf{S}_2^{(0)}$ (см. (1.15)).

В пределе $\mu = -K + 0$ из (1.91) получаем аperiodическое слабо локализованное эллиптически – полиномиальное возбуждение:

$$\tilde{S}_1 = -\frac{2\bar{t}}{\bar{A}_0} C(\chi), \quad \tilde{S}_2 = -\operatorname{cn}\chi + \frac{2}{\bar{A}_0} C(\chi) (k \operatorname{sn}\chi + \bar{x}), \quad S_3 = \operatorname{sn}\chi - \frac{2}{\bar{A}_0} C(\chi) B(\chi), \quad (1.99)$$

где

$$\begin{aligned}\bar{t} &= t k'^2/k, & \bar{A}_0 &= \bar{t}^2 + (k \operatorname{sn}\chi + \bar{x})^2 + B^2(\chi), \\ B(\chi) &\equiv \operatorname{dn}\chi - k \operatorname{cn}\chi, & C(\chi) &\equiv \bar{x} \operatorname{cn}\chi + \operatorname{sn}\chi \operatorname{dn}\chi, \\ \bar{x} &= -k^2 \int^\chi \operatorname{cn}^2 \chi \, d\chi = \\ &= -(\chi - \chi_0) \left[k^2 - \frac{1+k^2}{6} \right] - \zeta(\chi + 2K - iK') - \zeta(\chi + iK') + \eta_1.\end{aligned}$$

Положение его центра определяется константой интегрирования χ_0 . На рисунке 1.11 центр возбуждения совпадает с серединой одной из доменных стенок структуры ($\chi_0 = 0$). Тогда в содержащей ее области $|\chi| < K$ все три компоненты намагниченности (1.99) почти не меняются со временем: $\mathbf{S} \approx \mathbf{S}_2^{(0)}$. В центре доменной стенки намагниченность $\mathbf{S}(\chi = 0) = (-c_0, -s_0, 0)$ не зависит от времени.

Обсудим смещения доменной структуры в области $|\chi| > K$. При $\chi > K$ ($\chi < -K$) с ростом t намагниченность разворачивается на 360 градусов по (против) часовой стрелки. Разворот происходит преимущественно в плоскости Oxy . На рисунке 1.11 сплошной линией изображена проекция $S_3^{(0)} = \operatorname{sn}\chi$, соответствующая фоновой структуре $\mathbf{S}_2^{(0)}$, штриховой – значения S_3 (1.99) при

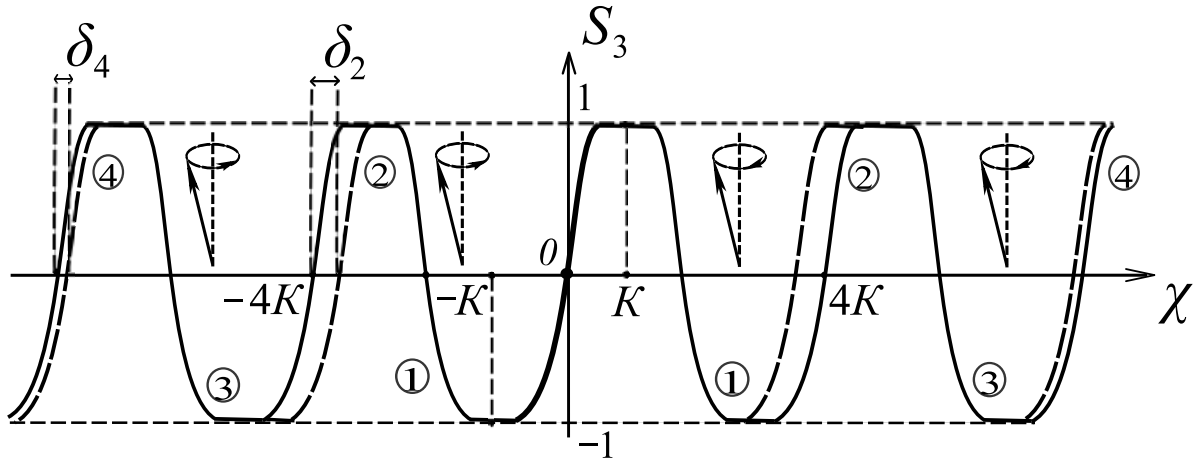


Рисунок 1.11 — Аperiodическое смещение доменной структуры в возбуждении (1.99), локализованном на неподвижной доменной стенке в точке $\chi = 0$.

$t = 0$. Конусы прецессии указывают направление разворота намагниченности в проекции на плоскость Oxy ; цифры в кружочках нумеруют доменные стенки. Интересно, что вдоль структуры смещаются только домены с четными номерами. При $-\infty < t < 0$ с ростом t доменные стенки с центрами в точках $\chi_{2m} = 4Km$, где m — целое, сдвигаются по направлению к началу координат $\chi = 0$ на величину δ_{2m} , а затем (при $0 < t < \infty$) возвращаются в исходные положения. Максимальное смещение доменных стенок (по переменной χ) $\delta_2 \approx 0.42K$ составляет величину порядка 0.1 от периода $4K$ структуры. Сдвиги δ_{2m} экспоненциально убывают по мере удаления от центра; $\delta_4 \approx 0.12K$.

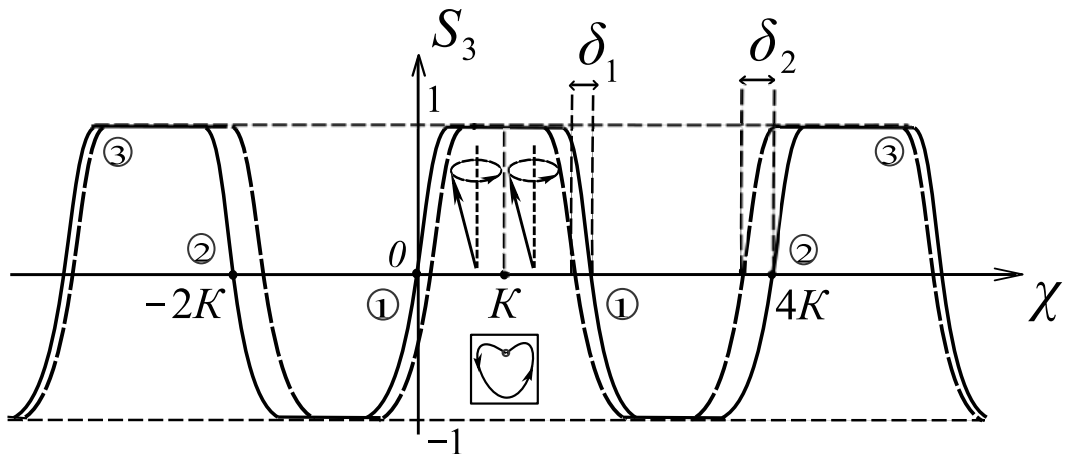


Рисунок 1.12 — Аperiodическое смещение доменной структуры в возбуждении (1.100) при $\chi_0 = K$. Обозначения на рисунке 1.12 аналогичны таковым на рисунке 1.11.

Рассмотрим второй случай неподвижных модуляций структуры вблизи границ существования солитона. В пределе $\mu = -K + iK' + 0$ получаем точ-

ное решение:

$$\tilde{S}_1 = -\frac{2s_\varphi \kappa}{r^2 + 1}, \quad \tilde{S}_2 = -\operatorname{cn}\chi + \frac{2c_\varphi \kappa}{r^2 + 1}, \quad S_3 = \operatorname{sn}\chi - \frac{2r\kappa}{r^2 + 1}, \quad (1.100)$$

где $\kappa \equiv r \operatorname{sn}\chi + c_\varphi \operatorname{cn}\chi$, $s_\varphi \equiv \sin \varphi$, $c_\varphi \equiv \cos \varphi$,

$$\varphi = \arg[(2g_2 + i\bar{t})/(2g_1 + i\bar{t})] + \arg[\operatorname{sn}\chi], \quad \bar{t} = tk'^2/k^2,$$

$$r(\chi, t) = \frac{k'}{2} \left(\left| \frac{m_2}{m_1} \right| - \left| \frac{m_1}{m_2} \right| \right), \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{k' \operatorname{sn}\chi}{\operatorname{dn}\chi + \operatorname{cn}\chi} \left[\frac{2g_1 + i\bar{t}}{2g_2 + i\bar{t}} \right],$$

$$g_1(\chi) = \zeta(\chi) - \frac{\eta_1 \chi}{2K} + \frac{E}{2K} (\chi - \chi_0), \quad g_2(\chi) = \zeta(\chi + 2K) - \frac{\eta_1 (\chi + 2K)}{2K} + \frac{E}{2K} (\chi - \chi_0).$$

Пусть центр возбуждения расположен в середине домена ($\chi_0 = K$); см. рисунок 1.12. Тогда намагниченность в центре домена всегда совпадает с равновесной: $\mathbf{S}(\chi = K) = (0, 0, 1)$. Изменения компоненты S_3 намагниченности локализованы на доменных стенках структуры, причем, в отличие от предыдущего случая, теперь вдоль структуры смещаются все доменные стенки. Амплитуда смещений доменных стенок, ограничивающих центральный домен, определяется уравнением: $\operatorname{am} \delta_1 = \operatorname{arctg}[4k^2/(4 - k^4)]$. Отсюда находим: $\delta_1 \approx 0.23K$ (порядка 0.125 от ширины домена). В пределах центрального домена ($0 < \chi < 2K$) смещения проекции S_3 вдоль оси структуры сопровождаются разворотом намагниченности в плоскости Oxy на 360 градусов против часовой стрелки. Заметим, что в этой области траектория движения конца вектора \mathbf{S} по поверхности сферы $\mathbf{S}^2 = 1$ имеет сердцевидную форму с выколотой угловой точкой; ей соответствуют моменты времени $t = \pm\infty$ (см. вставку на рисунке 1.12). Крайние стенки доменов, ближайших к центральному, испытывают наибольшие смещения: $\delta_2 \approx 0.34K > \delta_1$. Величина смещений последующих доменных стенок по мере удаления от центра возбуждения быстро спадает.

При $\chi_0 = 0$ решение (1.100) описывает сложный процесс перемагничивания доменной структуры, происходящий в два этапа (рисунок 1.13). Вначале доменные стенки с центрами в точках $\chi = \pm 2K$ с ростом t движутся по направлению к неподвижной доменной стенке в точке $\chi = 0$. Домены, прилегающие к этой доменной стенке (домены 1), укорачиваются, а следующие за ними (домены 2) – удлиняются. На рисунке 1.13 сплошной линией изображена проекция $S_3^{(0)} = \operatorname{sn}\chi$, соответствующая фоновой структуре $\mathbf{S}_2^{(0)}$; направления движения доменных стенок указаны стрелками. За время $-\infty < t < -t_0$ ($t_0 = k^2/k' \approx 27.4$) движущиеся доменные стенки достигают точек $\chi = \pm K$,

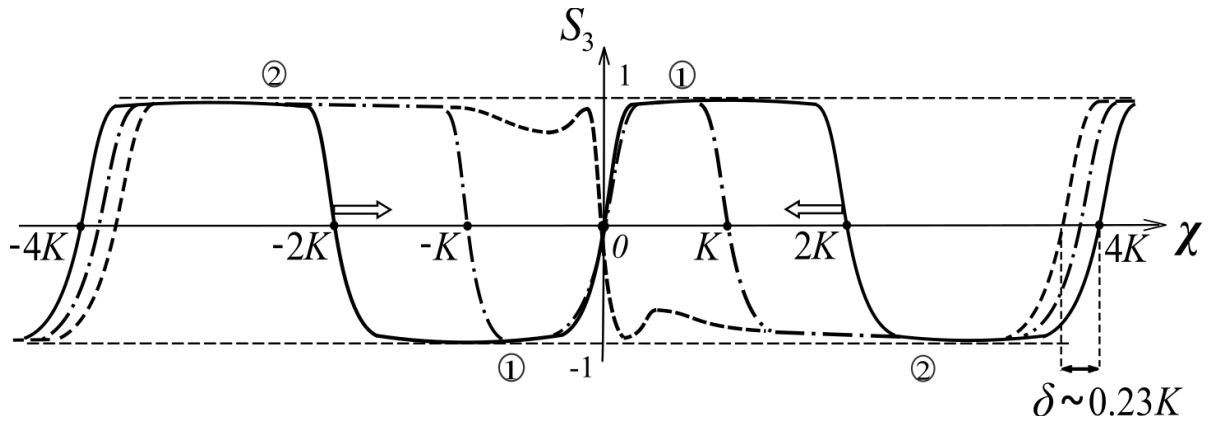


Рисунок 1.13 — Процесс перемагничивания доменной структуры в области локализации возбуждения (1.100) при $\chi_0 = 0$.

занимая положения, отмеченные на рисунке 1.13 штрих–пунктиром. На втором этапе (при $-t_0 < t < 0$) в узких доменах 1 намагниченность разворачивается, принимая значения, соответствующие однородным состояниям в соседних более широких доменах 2. В результате при $t = 0$ узкие домены 1 полностью исчезают, а два широких домена 2 занимают области $|\chi| < 4K$, разделенные доменной стенкой с центром в точке $\chi = 0$ (штриховая линия на рисунке 1.13). Ширина новой доменной стенки $l_0 \sim 0.2K$ в два раза меньше ширины доменных стенок структуры. Остальные части структуры незначительно смещаются по направлению к центральной доменной стенке. Наибольшие смещения $\delta \sim 0.23K$ испытывают доменные стенки вблизи точек $\chi = \pm 4K$. При $0 < t < +\infty$ указанный процесс перемагничивания происходит в обратной последовательности.

В малых окрестностях точек $\mu = -K$, $\mu = -K + iK'$ аперидиче-ский характер рассмотренных возбуждений меняется на повторение с течением времени продольных колебаний, смещений и перемагничиваний доменной структуры. Однако, даже в этом случае неустойчивость имеет место только на начальном временном этапе, а затем система возвращается в изначальное состояние. В этом отношении такие возбуждения можно назвать аналогами «солитонов Перегринна» [60], на модуляционно неустойчивом фоне [А6], которые наблюдаются в экспериментах по изучению экстремальных модуляций в оптоволокне и волн–убийц на воде.

1.5 Генерирование солитонов в доменной структуре

Неподвижные солитоны легче наблюдать и диагностировать, чем движущиеся. Каждый неподвижный солитон отодвигает от себя соседние доменные границы полосовой доменной структуры. Особый интерес представляет случай, когда ядро солитона совершает колебания внутри одного протяженного домена. Для возбуждения такого солитона нужно удлинить и возмутить один из доменов структуры так, чтобы он стал резонатором для ядра солитона. Это можно сделать, прилагая локальное магнитное поле вдоль направления

$$\mathbf{n} = (\sin \gamma \cos \varphi_0, \sin \gamma \sin \varphi_0, \cos \gamma),$$

где параметр $\gamma = \text{const}$ задает компоненту S_3 намагниченности, а угол φ_0 — ориентацию проекции вектора \mathbf{S} в плоскости Oxy .

Подкрепим приведенное утверждение расчетом [А3; А5]. Пусть начальное распределение намагниченности имеет вид ступенчатого импульса длиной d по переменной $\chi = x/k$ в полосовой доменной структуре:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(x, t = 0) &= \mathbf{S}_2^{(0)}(x + kd) \equiv \mathbf{S}_1^{(0)}(x) && \text{при } \chi < \chi_0; \\ \mathbf{S}(x, t = 0) &= \mathbf{n} && \text{при } \chi_0 < \chi < \chi_1; \\ \mathbf{S}(x, t = 0) &= \mathbf{S}_2^{(0)}(x) && \text{при } \chi > \chi_1, \end{aligned} \quad (1.101)$$

где $\chi_1 - \chi_0 = d$, $d = \Delta$. Пусть для определенности $\chi_1 = K$, $\chi_0 = K - d$, тогда: $\mathbf{S}_1^{(0)}(\chi = \chi_0) = \mathbf{S}_2^{(0)}(\chi = \chi_1) = (0, 0, 1)$ (см. рисунок 1.14).

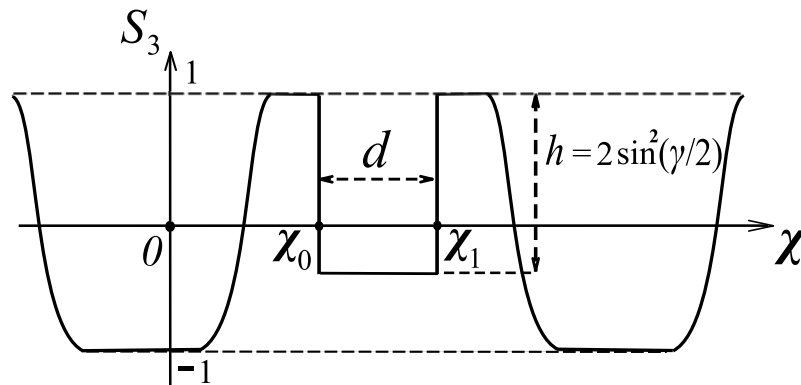


Рисунок 1.14 — Начальный импульс (1.101).

Начальное возмущение (1.101) распадается на солитоны, если элемент $\bar{a}(u)$ матрицы перехода (1.27) имеет нули в области своей аналитичности. Решение первого уравнения вспомогательной системы (1.16), соответствующее распределению намагниченности (1.101), имеет вид

$$\begin{aligned}\Psi_1(\chi, t = 0) &= \Psi_1^{(0)}(\chi, t = 0) && \text{при } \chi < \chi_0; \\ \Psi_1(\chi, t = 0) &= U \exp\left(\frac{\xi}{2} k \chi \sigma_3\right) C_1 && \text{при } \chi_0 < \chi < \chi_1; \\ \Psi_1(\chi, t = 0) &= \Psi_2^{(0)}(\chi, t = 0) C_2 && \text{при } \chi > \chi_1,\end{aligned}$$

где

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{sn} u \cos \gamma}{2\xi} & \frac{i \operatorname{cn} u \sin \gamma}{\xi + \operatorname{sn} u \cos \gamma} e^{-i\varphi_0} \\ -\frac{i}{2\xi} \operatorname{cn} u \sin \gamma e^{i\varphi_0} & 1 \end{pmatrix}, \quad \xi = \sqrt{\cos^2 \gamma - \operatorname{cn}^2 u}, \quad \det U = 1.$$

Постоянные матрицы $C_{1,2}$ находятся из условия непрерывности функции $\Psi_1(\chi, t = 0)$ в точках $\chi = \chi_{1,2}$. Отсюда получаем матрицу перехода:

$$\begin{aligned}T = C_2 &= \begin{pmatrix} a(u) & -\bar{b}(u) \\ b(u) & \bar{a}(u) \end{pmatrix} = \\ &= [\Psi_2^{(0)}(\chi, t = 0)]^{-1} U \exp\left(\frac{\xi}{2} k d \sigma_3\right) U^{-1} \Psi_1^{(0)}(\chi_0, t = 0).\end{aligned}$$

С учетом тождеств:

$$\frac{\sigma(\chi + iK' + 2K)}{\sigma(\chi + iK')} e^{-\eta_1 \chi} = -\frac{i}{k'} e^{\eta_1(K+iK')} [\operatorname{dn} \chi + k \operatorname{cn} \chi]; \quad \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u} = \frac{\operatorname{sn}(2u)}{1 + \operatorname{dn}(2u)},$$

условие обращения в нуль функции $\bar{a}(u)$ сводится к уравнению:

$$\xi \operatorname{cth}\left(\frac{\xi}{2} k d\right) - \frac{k \operatorname{sn}(2u, k)}{1 + \operatorname{dn}(2u, k)} \cos \gamma = 0. \quad (1.102)$$

Результаты численного счета говорят о том, что локализованное возмущение малой ширины $d \leq 0.8K$ расплывается на диспергирующие спиновые волны при $0 < \gamma \leq \pi/2$, а при $\pi/2 < \gamma \leq \pi$ – порождает два или более попарно одинаковых малоамплитудных солитона (1.85) со значениями $\rho \leq 0.2K$, $0 < \theta < 0.4\pi$, движущихся в противоположных направлениях.

Наибольший интерес представляют неподвижные солитоны. Значения параметров d , γ , при которых (1.102) имеет вещественный корень $u = -\rho$ ($0 < \rho < K$), соответствуют условиям формирования неподвижного солитона (1.91). Он хорошо различим на фоне структуры, когда ρ лежит в интервале:

$0.1K < \rho < K$. Солитоны со значениями $\rho < 0.1K$ мы считаем слабо локализованными и далее их не рассматриваем.

Будем понимать под высотой начального импульса (1.101) h величину $1 - S_3(x, t = 0) = 2 \sin^2(\gamma/2) = h$, $0 \leq h \leq 2$ (см. рисунок 1.14). Уравнение (1.102) решается явно только при $h = 0, 1, 2$. Для $h = 0$ и $h = 2$ оно имеет тривиальное решение $\rho = 0$. В случае $h = 1$ из (1.102) получим соотношение:

$$\operatorname{cn} \rho_n = \pi / [k d (1 + 2n)], \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (1.103)$$

согласно которому $\rho_n(h = 1, d)$ монотонно растет с увеличением ширины ступеньки d . Каждый корень $\rho_n(h = 1, d)$ параметризует неподвижный солитон (1.91) с частотой прецессии:

$$\omega(\rho_n)|_{h=1} = k \operatorname{cn} \rho_n \operatorname{dn} \rho_n = \pi [k^2 d (1 + 2n)]^{-1} \sqrt{k'^2 + \pi^2 d^{-2} (1 + 2n)^{-2}}.$$

Уравнение (1.103) не имеет корней при

$$k d < \pi \approx 0.67K \quad (1.104)$$

и имеет n вещественных корней, когда d лежит в интервале

$$\pi < k d < \pi(2n + 1), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.105)$$

Аналитические оценки (1.104), (1.105) получены для $h = 1$, однако, в широком интервале значений $0.4 \leq h \leq 1.6$, $d < 4K$ они выполняются с хорошей точностью.

Хорошо локализованный неподвижный солитон (1.91) формируется из начального импульса (1.101) шириной $d > K$ и высотой $h \geq 0.3$. Соответствующие численные и аналитические зависимости $\rho(h, d)$ приведены на рисунке 1.15, 1.16. Жирные точки соответствуют данным численного счета, сплошные линии построены по формуле (1.102). Примечательно, что с ростом ширины d – при значениях $d \geq 2K$, $h \geq 1$ – формирование неподвижного солитона (1.91) с $0.4K \leq \rho \leq 0.6K$ (рисунки 1.15, 1.16) сопровождается образованием одной или более пар малоамплитудных движущихся солитонов (1.85), а также еще одного неподвижного солитона (1.91) со значениями $\rho \leq 0.2K$. Эти значения ρ тоже удовлетворяют уравнению (1.102), но на рисунках 1.15, 1.16 мы их не приводим во избежание загромождения. Второй неподвижный солитон находится на расстоянии порядка двух периодов структуры от первого. Центры неподвижных

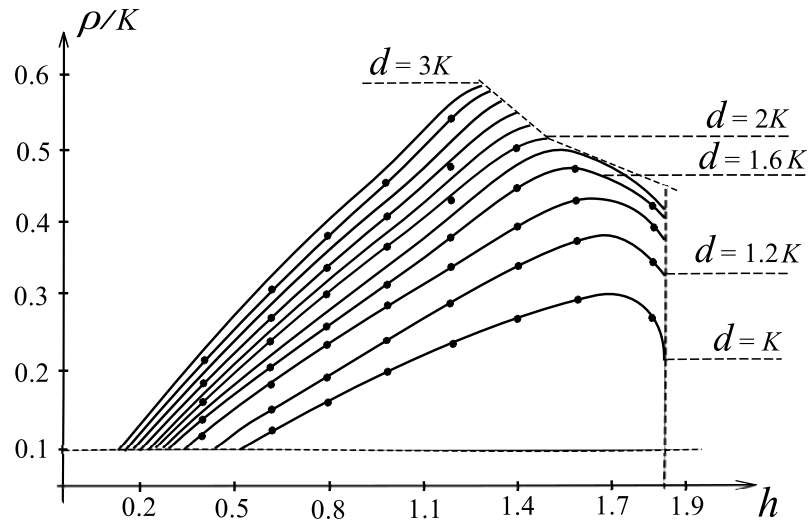


Рисунок 1.15 — Зависимость $\rho(0 < h \leq 1.9, d = \text{const})$ (1.102) и данные численного счета для неподвижного солитона (1.91) при значениях $d = K, 1.2K, 1.4K, 1.6K, \dots, 3K$.

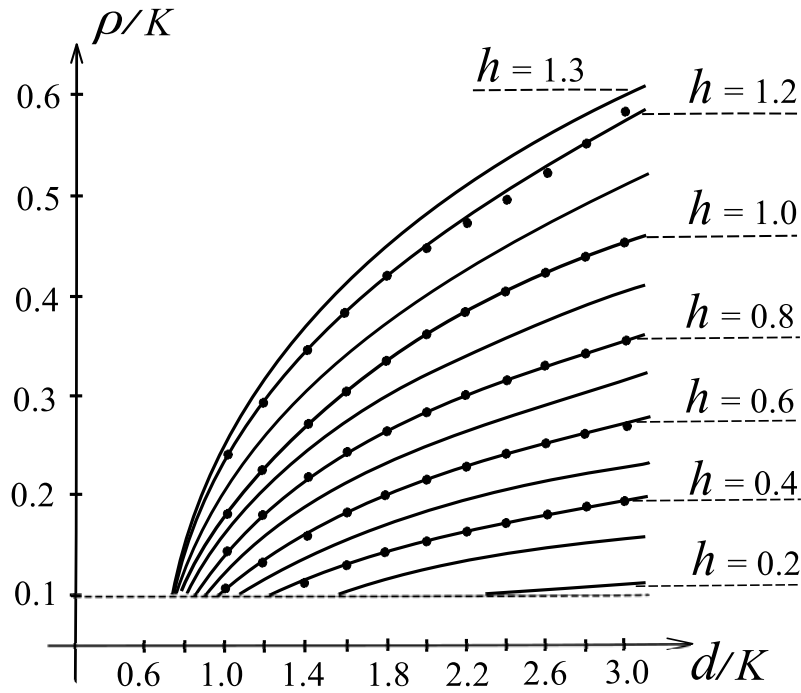


Рисунок 1.16 — Зависимость $\rho(h = \text{const}, 0.8K \leq d \leq 3K)$ и данные численного счета для неподвижного солитона (1.91) при значениях $h = 0.2, 0.3, 0.4, \dots, 1.3$.

солитонов располагаются, соответственно, правее и левее середины начального импульса (1.101). Число движущихся солитонов увеличивается с ростом ширины, либо высоты начального распределения (1.101). При $d > 4K$ начальная ступенька (1.101) порождает комплекс многосолитонных возбуждений.

Отметим, что при $d \geq 2K, h \geq 1.3$ левая часть (1.102) оказывается близкой к нулю на всем интервале значений $0.4K \leq \rho \leq 0.6K$. В этом случае уравнение (1.102) дает лишь качественную оценку зависимости $\rho(h, d)$. Потому

на рисунке 1.15 соответствующие участки вырезаны штриховой ломаной линией. По той же причине на рисунке 1.16 отсутствуют кривые для $h > 1.3$. Мы также не рассматриваем область значений $h \geq 1.9$, поскольку для начальных импульсов большой высоты $h \sim 1.9$ крутизна кривых $\rho(h, d = \text{const})$ резко возрастает, и решения уравнения (1.102) становятся неустойчивыми. Численный счет показывает, что в этом случае начальное возмущение вместо одного неподвижного солитона порождает набор движущихся солитонов.

На интервале $0 < h < 1$ графики $\rho(h, d = \text{const})$ (рисунок 1.15) – почти прямые. Угол их наклона $\alpha(d)$ слабо зависит от h . С учетом этого, из (1.102) находим:

$$\text{tg}[\alpha(d)] = \frac{d\rho}{dh} = \left. \frac{d\rho}{dh} \right|_{\xi(\rho, h)=0} \approx \frac{d}{2} \left(\frac{n-1}{n+1} \right),$$

где $n \equiv 3d^{-1}\sqrt{d^2 - 16}$. Это приближение оказывается верным для значений $1.1K \leq d \leq 2K$.

Зависимость $\rho(h, d = \text{const})$ от высоты h начального импульса при его фиксированной ширине d немонотонна: она круто убывает, начиная с некоторого значения $1 < h_0(d) < 2$. Это означает, что из двух ступенек равной ширины d , но разных высот $0 < h_1 < 1$ и $h_2 > h_0(d) > 1$ может формироваться солитон (1.91) с одним и тем же значением ρ . Начальное возмущение высотой $h_2 > h_0(d)$ сбрасывает часть энергии в виде излучения, понижая свою высоту до уровня $0 < h_1 < 1$, а после из него формируется солитон со значением $\rho = \rho(h_1, d)$.

На рисунке 1.16 сплошными линиями нарисованы кривые $\rho(h = \text{const}, d)$ для значений $h \leq h_0(d = 3K) = 1.4$. При $d > 3K$ зависимость $\rho(h = \text{const}, d)$ «выходит на насыщение». Возмущение (1.101) ширины $3K < d < 4K$ сначала сужается до $d \sim 3K$, сбрасывая излишек энергии в виде диспергирующих волн, а затем из него формируется неподвижный солитон (1.91) со значениями $\rho \leq 0.7K$.

Солитоны со значениями $\rho_1 \geq 0.7K$ не удастся возбудить в численных экспериментах даже при $h = 2$, т. е. при полном перемагничивании части структуры. В интервале значений $0.7K < \rho < 0.9K$ размер ядра солитона в полосовой доменной структуре существенно больше длины одного домена, но не превышает периода структуры. Пульсации протяженного ядра вызывают заметные колебания намагниченности в сдвинутой ядром полосовой структуре. При больших ρ индуцированные колебания захватывают несколько соседних с

ядром доменов и локализируют около ядра добавочную энергию солитона. Возможно этим объясняется то, что солитоны с ядрами, превышающими длину домена, не удается возбуждать и диагностировать в численных экспериментах.

Неподвижный солитон (1.94) также не удалось получить в численном счете. Фаза прецессии намагниченности в его центре имеет скачок на π . Это условие препятствует его возбуждению из начального возмущения вида (1.101).

ВЫВОДЫ

1. На основе модификации метода обратной задачи рассеяния получены новые точные решения уравнения Ландау – Лифшица, которые описывают солитоны, сильно связанные с полосовой доменной структурой легкоосного ферромагнетика. Показано, что эти солитоны служат элементарными переносчиками макроскопических сдвигов структуры. Выявлена взаимосвязь скорости солитонов в доменной структуре с внутренней динамикой и протяженностью их ядер. Детально проанализированы неподвижные внутридоменные солитонные возбуждения. Установлено, что неоднородность прецессии намагниченности в ядрах неподвижных солитонов вызывает синфазные продольные колебания удаленных от ядер доменных границ структуры.

2. Исследовано изменение структуры солитонов в случае, когда их частоты приближаются к границам спин-волнового спектра. Выявлено, что при таком условии они трансформируются в малоамплитудные спиновые волны, либо в периодические всплески сильных модуляций доменной структуры. Показано, что модуляции сопровождаются возвратно–поступательными перемещениями группы доменных границ вдоль структуры, а также процессами вращения намагниченности в нескольких соседних доменах. Возможность формирования подобных возбуждений следует учитывать при анализе процессов перемагничивания легкоосного ферромагнетика.

3. В ходе численного моделирования выявлены необходимые условия и рассмотрены типичные сценарии генерирования солитонов в доменной структуре после локального перемагничивания структуры внешним полем. Показано, что полученные аналитические результаты находятся в хорошем согласии с численным экспериментом и могут быть использованы для генерации неподвижных солитонов с требуемыми характеристиками.

2 СОЛИТОНЫ И ДИСПЕРГИРУЮЩИЕ ВОЛНЫ В ДОМЕННОЙ СТРУКТУРЕ ДВУХОСНОГО ФЕРРОМАГНЕТИКА

В предыдущей главе для построения и анализа солитонов в доменной структуре ферромагнетика с анизотропией типа «легкая ось» разработана удобная техника интегрирования модели Ландау – Лифшица с помощью задачи Римана на торе [A1; A4]. Риманова поверхность, топологически эквивалентная тору, возникает из-за наличия полосовой доменной структуры. Преимущество подхода – в том, что он позволяет исследовать солитоны, сильно связанные с доменной структурой, в терминах хорошо изученных эллиптических функций.

Заметим, что при использовании модели легкоосного ферромагнетика в уравнении Ландау – Лифшица пренебрегают магнитостатическими силами, полагая что их основной вклад учтен заданием периода доменной структуры [A2; A4]. Это приближение лучше описывает полосовые структуры с блоховскими доменными границами, которые не создают магнитостатических полей.

В данной главе исследуются солитоны, встроенные в доменную структуру, с учетом магнитостатических взаимодействий в рамках более реалистичной модели ферромагнетика с двухосной анизотропией. Изложение материала главы основано на работах [A10; A11]. С помощью задачи Римана на торе найдены решения уравнения Ландау – Лифшица, которые описывают солитоны и диспергирующие волны в физически выделенной доменной структуре двухосного ферромагнетика. Детально изучены решения уравнения Ландау – Лифшица, соответствующие солитонам в такой структуре. Исследованы строение и свойства неподвижных и движущихся солитонов. Рассмотрено поведение солитонов вблизи границ области их существования. Проведен сравнительный анализ солитонных ядер в доменных структурах легкоосного и двухосного ферромагнетиков. Показано, что даже при наличии сильно нелинейного неоднородного фонового состояния среды интегралы движения любых локализованных распределений намагниченности в доменной структуре двухосного ферромагнетика имеют спектральные представления в виде сумм независимых вкладов солитонов и спиновых волн. Анализ диспергирующих нелинейных волн в доменной структуре сведен к решению системы линейных интегральных уравнений.

2.1 Основные уравнения. Анализ устойчивости доменной структуры в линейном приближении

Плотность энергии ферромагнетика с квадратичной по намагниченности анизотропией записывается в виде [29; 30; 61]:

$$w = \frac{\alpha}{2} (\partial_i \mathbf{M} \cdot \partial_i \mathbf{M}) - \frac{1}{2} (\mathbf{M} \cdot \tilde{K}_a \mathbf{M}) - \frac{1}{2} (\mathbf{H}^{(m)} \cdot \mathbf{M}),$$

где $\alpha > 0$ – константа обменного взаимодействия, $\tilde{K}_a = \text{diag}(\tilde{K}_1, \tilde{K}_2, \tilde{K}_3)$ – постоянные кристаллографической магнитной анизотропии. Внутреннее магнитное поле $\mathbf{H}^{(m)}$ определяется уравнениями магнитостатики:

$$\text{rot } \mathbf{H}^{(m)} = 0, \quad \text{div}(\mathbf{H}^{(m)} + 4\pi\mathbf{M}) = 0. \quad (2.1)$$

В дальнейшем мы будем рассматривать одномерные возбуждения вдоль оси Ox в безграничном образце. Тогда, $\mathbf{M} = \mathbf{M}(x, t)$, где x – пространственная координата, t – время. В этом случае уравнение магнитостатики (2.1) имеет явное решение: $\mathbf{H}^{(m)} = -4\pi M_1(x, t) \mathbf{e}$, $\mathbf{e} = (1, 0, 0)$ (приближение Винтера [62]). Вклады энергии магнитной анизотропии и размагничивающего поля объединяются в эффективную плотность магнитной анизотропии, характеризующуюся постоянными $K^{\text{eff}} = \text{diag}(K_1, K_2, K_3)$, $K_1 = \tilde{K}_1 - 4\pi$, $K_{2,3} = \tilde{K}_{2,3}$. Мы полагаем, что $K_1 < K_2 < K_3$.

Тогда нелинейная динамика двухосного ферромагнетика будет описываться уравнением Ландау – Лифшица [61; 63]:

$$\partial_t \mathbf{M} = -\gamma [\mathbf{M} \times (\alpha \partial_x^2 + K^{\text{eff}}) \mathbf{M}]; \quad \mathbf{M}^2 = M_0^2,$$

где γ – гиромагнитное отношение. В безразмерных переменных $\mathbf{M} = -M_0 \mathbf{S}$, $t' = \gamma M_0 (K_3 - K_1) t$, $x' = x \sqrt{(K_3 - K_1)/\alpha}$ оно принимает вид:

$$\partial_{t'} \mathbf{S} = [\mathbf{S} \times (\partial_{x'}^2 + J) \mathbf{S}]; \quad \mathbf{S}^2 = 1, \quad J = \text{diag}(J_1, J_2, J_3) = K^{\text{eff}} / (K_3 - K_1), \quad (2.2)$$

Ниже мы опускаем штрихи над новыми переменными.

Модель (2.2) допускает формирование статичной доменной структуры. В параметризации

$$\mathbf{S} = (\sin \theta \cos \Phi, \sin \theta \sin \Phi, \cos \theta) \quad (2.3)$$

полосовой доменной структуре с «блоховскими» доменными стенками соответствует следующее решение уравнения (2.2) [31; 32; 40]:

$$\begin{aligned} \Phi &= \nu \pi/2 = \text{const}, \quad \nu = \pm 1; & \theta(\chi) &= \theta_0 = \pi/2 - \text{am}(\chi, k); \\ \chi &= x \sqrt{J_3 - J_2/k}; & \sin \theta_0 &= \text{cn}(\chi, k), \quad \cos \theta_0 = \text{sn}(\chi, k), \quad \partial_\chi \theta_0 = -\text{dn}(\chi, k) \end{aligned} \quad (2.4)$$

(см. рисунок 1.1). Как и в предыдущих главах, мы используем стандартные обозначения $\text{am}(\chi, k)$, $\text{sn}(\chi, k)$, $\text{cn}(\chi, k)$, $\text{dn}(\chi, k)$ для эллиптической амплитуды Якоби и эллиптических функций Якоби с модулем $0 \leq k \leq 1$ [41; 42]. Величина k задает период $4Kk/\sqrt{J_3 - J_2}$ доменной структуры; $K = K(k)$ – полный эллиптический интеграл первого рода. Доменные стенки полосовой структуры сами по себе сильно нелинейны. Они представляют узкие области шириной $2K'k/[\pi \sqrt{J_3 - J_2}]$ ($K' = K(k')$; $k' = \sqrt{1 - k^2}$ – дополнительный модуль эллиптических функций Якоби), в пределах которых вектор намагниченности совершает разворот от одного равновесного положения $\mathbf{S} = (0, 0, 1)$ к другому $\mathbf{S} = (0, 0, -1)$.

Исследуем устойчивость полосовой структуры (2.4) относительно малых возмущений. Для этого введем новое векторное поле \mathbf{m} : $\mathbf{S} = D \mathbf{m}$, где D – ортогональная матрица:

$$D = FT, \quad F = \text{diag}(\nu, \nu, 1), \quad \nu = \pm 1, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_0 & \sin \theta_0 \\ 0 & -\sin \theta_0 & \cos \theta_0 \end{pmatrix}.$$

В таком представлении доменной структуре отвечает вектор $\mathbf{m} = (0, 0, 1)$. Малые колебания намагниченности вблизи структуры описываются комплексным полем $\Psi(x, t)$ ($|\Psi| \ll 1$):

$$m_1 + i m_2 = \Psi, \quad m_3 = 1 - |\Psi|^2/2.$$

В линейном приближении, из (2.2) для $\Psi(x, t)$ получаем уравнение:

$$i \partial_t \Psi + \left(\frac{\kappa}{k}\right)^2 \left[(\partial_\chi^2 + k^2 - 2k^2 \text{sn}^2 \chi) \Psi + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{k^2}{\kappa^2}\right) (\Psi + \Psi^*) \right] = 0, \quad (2.5)$$

где $\kappa = \sqrt{J_3 - J_2}$ ($0 < \kappa \leq 1$). Общее решение уравнения (2.5) записывается в терминах функций Ламе $\Lambda(\pm u, \chi)$ [43]:

$$\Psi(x, t) = \int_{-K'}^{K'} dv \sum_{s=1}^2 \left[\alpha(u_s) \Lambda(u_s, \chi) e^{-i\omega(u_s)t} + \beta^*(u_s) \Lambda^*(u_s, \chi) e^{i\omega^*(u_s)t} \right], \quad (2.6)$$

где

$$\Lambda(u, \chi) = \frac{\sigma(\chi - u) \sigma(\chi - u + 2K)}{\sigma(\chi + iK') \sigma(\chi + iK' + 2K)} \exp \left[\frac{\eta_1 \chi u}{K} + Z(u) \chi + 2\eta_3 \chi \right].$$

Здесь $u_1 = iv$, $u_2 = iv + K$, сигма-функции Вейерштрасса имеют периоды $[4K, 2iK']$, и $p_\Lambda(u) = iZ(u, k)$ – квазиимпульс функции Ламе: $\Lambda(u, \chi + 4K) = \Lambda(u, \chi) \exp[4Ki p_\Lambda(u)]$; $Z(u, k)$ – зета-функция Якоби с модулем k .

Возможные частоты $\omega(u_s)$ линейных мод:

$$\omega(u_s) = \left(\frac{\kappa}{k} \right)^2 \operatorname{dn}(u_s, k) \sqrt{\operatorname{dn}^2(u_s, k) + \frac{k^2 - \kappa^2}{\kappa^2}}$$

гарантированно вещественны только при $k^2 \geq \kappa^2$. Спектральные плотности $\alpha(u_s)$, $\beta(u_s)$ связаны между собой:

$$\beta(u_s) = \alpha(u_s) \left[\frac{2(k^2 \omega(u_s) - \kappa^2 \operatorname{dn}^2 u_s)}{k^2 - \kappa^2} - 1 \right].$$

Вследствие магнитостатического взаимодействия, средняя плотность энергии, приходящаяся на один период доменной структуры

$$\bar{w} = \frac{1}{2} \left(\frac{\kappa}{k} \right)^2 [E(k) - k'^2 K],$$

уменьшается с ростом k (при $k^2 \geq \kappa^2$). В дальнейшем мы будем рассматривать случай $k = \kappa = \sqrt{J_3 - J_2}$ ($\chi = x$). Тогда все формулы упрощаются:

$$\begin{aligned} 1 < \omega(u_1) = \operatorname{dn}^2(u_1, k) &= \frac{\operatorname{dn}^2(v, k')}{\operatorname{cn}^2(v, k')} < \infty, \\ 0 < \omega(u_2) = \operatorname{dn}^2(u_2, k) &= \frac{k'^2 \operatorname{cn}^2(v, k')}{\operatorname{dn}^2(v, k')} < k'^2; \quad \beta(u_{1,2}) \equiv 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Таким образом, в модели ферромагнетика с двухосной магнитной анизотропией доменная структура со значением $k = \kappa = [K_3 - K_2]/(K_3 - K_1)]^{1/2} = \sqrt{J_3 - J_2}$ устойчива относительно возбуждения в ней спиновых волн. Важно, что ее период $2L_0 = 4K(\kappa)$ фиксируется магнитостатическим взаимодействием.

В отличие от легкоосного ферромагнетика, линейный спектр полосовой структуры двухосного ферромагнетика с периодом $2L_0$ имеет две нейтрально устойчивые ветви. Одна из них соответствует активационным (внутридоменным), а вторая – бесцелевым (внутриграничным) колебаниям доменной структуры [31; 32]. В то же время, стабилизовавший солитоны легкоосного ферромагнетика закон сохранения проекции полного магнитного момента теперь разрушается ромбической анизотропией.

Интересно и важно, что доменная структура двухосного ферромагнетика с периодом $2L_0$ (при $k = \kappa$) выделена не только с физической, но и с математической точки зрения. Её риманова поверхность конгруэнтна римановой поверхности операторов вспомогательной линейной системы. В этом случае солитоны в доменной структуре двухосного ферромагнетика выражаются в терминах хорошо изученных и табулированных эллиптических функций. В последующих разделах мы проведем сравнительный анализ солитонов в доменных структурах легкоосного и двухосного ферромагнетиков.

Формирование солитонов в доменной структуре изменяет граничные условия задачи. Поэтому, мы будем исследовать решение модели (2.2) при следующих граничных условиях [A10; A11]:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(x, t) &\rightarrow \mathbf{S}_2^{(0)} = (0, \nu \sin \theta_0, \cos \theta_0), & x \rightarrow +\infty, \\ \mathbf{S}(x, t) &\rightarrow \mathbf{S}_1^{(0)} = (0, \nu \sin \theta_\Delta, \cos \theta_\Delta), & x \rightarrow -\infty, \end{aligned} \quad (2.8)$$

где $\theta_\Delta = \pi/2 - \text{am}(x + \Delta, k)$. Макроскопический сдвиг Δ далее свяжем с параметрами солитонов.

2.2 Процедура интегрирования модели Ландау – Лифшица двухосного ферромагнетика

2.2.1 Вспомогательная линейная система и функции Йоста. Задача Римана

Основой метода интегрирования модели (2.2) служит вспомогательная линейная система (U - V -пара) [51]:

$$\begin{aligned} \partial_x \Psi &= -\frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^3 w_\alpha S_\alpha \sigma_\alpha \Psi \equiv U \Psi, \\ \partial_t \Psi &= -\sum_{\alpha=1}^3 w_\alpha ([\mathbf{S} \times \partial_x \mathbf{S}]_\alpha + a_\alpha S_\alpha) \sigma_\alpha \Psi \equiv V \Psi, \end{aligned} \quad (2.9)$$

условие совместности которой равносильно уравнению (2.2). Здесь σ_α – матрицы Паули, коэффициенты w_α подчинены ограничению:

$$w_\alpha^2 - w_\beta^2 = J_\alpha - J_\beta, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3, \quad (2.10)$$

а коэффициенты a_α получаются из соотношения: $a_1 = i w_2 w_3$ циклической перестановкой индексов. Для физически выделенной доменной структуры алгебраическую кривую (2.10) удастся униформизовать эллиптическими функциями с тем же модулем $k = \kappa$, что и полосовую структуру:

$$w_1 = i \operatorname{dn}(u, k), \quad w_2 = i k \operatorname{cn}(u, k), \quad w_3 = k \operatorname{sn}(u, k), \quad (2.11)$$

где u – спектральный параметр. Функции Якоби (2.11) мероморфны и двоякопериодичны по параметру u с периодами $4K(k)$, $4iK'(k)$. Это обстоятельство позволяет с помощью представления (2.9) исследовать встроенные в доменную структуру солитоны в терминах хорошо изученных эллиптических функций. При этом построение решений линейной системы (2.9) удастся осуществить с помощью техники, развитой для легкоосного ферромагнетика [A1].

Как и ранее, будем использовать метод «одевания» частных решений модели, отвечающих наличию доменной структуры. Полосовой доменной структуре

$$\theta_0(x + \delta) = \pi/2 - \operatorname{am}(x + \delta, k), \quad \varphi_0 = \nu \pi/2,$$

(где $\nu = \pm 1$, $\delta = \operatorname{const}$ – сдвиг доменной структуры вдоль оси Ox), соответствует следующая вспомогательная система:

$$\partial_x \Psi_\delta^{(0)} = -\frac{1}{2} (w_3 \sigma_3 \cos \theta_0 + \nu w_2 \sin \theta_0 \sigma_2) \Psi_\delta^{(0)}, \quad (2.12)$$

$$\partial_t \Psi_\delta^{(0)} = -\frac{w_1}{2} (i w_2 \sigma_3 \cos \theta_0 - \nu \partial_x \theta_0 \sigma_1 + i \varepsilon w_3 \sin \theta_0 \sigma_2) \Psi_\delta^{(0)}. \quad (2.13)$$

Матрица $\Psi_\delta^{(0)}$ фундаментальных решений системы (2.12), (2.13) имеет вид:

$$\Psi_\delta^{(0)}(u, x, t) = \tilde{M}(u, x + \delta) \exp \left[A(u, \chi, t) \sigma_3 + \frac{\eta_1 u \delta}{2K} \sigma_3 \right];$$

$$A(u, x, t) = i p(u) x + \frac{it}{2} \operatorname{dn}^2(u, k),$$

$$p(u) = \frac{1}{2i} \left(\frac{\eta_1 u}{K} - \eta_1 - \zeta(u + iK') - \zeta(u - iK' - 2K) \right) =$$

$$= \frac{i}{2} Z(u, k) = -\frac{p_\Lambda(u)}{2};$$

$$\tilde{M}(u, x) = M(u, x) \operatorname{diag}([\sigma(u + K + iK')]^{-1}, [\sigma(-u + K + iK')]^{-1});$$

$$\begin{aligned}
M(u, x) &= \\
&= \begin{pmatrix} \sigma(x + u + K + iK') & -i \nu \sigma(x - u - K + iK') e^{\eta_1(x+iK'-u)} \\ i \nu \sigma(x + u - K + iK') e^{\eta_1(x+iK'+u)} & \sigma(x - u + K + iK') \end{pmatrix} \times \\
&\times m(x) \exp \left[-\frac{\eta_1 u x}{2K} \sigma_3 \right]; \quad m(x) = \left[\frac{\sigma(iK') \sigma(iK' + 2K)}{2 \sigma(x + iK') \sigma(x + iK' + 2K)} \right]^{1/2} \quad (2.14)
\end{aligned}$$

$\det \tilde{M}(u, x) = 1$. Здесь $\sigma(u)$ и $\zeta(u)$ – сигма- и дзета-функции Вейерштрасса с периодами $[4K, 2iK']$; $K' = K(k')$; $k' = \sqrt{1 - k^2}$ – дополнительный модуль эллиптических функций Якоби; $Z(u, k)$ – дзета-функция Якоби; трансформационные свойства функций Вейерштрасса определяются вещественным параметром $\eta_1 = \zeta(2K)$ и мнимым параметром $\eta_3 = \zeta(iK')$ [41–43]. Ветвь квадратного корня в определении $m(x)$ выбираем так, чтобы выполнялось условие: $m(x \pm 4K) = -m(x) \exp[\mp 2\eta_1(x + iK' + K \pm 2K)]$. Символ «diag» означает диагональную матрицу. В параллелограмме периодов единственными особенностями функций $\sigma(u)$ и $\zeta(u)$ являются простые нули и полюсы [41; 43]. Поэтому представление (2.14) хорошо выявляет аналитические свойства матричной функции $\Psi_\delta^{(0)}(u)$.

Функция $M(u, x)$ периодична по x с периодом $4K$, а функция $\Psi_\delta^{(0)}(u, x)$ – квазипериодична, – при сдвиге на период она приобретает дополнительный множитель:

$$\Psi_\delta^{(0)}(u, x \pm 4K, t) = \Psi_\delta^{(0)}(u, x, t) \exp[\pm 4K i p(u) \sigma_3].$$

Это означает, что для нее величина $p(u)$ играет роль «блоховского квазиимпульса».

Граничным условиям (2.8) соответствуют фундаментальные решения Йоста вспомогательной линейной системы (2.9) с асимптотическими условиями:

$$\begin{aligned}
\Psi_1 &\rightarrow \Psi_1^{(0)} = \Psi_{\delta_1=\Delta}^{(0)} && \text{при } x \rightarrow -\infty; \\
\Psi_2 &\rightarrow \Psi_2^{(0)} = \Psi_{\delta_2=0}^{(0)} && \text{при } x \rightarrow +\infty.
\end{aligned} \quad (2.15)$$

На контуре

$$\Gamma = \{u : \text{Im} p(u) = 0\} = \{\text{Re} u = 0, K; \quad |\text{Im} u| \leq 2K'\}, \quad \text{mod}(2K, 4iK') \quad (2.16)$$

решения $\Psi_{1,2}(u)$ имеют осциллирующее поведение. Множество Γ соответствует непрерывному спектру задачи (2.9), (2.15). При значениях $u \in \Gamma$ решения Йоста $\Psi_{1,2}$ связаны между собой матрицей перехода:

$$\Psi_1(u) = \Psi_2(u) T(u), \quad u \in \Gamma. \quad (2.17)$$

Отсюда получаем представление:

$$T(u, t) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\Psi_2(u, x, t))^{-1} \Psi_1(u, x, t). \quad (2.18)$$

Свойства симметрии вспомогательной линейной системы (2.9) и асимптотических условий (2.15) приводят к ограничениям на решения Йоста Ψ_j ($j = 1, 2$)

$$\begin{aligned} \Psi_j(u \pm 2iK') &= \sigma_3 \Psi_j(u) \sigma_3 \exp[\pm 2\delta_j \eta_3 \sigma_3]; & \Psi_j^*(-u^*) &= \sigma_2 \Psi_j(u) \sigma_2; \\ \Psi_j(u \pm 2K) &= -\nu \sigma_1 \Psi_j(u) \sigma_3 Q(u) \exp[\pm \delta_j \eta_1 \sigma_3], \end{aligned} \quad (2.19)$$

$Q(u) = \text{diag}(q(u), q^{-1}(u))$, $\delta_1 = \Delta$, $\delta_2 = 0$, и конкретизируют вид $T(u)$:

$$\begin{aligned} T(u) &= \begin{pmatrix} a(u) & -\bar{b}(u) \\ b(u) & \bar{a}(u) \end{pmatrix}, & \bar{a}(u) &= a^*(-u^*), & \bar{b}(u) &= b^*(-u^*), & (2.20) \\ a(u)\bar{a}(u) + b(u)\bar{b}(u) &= 1; & T(u \pm 2iK') &= \sigma_3 T(u) \sigma_3 \exp[\pm 2\Delta \eta_3 \sigma_3]; \\ T(u \pm 2K) &= Q^{-1}(u) \sigma_3 T(u) \sigma_3 Q(u) \exp[\pm \Delta \eta_1 \sigma_3]. \end{aligned}$$

Таким образом, решения Йоста $\Psi_{1,2}$ и коэффициенты матрицы перехода $T(u)$ приобретают дополнительные множители при сдвигах по спектральному параметру u . Входящий в (2.19), (2.20) множитель $q(u)$ может быть записан двояко – в терминах сигма-функций Вейерштрасса с периодами $[4K, 2iK']$, либо через эллиптические функции Якоби:

$$q(u) = \frac{1}{i} \frac{\sigma(u - K + iK')}{\sigma(u + K + iK')} e^{\eta_1(u + iK')} = \frac{\text{dn}(u, k)}{1 + k \text{sn}(u, k)} = \frac{1 - k \text{sn}(u, k)}{\text{dn}(u, k)}. \quad (2.21)$$

Связь различных форм записи (2.21) устанавливается в [41; 43].

В дальнейшем удобно использовать не сами решения $\Psi_{1,2}$, а матричные функции $\chi_+(u) \equiv (\Psi_2^{(1)}(u), \Psi_1^{(2)}(u))$, $\chi_-(u) \equiv (\Psi_1^{(1)}(u), \Psi_2^{(2)}(u))$. Здесь использовано обозначение $\Psi_{1,2}^{(i)}$ для i -ого столбца матрицы $\Psi_{1,2}(u)$; $i = 1, 2$. Матричная функция $\chi_+(u)$ аналитически продолжается с контура Γ в области

$$D_+ = \{u : \text{Im}p(u) > 0\} = \{0 < \text{Re}u < K, \quad |\text{Im}u| \leq 2K'\}, \quad \text{mod}(2K, 4iK')$$

(см. рисунок 2.1), а в областях

$$D_- = \{u : \text{Im}p(u) < 0\} = \{-K < \text{Re}u < 0, \quad |\text{Im}u| \leq 2K'\}, \quad \text{mod}(2K, 4iK')$$

оказывается аналитической функция $\chi_-(u)$.

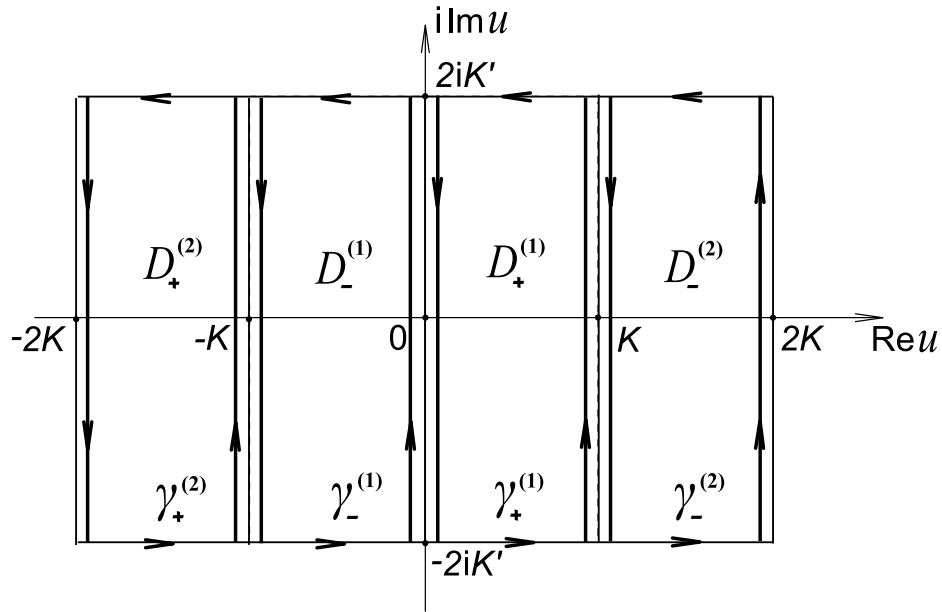


Рисунок 2.1 — Области D_{\pm} в фундаментальном прямоугольнике со сторонами $[4K, 4iK']$. Контуры γ_{\pm} представляют границы областей D_{\pm} с направлениями обхода против часовой стрелки.

Выделим из функций $\chi_{\pm}(u)$ множитель $\Psi_{\Delta/2}^{(0)}(u)$, содержащий их существенные особенности на контуре Γ :

$$\chi_{\pm}(u, x, t) = \Psi_{\pm}(u, x, t) \Psi_{\Delta/2}^{(0)}(u, x, t). \quad (2.22)$$

Тогда задача интегрирования вспомогательной линейной системы (2.9) сведется к решению следующей задачи Римана теории функций комплексной переменной. Нужно построить аналитические в областях D_- и D_+ функции $\Psi_-(u)$ и $\Psi_+(u)$, удовлетворяющие условию сопряжения на контуре Γ :

$$\begin{aligned} \Psi_-(u) &= \Psi_+(u)G(u), \\ G(u) &= \frac{\Psi_{\Delta/2}^{(0)}(u, x, t)}{\bar{a}(u)} \begin{pmatrix} 1 & \bar{b}(u) \\ b(u) & 1 \end{pmatrix} [\Psi_{\Delta/2}^{(0)}(u, x, t)]^{-1}, \quad u \in \Gamma, \end{aligned} \quad (2.23)$$

редукциям

$$\begin{aligned} \Psi_+(u \pm 2iK') &= \sigma_3 \Psi_+(u) \sigma_3 \exp[\mp \Delta \eta_3], \\ \Psi_-(u \pm 2iK') &= \sigma_3 \Psi_-(u) \sigma_3 \exp[\pm \Delta \eta_3]; \\ \Psi_+(u \pm 2K) &= \sigma_1 \Psi_+(u) \sigma_1 \exp[\mp \Delta \eta_1/2], \\ \Psi_-(u \pm 2K) &= \sigma_1 \Psi_-(u) \sigma_1 \exp[\pm \Delta \eta_1/2] \end{aligned} \quad (2.24)$$

и ограничению

$$\Psi_+^*(-u^*) = \sigma_2 \Psi_-(u) \sigma_2. \quad (2.25)$$

Заметим, что функции $\Psi_{\pm}(u)$ квазипериодичны по параметру u с периодами $[4K, 4iK']$. Поэтому задачу (2.23)-(2.25) называют задачей Римана на торе. Условие сопряжения (2.23) является иной формой записи связи (2.17) фундаментальных решений на контуре Γ . Свойства симметрии (2.24), (2.25) следуют из трансформационных свойств (2.19) фундаментальных решений $\Psi_{1,2}(u)$.

Отметим, что в данном случае задача Римана (2.23) не нормирована в какой-либо точке спектрального параметра. Поэтому ее решения доопределяются асимптотическими условиями:

$$\begin{aligned} \chi_+(u) &\rightarrow \Psi_1^{(0)}(u) \begin{pmatrix} 1 & -\bar{b}(u) \\ 0 & \bar{a}(u) \end{pmatrix}, & \chi_-(u) &\rightarrow \Psi_2^{(0)}(u) \begin{pmatrix} a(u) & 0 \\ b(u) & 1 \end{pmatrix}, & x &\rightarrow +\infty; \\ \chi_+(u) &\rightarrow \Psi_1^{(0)}(u) \begin{pmatrix} \bar{a}(u) & 0 \\ -b(u) & 1 \end{pmatrix}, & \chi_-(u) &\rightarrow \Psi_2^{(0)}(u) \begin{pmatrix} 1 & \bar{b}(u) \\ 0 & a(u) \end{pmatrix}, & x &\rightarrow -\infty \end{aligned} \quad (2.26)$$

которые следуют из связи (2.17) функций $\Psi_{1,2}(u)$ на контуре Γ .

Связь (2.17) также дает соотношения:

$$a(u) = \det \chi_-(u) = \det \Psi_-(u), \quad \bar{a}(u) = \det \chi_+(u) = \det \Psi_+(u), \quad (2.27)$$

которые показывают, что элементы $a(u)$ и $\bar{a}(u)$ матрицы перехода аналитически продолжаются с контура Γ в областях D_- и D_+ соответственно.

Если функции $a(u)$ и $\bar{a}(u)$ имеют нули в областях своей аналитичности, то их множество соответствует дискретному спектру задачи (2.9), (2.15). Далее для определенности считаем все нули простыми. Тогда, в силу редукций (2.20), нули функции $\bar{a}(u)$ в областях D_+ должны иметь вид:

$$u = \mu_s, \mu_s^* - 2K, \quad s = 1, 2, \dots, N, \quad \text{mod}(4K, 2iK'). \quad (2.28)$$

Нули коэффициента $a(u)$ редукциями (2.20) связаны с нулями (2.28):

$$u = -\mu_s^*, -\mu_s + 2K, \quad s = 1, 2, \dots, N, \quad \text{mod}(4K, 2iK'). \quad (2.29)$$

Солитонам отвечают решения задачи Римана (2.23) с нулями коэффициентов $a(u)$ и $\bar{a}(u)$, когда $b(u) = \bar{b}(u) \equiv 0$. В этом случае свойство унимодулярности матрицы перехода (см. (2.20)) сводится к равенству:

$$a(u)\bar{a}(u) = 1. \quad (2.30)$$

Принимая во внимание, что для любой невырожденной 2×2 матрицы справедливо тождество:

$$A^{-1} = \frac{\sigma_2 A^T \sigma_2}{\det A},$$

где «Т» означает транспонирование, из (2.25), (2.27) получаем соотношение:

$$\Psi_-^{-1}(u) = \Psi_+^\dagger(-u^*)/a(u), \quad (2.31)$$

где символ «†» означает эрмитово сопряжение. С учетом (2.31), (2.30), условие сопряжения солитонных матриц $\Psi_-(u)$ и $\Psi_+(u)$ на контуре Γ выражается в терминах одной из них:

$$\Psi_+^\dagger(-u^*)\Psi_+(u) = \Psi_+(u)\Psi_+^\dagger(-u^*) = I, \quad u \in \Gamma. \quad (2.32)$$

Здесь I – единичная матрица.

Для солитонных возбуждений функции $\Psi_+(u)$ и $\bar{a}(u)$ мероморфны в фундаментальном прямоугольнике со сторонами $4K$, $4iK'$. В областях D_+ они вырождены в точках (2.28), а в областях D_- имеют полюсы, совпадающие с нулями (2.29) коэффициента $a(u) = \det \Psi_+^\dagger(-u^*)$.

Квазипериодическая мероморфная функция $\bar{a}(u)$ восстанавливается по своим нулям, полюсам и редукциям [11; 43]. Для N -солитонного состояния она имеет вид:

$$\bar{a}_{\text{sol}}(u) = \prod_{s=1}^N \frac{\sigma(u - \mu_s)\sigma(u - \mu_s^* + 2K)}{\sigma(u + \mu_s^*)\sigma(u + \mu_s + 2K)} e^{\eta_1(\mu_s + \mu_s^*)}. \quad (2.33)$$

Здесь $\mu_s \in D_+$, периоды сигма-функций Вейерштрасса – $[4K, 2iK']$. Представление (2.33) приводит к верным трансформационным свойствам (2.20) функции $\bar{a}(u)$ только при условии, что положения ее нулей связаны со сдвигом Δ доменной структуры:

$$\sum_{s=1}^N (\mu_s + \mu_s^*) = \Delta/2, \quad \text{mod}(4K). \quad (2.34)$$

Далее для определенности полагаем $0 < \text{Re}\mu_s < K$, $|\text{Im}\mu_s| < K'$.

2.2.2 Односолитонное решение задачи Римана

Перейдем к построению матричной функции $\Psi_+(u, x, t)$ для односолитонного возбуждения в доменной структуре (2.4). Вычисления близки к проведенным в главе 1. Из-за наличия в (2.24) множителей $\exp[\pm\Delta\eta_3]$,

$\exp[\pm\Delta\eta_1/2]$ матрица $\Psi_+(u)$ не является двоякопериодической, что затрудняет ее построение. Обойдем эту трудность. Для этого сначала построим мероморфную функцию $f^\dagger(u^*)$ с периодами $[4K, 4iK']$, удовлетворяющую ограничениям:

$$f(u \pm 2iK') = \sigma_3 f(u) \sigma_3, \quad f^*[(-u \pm 2K)^*] = \sigma_3 f(u) \sigma_3, \quad f(-u) f^\dagger(u^*) = I, \quad (2.35)$$

в которых лишние множители отсутствуют. Второе соотношение (2.35) служит аналогом двух последних редукций (2.24).

Задача построения функции $f^\dagger(u^*)$ близка к рассмотренной в работах [53–55] для бризера на фоне нелинейной волны намагниченности. Согласно (2.35), односолитонная функция $f^\dagger(u^*)$ будет иметь в параллелограмме периодов четыре нуля:

$$u = \mu^*, \quad \mu^* - 2iK', \quad -\mu^* + 2K, \quad -\mu^* - 2K + 2iK', \quad (2.36)$$

и четыре полюса $u = \mu_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$):

$$\mu_1 = -\mu, \quad \mu_2 = -\mu + 2iK', \quad \mu_3 = \mu^* + 2K, \quad \mu_4 = \mu^* - 2K - 2iK'. \quad (2.37)$$

По модулю периодов $[4K, 4iK']$ сумма нулей (2.36) соизмерима с суммой полюсов (2.37). Будем искать $f^\dagger(u^*)$ в виде разложения по квазипериодическим дзета-функциям Вейерштрасса с периодами $[4K, 4iK']$:

$$f^\dagger(u^*) = (I + A \zeta_1 + B \zeta_2 + C \zeta_3 + D \zeta_4) R, \quad \zeta_i \equiv \zeta(u - \mu_i). \quad (2.38)$$

Здесь A, B, C, D, R – независящие от u матричные коэффициенты; дзета-функции обладают свойствами [43]:

$$\begin{aligned} \zeta(u \pm 4iK') &= \zeta(u) \pm 2\eta_3, & \zeta(u \pm 4K) &= \zeta(u) \pm 2\eta_1, & \zeta(-u) &= -\zeta(u); \\ \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 &= 0, & \eta_2 &= -\zeta(2K + 2iK'), & \eta_1 &= \zeta(2K), & \eta_3 &= \zeta(2iK'). \end{aligned}$$

Сумма вычетов любой двоякопериодической функции в параллелограмме периодов всегда равна нулю [43], поэтому должно выполняться условие:

$$A + B + C + D = 0. \quad (2.39)$$

Первые две редукции (2.35) приводят к связям между матрицами:

$$R = R^* = \sigma_3 R \sigma_3, \quad B = \sigma_3 A \sigma_3, \quad C = \sigma_3 D \sigma_3, \quad D = -A^*. \quad (2.40)$$

Тогда ограничение (2.39) равносильно требованию вещественности диагональных элементов матрицы A :

$$A_{11} = A_{11}^*, \quad A_{22} = A_{22}^*. \quad (2.41)$$

Дальнейшие вычисления проведем, предполагая справедливость условия (2.41).

Требование отсутствия полюсов в произведении $f(-u)f^\dagger(u^*) = I$ эквивалентно одному независимому матричному уравнению $A^\dagger f^\dagger(u^*) \Big|_{u=\mu^*} = 0$. Оно имеет нетривиальное решение, только когда матрица A вырождена: $A_{ij} = m_i X_j$ ($i, j = 1, 2$) [11; 18]. Отсюда получаем:

$$X_1 = -\frac{m_1^*}{|m_1|^2 \varphi(\mu^*) + |m_2|^2 a \gamma(\mu + \mu^*)}, \quad X_2 = -\frac{m_2^*}{|m_2|^2 \varphi(\mu^*) + |m_1|^2 a \gamma(\mu + \mu^*)}, \quad (2.42)$$

где $a \equiv k'/2 = \exp(\eta_1 K)/\sigma(2K)$, $\varphi(u) = \zeta_1 + \zeta_2 - \zeta_3 - \zeta_4 + 2\eta_3$,

$$\gamma(u + \mu) = \frac{1}{a} [\zeta_1 - \zeta_2 - \eta_3] = \frac{\sigma(u + \mu + 2K)}{\sigma(u + \mu)} e^{-\eta_1(u + \mu + K)},$$

$m_{1,2}$ – пока неизвестные функции от x, t . В разложении на множители функции $\gamma(u + \mu)$ использованы сигма-функции с периодами $[4K, 2iK']$. Знаменатели (2.42) вещественны, потому условие (2.39), как и предполагалось, выполняется.

С учетом тождеств

$$\zeta_3 - \zeta_4 - \eta_3 = -\frac{k'^2}{4\gamma(u - \mu^*)}, \quad \varphi(u) - \varphi(\mu^*) = -a\gamma_0 \frac{\gamma(u + \mu)}{\gamma(u - \mu^*)}, \quad \gamma_0 = \frac{\gamma(\mu + \mu^*)}{a}, \quad (2.43)$$

$f^\dagger(u^*)$ принимает вид:

$$f^\dagger(u^*) = \begin{pmatrix} \gamma_0 \left(|m_2|^2 + |m_1|^2 \frac{\gamma(u + \mu)}{\gamma(u - \mu^*)} \right) & -m_1 m_2^* \gamma(u + \mu) + \frac{m_1^* m_2}{\gamma(u - \mu^*)} \\ -m_2 m_1^* \gamma(u + \mu) + \frac{m_2^* m_1}{\gamma(u - \mu^*)} & \gamma_0 \left(|m_2|^2 + |m_1|^2 \frac{\gamma(u + \mu)}{\gamma(u - \mu^*)} \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix}. \quad (2.44)$$

Знаменатели в формуле (2.44) включены в определение коэффициентов $r_{1,2}$. Из условия $f(-u)f^\dagger(u^*) = I$ находим:

$$r_1^{-2} = r_2^{-2} = \gamma_0^2 (|m_1|^4 + |m_2|^4) + (m_1 m_2^*)^2 + (m_2 m_1^*)^2 + \delta |m_1 m_2|^2 \equiv r^2. \quad (2.45)$$

Комбинация мероморфных функций

$$\delta = \gamma_0^2 \left[\frac{\gamma(u - \mu^*)}{\gamma(u + \mu)} + \frac{\gamma(u + \mu)}{\gamma(u - \mu^*)} \right] - \gamma(u + \mu)\gamma(u - \mu^*) - \frac{1}{\gamma(u + \mu)\gamma(u - \mu^*)}$$

по построению не зависит от спектрального параметра u . Наиболее простое выражение для нее получаем в пределе $u \rightarrow \mu^*$: $\delta = \gamma_0/\operatorname{sn}(\mu + \mu^*) > 0$. Для определенности, полагаем $r > 0$ (в параметризации (2.3) замена $r \rightarrow -r$ соответствует замене $\Phi \rightarrow \Phi + \pi$).

Прямой проверкой нетрудно убедиться, что искомая матричная функция $\Psi_+(u, \chi, t)$ с требуемыми аналитическими и трансформационными свойствами отличается от $f(u)$ только множителем:

$$\begin{aligned} \Psi_+(\chi, t, u | \mu, \mathbf{m}) &= g_2(u)f(u) = \\ &= r \begin{pmatrix} \gamma_0[|m_2|^2 g_2(u) + |m_1|^2 g_1(u)] & g_4(u) m_2 m_1^* - g_3(u) m_1 m_2^* \\ g_4(u) m_1 m_2^* - g_3(u) m_2 m_1^* & \gamma_0[|m_1|^2 g_2(u) + |m_2|^2 g_1(u)] \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Комплексные параметры μ ($0 < \operatorname{Re}\mu < K$, $|\operatorname{Im}\mu| < 2K'$) и зависящие от x, t векторы \mathbf{m} с компонентами $m_{1,2}$ конкретизируют Ψ_+ , поэтому в левой части (2.46) они указаны после вертикальной черты. Выражение (2.46) по форме записи схоже с решением задачи Римана для бризера в спиральной магнитной структуре [A7–A9; A12], а также в полосовой доменной структуре легкоосного ферромагнетика [A1–A4].

Коэффициенты $g_j(u)$ ($j = 1, 2, 3, 4$) записываются в терминах сигма-функций Вейерштрасса с периодами $[4K, 2iK']$:

$$\begin{aligned} g_1(u) &= \frac{\sigma(u - \mu)}{\sigma(u + \mu^*)}, & g_2(u) &= \frac{\sigma(u - \mu^* + 2K)}{\sigma(u + \mu + 2K)} e^{\eta_1(\mu + \mu^*)}, \\ g_3(u) &= \frac{\sigma(u - \mu^* + 2K)}{\sigma(u + \mu^*)} e^{-\eta_1(u - \mu + K)}, & g_4(u) &= \frac{\sigma(u - \mu)}{\sigma(u + \mu^* + 2K)} e^{\eta_1(u + \mu + K)}. \end{aligned}$$

Определитель $\Psi_+(u)$, как и положено (см. (2.27), (2.22), (2.33)), равен:

$\det \Psi_+(u) = \bar{a}(u) = g_1(u)g_2(u)$. Так мы убеждаемся в согласованности вычислений.

Перейдем к определению функций $m_{1,2}(x, t)$. Используя представление (2.22), из линейной системы (2.9) выразим матрицы $U(u)$ и $V(u)$ через $\Psi_+(u)$. Поскольку $\Psi_+^{-1}(u) = \Psi_+^\dagger(-u^*)$, имеем:

$$U(u) = -\Psi_+(u)[\partial_x - U_{\Delta/2}(u)]\Psi_+^\dagger(-u^*), \quad V(u) = -\Psi_+(u)[\partial_t - V_{\Delta/2}(u)]\Psi_+^\dagger(-u^*), \quad (2.47)$$

где операторы $U_{\Delta/2}$ и $V_{\Delta/2}$ получаются из U, V формальной заменой: $\Phi \rightarrow \nu \pi/2$, $\theta \rightarrow \theta_{\Delta/2}^{(0)} = \pi/2 - \operatorname{am}(x + \Delta/2, k)$; $\Delta = 4 \operatorname{Re}\mu$. Левая часть (2.47) содержит лишние полюсы, происходящие от солитонных матриц $\Psi_+(u)$ и $\Psi_+^\dagger(-u^*)$.

Требование обращения в нуль вычетов в этих полюсах дает зависимость от x , t вектора \mathbf{m} с компонентами $m_{1,2}$ в виде [11; 18]:

$$\mathbf{m} = \Psi_{\Delta/2}^{(0)}(\boldsymbol{\mu}, x, t)\mathbf{c} = \tilde{M} \left(\boldsymbol{\mu}, x + \frac{\Delta}{2} \right) \exp \left[A(\boldsymbol{\mu}, x, t)\sigma_3 - \frac{\eta_1 \mu \Delta}{4K} \sigma_3 \right] \mathbf{c}, \quad (2.48)$$

где \mathbf{c} – произвольный постоянный комплексный вектор.

По найденному решению $\Psi_+(u)$ (2.22) линейной системы (2.9) восстанавливаем точное решение исходной существенно нелинейной модели. Приравнивая вычеты в точке $u = -iK'$ от левой и правой частей первого из «одевающих» соотношений (2.47), получаем явное решение модели Ландау – Лифшица (2.2), описывающее солитонное возбуждение в полосовой доменной структуре:

$$S_k \sigma_k = \Psi_+(u)(S_{\Delta/2}^{(0)})_k \sigma_k \Psi_+^\dagger(-u^*)|_{u=iK'}, \quad (2.49)$$

где $S_{\Delta/2}^{(0)} = (0, \nu \sin \theta_{\Delta/2}^{(0)}, \cos \theta_{\Delta/2}^{(0)})$, $\theta_{\Delta/2}^{(0)} = \pi/2 - \text{am}(x + \Delta/2, k)$.

Отметим, что по построению решение Ψ_+ (2.22) системы (2.9) удовлетворяет условиям (2.26). Потому предложенная процедура дает солитонное решение (2.49) с требуемыми краевыми условиями на бесконечности (2.8).

2.2.3 Асимптотические разложения и законы сохранения

Как и в случае легкоосного ферромагнетика, для дальнейшего анализа нам потребуется информация об асимптотическом поведении функций $\Psi_{1,2}(u)$ и $\bar{a}(u)$ вблизи особых точек $u = iK'$, $\text{mod}(2K, 2iK')$ вспомогательной линейной системы (2.9).

Асимптотические разложения «затравочных» решений $\Psi_{1,2}^{(0)}(u)$ при $u = iK' + \varepsilon$ ($|\varepsilon| \ll 1$) нетрудно получить из (2.14). При вычислениях используем тождества:

$$\begin{aligned} \zeta(2K) &= 2\zeta(K) - 1; \\ \zeta(x+K) + \zeta(x-K) - \frac{\eta_1 x}{K} &= Z(x) - \frac{\text{sn}x \text{dn}x}{\text{cn}x}; \\ M(u = iK', x + \delta) &= \\ &= \exp \left(-\frac{i\pi\nu\sigma_3}{4} \right) \exp \left[-\frac{i\theta_\delta\sigma_2}{2} + \frac{i\pi\nu\sigma_3}{4} - \frac{\pi i}{4K}(x + \delta)\sigma_3 \right]; \\ \zeta(x + \delta - K) - \zeta(x + \delta + K) + \eta_1 &= -\frac{\text{dn}(x + \delta)}{\text{cn}(x + \delta)} = \frac{\partial_x \theta_\delta}{\sin \theta_\delta}. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Матрица $M(u, \chi)$ определена в (2.14); дзета-функции Вейерштрасса имеют периоды $[4K, 2iK']$.

В результате находим:

$$\begin{aligned} \Psi_\delta^{(0)}(iK' + \varepsilon) = & \exp\left(-\frac{i\pi\nu\sigma_3}{4}\right) \exp\left(-\frac{i\theta_\delta\sigma_2}{2}\right) \left[1 + \frac{\varepsilon}{2} \partial_x \theta_\delta \sigma_1 + O(\varepsilon^2)\right] \times \\ & \times \exp\left[\frac{i\pi\nu\sigma_3}{4} + \delta \eta_3 \sigma_3 - \frac{x}{2} \sigma_3 \left(Z(\varepsilon) + \frac{\operatorname{cn} \varepsilon \operatorname{dn} \varepsilon}{\operatorname{sn} \varepsilon}\right)\right] \times \\ & \times \exp\left[\frac{\varepsilon}{2} \sigma_3 [Z(x + \delta) - 1] - \frac{i \operatorname{cn}^2 \varepsilon}{2 \operatorname{sn}^2 \varepsilon} t \sigma_3 + \frac{\eta_1 \delta}{2K} \sigma_3 \varepsilon + O(\varepsilon^2)\right]. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Асимптотический ряд для решения Йоста $\Psi_1(u, x, t)$ при $u = iK' + \varepsilon$ ($|\varepsilon| \ll 1$) будем искать в виде:

$$\Psi_1 = \exp\left(-\frac{i\Phi\sigma_3}{2}\right) \exp\left(-\frac{i\theta\sigma_2}{2}\right) g \exp\left(\frac{i\theta_\Delta\sigma_2}{2}\right) \exp\left(\frac{i\pi\nu\sigma_3}{4}\right) \Psi_1^{(0)}, \quad (2.52)$$

где углы Φ и θ задают параметризацию (2.3) вектора намагниченности, а θ_1 – его асимптотику (2.8) при $x \rightarrow -\infty$. Тогда первое из равенств системы (2.9) дает уравнение для расчета g :

$$\partial_x g = L g - g L_1, \quad (2.53)$$

где

$$\begin{aligned} L = & -\frac{1}{2} \left(\sigma_1 \sin \theta [i \partial_x \Phi + (w_1 \cos^2 \Phi + w_2 \sin^2 \Phi - w_3) \cos \theta] + \right. \\ & + \sigma_2 [-i \partial_x \theta + \sin \Phi \cos \Phi \sin \theta (w_2 - w_1)] + \\ & \left. + \sigma_3 [-i \partial_x \Phi \cos \theta + w_1 \sin^2 \theta \cos^2 \Phi + w_2 \sin^2 \theta \sin^2 \Phi + w_3 \cos^2 \theta] \right), \end{aligned}$$

а матрица L_1 получается из L заменой $\Phi \rightarrow \pi\nu/2$, $\theta \rightarrow \theta_\Delta$. Вблизи особой точки (при $u = iK' + \varepsilon$, $|\varepsilon| \ll 1$) коэффициенты $w_{1,2,3}$ допускают степенные разложения:

$$\begin{aligned} w_1 = & \varepsilon^{-1} - \frac{(1 + k'^2)}{6} \varepsilon + O(\varepsilon^2), & w_2 = & \varepsilon^{-1} - \frac{(k^2 - k'^2)}{6} \varepsilon + O(\varepsilon^2), \\ w_3 = & \varepsilon^{-1} + \frac{(1 + k'^2)}{6} \varepsilon + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

В соответствии с (2.15), матричная функция g должна удовлетворять асимптотическому условию:

$$g \rightarrow I \quad \text{при} \quad x \rightarrow -\infty,$$

где I – единичная матрица.

Решение $g(u, x, t)$ уравнения (2.53) будем искать в виде:

$$g = (I + X) \exp[i h \sigma_3 + Y], \quad (2.54)$$

где недиагональная X и диагональная Y матрицы разлагаются в ряды по степеням ε :

$$X = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n X_n, \quad Y = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n Y_n.$$

После простых вычислений получаем:

$$\begin{aligned} h &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^x dx' \partial_{x'} \Phi \cos \theta; \\ Y_1 &= \frac{\sigma_3}{4} \int_{-\infty}^x dx' [(\partial_{x'} \theta)^2 - (\partial_{x'} \theta_{\Delta})^2 + (\partial_{x'} \Phi)^2 \sin^2 \theta + \\ &\quad + (1 - k'^2 \sin^2 \Phi) \sin^2 \theta - k^2 \sin^2 \theta_{\Delta}]; \\ X_1 &= \frac{1}{2} [\partial_x \theta \sigma_1 + \sin \theta \partial_x \Phi \sigma_2 - \exp(i h \sigma_3) \sigma_1 \exp(-i h \sigma_3) \partial_x \theta_{\Delta}]. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Разложение функций Ψ_2 при $u = iK' + \varepsilon$ получается из разложения Ψ_1 формальной заменой индексов и интегралов: $\Delta \rightarrow 0$, $\int_{-\infty}^x \rightarrow \int_{+\infty}^x$.

Используя формулы (2.18), (2.51), (2.52), (2.54), (2.55), находим асимптотическое разложение функции $\bar{a}(u)$ вблизи особой точки $u = iK'$:

$$\ln \bar{a}(u = iK' + \varepsilon) = \frac{i}{2} P - \frac{\varepsilon}{2} H + O(\varepsilon^2). \quad (2.56)$$

Коэффициенты P и H с точностью до аддитивных постоянных представляют импульс и энергию локализованных возбуждений доменной структуры:

$$\begin{aligned} P &= - \int_{-\infty}^{\infty} dx \partial_x \Phi \cos \theta + 2i\Delta \eta_3; \\ H &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \int_{-\infty}^x dx' [(\partial_{x'} \theta)^2 - (\partial_{x'} \theta_{\Delta})^2 + (\partial_{x'} \Phi)^2 \sin^2 \theta + \right. \\ &\quad \left. + (1 - k'^2 \sin^2 \Phi) \sin^2 \theta - k^2 \sin^2 \theta_{\Delta}] + Z(x + \Delta) - Z(x) + \frac{\eta_1 \Delta}{K} \right). \end{aligned}$$

Предел выражения для H существует, т. к. при $x \rightarrow +\infty$ имеем:

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^x dx' [(\partial_{x'} \theta_0)^2 - (\partial_{x'} \theta_{\Delta})^2 + k^2 \sin^2 \theta_0 - k^2 \sin^2 \theta_{\Delta}] \approx Z(x) - Z(x + \Delta) + \text{const.}$$

Динамическая стабильность солитона в полосовой доменной структуре поддерживается серией интегралов движения. Для их построения следует отделить вклад периодической фоновой структуры. В безграничной среде он бесконечен. Предложенная процедура содержит путь преодоления этой трудности. Элемент $\bar{a}(u)$ матрицы перехода не зависит от времени, и потому является производящей функцией интегралов движения [11; 56].

Факторизуем элементы $a(u)$, $\bar{a}(u)$, выделив из них солитонные части:

$$\bar{a}(u) = \bar{a}_{\text{sol}}(u) \bar{a}_c(u), \quad a(u) = a_{\text{sol}}(u) a_c(u).$$

Для односолитонного состояния явный вид $\bar{a}(u)$ найден ранее (см. (2.33)). Величина $a_c(u)$ отвечает за наличие нелинейных спиновых волн, расплывающихся со временем из-за эффектов дисперсии.

Функции $\bar{a}_c(u)$ и $a_c(u)$ не имеют нулей в областях своей аналитичности D_+ и D_- . Они имеют свойства симметрии:

$$\bar{a}_c(u \pm 2K) = \bar{a}_c(u), \quad \bar{a}_c(u \pm 2iK') = \bar{a}_c(u), \quad a_c(u) = \bar{a}_c^*(-u^*) \quad (2.57)$$

и удовлетворяют условию на контуре Γ :

$$a_c(u) \bar{a}_c(u) + b(u) \bar{b}(u) = 1, \quad u \in \Gamma.$$

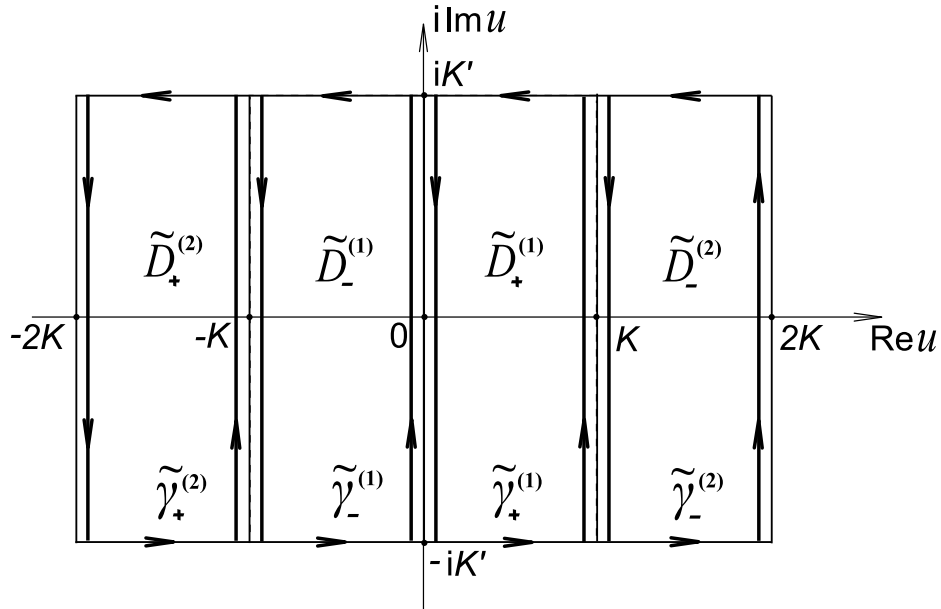


Рисунок 2.2 — Области \tilde{D}_\pm и ограничивающие их контуры $\tilde{\gamma}_\pm$ с направлениями обхода против часовой стрелки.

Поскольку функция $\ln \bar{a}_c(u)$ является аналитической в области $\tilde{D}_+ = \tilde{D}_+^{(1)} \cup \tilde{D}_+^{(2)}$ (см. рисунок 2.2) и непрерывной вплоть до ее границы $\tilde{\gamma}_+ = \tilde{\gamma}_+^{(1)} \cup \tilde{\gamma}_+^{(2)}$,

по теореме Коши имеем:

$$\int_{\tilde{\gamma}_+} \ln \bar{a}_c(u) du = 0.$$

Отсюда, в силу (2.57), получаем ограничение:

$$\int_{-K'}^{K'} dv [\ln \bar{a}_c(i v + K) - \ln \bar{a}_c(i v)] = 0. \quad (2.58)$$

Значения функции $\ln \bar{a}_c(u)$ во внутренних точках области \tilde{D}_+ с помощью теоремы Коши о вычетах выразим в терминах контурного интеграла по границам области \tilde{D}_+ :

$$\ln \bar{a}_c(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\gamma}_+} N(u', u) \ln \bar{a}_c(u') du', \quad u \in \tilde{D}_+. \quad (2.59)$$

Направление обхода границ $\tilde{\gamma}_+^{(1,2)}$ выбрано так, чтобы области $\tilde{D}_+^{(1,2)}$ оставались слева от границ. Ядро Коши $N(u', u)$ выражено через дзета-функции Вейерштрасса с периодами $[4K, 2iK']$:

$$N(u', u) = \zeta(u' - u) + \zeta(u' - 2K - u) + 2\eta_3 - \frac{\eta_1}{K}(u' - K)$$

и обладает свойствами:

$$\begin{aligned} N(u', u \pm 2K) &= N(u', u) \mp 2\eta_1, & N(u', u \pm 2iK') &= N(u', u) \mp 4\eta_3; \\ N(u' \pm 2K, u) &= N(u', u), & N(u' \pm 2iK', u) &= N(u', u) \mp \pi i/K. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Преобразуя правую часть равенства (2.59) с учетом свойств (2.57), (2.60), находим:

$$\begin{aligned} \ln \bar{a}_c(u) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-K'}^{K'} dv [\ln \bar{a}_c(i v + K) N(i v + K, u) - \ln \bar{a}_c(i v) N(i v, u)] + \\ &+ \frac{1}{2K} \int_0^K \ln \bar{a}_c(x + i K') dx \equiv I_+(u), \quad u \in \tilde{D}_+. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Нетрудно проверить, что при условии (2.58) представление (2.61) определяет двоякопериодическую аналитическую функцию с периодами $[2K, 2iK']$.

Аналогичным образом, во внутренних точках области $\tilde{D}_- = \tilde{D}_-^{(1)} \cup \tilde{D}_-^{(2)}$ (см. рисунок 2.2) функцию $\ln a_c(u)$ можно записать в терминах контурного

интеграла по границе $\tilde{\gamma}_- = \tilde{\gamma}_-^{(1)} \cup \tilde{\gamma}_-^{(2)}$ этой области. С помощью равенства $a_c(u) = \bar{a}_c^*(-u^*)$ (2.57) выразим значения $\ln a_c(u)$ на контуре $\tilde{\gamma}_-$ через $\ln \bar{a}_c(u)$:

$$\begin{aligned} \ln a_c(u) = & -\frac{1}{2\pi} \int_{-K'}^{K'} dv [\ln \bar{a}_c^*(iv + K)N(iv + K, u) - \ln \bar{a}_c^*(iv)N(iv, u)] + \\ & + \frac{1}{2K} \int_0^K \ln \bar{a}_c^*(x + iK') dx \equiv I_-(u), \quad u \in \tilde{D}_-. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Формулы (2.61), (2.62) определяют функции $\bar{a}_c(u)$, $a_c(u)$ во внутренних точках областей \tilde{D}_+ и \tilde{D}_- . Согласно (2.56), для вычисления интегралов движения нам требуются значения функций $\ln \bar{a}_c(u)$, $\partial \ln \bar{a}_c(u)/\partial u$ в граничной точке $u = iK'$ этих областей. Пусть u стремится к точке $u = iK'$ из области $\tilde{D}_+^{(1)}$. Тогда:

$$\ln \bar{a}_c(u) = I_+(u), \quad u \in \tilde{D}_+^{(1)}, \quad u \rightarrow iK' - 0.$$

В то же время, по теореме Коши:

$$I_-(u) \equiv 0, \quad u \in \tilde{D}_+^{(1)}, \quad u \rightarrow iK' - 0.$$

Исходя из этого, доопределим искомые величины соотношениями:

$$\begin{aligned} \ln \bar{a}_c(iK') &= \lim_{u \rightarrow iK' - 0} [I_+(u) - I_-(u)], \\ \frac{\partial \ln \bar{a}_c(u)}{\partial u} \Big|_{u=iK'} &= \lim_{u \rightarrow iK' - 0} \left[\frac{\partial I_+(u)}{\partial u} - \frac{\partial I_-(u)}{\partial u} \right]. \end{aligned}$$

Тогда после простых вычислений по формуле (2.56) с учетом (2.33), (2.61), (2.62), (2.58) и тождеств

$$\begin{aligned} N(u', iK') = ip_\Lambda(u') = Z(u', k), \quad \frac{\partial N(iK', u)}{\partial u} = \text{dn}^2(u, k) - \frac{E}{K}, \\ \frac{\partial \bar{a}_{\text{sol}}(u)}{\partial u} = -2 \sum_{s=1}^N \text{Re} \left[Z(\mu_s) + \frac{\eta_1 \mu_s}{K} \right], \end{aligned}$$

находим спектральные разложения импульса и энергии локализованных возбуждений в полосовой доменной структуре:

$$\begin{aligned} P &= \int_{-K'}^{K'} [n_1(v)p_\Lambda(iv) + n_2(v)p_\Lambda(iv + K)] dv + \frac{2}{K} \text{Im} \int_0^K \ln \bar{a}(x + iK') dx + \\ & - 2i \sum_{s=1}^N \ln \left[\frac{\sigma(u - \mu_s)\sigma(u - \mu_s^* + 2K)}{\sigma(u + \mu_s^*)\sigma(u + \mu_s + 2K)} e^{\eta_1(\mu_s + \mu_s^*)} \right] - 8ikN\eta_3, \quad \text{mod}(2\pi), \\ H &= \int_{-K'}^{K'} [n_1(v)\omega(iv) + n_2(v)\omega(iv + K)] dv + 4 \sum_{s=1}^N \text{Re} \left[Z(\mu_s) + \frac{\eta_1 \mu_s}{K} \right]. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Здесь $p_\Lambda(u) = -iZ(u, k)$, $\omega(u) = \text{dn}^2(u, k)$,

$$n_1(v) = -\frac{1}{\pi} \ln |\bar{a}(iv)|^2 = -\frac{1}{\pi} \ln (1 - |\bar{b}(iv)|^2) > 0,$$

$$n_2(v) = \frac{1}{\pi} \ln |\bar{a}(iv + K)|^2 = \frac{1}{\pi} \ln (1 + q^2(iv + K)|\bar{b}(iv + K)|^2 e^{\Delta n_1}) > 0,$$

множитель $q(u)$ определен в (2.21).

Таким образом, даже на фоне сильнонелинейного основного состояния среды имеет место замечательное разделение переменных, при котором все интегралы движения любого локализованного распределения намагниченности в доменной структуре записываются в виде сумм независимых вкладов солитонов и диспергирующих спиновых волн. Дискретные слагаемые в спектральных разложениях (2.63) соответствуют вкладам солитонов. Интегралы отвечают двум типам спин-волновых мод доменной структуры. Величина $n_1(v) dv$ ($n_2(v) dv$) дает число «внутридоменных» («внутриграничных») спин-волновых мод со значениями спектрального параметра в интервале от v до $v + dv$. Выражения $p_\Lambda(iv)$ ($p_\Lambda(iv + K)$) и $\omega(iv)$ ($\omega(iv + K)$) определяют квазиимпульс и энергию этих мод. Значения квазиимпульса вещественны, а значения энергии положительны.

2.2.4 Диспергирующие спиновые волны

Получим линейное интегральное уравнение для расчета нелинейных диспергирующих волн в отсутствие солитонов. В этом случае элементы матрицы перехода $a(u)$ и $\bar{a}(u)$ не имеют нулей в областях D_- и D_+ , а сдвиг доменной структуры $\Delta = 0$.

Для дальнейшего анализа удобно ввести двоякопериодические аналитические функции с периодами $[4K, 4iK']$:

$$F_-(u) = \Psi_-(u), \quad F_+(u) = \Psi_+(u)/\bar{a}(u).$$

На отрезках Γ (2.16), разделяющих области D_+ и D_- , они имеют скачок:

$$F_+(u) - F_-(u) = \rho(u), \quad u \in \Gamma, \quad (2.64)$$

где

$$\rho(u) = -F_+(u)\Psi_0(u) \begin{pmatrix} 1 & \bar{b}(u) \\ b(u) & 1 \end{pmatrix} \Psi_0^{-1}(u), \quad \Psi_0(u) \equiv \Psi_{\delta=0}^{(0)}(u),$$

во внутренних точках областей D_{\pm} удовлетворяют редукциям:

$$F_{\pm}(u \pm 2iK') = \sigma_3 F_{\pm}(u) \sigma_3, \quad F_{\pm}(u \pm 2K) = \sigma_1 F_{\pm}(u) \sigma_1, \quad (2.65)$$

а на контуре Γ они связаны между собой:

$$F_-^{-1}(u) = F_+^{\dagger}(-u^*), \quad u \in \Gamma.$$

Из (2.65), (2.19), (2.20) следует, что на контуре Γ матрица $\rho(u)$ имеет свойства симметрии:

$$\rho(u \pm 2iK') = \sigma_3 \rho(u) \sigma_3, \quad \rho(u \pm 2K) = \sigma_1 \rho(u) \sigma_1. \quad (2.66)$$

В области $D_+ \cup D_-$ определим кусочно-аналитическую функцию

$$\Phi(u) = \begin{cases} F_+(u), & u \in D_+ = D_+^{(1)} \cup D_+^{(2)}, \\ F_-(u), & u \in D_- = D_-^{(1)} \cup D_-^{(2)}. \end{cases}$$

По теореме Коши интеграл по границам $\gamma = \gamma_+^{(1)} \cup \gamma_+^{(2)} \cup \gamma_-^{(1)} \cup \gamma_-^{(2)}$ этой области (см. рисунок 2.2) должен обращаться в нуль:

$$\int_{\gamma} \Phi(u) du = 0. \quad (2.67)$$

Обход линий γ осуществляется так, чтобы области $D_{\pm}^{(1,2)}$ оставались слева от них. Функции $F_{\pm}(u)$ двойкопериодичны по u с периодами $[4K, 4iK']$, поэтому в (2.67) интегралы по горизонтальным отрезкам контура γ попарно сокращаются. Интегралы по вертикальным отрезкам $\Gamma \in \gamma$ выразим через скачки (2.64) и преобразуем с учетом редукций (2.66). В результате получим важное ограничение на диагональные элементы матричной функции $\rho(u)$:

$$\int_{-K'}^{K'} [\rho_{11}(u_1) + \rho_{22}(u_1) - \rho_{11}(u_2) - \rho_{22}(u_2)] dv = 0, \quad (2.68)$$

где $u_1 = iv$, $u_2 = iv + K$. Отметим, что подобные условия всегда возникают при решении задач Римана на торе [11].

При условии (2.68) значения аналитической функции $\Phi(u)$ во внутренних точках областей $D_{\pm}^{(1,2)}$ можно выразить через интеграл Коши по их границам γ . При построении интегральных представлений для диагональных элементов $\Phi(u)$ используется ядро Коши

$$K_0(u' - u) = \zeta(u' - u) - \frac{\eta_1}{2K} (u' - u)$$

со свойствами:

$$K_0(u' - u - 2iK') = K_0(u' - u + 2iK') + \frac{\pi i}{2K}, \quad K_0(u' - u - 2K) = K_0(u' - u + 2K), \quad (2.69)$$

а при записи недиагональных элементов $\Phi(u)$ – ядро $\zeta(u' - u)$. Здесь периоды дзета-функций отличаются от использованных ранее и равны $[4K, 4iK']$.

С учетом формул (2.66), (2.69), окончательный результат представляется в виде:

$$\begin{aligned} \Phi(u) = & \Phi_0 + \frac{1}{2\pi} \int_{-K'}^{K'} dv \sum_{p=1}^2 (-1)^p \left(D_0(u_p) [K_0(u_p - u) + K_0(u_p + 2iK' - u)] + \right. \\ & + \sigma_1 D_0(u_p) \sigma_1 [K_0(u_p - u + 2K) + K_0(u_p - u + 2K + 2iK')] + \\ & \left. + N_0(u_p) \alpha(u_p - u) + \sigma_1 N_0(u_p) \sigma_1 \alpha(u_p - u + 2K) \right), \end{aligned} \quad (2.70)$$

где $D_0(u) = \text{diag}(\rho_{11}(u), \rho_{22}(u))$, $N_0(u) = \rho(u) - D_0(u)$ – диагональная и анти-диагональная части матрицы $\rho(u)$,

$$\alpha(u) = \zeta(u) - \zeta(u + 2iK') + \eta_3 = \frac{1}{2 \operatorname{sn} u} (\operatorname{dnu} + \operatorname{cnu}).$$

В подынтегральные выражения (2.70) введены не содержащие полюсов слагаемые с множителями η_3 и $\eta_1(u' - u)/(2K)$ для того, чтобы независимая от параметра u матрица Φ_0 удовлетворяла условиям: $\sigma_3 \Phi_0 \sigma_3 = \sigma_1 \Phi_0 \sigma_1 = \Phi_0$. Тогда $\Phi_0 = fI$, где множитель f не зависит от u .

В пределе $u \rightarrow \Gamma$, $u \in D_+$ из (2.70) следует сингулярное интегральное уравнение для расчета значений функции $F_+(u)$ на контуре Γ , по которым представление (2.70) воспроизводит функции $F_{\pm}(u)$ во внутренних точках области $D_+ \cup D_-$.

Заметим, что в данном случае задача Римана не нормирована. Ее решения определены с точностью до множителя f . Покажем, что $f = \text{const}$. Для этого с помощью формул предыдущего раздела вычислим значение функции $F_+(u)$ в особой точке $u = iK'$:

$$\begin{aligned} F_+(iK') = & e^{i\nu} F_0, \quad e^{i\nu} = 1/\sqrt{\bar{a}(iK')} = \exp\left(\frac{i}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \partial_x \Phi \cos \theta\right), \\ F_0 = & \exp\left(-\frac{i\Phi\sigma_3}{2}\right) \exp\left(-\frac{i\theta\sigma_2}{2}\right) \exp\left(\frac{i\tilde{\mu}\sigma_3}{2}\right) \exp\left(\frac{i\theta_0\sigma_2}{2}\right) \exp\left(\frac{i\pi\nu\sigma_3}{4}\right), \\ \tilde{\mu} = & \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \operatorname{sign}(x - x') \partial_{x'} \Phi \cos \theta. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Нормируем задачу Римана условием $f = e^{-i\nu} = \text{const}$.

Покажем, что изложенный подход дает верные результаты для малоамплитудных спиновых волн в доменной структуре:

$$\theta = \theta_0 + \theta_1 + O(b^2), \quad \Phi = \frac{\nu \pi}{2} + \varphi_1 + O(b^2),$$

где $\theta_0 = \pi/2 - \text{am}(x, k)$. Уравнения для расчета поправок $\theta_1(x, t)$, $\varphi_1(x, t)$ следуют из (2.2):

$$\begin{aligned} \partial_t \varphi_1 \sin \theta_0 &= \partial_x^2 \theta_1 - k^2 \theta_1 \cos(2\theta_0), \\ -\partial_t \theta_1 &= \partial_x^2 \varphi_1 \sin \theta_0 + 2 \cos \theta_0 \partial_x \theta_0 \partial_x \varphi_1 - k'^2 \sin \theta_0 \varphi_1. \end{aligned}$$

Сравнивая их с уравнениями (2.5) для отклонений намагниченности от равновесных положений доменной структуры, получаем связь: $m_1 = -\varphi_1 \sin \theta_0$, $m_2 = \theta_1$. Ввиду малости поправок, имеем:

$$\begin{aligned} \tilde{F} &= \exp\left(\frac{i\pi}{4} \nu \sigma_3\right) F_0 \exp\left(-\frac{i\pi}{4} \nu \sigma_3\right) \approx I + \frac{i\tilde{\mu}_1}{2} \sin \theta_0 \sigma_1 - \frac{i\theta_1}{2} \sigma_2 - \\ &\quad - \frac{i}{2} (\varphi_1 - \tilde{\mu}_1 \cos \theta_0) \sigma_3 + O(b^2), \end{aligned}$$

где

$$\tilde{\mu}_1 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \text{sign}(x - x') \partial_{x'} \varphi_1 \cos \theta_0.$$

Следовательно, интересующие нас компоненты намагниченности могут быть выражены через элементы матрицы \tilde{F} :

$$m_1 = -2i \left[(\tilde{F}_{11} - 1) \sin \theta_0 - \frac{1}{2} (\tilde{F}_{12} + \tilde{F}_{21}) \cos \theta_0 \right], \quad m_2 = \tilde{F}_{21} - \tilde{F}_{12}. \quad (2.72)$$

Матрица \tilde{F} находится из уравнения (2.70) методом последовательных приближений:

$$\begin{aligned} \tilde{F} &= I + \frac{1}{2\pi} \int_{-K'}^{K'} dv \sum_{p=1}^2 (-1)^p \left(D_1(u_p) [K_0(u_p - iK') + K_0(u_p + iK')] + \right. \\ &\quad \left. + \sigma_1 D_1(u_p) \sigma_1 [K_0(u_p - iK' + 2K) + K_0(u_p + iK' + 2K)] + \right. \\ &\quad \left. + i\nu \sigma_3 N_1(u_p) \alpha(u_p - iK') - \rho \sigma_2 N_1(u_p) \sigma_1 \alpha(u_p - iK' + 2K) \right) + O(b^2), \end{aligned} \quad (2.73)$$

где $D_1(u) = \text{diag}(\rho_{11}^{(1)}(u), \rho_{22}^{(1)}(u))$, $N_0(u) = \rho^{(1)}(u) - D_1(u)$ – диагональная и антидиагональная части матрицы $\rho^{(1)}(u)$,

$$\rho^{(1)}(u) = -\Psi_0(u) \begin{pmatrix} 0 & \bar{b}(u) \\ b(u) & 0 \end{pmatrix} \Psi_0^{-1}(u).$$

Простые алгебраические вычисления с помощью формул (2.72), (2.70) и тождеств:

$$\begin{aligned}\alpha(u - iK') + \alpha(u + 2K - iK') &= i \operatorname{dn} u, \\ \alpha(u - iK') - \alpha(u + 2K - iK') &= i k \operatorname{sn} u, \\ K_0(u - iK') + K_0(u + iK') - K_0(u + 2K - iK') - K_0(u + 2K + iK') &= k \operatorname{sn} u,\end{aligned}\tag{2.74}$$

где $\bar{x} = x + u + iK'$, периоды сигма-функций $- [2K, 4iK']$, приводят к верному разложению поля $\Psi = m_1 + i m_2$ по функциям непрерывного спектра уравнения Ламе:

$$\Psi(x, t) = \int_{-K'}^{K'} dv \left[\alpha(u_1) \Lambda(u_1, x) e^{-i\omega(u_1)t} + \alpha(u_2) \Lambda(u_2, x) e^{-i\omega(u_2)t} \right].$$

Здесь $u_1 = iv$, $u_2 = iv + K$, $\omega(u) = \operatorname{dn}^2 u$; $\alpha(u_{1,2}) = \nu i \pi^{-1} b(u_{1,2}) \operatorname{dn} u_{1,2}$, $\nu = \pm 1$,

$$\begin{aligned}\Lambda^*(u, x) &= \frac{\sigma^2(K) \sigma(x+u) \sigma(x+u+2K)}{\sigma^2(u+K+iK') \sigma(x+iK') \sigma(x+iK'+2K)} \times \\ &\times \exp \left[-\frac{\eta_1 x u}{K} - Z(u) x + 2\eta_3(x+u+iK'+2K) \right].\end{aligned}$$

Отметим, что в данном случае условие (2.68) выполняется тождественно, т. к. $\rho_{11}^{(1)}(u) = -\rho_{22}^{(1)}(u)$. Соотношения (2.74) представляют собой разложения функций Якоби $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{dn} u$ по дзета-функциям Вейерштрасса.

2.3 Прецессионные солитоны в доменной структуре двухосного ферромагнетика

В данном разделе представлен анализ решения (2.49), описывающего солитон в полосовой доменной структуре двухосного ферромагнетика. В подробной форме записи оно имеет вид:

$$S_3 = \frac{(|\alpha|^2 - |\beta|^2) \tilde{s} + i \nu (\alpha^* \beta - \alpha \beta^*) \tilde{c}}{|\alpha|^2 + |\beta|^2}, \quad S_1 - iS_2 = -\frac{[i \nu (\alpha^2 + \beta^2) \tilde{c} + 2 \alpha \beta \tilde{s}]}{|\alpha|^2 + |\beta|^2},\tag{2.75}$$

где $\alpha = [d_\rho c_\rho / s_\rho](n_+ + k s_\rho s_\theta n_-)$, $\beta = i [d_\rho d_\theta m_+ + k c_\rho c_\theta m_-]$, $n_\pm \equiv |m_1|^2 \pm |m_2|^2$, $m_\pm \equiv m_1 m_2^* \pm m_1^* m_2$,

$$\begin{aligned} m_1 &= a_+ e^{y+i\gamma} + b_- e^{-y-i\gamma}, & m_2 &= b_+ e^{y+i\gamma} + a_- e^{-y-i\gamma}; \\ a_\pm &= \tilde{m}(\tilde{x}) \frac{\sigma(\tilde{x} + K + iK' \pm \mu)}{\sigma(K + iK' \pm \mu)} \exp \left[\mp \frac{\eta_1 \mu \tilde{x}}{2K} - \eta_3 \tilde{x} \right], \\ b_\pm &= [\pm i \nu] \tilde{m}(\tilde{x}) \frac{\sigma(\tilde{x} - K + iK' \pm \mu)}{\sigma(K + iK' \pm \mu)} \exp \left[\mp \frac{\eta_1 \mu \tilde{x}}{2K} + \eta_1 (\tilde{x} + iK' \pm \mu) - \eta_3 \tilde{x} \right], \\ y &= \operatorname{Re} \left[A(\mu, x, t) - \frac{\eta_1 \mu \Delta}{4K} \right] + y_0, & \gamma &= \operatorname{Im} \left[A(\mu, x, t) - \frac{\eta_1 \mu \Delta}{4K} \right] + \gamma_0; \\ A(u, x, t) &= i p(u) x + \frac{it}{2} \operatorname{dn}^2(u, k), \\ p(u) &= \frac{1}{2i} \left(\frac{\eta_1 u}{K} - \eta_1 - \zeta(u + iK') - \zeta(u - iK' - 2K) \right) = \frac{i}{2} Z(u, k); \\ m(x) &= \left[\frac{\sigma(iK') \sigma(iK' + 2K)}{2 \sigma(x + iK') \sigma(x + iK' + 2K)} \right]^{1/2}; \end{aligned}$$

$\tilde{m}(\tilde{x}) = \tilde{m}^*(\tilde{x}) \equiv m(\tilde{x}) e^{\eta_3 \tilde{x}}$. Здесь $\sigma(u)$ и $\zeta(u)$ – сигма- и дзета-функции Вейерштрасса с периодами $[4K, 2iK']$; $K' = K(k')$; $k' = \sqrt{1 - k^2}$; $Z(u, k)$ – зета-функция Якоби; трансформационные свойства функций Вейерштрасса определяются вещественным параметром $\eta_1 = \zeta(2K)$ и мнимым параметром $\eta_3 = \zeta(iK')$ [41; 42]; y_0, γ_0 – вещественные константы интегрирования.

Солитон (2.75) параметризуется комплексным параметром $\mu = \rho + i\theta$ ($0 < \rho < K$, $|\theta| < K'$); $s_\rho = \operatorname{sn} \rho$, $c_\rho = \operatorname{cn} \rho$, $d_\rho = \operatorname{dn} \rho$, $s_\theta = \operatorname{sn}(i\theta)$, $c_\theta = \operatorname{cn}(i\theta)$, $d_\theta = \operatorname{dn}(i\theta)$, $\tilde{s} = \operatorname{sn} \tilde{x}$, $\tilde{c} = \operatorname{cn} \tilde{x}$; $\tilde{x} = x + \Delta/2$. Макроскопический сдвиг структуры выражается через вещественную часть μ : $\Delta = 4\rho$. Здесь и далее все эллиптические функции имеют модуль k . Для коэффициентов a_\pm, b_\pm справедливы тождества:

$$\begin{aligned} a_+ b_- + a_- b_+ &= \frac{\nu k \tilde{c} s_\mu}{d_\mu}, & a_+ b_- - a_- b_+ &= \frac{\nu \tilde{d}}{d_\mu}, \\ a_- a_+ + b_+ b_- &= \frac{k \tilde{s} c_\mu}{d_\mu}, & a_- a_+ - b_+ b_- &= 1; \\ \frac{b_\pm}{a_\pm} &= \frac{\mp \nu \operatorname{dn}(\tilde{x} \pm \mu)}{1 + k \operatorname{sn}(\tilde{x} \pm \mu)} = \frac{\mp \nu (d_\mu - k \tilde{s} c_\mu)}{\tilde{d} \pm k \tilde{c} s_\mu} = \frac{\mp \nu (\tilde{d} \mp k \tilde{c} s_\mu)}{d_\mu + k \tilde{s} c_\mu}. \end{aligned} \quad (2.76)$$

С их помощью непосредственной проверкой можно убедиться, что решение (2.75) удовлетворяет граничным условиям (2.8).

Функция $A(\mu, \chi, t)$ линейна по x, t :

$$A = -[q(x - V_2 t) + i(\eta x - \omega t)]/2,$$

$$q = \operatorname{Re}Z(\mu) > 0, \quad \eta = \operatorname{Im}Z(\mu), \quad V_2 = -q^{-1} \operatorname{Im}(\operatorname{dn}^2 \mu), \quad \omega = \operatorname{Re}(\operatorname{dn}^2 \mu).$$

Здесь η и ω – волновое число и частота прецессии намагниченности в ядре солитона,

$$V_2 = -\frac{i s_\rho c_\rho d_\rho s_\theta c_\theta d_\theta}{(1 - k^2 s_\rho^2 s_\theta^2)(k^2 s_\rho c_\rho d_\rho s_\theta^2 - (1 - k^2 s_\rho^2 s_\theta^2)Z(\rho, k))} \quad (2.77)$$

– скорость движения солитона как целого. Направление скорости задается знаком мнимой части μ : $\operatorname{sign}V_2 = \operatorname{sign} \operatorname{Im}\mu$. Индекс «2» позволяет отличить скорость солитона в двухосном ферромагнетике при наличии полосовой структуры от скорости V_1 солитона легкоосного ферромагнетика в структуре и скорости V_0 солитона в двухосном ферромагнетике на однородном фоне (см. далее). Величина q^{-1} определяет характерный размер области наиболее существенных изменений в солитоне.

Реальная частота, размер и скорость солитона получаются из безразмерных значений этих величин умножением на множители: $\gamma M_0(K_3 - K_1)$, $\sqrt{\alpha/(K_3 - K_1)}$, $\gamma M_0 \sqrt{\alpha(K_3 - K_1)}$ соответственно. Параметры магнитных материалов могут меняться в широких пределах. Для оценок воспользуемся материальными параметрами железа и кобальта [31; 32]: $M_0 \sim 10^3$ Гс, $\gamma \sim 10^7$ Гц/Гс, $K_3 - K_1 \sim 10^2$, $\sqrt{\alpha/(K_3 - K_1)} \sim 10^2 a$, где $a \sim 10^{-8}$ см – постоянная решетки. Тогда: $\gamma M_0(K_3 - K_1) \sim 10^{11} - 10^{12}$ с $^{-1}$, $\gamma M_0 \sqrt{\alpha(K_3 - K_1)} \sim 10^4 - 10^5$ см/с. Отсюда, в частности, следует, что безразмерной предельной скорости изолированной доменной стенки $(1 - k) \sim 10^{-2}$ соответствует размерная величина: $\gamma M_0(1 - k)\sqrt{\alpha(K_3 - K_1)} \sim 10^2$ м/с.

Вдали от центра солитона (при $|y| \gg 1$) решение (2.75) описывает малоамплитудную прецессию намагниченности вокруг равновесных положений в доменной структуре:

$$\mathbf{S} = S_R \mathbf{e}_1(x) + S_I \mathbf{e}_2 + \left[1 + O(e^{-4|y|})\right] \mathbf{e}_3(x).$$

Векторы \mathbf{e}_i ($i = 1, 2, 3$) образуют ортонормированный репер. При $y \gg 1$ имеем:

$$\mathbf{e}_1 = c_0 s_4 \mathbf{i} + s_0 s_4 \mathbf{j} - c_4 \mathbf{k}, \quad \mathbf{e}_2 = -s_0 \mathbf{i} + c_0 \mathbf{j}, \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{S}_2^{(0)};$$

$$S_R \approx -\operatorname{Re}X_-, \quad S_I \approx \operatorname{Im}X_-; \quad (2.78)$$

$$\begin{aligned}
X_- &= \frac{2\nu k s_\rho c_\rho d_\rho}{1 - k^2 s_3^2 s_\rho^2} \left(\frac{c_\theta s_3 d_3 - c_3 s_\theta d_\theta}{d_\rho d_\theta + k^2 s_\rho c_\rho s_\theta c_\theta} \right) \frac{1}{a_+ b_+} e^{-2y-2i\gamma} \sim \\
&\sim \frac{\sigma(x + 3\rho - i\theta) \sigma(x + 3\rho - i\theta + 2K)}{\sigma(x + 4\rho + iK') \sigma(x + 4\rho + iK' + 2K)} e^{-2y-2i\gamma} \sim \\
&\sim \Lambda^*(x + \Delta, -\mu^*) e^{-i\omega^*(-\mu^*)t};
\end{aligned}$$

а при $y \ll -1$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_1 &= c_0 s_\chi \mathbf{i} + s_0 s_\chi \mathbf{j} - c_\chi \mathbf{k}, & \mathbf{e}_2 &= -s_0 \mathbf{i} + c_0 \mathbf{j}, & \mathbf{e}_3 &= \mathbf{S}_1^{(0)}; \\
S_R &\approx -\operatorname{Re} X_+, & S_I &\approx \operatorname{Im} X_+; & & (2.79) \\
X_+ &= \frac{2\nu k s_\rho c_\rho d_\rho}{1 - k^2 s_1^2 s_\rho^2} \left(\frac{c_\theta s_1 d_1 + c_1 s_\theta d_\theta}{d_\rho d_\theta + k^2 s_\rho c_\rho s_\theta c_\theta} \right) \frac{1}{a_- b_-} e^{2y+2i\gamma} \sim \\
&\sim \frac{\sigma(x + \rho + i\theta) \sigma(x + \rho + i\theta + 2K)}{\sigma(x + 2\rho + iK') \sigma(x + 2\rho + iK' + 2K)} e^{2y+2i\gamma} \sim \Lambda(x, \mu) e^{i\omega(\mu)t}.
\end{aligned}$$

Здесь $s_4 = \operatorname{sn}(x + 4\rho)$, $c_4 = \operatorname{cn}(x + 4\rho)$, $s_\chi = \operatorname{sn}\chi$, $c_\chi = \operatorname{cn}\chi$; $s_1 = \operatorname{sn}(x + \rho)$, $c_1 = \operatorname{cn}(x + \rho)$, $d_1 = \operatorname{dn}(x + \rho)$, $s_3 = \operatorname{sn}(x + 3\rho)$, $c_3 = \operatorname{cn}(x + 3\rho)$, $d_3 = \operatorname{dn}(x + 3\rho)$; $s_\rho = \operatorname{sn}\rho$, $s_\theta = \operatorname{sn}(i\theta)$, $c_\theta = \operatorname{cn}(i\theta)$, $d_\theta = \operatorname{dn}(i\theta)$; $s_0 = \sin \varphi_0$, $c_0 = \cos \varphi_0$; сигма-функции Вейерштрасса имеют периоды $[4K, 2iK']$. Как и для легкоосного ферромагнетика, функция

$$\begin{aligned}
\Lambda(u, x) &\sim N(u, x) e^{ip_\Lambda(u)x}, & p_\Lambda(u) &= -ik^{-1} Z(u, k); \\
N(u, x) &= \frac{\sigma(x - u) \sigma(x - u + 2K)}{\sigma(x + iK') \sigma(x + iK' + 2K)} \exp\left(2\eta_3 x + \frac{\eta_1 u x}{K}\right)
\end{aligned}$$

представляет собой решение уравнения Ламе:

$$[k^{-2} \partial_x^2 - 2 \operatorname{sn}^2(x, k)] \Lambda = -[k^{-2} + \operatorname{cn}^2(u, k)] \Lambda.$$

Согласно (2.78), (2.79), конец вектора \mathbf{S} в плоскости Oe_1e_2 движется по окружности малого радиуса $|X_\pm|e^{-2|y|}$. В отличие от случая легкоосного ферромагнетика (1.87), (1.88), прецессия вектора \mathbf{S} строго говоря, оказывается не эллиптической, а чисто круговой. Это обстоятельство, однако, несущественно, поскольку, как упоминалось в предыдущей главе, при физически разумных значениях $k \sim 1$ отношение полуосей эллипса прецессии (1.87), (1.88) близко к единице.

2.3.1 Сравнительный анализ физических характеристик неподвижных и движущихся солитонов

По структуре и форме записи решение (2.75) схоже с солитоном (1.85) легкоосного ферромагнетика в полосовой доменной структуре в случае, когда она состоит из блоховских доменных стенок. При теоретическом описании солитонов в полосовой структуре двухосного ферромагнетика с точностью до замены $\rho \rightarrow -\rho$ использован тот же параметр $\mu = \rho + i\theta$, что и для легкоосного ферромагнетика. Однако, решение (2.75) отличается от (1.85) не только выражением для частоты прецессии $\omega(\mu)$, но и видом коэффициентов α , β . Отметим также, что в полученном решении (2.75) параметр k задает не только период доменной структуры, но и соотношение констант анизотропии. Таким образом, строение и свойства солитонов в доменной структуре двухосного ферромагнетика регламентируются двумя независимыми параметрами: k и μ .

Тем не менее, при $k \sim 1$ солитон (2.75) в доменной структуре двухосного ферромагнетика действительно наследует многие черты солитона в доменной структуре легкоосного ферромагнетика. В полосовых структурах обоих ферромагнетиков ширина ядра солитона определяется выражением $\Delta = 4\rho$, где параметр ρ меняется в пределах от 0 до K . Отсюда следует, что допустимая ширина солитонных ядер не превышает периода $4K(k)$ доменной структуры. При $\rho < K/2$ размер ядра солитона оказывается меньше длины домена $2K(k)$. Когда в двухосном ферромагнетике такой солитон попадает внутрь домена, его ядро хорошо аппроксимируется выражением для солитона на однородном фоне.

Соответствующий солитон на фоне однородного основного состояния двухосного ферромагнетика хорошо известен. Он имеет вид [11; 14]:

$$S_3 = \frac{N^2(\text{ch}^2 y - \sin^2 \varepsilon) - B_-^2 - k'^2 \cos^2 \varphi}{N^2(\text{ch}^2 y - \sin^2 \varepsilon) + B_-^2 + k'^2 \cos^2 \varphi}, \quad N = \frac{d_\rho c_\rho}{s_\rho}, \quad \varepsilon = \frac{1}{2i} \ln \frac{\alpha^*}{\alpha},$$

$$S_1 + i S_2 = \pm \frac{2iN \text{ch}(y + i\varepsilon) [B_+ \cos \varphi + iB_- \sin \varphi]}{N^2(\text{ch}^2 y - \sin^2 \varepsilon) + B_-^2 + k'^2 \cos^2 \varphi}, \quad B_\pm = |\alpha| \pm \frac{k'^2}{4|\alpha|}, \quad (2.80)$$

$2\alpha = \text{dn}\mu + k \text{cn}\mu$, где $\varphi = \varphi_0 - \eta x + \omega t$, $y = y_0 - q(x - V_0 t)$,

$$\eta = -\frac{ik s_\theta c_\rho d_\rho}{1 - k^2 s_\rho^2 s_\theta^2}, \quad \omega = \frac{c_\rho d_\rho c_\theta d_\theta (1 + k^2 s_\rho^2 s_\theta^2)}{(1 - k^2 s_\rho^2 s_\theta^2)^2},$$

$$q = \frac{k s_\rho c_\theta d_\theta}{1 - k^2 s_\rho^2 s_\theta^2}, \quad V_0 = -\frac{is_\theta [k^2 c_\theta^2 c_\rho^2 + d_\theta^2 d_\rho^2]}{c_\theta d_\theta [1 - k^2 s_\rho^2 s_\theta^2]},$$

$s_\rho = \operatorname{sn}\rho$, $c_\rho = \operatorname{cn}\rho$, $d_\rho = \operatorname{dn}\rho$, $s_\theta = \operatorname{sn}(i\theta)$, $c_\theta = \operatorname{cn}(i\theta)$, $d_\theta = \operatorname{dn}(i\theta)$. Его параметризация здесь согласована по обозначениям с таковым в доменной структуре. Параметры ρ , θ в решении (2.80) меняются в тех же пределах, что и для солитона (2.75). Параметр k задает соотношение констант анизотропии: $k^2 = (K_3 - K_2)/(K_3 - K_1) = J_3 - J_2$; $0 \leq k < 1$.

В ядре солитона (2.80) прецессия намагниченности вокруг оси Oz сопровождается относительными колебаниями стенок ядра [14], амплитуда которых растет с уменьшением k . При $\rho \rightarrow K$ скорость V_0 солитона (2.80) стремится к величине:

$$V_0(K, \theta) = -\frac{k'^2 i s_\theta}{c_\theta d_\theta}.$$

При $\theta = 0$, $\theta = K'$ эта величина равна нулю. Максимальное значение V_0 достигается при $\theta = K'/2$ и совпадает с предельной скоростью изолированной доменной стенки: $V_0(K, K'/2) = 1 - k$. Соответствующее решение описывает аperiодический распад солитона на две доменные границы, между которыми пробегает слаболокализованная пульсация.

В доменной структуре прецессия намагниченности вокруг орторомбической оси Oz в ядре солитона (2.75) при значениях параметра $k \sim 1$ почти круговая, как в легкоосном ферромагнетике. Пульсации компоненты S_3 имеют размах порядка $O(k'^2)$, и потому малоразличимы. Прохождение ядра солитона (2.75) через очередную доменную границу сопровождается сложными колебаниями намагниченности. При этом солитон «перетекает» в следующий домен с инверсией проекции S_3 , но с сохранением своей формы (2.80) относительно равновесного направления намагниченности в очередном домене.

Когда размер ядра солитона (2.75) приближается к размеру домена или превышает его, пульсации ядра порождают локализованные на солитоне колебания соседних доменных стенок полосовой структуры. В предыдущей главе анализ солитонов в доменной структуре был проведен при значении параметра $k \equiv k_2 = 0.9994$ ($K(k_2) = 4.75$, $L_0/l_0 \approx 9.5$). При уменьшении k размеры доменов начинают приближаться к ширине границ между ними, а это равносильно исчезновению доменной структуры. Мы считаем, что предельное значение k , при котором еще сохраняется доменная структура, составляет $k \equiv k_1 = 0.97$ ($K(k_1) = 2.83$). При этом $L_0/l_0 \approx 5.5$. В интервале значений $k_1 \leq k \leq k_2$ численные значения некоторых из физических характеристик солитона (2.75) существенно меняются. Так, например, частота прецессии намагниченности в

неподвижном солитоне (2.75) – при $\mu = K/2$ – при возрастании k от k_1 до k_2 уменьшается в $(1 - k_1^2)/(1 - k_2^2) = 7.02$ раз, при том, что период структуры возрастает всего в $K(k_2)/K(k_1) = 1.68$ раза. Вместе с тем, даже при значении $k = k_1$ солитоны для легкоосного и двухосного ферромагнетиков в доменной структуре качественно схожи вне области вырождения – для значений μ внутри прямоугольника $abcd$ на рисунке 2.3. Численные значения параметров одного решения отличаются от таковых для другого решения не более, чем на 20 процентов.

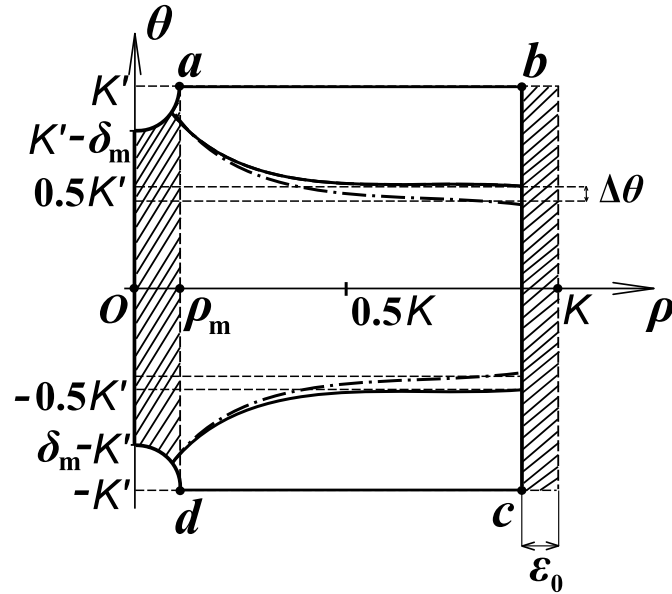


Рисунок 2.3 — Диаграмма динамических состояний солитона (2.75) в плоскости ρ - θ .

Для того, чтобы сделать это утверждение более наглядным, рассмотрим неподвижные солитоны. Скорость V_2 (2.77) солитона (2.75) обращается в нуль при значениях $\theta = 0$ и $\theta = \pm iK'$, причем случаи $\theta = iK'$ и $\theta = -iK'$ в решении (2.75) отличаются только переопределением произвольных постоянных. При $\theta = 0$ из (2.75) получаем неподвижный солитон вида:

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{2g_0h_0}{A_0} \sin(2\gamma), & S_2 &= \nu \tilde{c} + \frac{2\nu g_0}{A_0} [f_0\tilde{s} - g_0\tilde{c}] + \frac{2h_0g_0}{A_0} \tilde{s} \cos(2\gamma), \\ S_3 &= -\tilde{s} + \frac{2g_0}{A_0} [f_0\tilde{c} + g_0\tilde{s}] + \frac{2\nu h_0g_0}{A_0} \tilde{c} \sin(2\gamma), \end{aligned} \quad (2.81)$$

$$\begin{aligned} A_0 &= [\nu h_0 \sin(2\gamma) + f_0]^2 + h_0^2 \sin^2(2\gamma) + g_0^2, & h_0 &= k c_\rho / d_\rho, \\ g_0 &= \frac{d_\rho}{s_\rho} \left[\frac{s_3 a_-^2 e^{2y}}{1 + k s_3} + \frac{s_1 a_+^2 e^{-2y}}{1 + k s_1} \right], & f_0 &= \frac{1}{s_\rho} \left[\frac{c_3 a_-^2 e^{2y}}{1 + k s_3} + \frac{c_1 a_+^2 e^{-2y}}{1 + k s_1} \right]; \end{aligned}$$

$$2y = xZ(\rho, k) + 2y_0, \quad 2\gamma = -\omega t + 2\gamma_0, \quad \omega = d_\rho^2,$$

$$s_1 = \text{sn}(x + \rho), \quad s_3 = \text{sn}(x + 3\rho), \quad c_1 = \text{cn}(x + \rho), \quad c_3 = \text{cn}(x + 3\rho);$$

$$s_\rho = \text{sn}\rho, \quad c_\rho = \text{cn}\rho, \quad d_\rho = \text{dn}\rho; \quad y_0 = \text{const}, \quad \gamma_0 = \text{const}. \quad (2.82)$$

При $\theta = iK'$ из (2.75) находим:

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{2gh}{A} \cos(2\tilde{\gamma}), & S_2 &= -\nu \tilde{c} + \frac{2\nu g}{A} [g\tilde{c} - f\tilde{s}] - \frac{2hg}{A} \tilde{s} \sin(2\tilde{\gamma}), \\ S_3 &= -\tilde{s} + \frac{2g}{A} [f\tilde{c} + g\tilde{s}] + \frac{2\nu hg}{A} \tilde{c} \sin(2\tilde{\gamma}), \end{aligned} \quad (2.83)$$

$$\begin{aligned} A &= [h \sin(2\tilde{\gamma}) + f]^2 + h^2 \cos^2(2\tilde{\gamma}) + g^2; \\ g &= c_\rho \left[\frac{\tilde{a}_-^2 e^{2y}}{1+s_3} - \frac{\tilde{a}_+^2 e^{-2y}}{1+s_1} \right], & f &= s_\rho \left[\frac{d_3 \tilde{a}_-^2 e^{2y}}{1+s_3} + \frac{d_1 \tilde{a}_+^2 e^{-2y}}{1+s_1} \right], & h &= \frac{d_\rho}{c_\rho}; \\ 2y &= x \operatorname{Re}[Z(iK' - \rho)] + 2y_0; & \rho &= \Delta/4; & 2\tilde{\gamma} &= \omega t + 2\tilde{\gamma}_0, & \omega &= -c_\rho^2/s_\rho^2; \\ s_1 &= \operatorname{sn}(x + \rho), & s_3 &= \operatorname{sn}(x + 3\rho); & s_\rho &= \operatorname{sn}\rho, & c_\rho &= \operatorname{cn}\rho, & d_\rho &= \operatorname{dn}\rho; \end{aligned}$$

$y_0 = \operatorname{const}$, $\tilde{\gamma}_0 = \operatorname{const}$. Коэффициенты \tilde{a}_\pm , \tilde{b}_\pm вещественны и отличаются от a_\pm , b_\pm множителями:

$$\frac{a_\pm}{\tilde{a}_\pm} = \frac{b_\pm}{\tilde{b}_\pm} = \exp \left[\mp \frac{\pi i \tilde{x}}{4K} \right].$$

Неподвижные солитоны (2.81), (2.83) схожи с солитонами (1.91), (1.94) легкоосного ферромагнетика. В частности, при значениях $0.2K \leq \rho \leq 0.4K$ солитоны оказываются внутридоменными: ширина их ядер меньше домена структуры. При $0.4K \leq \rho \leq 0.6K$ ширина ядер солитонов становится сопоставимой с шириной домена. Такие возбуждения можно трактовать как зародыши перемагничивания материала.

Сходство в поведении солитонов двух моделей объясняется явным видом соответствующих решений. Сравнивая выражения для неподвижных солитонов (2.81), (2.83) двухосного ферромагнетика в доменной структуре с аналогичными выражениями (1.91), (1.94) для неподвижных солитонов легкоосного ферромагнетика, видим, что они отличаются только коэффициентами $h_0 = k c_\rho/d_\rho$, $h = d_\rho/c_\rho$, которые при $k \sim 1$ слабо отличаются от единицы всюду, за исключением значений $\rho \rightarrow K$.

На рисунке 2.3 значениям $\rho \rightarrow K$ соответствует заштрихованная область справа. В этой области параметры солитонов приближаются к границам спектра спин-волновых мод. Поведение и строение солитонов в этих областях мы обсудим отдельно. В средней области ($abcd$) при фиксированном ρ с увеличением $|\theta|$ от 0 до K' максимальная скорость солитона V_2 сначала возрастает, а затем снова обращается в нуль при $\theta = K'$. В угловых точках $\mu = 0$, K' солитоны становятся чрезвычайно узкими – нарушается континуальное приближение.

Поэтому на рисунке 2.3 окрестности этих точек радиусом $\delta_m \approx 1/2$ исключены, и далее мы их не рассматриваем. Значение $\delta_m \approx 1/2$ получается из условия совпадения ширины солитона с шириной двух доменных стенок.

Обсудим свойства солитонов со значениями параметра μ из левой заштрихованной полосы на рисунке 2.3. Левее линии ad все солитоны трансформируются в протяженные цуги спиновых волн. На однородном фоне и в полосовой структуре легкоосного ферромагнетика подобные возбуждения подробно проанализированы в монографии [14] и в главе 1 настоящей диссертации. При $\mu = \varepsilon + i\theta$ ($0 < \varepsilon \ll 1$) солитонное возбуждение, описывающее «обрезанную» малоамплитудную активационную спиновую волну в полосовой структуре двухосного ферромагнетика, имеет вид:

$$\begin{aligned} m_1 m_2^* &= -2 \operatorname{sh}(2y) a_+ b_- + a_+^2 e^{2i\gamma} - b_-^2 e^{-2i\gamma}, & a_- &= a_+^*, & b_- &= -b_+^*, \\ 2y &= \varepsilon \left[x \left(\frac{E}{K} - d_\theta^2 \right) - 2i k^2 t s_\theta c_\theta \right] + 2y_0, & & & & (2.84) \\ 2\gamma &= ix \left[-\zeta(i\theta + iK') + \zeta(iK' - i\theta + 2K) - \eta_1 + \frac{\eta_1 i \theta}{K} \right] + t d_\theta^2 + 2\gamma_0. \end{aligned}$$

При $k_1 \leq k \leq k_2$ протяженность волны (2.84) $\sim \varepsilon^{-1}$, ее амплитуда $\sim \varepsilon$ и частота при любых θ практически совпадают с таковыми для аналогичной спиновой волны в доменной структуре легкоосного ферромагнетика. Частоты пульсаций солитона $s_\theta d_\theta/k$ в легкоосном и d_θ^2 в двухосном ферромагнетике оказываются близки в силу того, что в рассматриваемом интервале значений k : $s_\theta \approx d_\theta \approx \cos^{-1}\theta$. Основное отличие этих слаболокализованных волн друг от друга состоит в том, что они имеют разные скорости. Таковые совпадают лишь при малых $|\theta| < 0.2K'$, а при больших значениях $0.2K \leq |\theta| \leq K' - \delta_m$ существенно различаются, поскольку в пределе $\theta \rightarrow K'$ скорость $V_1 \rightarrow \infty$, а скорость V_2 остается конечной. Различие скоростей монотонно возрастает с увеличением θ , и на границе спектра около точки $\mu = iK'$ составляет:

$$\left. \frac{V_1 - V_2}{V_2} \right|_{\rho=0, \theta=K'-\delta_m} \approx 1.$$

В заключение данного подраздела, проанализируем изменения скоростей движения солитонов в доменных структурах легкоосного и двухосного ферромагнетиков, а также изменение скорости солитона (2.80) на однородном фоне в зависимости от значений параметра $\mu = \rho + i\theta$, конкретизирующего форму солитонных ядер. Все обсуждаемые солитоны неподвижны только при $\theta = 0$ и

$|\theta| = K'$. При фиксированном ρ с увеличением $|\theta|$ от 0 до K' скорость любого из них сначала возрастает, а затем снова обращается в нуль при $|\theta| = K'$.

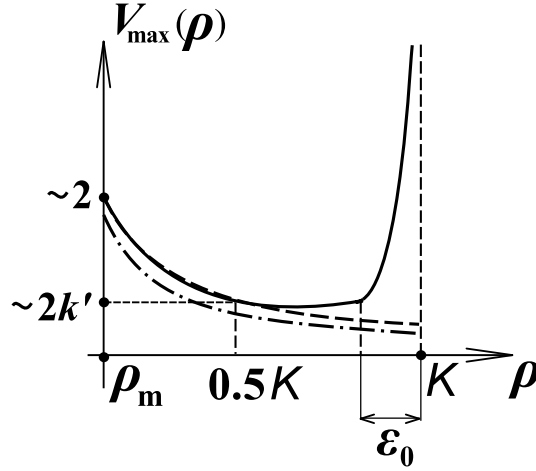


Рисунок 2.4 — Зависимость предельной скорости солитона $V_{\max}(\rho)$ от параметра $\rho = \Delta/4$, Δ — макроскопический сдвиг доменной структуры.

На рисунках 2.3, 2.4 сплошная линия соответствует значениям V_1 , пунктирная — значениям V_2 , штрих-пунктирная — значениям V_0 . Для солитона в доменной структуре двухосного ферромагнетика линия $\theta(\rho)$ в плоскости параметров ρ – θ , на которой скорость солитона максимальна, на всем интервале значений $k_1 \leq k \leq k_2$ в точности совпадает с таковой для солитона в легкоосном ферромагнетике на фоне структуры (см. рисунок 2.3). Обе эти линии качественно схожи с линией $\theta(\rho)$ для солитона (2.80) на однородном фоне. Все три линии сближаются при малых $\rho < 0.1K$. При $\rho > 0.1K$ максимальное значение скорости для солитона в доменной структуре двухосного (легкоосного) ферромагнетика при фиксированном значении ρ достигается при несколько меньших значениях θ . Отклонение $\Delta\theta$ линий $V_{1,2}$ от линии V_0 вдоль оси θ возрастает с уменьшением k и составляет величину порядка $0.02 - 0.05K'$. При $\rho \rightarrow \rho_m$: $\max|V_2| \approx \max|V_1| \approx 2$. В безразмерных переменных значение 2 совпадает с предельной фазовой скоростью спиновых волн в доменной структуре.

Зависимости $V_{\max}^{(0)}(\rho)$ для двухосного ферромагнетика на однородном фоне и $V_{\max}^{(2)}(\rho)$ в структуре (см. рисунок 2.4) качественно схожи. График $V_{\max}^{(0)}(\rho)$ лежит несколько выше графика $V_{\max}^{(2)}(\rho)$ на величину порядка 0.4 при $k = k_1$ и 0.2 при $k = k_2$. Значения $V_{\max}^{(2)}(\rho)$ для двухосного и $V_{\max}^{(1)}(\rho)$ легкоосного ферромагнетиков в структуре при $0.1K < \rho < K - \epsilon_0$ ($\epsilon_0 \approx 0.1K$) на всем интервале $k_1 \leq k \leq k_2$ практически совпадают, а при больших значениях ρ — существенно различаются. При $\rho > K - \epsilon_0$ скорость $V_{\max}^{(2)}(\rho)$ имеет конечный предел, в то

время как скорость $V_{\max}^{(1)}(\rho)$ стремится к бесконечности. При $\rho \rightarrow \rho_m$ скорость $V_{\max}^{(2)}(\rho)$ может значительно превосходит предельную скорость $(1 - k)$ изолированной доменной стенки.

2.3.2 Динамика солитонов вблизи границы спектра бесщелевых мод доменной структуры

Даже на однородном фоне солитоны (2.80) двухосного ферромагнетика в пределе $k \rightarrow 1$ трансформируются в слабосвязанные комплексы из доменных стенок. В доменных структурах при значениях параметра μ из заштрихованной правой полосы на рисунке 2.3 (вблизи спектра внутриграницных мод полосовой структуры) наблюдается сходная тенденция – формирование слаболокализованных солитонов большой амплитуды. В этой области коллективные возбуждения описывают сложные процессы протяженных модуляций и перемагничиваний доменной структуры, которые качественно различны в легкоосном и двухосном ферромагнетиках.

Правее линии bc – при $\mu = K + i\theta - \varepsilon_0$, $0 < \varepsilon_0 \ll 1$ и специальном выборе постоянной интегрирования $e^{4y_0} = (d_\theta + kc_\theta)/(d_\theta - kc_\theta)$, – решение (2.75) представляет протяженный «полиномиально-эллиптический» солитон:

$$S_3 = \frac{(|\alpha|^2 - |\beta|^2)\tilde{s} + i\nu(\alpha^*\beta - \alpha\beta^*)\tilde{c}}{|\alpha|^2 + |\beta|^2}, \quad S_1 - iS_2 = -\frac{[i\nu(\alpha^2 + \beta^2)\tilde{c} + 2\alpha\beta\tilde{s}]}{|\alpha|^2 + |\beta|^2}, \quad (2.85)$$

$$\begin{aligned} \alpha &= (1 + ks_\theta)(\tilde{d}d_\theta + k\tilde{c}c_\theta)^2 \cos^2 \gamma + k'^2(1 - ks_\theta)(ik\tilde{s}s_\theta \cos \gamma - \sin \gamma)^2, \\ \beta &= (\tilde{d}d_\theta + k\tilde{c}c_\theta) \left(-2id_\theta y + 2kc_\theta \cos \gamma (ik\tilde{s}s_\theta \cos \gamma - \sin \gamma) + \right. \\ &\quad \left. + ikd_\theta(1 - k^2\tilde{s}^2s_\theta^2)^{-1}[\tilde{s}c_\theta d_\theta(\cos(2\gamma) + ik\tilde{s}s_\theta \sin(2\gamma)) + \right. \\ &\quad \left. + s_\theta\tilde{c}\tilde{d}(i\sin(2\gamma) + 2k\tilde{s}s_\theta \cos^2 \gamma)] \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{\eta_1}{2} \left(\frac{\tilde{x}}{K} + 1 \right) - \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\zeta(\tilde{x} + iK' - i\theta) + \zeta(\tilde{x} + 2K + iK' - i\theta)] + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{k'^2}{d_\theta^2} - \frac{E}{K} \right) (x - Vt); \quad V = \frac{2is_\theta c_\theta k'^2 k^2}{d_\theta^3} \left(\frac{k'^2}{d_\theta^2} - \frac{E}{K} \right)^{-1}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\gamma &= ix [\zeta(K + iK' + i\theta) + \zeta(i\theta - K - iK')] + k'^2 t/d_\theta^2 - \\ &\quad - i \ln[\sigma(\tilde{x} + 2K + iK' + i\theta)/\sigma(\tilde{x} + 2K - iK' - i\theta)] + 2i\eta_3 \tilde{x} + 2\gamma_0. \end{aligned}$$

Солитон (2.85) описывает модуляцию структуры большой амплитуды, движущуюся с конечной скоростью $0 \leq V_2(K, \theta) < (1 - k)A(\theta)$. В безразмерных переменных величина $(1 - k)$ представляет предельную скорость уединенной доменной границы; $2.8 \leq A(\theta) \leq 3.1$ при $k = k_1$, $4.7 \leq A(\theta) \leq 4.8$ при $k = k_2$. Полная протяженность солитона $\sim 8K(EK^{-1} - k'^2 d_0^{-2})^{-1}$ слабо зависит от θ и составляет порядка 5 – 6 периодов доменной структуры при $k = k_1$ и 9 – 10 периодов структуры при $k = k_2$. Заметим, что при $\theta \neq 0$, K' решение для легкоосного ферромагнетика в структуре имело иной характер и описывало модуляцию структуры неограниченно большой протяженности $\sim \varepsilon_0^{-1}$, движущуюся с неограниченно большой скоростью $\sim \varepsilon_0^{-1}$.

В заштрихованной полосе правее линии bc на рисунке 2.3 особый интерес представляют два неподвижных солитона ($\theta = 0, K'$), т. к. их легче диагностировать и наблюдать экспериментально. Для первого из них – в пределе $\mu = K - 0$ – из (2.75) получаем выражение:

$$\begin{aligned} S_1 &= -\frac{2k \sin(k'^2 t)}{\bar{A}_0} C(x), & S_2 &= -\nu \operatorname{cn} x + \frac{2}{\bar{A}_0} C(x) [k \operatorname{sn} x \cos(k'^2 t) + \nu \bar{x}], \\ S_3 &= \operatorname{sn} x - \frac{2}{\bar{A}_0} C(x) B(x), \end{aligned} \quad (2.86)$$

$$\bar{A}_0 = 1 + k^2 \operatorname{cn}^2 x + \bar{x}^2 + 2\nu k \cos(k'^2 t) (\bar{x} \operatorname{sn} x - \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x),$$

$$B(x) \equiv \operatorname{dn} x - \nu k \operatorname{cn} x \cos(k'^2 t), \quad C(x) \equiv \bar{x} \operatorname{cn} x + \operatorname{sn} x \operatorname{dn} x,$$

$$\bar{x} = - \int^x \operatorname{cn}^2 x' dx' =$$

$$= -(x - x_0) \left[k^2 - \frac{1 + k^2}{6} \right] - \zeta(x + 2K - iK') - \zeta(x + iK') + \eta_1.$$

Положение его центра определяется константой x_0 . Решение (2.86) описывает периодические колебания структуры в области локализации солитона, которые существенным образом отличаются от аperiodических колебаний предельного солитона в легкоосном ферромагнетике.

На рисунке 2.5 центр возбуждения (2.86) совпадает с серединой одной из доменных стенок структуры ($x_0 = 0$). В центре доменной стенки намагниченность $\mathbf{S}(x = 0) = (0, -\nu, 0)$ не зависит от времени. При $x > 0$ ($x < 0$) с ростом $0 < t < T$, где $T = 2\pi/k'^2$ – период колебаний, намагниченность разворачивается на 360 градусов по (против) часовой стрелки. Разворот происходит преимущественно вокруг оси Oz . На рисунке 2.5 сплошной линией изображена проекция $S_3^{(0)} = \operatorname{sn} x$, соответствующая фоновой структуре, штриховой –

значения (2.86) при $t = 0$, штрих-пунктиром – значения при $t = T/2$. Конусы прецессии указывают направление разворота намагниченности в проекции на плоскость Oxy ; цифры в кружочках нумеруют доменные стенки.

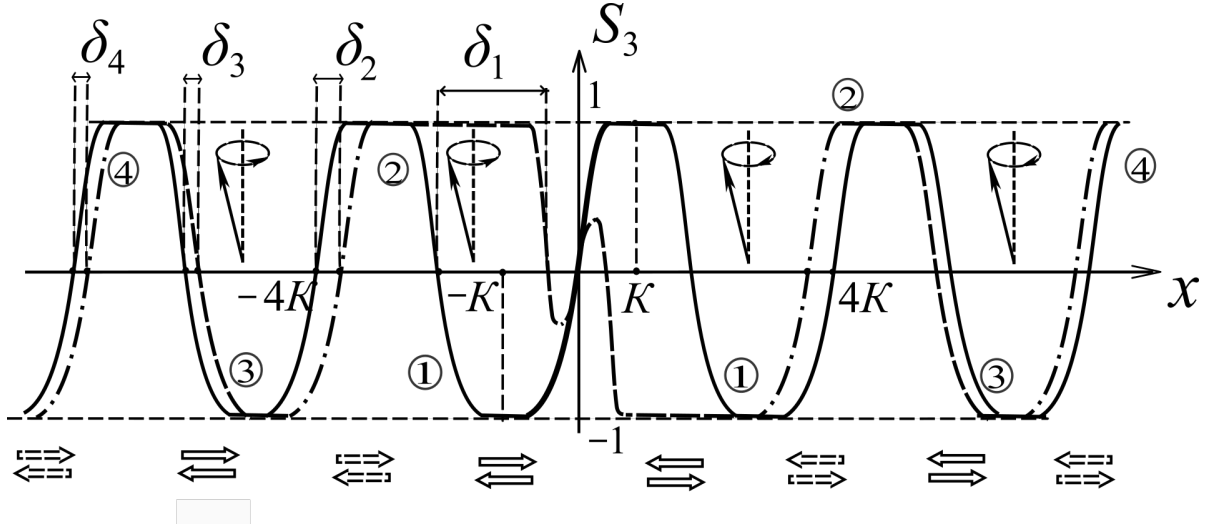


Рисунок 2.5 — Перемагничивание доменной структуры в области локализации солитона (2.86).

В области локализации возбуждения происходит перемагничивание части структуры, прилегающей к центральной доменной стенке в результате вращений намагниченности, смещения доменных стенок следующих доменов и сужения доменов в непосредственной близости от центральной стенки. Домены, прилегающие к центральной доменной стенке, сужаются, а следующие за ними – удлиняются (и наоборот). В отличие от аналогичного возбуждения в легкоосном ферромагнетике, в котором происходило аperiodическое смещение доменных стенок только с четными номерами, в двухосном ферромагнетике вдоль структуры попеременно смещаются все доменные стенки. При $0 < t < T/2$ с ростом t доменные стенки с нечетными номерами (с центрами в точках $x_m = 2Km$, где m – нечетное), сдвигаются по направлению к началу координат $x = 0$ на величину δ_m (см. рисунок 2.5). При $T/2 < t < T$ они возвращаются в исходные положения и одновременно с этим сдвигаются к началу координат стенки с четными номерами (с центрами в точках $x_m = 2Km$, где m – четное). Сдвиги убывают по мере удаления от центра; при $k = k_1$: $\delta_1 \approx 1.83K$, величина $\delta_2 \approx 0.23K$ составляет порядка 0.05 от периода структуры; $\delta_3 \approx 0.17K$, $\delta_4 \approx 0.1K$; при $k = k_2$: $\delta_1 \approx 1.72K$, $\delta_2 \approx 0.4K$, $\delta_3 \approx 0.27K$, $\delta_4 \approx 0.18K$. В обоих случаях значения S_3 в точках экстремумов вблизи центра возбуждения $x = 0$

составляет ± 0.25 . Полная протяженность солитона $\sim 8K(EK^{-1} - k'^2)^{-1}$ составляет порядка 6.3 периода структуры при $k = k_1$ и 9.5 периода при $k = k_2$ и по порядку величины близка к таковой для аналогичного солитона в полосовой доменной структуре легкоосного ферромагнетика.

Второй неподвижный солитон получаем из (2.75) в пределе $\mu = K + iK' - 0$:

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{2 \operatorname{sn} x \nu \bar{\alpha} \bar{t}}{A_0} (\bar{\alpha} + 2 \operatorname{cn} x g_1 g_2), & S_2 &= \nu \operatorname{cn} x - \frac{4 g_1 g_2 \operatorname{sn}^2 x}{A_0} (\bar{\alpha} + 2 \operatorname{cn} x g_1 g_2), \\ S_3 &= \operatorname{sn} x - \frac{2 \bar{\alpha}}{A_0} (\bar{\alpha} + 2 \operatorname{cn} x g_1 g_2) \operatorname{sn} x, \end{aligned} \quad (2.87)$$

где: $A_0 = \bar{\alpha}^2 + \bar{t}^2 + 4 \operatorname{sn}^2 x g_1^2 g_2^2$, $\bar{t} = k'^2(t - t_0)$, $\bar{\alpha} = (\operatorname{dn} x - \operatorname{cn} x)g_1^2 - (\operatorname{dn} x + \operatorname{cn} x)g_2^2$,

$$g_1(x) = \zeta(x) - \frac{\eta_1 x}{2K} + \frac{E}{2K}(x - x_0), \quad g_2(x) = \zeta(x + 2K) - \frac{\eta_1}{2K}(x + 2K) + \frac{E}{2K}(x - x_0),$$

описывающее аperiodические смещения доменной структуры двухосного ферромагнетика в области протяженностью $\sim 8K^2/E$, что составляет 5.3 периода структуры при $k = k_1$ и 9.5 периодов при $k = k_2$. Для $k_1 \leq k \leq k_2$ при конечных временах t оно почти в точности совпадает с таковым для легкоосного ферромагнетика в доменной структуре. Однако, при $t \gg 1$ доменная структура двухосного ферромагнетика стремится к равновесному положению (2.8) по закону $\sim t^{-2}$, в то время как возврат в исходное положение доменной структуры легкоосного ферромагнетика происходит быстрее – по закону $\sim t^{-4}$. Второе отличие проявляется в случае, когда центр возбуждения лежит в середине домена ($x_0 = K$). В области центрального домена $0 < x < 2K$ в легкоосном ферромагнетике траектория движения вектора \mathbf{S} по поверхности сферы $\mathbf{S}^2 = 1$ имела сердцевидную форму с выколотой угловой точкой; ей соответствовали моменты времени $t = \pm\infty$. В случае двухосного ферромагнетика (2.87) траектория имеет форму эллипса.

ВЫВОДЫ

1. Методом обратной задачи рассеяния получены новые точные решения уравнения Ландау – Лифшица, описывающие солитоны в физически выделенной полосовой доменной структуре двухосного ферромагнетика при учете магнитостатических полей в приближении Винтера. Проведен сравнительный анализ солитонных ядер в доменных структурах легкоосного и двухосного ферромагнетиков, а также двухосного ферромагнетика на фоне однородного основного состояния. Рассмотрено поведение солитонов вблизи границ области их существования. Показано, что учет магнито-дипольных сил приводит к конечности скорости движения солитонов в доменной структуре двухосного ферромагнетика даже в случае, когда их частоты приближаются к границам спин-волнового спектра.

2. На основе регулярной задачи Римана получено линейное интегральное уравнение, описывающее нелинейную динамику диспергирующих спиновых волн в доменной структуре. В случае малоамплитудных спиновых волн его решение дает верное отклонение намагниченности от основного состояния в виде суперпозиции функций Ламе.

3. Вычислены энергия и импульс локализованных возбуждений в доменной структуре двухосного ферромагнетика. Показано, что интегралы движения даже на фоне сильно нелинейной и неоднородной доменной структуры записываются в виде сумм независимых вкладов от дискретного набора солитонов и квазичастиц непрерывного спектра диспергирующих спиновых волн.

3 НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА ПОЛУБЕСКОНЕЧНОГО ФЕРРОМАГНЕТИКА С АНИЗОТРОПИЕЙ ТИПА «ЛЕГКАЯ ПЛОСКОСТЬ» И ХИРАЛЬНОГО ФЕРРОМАГНЕТИКА

Предыдущие главы посвящены исследованию сильновозбужденных состояний в полосовой доменной структуре легкоосного и двухосного ферромагнетиков. В качестве метода исследования использована процедура обратной задачи рассеяния – наиболее эффективный из методов современной нелинейной математической физики и физики нелинейных явлений.

К сожалению, он приспособлен лишь для решения задач в безграничных средах. Реальные образцы имеют конечные размеры. В таких случаях метод обратной задачи рассеяния сталкивается с серьезными трудностями при отображении начально-краевых условий, заданных для исходных полей намагниченности, в данные рассеяния вспомогательной спектральной задачи. Исключение составляют образцы со специальными краевыми условиями, которые далее будем называть интегрируемыми. Для моделей ферромагнетиков, учитывающих основные обменные взаимодействия и квадратичную по намагниченности кристаллографическую анизотропию, интегрируемые краевые условия выявлены в работе [64]. Однако, нелинейная динамика конечных ферромагнитных образцов до сих пор мало изучена. В работе [65] построены квазипериодические одномерные решения уравнения Ландау – Лифшица для ферромагнетика с анизотропией типа «легкая плоскость», которые удовлетворяют интегрируемым краевым условиям на отрезке. Окончательные формулы записаны в терминах малоизученных многомерных тета-функций со сложными трансцендентными соотношениями на их параметры. Они не дают решение какой-либо конкретной начальной задачи о распространении локализованных возбуждений в образце. В частности, из полученных решений трудно извлечь информацию о взаимодействии солитонов с границей образца.

Эта проблема решена для нелинейного уравнения Шредингера на полуоси посредством объединения метода обратной задачи рассеяния с «методом изображений», который используется в электростатике при решении линейных краевых задач с определенной пространственной симметрией [66–68]. Схема [66; 67] была использована для анализа взаимодействия солитонов с границей ферромагнитной пластины [69], а также для исследования солитонов в

полуограниченных образцах гейзенберговского ферромагнетика и легкоосного ферромагнетиков с однородным основным состоянием [70; 71].

Отметим также, что в работах [11; 72; 73] установлена связь решений модели одноосного ферромагнетика и модели Ландау – Лифшица для ферромагнетика с геликоидальной структурой при учете обменной энергии, взаимодействия Дзялошинского, и энергии квадратичной по намагниченности одноосной анизотропии (ось анизотропии параллельна вектору Дзялошинского). Это соответствие позволяет использовать солитонные решения полностью интегрируемых уравнений безграничного одноосного ферромагнетика с однородным основным состоянием для построения и анализа спиновых волн и нетривиальных мультисолитонов (движущихся или покоящихся) в ферромагнетике с геликоидальной структурой.

В данной главе перечисленные результаты использованы для аналитического описания солитонов и спиновых волн в полуограниченном ферромагнетике с анизотропией типа «легкая плоскость» [A13–A15]. В работе [A16] проведено обобщение преобразования [72; 73] и установлена связь решений модели Ландау – Лифшица для полуограниченного одноосного ферромагнетика без взаимодействия Дзялошинского с решениями уравнений Ландау – Лифшица для полуограниченного хирального ферромагнетика при краевых условиях, учитывающих частичное закрепление спинов на границе образца. На основе техники интегрирования уравнений Ландау – Лифшица полуограниченных ферромагнетиков с однородным основным состоянием найденное преобразование позволяет получить полное аналитическое описание мультисолитонов и диспергирующих волн в полуограниченном хиральном ферромагнетике с легкоплоскостной магнитной анизотропией.

Материалы главы основаны на работах [A13–A16].

3.1 Постановка задачи: идея интегрирования модели Ландау – Лифшица для полуограниченного ферромагнетика с анизотропией типа «легкая плоскость» методом изображений

Рассмотрим модель Ландау – Лифшица для ферромагнетика с анизотропией типа «легкая плоскость» (плоскость Oxy) на полуоси $0 \leq z < \infty$. Энергия

образца имеет вид [61]:

$$E = \frac{1}{2} \int_0^\infty dz [\alpha (\partial_z \mathbf{M})^2 + K(\mathbf{M} \cdot \mathbf{e}_3)] + H(\mathbf{M} \cdot \mathbf{e}_1)|_{z=0},$$

где $\mathbf{M}(z, t)$ – намагниченность на единицу длины вдоль оси Oz ($\mathbf{M}^2 = M_0^2 = \text{const}$); z, t – пространственные координата и время, $\alpha > 0$ и $K > 0$ – постоянные обменного взаимодействия и анизотропии. Параметр H характеризует эффективное поле однонаправленной поверхностной анизотропии $H = E_0/M_0$, обусловленное нанесением слоя антиферромагнетика на поверхность ферромагнитного образца [74–76]. Здесь E_0 – обменная энергия единицы поверхности образца. Ее значения для широкого класса двуслойных структур антиферромагнетик–ферромагнетик приведены в [77]. Единичные векторы $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$ и $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ задают направления поверхностного поля и оси анизотропии соответственно.

В безразмерных переменных:

$$\mathbf{m} = -\frac{\mathbf{M}}{M_0}, \quad z' = z\sqrt{K/\alpha}, \quad t' = \gamma M_0 K t, \quad h' = \frac{H}{M_0\sqrt{\alpha K}}, \quad (3.1)$$

где γ – магнитомеханическое отношение, энергия системы приобретает вид:

$$E' = \frac{E}{M_0^2\sqrt{\alpha K}} = \frac{1}{2} \int_0^\infty dz' [(\partial_{z'} \mathbf{m})^2 + m_3^2] - h' m_1|_{z=0}. \quad (3.2)$$

Возможным нелинейным возбуждениям в полубесконечном образце соответствуют решения уравнения Ландау – Лифшица [9; 11; 63]:

$$\partial_{t'} \mathbf{m} = [\mathbf{m} \times \partial_{z'}^2 \mathbf{m}] - (\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{m})[\mathbf{m} \times \mathbf{e}_3], \quad \mathbf{m}^2 = 1, \quad 0 \leq z < \infty, \quad (3.3)$$

с интегрируемыми краевыми условиями:

$$[\mathbf{m} \times (\partial_{z'} \mathbf{m} + \mathbf{e}_1 h')]|_{z=0} = 0, \quad (3.4)$$

$$\mathbf{m} \rightarrow (1, 0, 0), \quad \partial_{z'} \mathbf{m} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad z' \rightarrow +\infty, \quad (3.5)$$

и начальным распределением намагниченности:

$$\mathbf{m}(z', t' = 0) = \mathbf{m}_0(z'). \quad (3.6)$$

Выбор асимптотического краевого условия (3.5) соответствует минимуму плотности энергии среды при $z' \gg 1$. Начальное возмущение (3.6) согласовано с условиями (3.4), (3.5). «Штрихи» над безразмерными переменными далее опускаем.

Смешанное краевое условие (3.4) при $h \rightarrow 0$ переходит в условие задачи со свободными поверхностными спинами [9]:

$$[\mathbf{m} \times \partial_z \mathbf{m}]|_{z=0} = 0.$$

В пределе $|h| \rightarrow \infty$ оно сводится к условию полного закрепления намагниченности на границе образца:

$$m_1|_{z=0} = \pm 1. \quad (3.7)$$

Выбор знака в правой части (3.7) зависит от типа солитонов. Уточним его в ходе дальнейшего анализа.

Для интегрирования модели (3.3)–(3.6) будем использовать нелинейный аналог метода «изображений», который применяется в электростатике при решении краевых задач с определенной пространственной симметрией. Впервые такая техника была предложена в [66–68] для нелинейного уравнения Шредингера на полуоси с интегрируемыми краевыми условиями.

В контексте метода «изображений», продолжим векторное поле $\mathbf{m}(z, t)$ на всю ось $-\infty < z < \infty$ четным образом :

$$\mathbf{S}(z, t) = \begin{cases} \mathbf{m}(z, t), & 0 \leq z < +\infty; \\ \mathbf{m}(-z, t), & -\infty < z < 0. \end{cases} \quad (3.8)$$

Продолжение $\mathbf{S}(z, t)$ непрерывно в точке $z = 0$:

$$\mathbf{S}|_{z=+0} = \mathbf{S}|_{z=-0} = \mathbf{m}|_{z=0}. \quad (3.9)$$

Однако его первая производная в этой точке имеет скачок:

$$\partial_z \mathbf{S}|_{z=+0} - \partial_z \mathbf{S}|_{z=-0} = 2 \partial_z \mathbf{m}|_{z=+0}.$$

Отсюда следует, что краевое условие для поля $\mathbf{m}(z, t)$ (3.4) можно трактовать как дополнительное ограничение на выбор функции $\mathbf{S}(z, t)$:

$$\Delta \mathbf{S}|_{z=0} = 0, \quad [\mathbf{S} \times (\Delta \partial_z \mathbf{S} + 2h \mathbf{e}_1)]|_{z=0} = 0, \quad (3.10)$$

где $\Delta \partial_z \mathbf{S}|_{z=0} = \partial_z \mathbf{S}(z = +0) - \partial_z \mathbf{S}(z = -0)$.

U - V -пару для уравнения Ландау – Лифшица:

$$\partial_t \mathbf{S} = [\mathbf{S} \times \partial_z^2 \mathbf{S}] - (\mathbf{S} \cdot \mathbf{e}_3)[\mathbf{S} \times \mathbf{e}_3], \quad \mathbf{S}^2 = 1, \quad (3.11)$$

в неограниченной среде (при $-\infty < z < \infty$) [11; 51] запишем в виде:

$$\begin{aligned} U &= -i(w_1 S_2 \sigma_2 + w_3 S_3 \sigma_1 - w_1 S_1 \sigma_3), \\ V &= -i(w_1 [\mathbf{S} \times \partial_z \mathbf{S}]_2 \sigma_2 + w_3 [\mathbf{S} \times \partial_z \mathbf{S}]_3 \sigma_1 - w_1 [\mathbf{S} \times \partial_z \mathbf{S}]_1 \sigma_3 - \\ &\quad - 2w_1(w_3 S_2 \sigma_2 + w_1 S_3 \sigma_1) + 2w_1 w_3 S_1 \sigma_3), \end{aligned} \quad (3.12)$$

где поле намагниченности $\mathbf{S}(z, t)$ предполагается нужное число раз дифференцируемым по переменным z, t ; $w_3^2 - w_1^2 = 1/4$, σ_i – матрицы Паули ($i = 1, 2, 3$), функции $w_{1,3}$ параметризуются комплексным спектральным параметром λ .

Нетрудно проверить, что ограничения (3.10) равносильны матричной связи:

$$V_+(\lambda)K(\lambda) - K(\lambda)V_-(\lambda) = 0, \quad (3.13)$$

где $V_{\pm}(\lambda) = V(z, \lambda)|_{z=\pm 0}$,

$$K(\lambda) = \begin{pmatrix} 2w_1(\lambda) - ih & 0 \\ 0 & 2w_1(\lambda) + ih \end{pmatrix}.$$

Похожие матричные ограничения характерны для всех интегрируемых краевых условий, найденных в работе [64].

Дальнейшая цель состоит в том, чтобы включить добавочное ограничение (3.13) в традиционную схему метода обратной задачи рассеяния. Ход вычислений приведен в следующем разделе. Соответствующая схема для легкоплоскостного ферромагнетика без учета границы образца приведена в монографии [11]. Важно, что ограничение (3.13) содержит зависимость от поля h на границе в простом и удобном виде. Это обстоятельство позволит довести вычисления до конца и провести полный анализ полученных результатов.

3.2 Процедура интегрирования уравнения Ландау – Лифшица для легкоплоскостного ферромагнетика на полуоси

3.2.1 Матрица параллельного переноса

В монографии [11] коэффициенты $w_{1,3}$ (3.12) параметризованы рациональными функциями спектрального параметра λ :

$$w_1 = \frac{\lambda}{\lambda^2 - 1}, \quad w_3 = \frac{\lambda^2 + 1}{2(\lambda^2 - 1)}.$$

В настоящей задаче удобнее конформным преобразованием $\lambda = e^u$ отобразить точки комплексной плоскости λ на поверхность цилиндра, т. е. в полосу:

$$-\infty < \operatorname{Re} u < \infty, \quad |\operatorname{Im} u| < \pi, \quad (3.14)$$

с отождествленными границами: $\operatorname{Im} u = \pm\pi$. В терминах нового спектрального параметра u , коэффициенты $w_{1,3}$ примут вид:

$$w_1(u) = \frac{1}{2 \operatorname{sh} u}, \quad w_3(u) = \frac{1}{2} \operatorname{cth} u, \quad (3.15)$$

где $-\infty < \operatorname{Re} u < \infty$, $|\operatorname{Im} u| \leq \pi$. В такой параметризации области $\operatorname{Im} \lambda > 0$ соответствуют значения из полосы

$$D_1 = \{-\infty < \operatorname{Re} u < \infty, 0 < \operatorname{Im} u < \pi\}, \quad (3.16)$$

а область $\operatorname{Im} \lambda < 0$ переходит в полосу

$$D_2 = \{-\infty < \operatorname{Re} u < \infty, -\pi < \operatorname{Im} u < 0\}. \quad (3.17)$$

Граница Γ_λ между λ -полуплоскостями отображается в контур $\Gamma_u = \gamma_1 \cup \gamma_2$, где $\gamma_{1,2}$ – две прямые в u -плоскости:

$$\gamma_1 = \{-\infty < \operatorname{Re} u < \infty, \operatorname{Im} u = 0\}, \quad \gamma_2 = \{-\infty < \operatorname{Re} u < \infty, \operatorname{Im} u = \pi\}. \quad (3.18)$$

Обходу области $\operatorname{Im} \lambda > 0$ по контуру Γ_λ соответствует обход полосы D_1 по линиям Γ_u . На рисунке 3.1 направления обходов указаны стрелками.

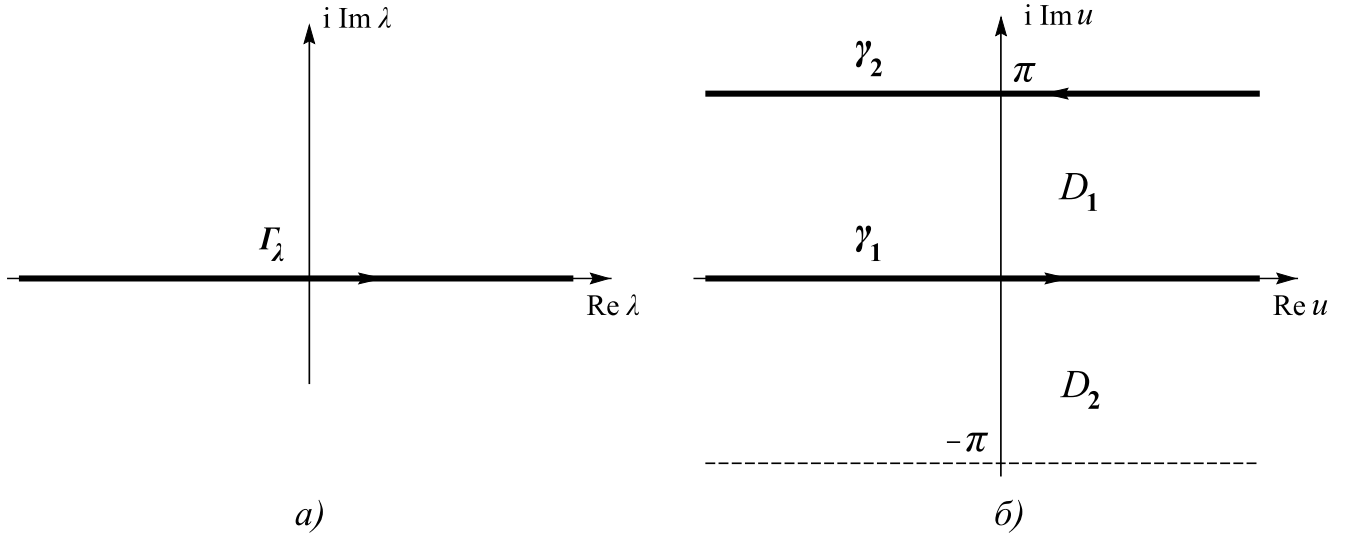


Рисунок 3.1 — Конформное отображение λ -плоскости на поверхность цилиндра. Жирными линиями отмечен контур Γ_λ в плоскости λ (а) и соответствующие ему прямые γ_1 и γ_2 в u -плоскости (б).

Следуя [56], введем матрицу параллельного переноса из точки z' в точку z . Она определяется уравнениями:

$$\begin{aligned} \partial_z T_0(z, z', u) &= U(z, u) T_0(z, z', u), & \partial_{z'} T_0(z, z', u) &= -T_0(z, z', u) U(z', u); \\ \partial_t T_0(z, z', u) &= V(z, u) T_0(z, z', u) - T_0(z, z', u) V(z', u) \end{aligned} \quad (3.19)$$

и нормировочным условием $T_0(z, z, u) = I$, где I — единичная матрица. Здесь и далее, если не оговорено обратное, не указываем зависимость функций от времени t . В дальнейших вычислениях используются свойства суперпозиции и унимодулярности матричной функции T_0 :

$$T_0(z, y, u) T_0(y, z', u) = T_0(z, z', u), \quad \det T_0(z, z', u) = 1.$$

Условие $\det T_0 = 1$ следует из первых уравнений (3.19) при учете тождества $\text{Sp} U = 0$. Матрицы $U(u)$ и $V(u)$ в уравнениях (3.19) удовлетворяют редукциям:

$$\begin{aligned} U^*(u^*) &= \sigma_2 U(u) \sigma_2; & V^*(u^*) &= \sigma_2 V(u) \sigma_2, \\ U^*[(u \pm \pi i)^*] &= \sigma_3 U(u) \sigma_3; & V^*[(u \pm \pi i)^*] &= \sigma_3 V(u) \sigma_3 \end{aligned}$$

из которых следуют ограничения:

$$T_0^*(z, z', u^*) = \sigma_2 T_0(z, z', u) \sigma_2 \quad (3.20)$$

$$T_0^*[z, z', (u \pm \pi i)^*] = \sigma_3 T_0(z, z', u) \sigma_3. \quad (3.21)$$

Для учета связи (3.13) следует модифицировать матрицу переноса T_0 [66; 67]. В данной задаче необходимая модификация матрицы трансляции имеет вид:

$$T(z, z', u) = \begin{cases} T_0(z, z', u), & zz' > 0, \\ T_0(z, +0, u)K(u)T_0(-0, z', u), & z > 0 > z', \\ T_0(z, -0, u)K^{-1}(u)T_0(+0, z', u), & z < 0 < z'. \end{cases} \quad (3.22)$$

Новая матрица переноса не является унимодулярной:

$$\det T(z, z', u) = [4w_1^2(u) + h^2]^{(\text{sign } z - \text{sign } z')/2} \quad (3.23)$$

и не имеет прежних свойств нормировки и суперпозиции.

Вместо них используются соотношения:

$$\begin{aligned} T(z, z, u) &= I \quad \text{при } z \neq 0, & T(z, z', u) &= T^{-1}(z', z, u); \\ T(+0, -0, u) &= T^{-1}(-0, +0, u) = K(u). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Инволюция (3.20) сохраняется прежней:

$$T^*(u^*) = \sigma_2 T(u) \sigma_2, \quad (3.25)$$

т. к.

$$T_0^*(u^*) = \sigma_2 T_0(u) \sigma_2, \quad K^*(u^*) = \sigma_2 K(u) \sigma_2.$$

Преобразования

$$T_0^*[(u \pm \pi i)^*] = \sigma_3 T_0(z, z', u) \sigma_3, \quad K^*[(u \pm \pi i)^*] = -\sigma_3 K(u) \sigma_3$$

отличаются знаком. Поэтому вместо (3.25) получаем:

$$T^*[(u \pm \pi i)^*] = \text{sign}(zz') \sigma_3 T(u) \sigma_3. \quad (3.26)$$

В то же время, матричная функция $T(z, z', u)$ удовлетворяет тем же дифференциальным уравнениям (3.19):

$$\begin{aligned} \partial_z T(z, z', u) &= U(z, u) T(z, z', u), & \partial_{z'} T(z, z', u) &= -T(z, z', u) U(z', u); \\ \partial_t T(z, z', u) &= V(z, u) T(z, z', u) - T(z, z', u) V(z', u), \end{aligned} \quad (3.27)$$

что были в случае поля $\mathbf{S}(z, t)$ без особенностей на интервале $-\infty < z < \infty$.

Четность продолжения (3.8):

$$\mathbf{S}(-z, t) = \mathbf{S}(z, t)$$

приводит к дополнительным свойствам симметрии операторов $U(z, u)$, $V(z, u)$, $K(u)$:

$$\begin{aligned} V^*(-z, -u^*) &= \sigma_2 V(z, u) \sigma_2, & U^*(-z, -u^*) &= \sigma_2 U(z, u) \sigma_2, \\ (4w_1^2(u) + h^2)K^{-1}(u) &= -\sigma_2 K^*(-u^*) \sigma_2, \end{aligned}$$

с учетом которых из (3.27) следует пропорциональность матричных функций $T(z, z', u)$ и $\sigma_2 T^*(-z, -z', -u^*) \sigma_2$. Коэффициент пропорциональности фиксируется последним равенством (3.24):

$$T(z, z', u) = \text{sign}(zz') \sigma_2 T(-z, -z', -u^*) \sigma_2 [4w_1^2(u) + h^2]^{\text{sign}z - \text{sign}z' / 2}. \quad (3.28)$$

3.2.2 Прямая задача рассеяния

Обсудим переход к спектральным данным, в которых краевая задача (3.3)–(3.6) допускает явное решение. Для этого введем матричные функции Йоста [11; 51]:

$$\begin{aligned} T_{\pm}(z, u) &= \lim_{z' \rightarrow \pm\infty} [T(z, z', u) \exp(i w_1(\lambda) z' \sigma_3)], \\ \det T_{\pm}(z, u) &= [4w_1^2(u) + h^2]^{\text{sign}z \mp 1 / 2}, \end{aligned} \quad (3.29)$$

являющиеся фундаментальными решениями вспомогательной линейной системы

$$\partial_z T_{\pm}(z, u) = U(z, u) T_{\pm}(z, u) \quad (3.30)$$

с асимптотическими условиями:

$$T_{\pm}(z, u) \rightarrow \varphi_0(z, u) \equiv \exp(i w_1(u) z \sigma_3) \quad \text{при} \quad z \rightarrow \pm\infty, \quad (3.31)$$

которые согласованы с поведением поля $\mathbf{m}(z, t)$ при $z \rightarrow \pm\infty$ (3.5).

Когда спектральный параметр $u \in \Gamma_u = \gamma_1 \cup \gamma_2$, решения Йоста (3.30) осциллируют при $z \rightarrow \pm\infty$. Поэтому множество Γ_u соответствует непрерывному

спектру вспомогательной линейной задачи (3.30), (3.31). На контуре Γ_u решения Йоста $T_{\pm}(z, u)$ определены одновременно и поэтому связаны между собой:

$$T_{-}(z, u) = T_{+}(z, u) Q(u), \quad u \in \Gamma_u. \quad (3.32)$$

Матрица перехода $Q(u)$ зависит только от спектрального параметра u и времени t . Зависимость от t , как и ранее, подразумевается.

Напомним, что в предыдущих главах для матрицы перехода было использовано обозначение $T(u)$. В данной задаче она обозначена как $Q(u)$ во избежание совпадения с обозначением матрицы параллельного переноса $T(z, z', u)$.

Далее вектор-столбцы матриц Йоста будем нумеровать верхними индексами: $T_{\pm} \equiv (T_{\pm}^{(1)}, T_{\pm}^{(2)})$. Столбцы $T_{-}^{(1)}(u)$ и $T_{+}^{(2)}(u)$ аналитически продолжаются с контура Γ_u в полосу D_1 (3.16), а столбцы $T_{+}^{(1)}(u)$ и $T_{-}^{(2)}(u)$ будут аналитическими функциями в полосе D_2 (3.17) кроме, возможно, простых полюсов функции $T_{+}(u)$ в точках $u = u_0$, являющихся корнями уравнений: $2w_1(u) \pm i\hbar = 0$. Полюсы $u = u_0$ унаследованы от матрицы $K^{-1}(u)$ (см. (3.22), (3.29)). Далее покажем, что они не определяют солитонных состояний.

Свойства симметрии матриц переноса (3.25)–(3.28) и асимптотических условий (3.31) переносятся на решения Йоста:

$$T_{\pm}(z, u) = \pm \text{sign } z \sigma_2 T_{\mp}^*(-z, -u^*) \sigma_2 [4w_1^2(u) + h^2]^{\text{sign } z \mp 1 / 2}, \quad (3.33)$$

$$T_{\pm}^*(z, u^*) = \sigma_2 T_{\pm}(z, u) \sigma_2, \quad T_{\pm}^*(z, [u \pm \pi i]^*) = \pm \text{sign } z \sigma_3 T_{\pm}(u) \sigma_3. \quad (3.34)$$

В левой и правой частях каждого из матричных равенств (3.33), (3.34) спектральный параметр u выбирается в областях аналитичности соответствующих столбцов.

Последняя формула (3.29) и редукции (3.33), (3.34) уточняют вид матрицы перехода:

$$Q(u) = \begin{pmatrix} a(u) & -\bar{b}(u) \\ b(u) & \bar{a}(u) \end{pmatrix}, \quad a(u)\bar{a}(u) + b(u)\bar{b}(u) = 4w_1^2(u) + h^2;$$

$$a(u) = -a^*[(u - \pi i)^*] = -a^*(-u^*), \quad u \in D_1; \quad \bar{a}(u) = a^*(u^*), \quad u \in D_2;$$

$$b(u) = b^*(u + \pi i) = b(-u), \quad \bar{b}(u) = b^*(u), \quad u \in \gamma_1. \quad (3.35)$$

Связь решений Йоста (3.32) приводит к представлениям:

$$a(u) = \frac{\det[T_{-}^{(1)}(u), T_{+}^{(2)}(u)]}{\det T_{+}(u)}, \quad \bar{a}(u) = \frac{\det[T_{+}^{(1)}(u), T_{-}^{(2)}(u)]}{\det T_{+}(u)}, \quad (3.36)$$

где $\det T_+(u) = [4w_1^2(\lambda) + h^2]^{(\text{sign}z-1)/2}$. Отсюда следует, что функции $a(u)$ и $\bar{a}(u)$ аналитически продолжаются с контура Γ_u в области D_1 и D_2 соответственно. В областях своей аналитичности матричные элементы $a(u)$ и $\bar{a}(u)$ могут обращаться в ноль. Нули $u = u_j \in D_1$ функции $a(u)$ далее будем предполагать простыми. Поскольку $\bar{a}(u) = a^*(u^*)$, нули функции $\bar{a}(u)$ имеют вид: $u = u_j^* \in D_2$. Матричный элемент $a(u)$ может также обращаться в ноль в точках $u = u_0 \in D_1$, являющихся корнями уравнений $2w_1(u) \pm ih = 0$ (см. (3.22), (3.29), (3.36)).

Редукции (3.35) разбивают множество нулей $\{u_j\}$ функции $a(u)$ на два класса:

$$u = u_s \equiv \rho_s + \pi i/2, \quad -u_s^*, \quad \rho_s \neq 0, \quad -\infty < \rho_s < \infty, \quad s = 1, 2, \dots, M, \quad (3.37)$$

$$u = \mu_k, \quad -\mu_k^*, \quad -\mu_k + \pi i, \quad \mu_k^* + \pi i; \quad \mu_k = \tau_k + i\theta_k, \\ -\infty < \tau_k < \infty, \quad 0 < \theta_k < \pi, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (3.38)$$

Согласно первому из равенств (3.36), если $a(u_j) = 0$, то столбцы $T_-^{(1)}(u_j)$ и $T_+^{(2)}(u_j)$ пропорциональны:

$$T_-^{(1)}(u_j) = \gamma(u_j) T_+^{(2)}(u_j), \quad u_j \in D_1. \quad (3.39)$$

Соотношения (3.39) определяют векторы–столбцы решений вспомогательной линейной задачи (3.30), (3.31), которые экспоненциально убывают при $|z| \rightarrow \infty$. Поэтому множеству $\{u_j\}$ отвечает дискретный спектр задачи (3.30), (3.31).

Редукции (3.33), (3.34) выделяют из множителей $\gamma(u)$ две группы, которые соответствуют нулям функции $a(u)$ типа (3.37), (3.38):

$$\gamma(u_s) = \gamma^*(u_s), \quad \gamma(u_s)\gamma^*(-u_s^*) = 4w_1^2(u_s) + h^2, \quad s = 1, 2, \dots, M; \quad (3.40)$$

$$\gamma(\mu_k) = \gamma^*(\mu_k^* + \pi i), \quad \gamma(\mu_k)\gamma^*(-\mu_k^*) = 4w_1^2(u_k) + h^2, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (3.41)$$

Воспользовавшись независимостью матрицы перехода $Q(u)$ от z , с помощью формул (3.32), (3.22), (3.25), (3.33) получим для нее цепочку представлений:

$$Q(\lambda) = T_+^{-1}(z, u)K(u)T_-(-0, u) = \\ = \sigma_2 T_+^{\text{T}}(+0, u)\sigma_2 K(u)\sigma_2 T_+^*(+0, -u^*)\sigma_2 = \\ = T_+^{\dagger}(+0, u^*)K(\lambda)\sigma_2 T_+^*(+0, -u^*)\sigma_2. \quad (3.42)$$

Верхний индекс «Т» обозначает операцию транспонирования, «†» – эрмитова сопряжения. Здесь мы учли, что $\det T_+(+0, u) = 1$ и воспользовались тождеством,

справедливым для произвольной невырожденной матрицы размерности 2×2 :

$$A^{-1} = \frac{\sigma_2 A^T \sigma_2}{\det A}. \quad (3.43)$$

Последняя и предпоследняя формулы в цепочке равенств (3.42) позволяют выразить матричные элементы $b(u)$ и $a(u)$ через компоненты вектора $T_+^{(2)}(+0, u)$:

$$b(u) = Q_{21}(u) = (2w_1(u) - ih)[T_+^*(+0, u^*)]_{12}[T_+^*(+0, -u^*)]_{22} - \\ -(2w_1(u) + ih)[T_+^*(+0, u^*)]_{22}[T_+^*(+0, -u^*)]_{12}, \quad u \in \Gamma_u; \quad (3.44)$$

$$a(u) = Q_{11}(u) = (2w_1(u) - ih)[T_+(+0, u)]_{22}[T_+^*(+0, -u^*)]_{22} + \\ +(2w_1(u) + ih)[T_+(+0, u)]_{12}[T_+^*(+0, -u^*)]_{12}, \quad u \in D_1. \quad (3.45)$$

Спектральная плотность $b(u)$ задана на контуре Γ_u и в общем случае не имеет каких-либо определенных свойств аналитичности. Поэтому в правой части равенства (3.44) используются предельные значения компонент вектора $T_+^{(2)}(+0, u)$, полученные переходом из области D_1 на границу Γ_u .

3.2.3 Асимптотические разложения функций Йоста

Для дальнейшего анализа необходима информация об асимптотическом поведении функций Йоста $T_{\pm}(z, u)$ вблизи особых точек $u = 0$ и $u = \pm\infty$ уравнения (3.30).

В окрестности точки $u = 0$ при $z > 0$ представим функцию Йоста $T_+(z, u)$ в виде [11; 56]:

$$T_+(z, u) = (I + \Phi(z, u)) \exp[iw_1(u)z \sigma_3 + \Theta(z, u)], \quad (3.46)$$

где Φ – антидиагональная, а Θ – диагональная матричные функции с асимптотическими условиями:

$$\Phi(z, u), \Theta(z, u) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad z \rightarrow +\infty.$$

Зависимость функций от времени t , как и ранее, не указываем. Подставим (3.46) в уравнение (3.30) и отделим диагональную и антидиагональную части. После

простых вычислений получим:

$$\Theta(z, u) = i \int_z^{+\infty} [w_1(u)(1 - m_1(z')) \sigma_3 + (w_1(u)m_2(z') \sigma_2 + w_3(u)m_3(z') \sigma_1) \Phi(z', u)] dz' \quad (3.47)$$

$$\partial_z \Phi + 2i \Phi w_1 m_1 \sigma_3 - i \Phi (w_1 m_2 \sigma_2 + w_3 m_3 \sigma_1) \Phi + i(w_1 m_2 \sigma_2 + w_3 m_3 \sigma_1) = 0 \quad (3.48)$$

Разложим функции $w_{1,3}$ в ряды по степеням u :

$$w_{1,3}(u) = \sum_{k=0}^{\infty} w_{1,3}^{(2k-1)} u^{2k-1}. \quad (3.49)$$

В дальнейших расчетах используются значения:

$$w_{1,3}^{(-1)} = 1/2, \quad w_3^{(1)} = -2 w_1^{(1)} = 1/6.$$

Будем искать решения уравнений (3.47), (3.48) в виде рядов:

$$\Phi(z, u) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(z) u^n, \quad \Theta(z, u) = \sum_{n=0}^{\infty} \Theta_n(z) u^n. \quad (3.50)$$

После подстановки разложений (3.49), (3.50) в уравнения (3.47), (3.48) приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях u . Получаем цепочку рекуррентных соотношений, из которых последовательно вычисляем коэффициенты $\Phi_n(z)$ и $\Theta_n(z)$. Они имеют следующую алгебраическую структуру:

$$\Phi_n(z) = \begin{pmatrix} 0 & -\varphi_n^*(z) \\ \varphi_n(z) & 0 \end{pmatrix}, \quad \Theta_n(z) = \begin{pmatrix} \theta_n(z) & 0 \\ 0 & \theta_n^*(z) \end{pmatrix}. \quad (3.51)$$

Приведем первые из функций $\varphi_n(z)$, $\theta_n(z)$:

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= -\frac{m_3 + im_2}{1 + m_1}, & \theta_0 &= \frac{1}{2} \ln \frac{1 + m_1}{2} + \frac{i}{2} \int_z^{+\infty} dz' p(z'); \\ \varphi_1 &= i \partial_z \varphi_0, & \theta_1 &= \frac{p(z)}{2} + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial_z m_1}{1 + m_1} - \frac{1}{2} \int_z^{+\infty} dz' [(\partial_z \mathbf{m})^2 + m_3] \right) \end{aligned} \quad (3.52)$$

где $p(z) = (m_3 \partial_z m_2 - m_2 \partial_z m_3)/(1 + m_1)$. Таким образом, при $z > 0$, $|u| \ll 1$ ведущий член асимптотического разложения функции $T_+(z, u)$ имеет вид:

$$T_+(z, u) = (I + \Phi_0(z) + O(u)) \exp \left[\frac{iz}{2u} \sigma_3 + \theta_0(z) + O(u) \right]. \quad (3.53)$$

Отметим, что при $z > 0$ справедливо тождество:

$$\int_z^{+\infty} dz' \left(\frac{S_3 \partial_{z'} S_2 - S_2 \partial_{z'} S_3}{1 + S_3} \right) = \int_z^{+\infty} dz' p(z').$$

С учетом этих замечаний, сравнение формул (3.22), (3.29) для $T_+(z, u)$ и $T_-(z, u)$ приводит к заключению, что главный член разложения $T_-(z, u)$ при $z > 0$, $|u| \ll 1$ отличается от (3.53) только множителем u^{-1} , унаследованным от матрицы $K(u)$:

$$T_-(z, u) = u^{-1} (I + \Phi_0(z) + O(u)) \exp \left[\frac{iz}{2u} \sigma_3 + \theta_0(z) + O(u) \right]. \quad (3.54)$$

Когда $u \rightarrow \pm\infty$, матрица $T_0(z, z', u)$ упрощается (см. (3.12), (3.19)):

$$T_0(z, z', u = \pm\infty) = \exp \left[\mp \frac{i\sigma_1}{2} \int_{z'}^z d\tilde{z} m_3(\tilde{z}) \right].$$

Поэтому из представлений (3.22), (3.29) при $z > 0$ находим:

$$\begin{aligned} T_+(z, u = \pm\infty) &= \exp \left[\pm \frac{\sigma_1}{2} \int_{+\infty}^z dz' m_3(z') \right], \\ T_-(z, u = \pm\infty) &= -i\hbar \exp \left[\pm \frac{i\sigma_1}{2} \int_{+\infty}^z dz' m_3(z') \right] \sigma_3. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Второе равенство получено с учетом четности продолжения (3.8) и коммутационных соотношений для матриц Паули.

С помощью формул (3.45), (3.53), (3.55) определяем поведение функции $a(u)$ вблизи особой точки $u = 0$ и ее значения при $u = \pm\infty$:

$$a(u) = u^{-1} + O(1), \quad a(u = \pm\infty) = -i\hbar. \quad (3.56)$$

Функция $a(u)$ определена на поверхности цилиндра, а потому она периодична по u с периодом $2\pi i$. В полосе D_1 (3.16) она является аналитической, обращается в нуль в точках $u = u_j \in D_1$ (3.37), (3.38) и, возможно, в точках $u = u_0 \in D_1$, совпадающих с корнями уравнений: $2w_1(u) \pm i\hbar = 0$. В области D_2 функция $a(u)$ имеет полюсы $u = u_j^*$, которые совпадают с нулями коэффициента $\bar{a}(u)$ (см. (3.35)). Как и в комплексной λ -плоскости [11; 56], явный вид аналитической функции $a(u)$ на поверхности цилиндра восстанавливается по ее нулям, полюсам, асимптотическому поведению в особых точках (3.56) и

коэффициенту отражения $b(u)$. В качестве ядра Коши $(\lambda' - \lambda)^{-1}$ на поверхности цилиндра ($\lambda' = e^\xi$, $\lambda = e^u$) используется функция $e^\xi/(e^\xi - e^u)$. С учетом редукций (3.35), окончательный результат записывается в виде:

$$a(u) = \left(\frac{1}{\operatorname{sh}u} - i\alpha \right) \prod_{s=1}^M \left(\frac{i \operatorname{ch}\rho_s - \operatorname{sh}u}{i \operatorname{ch}\rho_s + \operatorname{sh}u} \right) \prod_{k=1}^N \left(\frac{\operatorname{sh}u - \operatorname{sh}\mu_k}{\operatorname{sh}u - \operatorname{sh}\mu_k^*} \right) \left(\frac{\operatorname{sh}u + \operatorname{sh}\mu_k^*}{\operatorname{sh}u + \operatorname{sh}\mu_k} \right) \times \\ \times \exp \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi}{\operatorname{sh}(\xi - u)} \ln \left[1 - \frac{|b(\xi)|^2}{\operatorname{sh}^{-2}\xi + h^2} \right] \right). \quad (3.57)$$

Связь вещественного параметра α с поверхностным полем h зависит от числа пар нулей типа (3.37) у функции $a(u)$:

$$\alpha = (-1)^M h. \quad (3.58)$$

3.2.4 Интегралы движения для солитонов и волн в полубесконечном образце

В предыдущих подразделах построено отображение распределения намагниченности $\mathbf{m}(z, t)$ полубесконечного легкоплоскостного ферромагнетика в набор данных рассеяния вспомогательной спектральной задачи (3.30), (3.31). Данные рассеяния содержат дискретные нули $\{u_j\}$ коэффициента прохождения $a(u)$, нормировочные множители $\gamma(u_j)$, $j = 1, 2, \dots, 2M + 4N$ и спектральные плотности $b(u)$, где $u \in \Gamma_u$. В этих переменных интегрирование модели (3.3)–(3.6) сводится к решению линейных дифференциальных уравнений. Из второго уравнения (3.27) стандартным образом [11; 56] находим зависимость данных рассеяния от времени:

$$a(t, u) = a_0(u), \quad b(t, u) = b_0(u) \exp[4i w_1(u) w_3(u) t], \\ \gamma(t, u_j) = \gamma_0(u_j) \exp[4i w_1(u_j) w_3(u_j) t]. \quad (3.59)$$

Значения постоянных интегрирования $a_0(u)$, $b_0(u)$, $\gamma_0(u_j)$ определяем из (3.30), (3.31) по заданному начальному распределению намагниченности (3.6).

С физической точки зрения, спектральные плотности $b_i(u)$ параметризуют диспергирующие спиновые волны, а дискретные числа $\{u_j\}$ – магнитные солитоны в полубесконечном образце.

Элемент $a(u)$ матрицы перехода не зависит от времени. Поэтому $a(u)$ является производящим функционалом интегралов движения для возбуждений в полубесконечном образце так же, как и в случае неограниченной среды. Серию физически содержательных интегралов движения дают коэффициенты разложения функции $\ln[a(u)/\sqrt{4w_1^2(u) + h^2}]$ в ряд по степеням u . Степенное разложение $a(u)$ получается после подстановки в правую часть формулы (3.45) рядов (3.46), (3.50) для элементов матричной функции $T_+(z, u)$. Приведем первый член искомого разложения:

$$\ln \left(\frac{a(u)}{\sqrt{4w_1^2(u) + h^2}} \right) = iE + O(u). \quad (3.60)$$

Выражение

$$E = \frac{1}{2} \int_0^\infty dz [(\partial_z \mathbf{m})^2 + m_3^2] - h m_1|_{z=0}$$

совпадает с энергией (3.2) полубесконечного легкоплоскостного ферромагнетика. С другой стороны, разложение левой части равенства (3.60) можно выполнить, используя явный вид функции $a(u)$ (3.57). Сравнение двух разложений позволяет выразить все интегралы движения через спектральные данные.

После простых вычислений, для энергии системы получим:

$$E = (-1)^{M+1} h + 2 \sum_{s=1}^M \text{ch}^{-1} \rho_s + 4 \sum_{k=1}^M \frac{\text{Im sh} \mu_k}{|\text{sh} \mu_k|^2} + \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \eta(\xi) \Omega(\xi). \quad (3.61)$$

Функция

$$\eta(\xi) = -\frac{1}{2\pi} \ln \left[1 - \frac{|b_0(\xi)|^2}{\text{sh}^{-2} \xi + h^2} \right] > 0$$

определяет плотность спин-волновых мод с волновым числом $k(\xi) = \text{sh}^{-1} \xi$ и законом дисперсии:

$$\Omega(\xi) = \frac{\text{ch} \xi}{\text{sh}^2 \xi} = k \sqrt{1 + k^2}.$$

В терминах спектральных данных полная энергия образца (3.2) «диагонализуется»: представляет сумму независимых дискретных вкладов от солитонов и квазичастиц непрерывного спектра спиновых волн.

Отметим, что в неограниченной среде спектральная плотность $b(u)$ вблизи особой точки $u = 0$ убывает быстрее любой степени u [11; 56]. Поэтому асимптотический ряд по степеням u для функции $b(u)$ тривиален и не дает какой-либо

информации о поведении солитонов и волн. В полубесконечном образце кусочная дифференцируемость поля $\mathbf{S}(z, t)$ (3.8) приводит к степенному разложению $b(u)$ вблизи особой точки $u = 0$ спектральной задачи (3.30), (3.31). С помощью формул (3.44), (3.46), (3.49)–(3.51) находим:

$$b(u, t) = 2 \sum_{s=0}^{\infty} u^{2s} \left[-2 \sum_{k=0}^s w_1^{(2k-1)} \varphi_{2(s-k)+1} + i h \varphi_{2s} \right] \exp \left(-2 \sum_{p=0}^{\infty} \theta_{2p} u^{2p} \right) \Big|_{z=0}. \quad (3.62)$$

Для солитонов в отсутствии диспергирующих волн $b(u, t) \equiv 0$. Поэтому все предэкспоненциальные множители в (3.62) должны обращаться в нуль:

$$\left[-2 \sum_{k=0}^s w_1^{(2k-1)} \varphi_{2(s-k)+1} + i h \varphi_{2s} \right] \Big|_{z=0} = 0.$$

Это условие представляет дополнительные интегралы движения, которые обеспечивают выполнение солитонами верных краевых условий при их взаимодействии с границей образца. Простейший из них имеет вид:

$$\partial_z \ln \left(\frac{m_3 + i m_2}{1 + m_1} \right) \Big|_{z=0} = h.$$

Интегралы движения такого же типа возникают при исследовании солитонов гейзенберговского ферромагнетика и легкоосного ферромагнетика с однородным основным состоянием [70; 71].

3.2.5 Задача Римана

Для обращения данных рассеяния в поле намагниченности воспользуемся методами теории функции комплексной переменной на основе решения задачи Римана. Обратное преобразование рассеяния на полуоси $0 \leq z < +\infty$ отличается от такового на интервале $-\infty < z < 0$. Однако, задача Римана в обоих случаях может быть единообразно записана в терминах ступенчатой функции Хевисайда: $H(z) = (\text{sign} z + 1)/2$.

Введем функции $\Pi_+(z, u)$ и $\Pi_-(z, u)$, аналитические по параметру u в областях D_1 и D_2 соответственно:

$$\begin{aligned}\Pi_-(z, u) &= (T_+^{(1)}(z, u), T_-^{(2)}(z, u)) \varphi_0^{-1}(z, u) \text{diag}(p_1(z, u), p_2(z, u)), \\ \Pi_+(z, u) &= (T_-^{(1)}(z, u), T_+^{(2)}(z, u)) \varphi_0^{-1}(z, u) \text{diag}(p_2^*(z, u^*), p_1^*(z, u^*)). \end{aligned} \quad (3.63)$$

Здесь $\varphi_0(z, u) = \exp[i w_1(u) z \sigma_3]$, функции $p_{1,2}(z, u)$ являются кусочно-постоянными по координате z :

$$p_1(z, u) = H(z) + (2w_1(u) + i\alpha)H(-z), \quad p_2(z, u) = H(-z) + (2w_1(u) + i\alpha)^{-1}H(z).$$

Вычисление матричных функций $\Pi_{\pm}(z, u)$ сводится к решению следующей задачи Римана на поверхности цилиндра. Необходимо построить периодические по параметру u функции $\Pi_+(z, u)$ и $\Pi_-(z, u)$ с периодом $2\pi i$, которые являются аналитическими в областях D_1 (3.16) и D_2 (3.17), соответственно, удовлетворяют условию сопряжения на контуре $\Gamma_u = \gamma_1 \cup \gamma_2$ (3.18):

$$\Pi_-(z, u) = \frac{\Pi_+(z, u)}{a_m(z, u)} \varphi_0(z, u) \begin{pmatrix} 1 & -\bar{b}_m(z, u) \\ b_m(z, u) & 1 \end{pmatrix} \varphi_0^{-1}(z, u), \quad u \in \Gamma_u, \quad (3.64)$$

редукциям:

$$\begin{aligned}\Pi_{\pm}^*(z, u^* \pm \pi i) &= \sigma_3 \Pi_{\pm}(z, u) \sigma_3, \quad u \in D_1 \cup D_2; \\ \Pi_{\pm}(z, u) &= \mp i \text{sign } z \sigma_2 \Pi_{\pm}^*(-z, -u^*) \sigma_1 \text{diag}(\theta(\mp z, u), \theta(\pm z, -u)), \quad (3.65) \\ \Pi_-(z, u^*) &= \sigma_2 \Pi_+(z, u) \sigma_2, \quad u \in \Gamma_u,\end{aligned}$$

и дополнительным условиям при $z > 0$:

$$\Pi_-(z, u = \pm\infty) = N^{\pm 1}(z) \sigma_3^M, \quad \Pi_+(z, u = \pm\infty) = N^{\pm 1}(z) (-\sigma_3)^M, \quad (3.66)$$

где M – число пар нулей (3.37) у функции $a(u)$.

Здесь для упрощения записи введены обозначения:

$$\begin{aligned}a_m(z, u) &= \det \Pi_+(z, u) = a(u) p_1^{-1}(z, u) p_2^*(z, u^*), \quad u \in D_1; \\ \bar{a}_m(z, u) &= \det \Pi_-(z, u) = a_m^*(z, u^*), \quad u \in D_2; \\ b_m(z, u) &= b(u) [p_1^*(z, u^*)]^{-1} p_2^*(z, u^*), \quad \bar{b}_m(z, u) = b_m^*(z, u^*), \quad u \in \Gamma_u; \\ \theta(z, u) &= H(z) + [i\alpha + 2w_1(u)]H(-z) / [i\alpha - 2w_1(u)]; \\ N(z) &= \exp\left(\frac{i\sigma_1}{2} \int_z^{+\infty} dz' m_3(z')\right).\end{aligned}$$

Условие сопряжения аналитических функций (3.64) является иной формой записи связи решений Йоста (3.32) на контуре Γ_u . Редукции (3.64), (3.65) следуют из таковых для функций Йоста (3.33), (3.34). Дополнительные условия (3.66) соответствуют значениям (3.55) функций Йоста. Они необходимы для доопределения задачи Римана и вычисления $N(z)$.

Привлекательная черта используемого подхода состоит в том, что решения задач Римана при $z > 0$ и $z < 0$ находятся независимо. Для вычисления поля намагниченности в образце достаточно выполнить расчеты только на полуоси $0 \leq z < \infty$. В этом случае (при $z > 0$) удобно перейти от $\Pi_{\pm}(z, u)$ к новым матричным функциям $\Psi_{\pm}(z, u)$:

$$\Pi_{-}(z, u) = N(z) \sigma_3^M \Psi_{-}(z, u), \quad \Pi_{+}(z, u) = N(z) (-\sigma_3)^M \Psi_{+}(z, u). \quad (3.67)$$

Согласно (3.66), в точке $u = \pm\infty$ они имеют каноническую нормировку:

$$\Psi_{\pm}(z, u = +\infty) = I, \quad (3.68)$$

а при $u = -\infty$ — определяют матрицу N :

$$N^{-2} = \sigma_3^M \Psi_{\pm}(z, u = -\infty) \sigma_3^M = \exp \left(-i \sigma_1 \int_z^{+\infty} dz' m_3(z') \right). \quad (3.69)$$

Аналитические в областях $D_{1,2}$ функции $\Psi_{\pm}(u)$ на контуре Γ_u связаны условием сопряжения:

$$\Psi_{-}(z, u) = (-1)^M \frac{\Psi_{+}(z, u)}{a_m(z, u)} \varphi_0(z, u) \begin{pmatrix} 1 & -\bar{b}_m(z, u) \\ b_m(z, u) & 1 \end{pmatrix} \varphi_0^{-1}(z, u), \quad u \in \Gamma_u, \quad (3.70)$$

где $b_m(u) = b(u)/[2w_1(u) - i\alpha]$, $\bar{b}(u) = b_m^*(u^*)$, $\alpha = (-1)^M h$;

$$a_m(u) = (-1)^M \det \Psi_{+}(u) = a(u)/[2w_1(u) - i\alpha].$$

Кроме того, они удовлетворяют ограничениям:

$$\Psi_{\pm}^*(z, u^* \pm \pi i) = \sigma_3 \Psi_{\pm}(z, u) \sigma_3, \quad u \in D_{1,2}, \quad (3.71)$$

$$\Psi_{-}(z, u^*) = \sigma_2 \Psi_{+}(z, u) \sigma_2, \quad u \in \Gamma_u. \quad (3.72)$$

Следствием формул (3.43), (3.72) является соотношение:

$$\Psi_{+}^{-1}(z, u) = \Psi_{-}^{\dagger}(z, u^*) (-1)^M a_m^{-1}(u),$$

которое позволяет переписать условие сопряжения (3.70) в терминах одной функции $\Psi_-(z, u)$:

$$\Psi_-^\dagger(z, u^*)\Psi_-(z, u) = \varphi_0(u) \begin{pmatrix} 1 & -\bar{b}_m(u) \\ b_m(u) & 1 \end{pmatrix} \varphi_0^{-1}(u), \quad u \in \Gamma_u, \quad (3.73)$$

Установим соответствие между решениями начально-краевой задачи (3.3)–(3.6) для легкоплоскостного ферромагнетика и решениями задачи Римана (3.70). Для этого заметим, что формулы (3.53), (3.54) приводят к связям матричных функций $T_+(z, u = 0)$ и $T_-(z, u = 0)$, а значит и $\Pi_-(z, u = 0)$, с полями намагниченности:

$$\begin{aligned} \Pi_-(z, u = 0) \equiv N(z) \sigma_3^M \Psi_-(z, u = 0) &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{m_3 - i m_2}{1 + m_1} \\ -\frac{(m_3 + i m_2)}{1 + m_1} & 1 \end{pmatrix} \times \\ &\times \sqrt{\frac{1 + m_1}{2}} \exp\left(\frac{i}{2} \int_z^\infty dz' p(z')\right). \end{aligned} \quad (3.74)$$

Отсюда следует «одевающее» соотношение [11]:

$$-\Pi_-(u = 0) \sigma_3 \Pi_-^\dagger(u = 0) = -m_1 \sigma_3 + m_2 \sigma_2 + m_3 \sigma_1. \quad (3.75)$$

Формула (3.68) для N предполагает наличие у матрицы $\Psi_-(u = -\infty)$ специальных свойств симметрии:

$$\Psi_-(u = -\infty) = \alpha I + \beta \sigma_1, \quad \alpha = \alpha^*, \quad \beta = -\beta^*, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1.$$

Полученные далее уравнения для расчета $\Psi_-(u)$ гарантируют их выполнение.

Расчетные формулы упрощаются, если воспользоваться преобразованиями:

$$\sigma_1 = -X \sigma_3 X^\dagger, \quad \sigma_2 = X \sigma_2 X^\dagger, \quad \sigma_3 = X \sigma_1 X^\dagger,$$

где $X = \exp(i\pi \sigma_2/4)$, и ввести новую матричную функцию $\Psi_m = X \Psi_-(u) X^\dagger$. Тогда из (3.67), (3.68), (3.75) можно выразить поле намагниченности в образце через элементы матрицы $\Psi_m(u)$:

$$m_i \sigma_i = N_m \Psi_m(u = 0) \sigma_i \Psi_m^\dagger(u = 0) N_m^\dagger, \quad (3.76)$$

где $N_m = U N \sigma_3^M U^\dagger$,

$$N^{-2} = \sigma_3^M \Psi_-(u = -\infty) \sigma_3^M = \exp\left(-i\sigma_1 \int_z^{+\infty} dz' w_3(z')\right).$$

При четном M матрица N_m имеет вид:

$$N_m^{-2} = \Psi_m(u = -\infty) = \exp \left(-i\sigma_3 \int_z^{+\infty} m_3 dz' \right).$$

Далее ограничимся построением матриц $\Psi_-(u)$ для принципиально разных магнитных возбуждений полубесконечного образца.

3.2.6 Диспергирующие волны

При слабых внешних воздействиях в образце возбуждаются только диспергирующие волны без солитонов. В этом случае:

$$\begin{aligned} a_m(u) &= \exp \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi}{\text{sh}(\xi - u)} \ln \left[1 - \frac{|b_0(\xi)|^2}{\text{sh}^{-2}\xi + h^2} \right] \right), \quad u \in D_1, \\ b_m(u, t) &= \frac{b_0(u) \exp[4 w_1(u) w_3(u) t]}{2 w_1(u) - i h}, \quad u \in \Gamma_u; \quad h = \alpha, \quad M = 0. \end{aligned} \quad (3.77)$$

Введем кусочно-аналитическую периодическую функцию параметра u с периодом $2\pi i$:

$$\chi(u) = \begin{cases} \Psi_+(u) a_m^{-1}(u), & u \in D_1, \\ \Psi_-(u), & u \in D_2, \end{cases} \quad (3.78)$$

и канонической нормировкой: $\chi(u = +\infty) = I$. С помощью интегральной формулы Коши [78] ее значениям во внутренних точках области $D_1 \cup D_2$ можно выразить через скачки (3.70):

$$\Psi_+(u) a_m^{-1}(u) - \Psi_-(u) = \Psi_+(u) a_m^{-1}(u) \varphi_0(u) \begin{pmatrix} 0 & \bar{b}_m(u) \\ b_m(u) & 0 \end{pmatrix} \varphi_0^{-1}(u)$$

на контуре Γ_u (см. рисунок 3.1б). В качестве ядра Коши используем $e^\xi/(e^\xi - e^u)$. Интеграл по линии γ_2 преобразуем с помощью редукций (3.35), (3.71) и объединим с интегралом по контуру γ_1 . Приведем результат:

$$\begin{aligned} \chi(u) = I + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \left[\frac{e^\xi \Psi_+(\xi)}{a_m(\xi)(e^\xi - e^u)} \varphi_0(\xi) \begin{pmatrix} 0 & b_m^*(\xi) \\ b_m(\xi) & 0 \end{pmatrix} \varphi_0^{-1}(\xi) + \right. \\ \left. + \frac{e^\xi \sigma_3 \Psi_+^*(\xi) \sigma_3}{a_m^*(\xi)(e^\xi + e^u)} \varphi_0^{-1}(\xi) \begin{pmatrix} 0 & b_m(\xi) \\ b_m^*(\xi) & 0 \end{pmatrix} \varphi_0(\xi) \right] \end{aligned} \quad (3.79)$$

В пределе $u = \tilde{\xi} + i0$, $\tilde{\xi} \in \gamma_1$, формула Коши (3.79) дает сингулярное интегральное уравнение для расчета значений $\Psi_+(\xi)$ на интервале $-\infty < \xi < \infty$. После того, как таковые найдены, из представления (3.79) определяем значения матричных функций $\Psi_{\pm}(u)$ во всех внутренних точках области $D_1 \cup D_2$.

В случае малоамплитудных волн (при $|b_0(\xi)| \ll 1$) в правой части (3.79) следует положить $a_m(\xi) = 1$, $\Psi_+(\xi) = I$. Тогда по формулам (3.79), (3.76) в линейном приближении по $b_0(\xi)$ реконструируем спин-волновое поле в образце:

$$m_1 \approx 1, \quad m_2 = \frac{2}{\pi} \operatorname{Re} \left[\int_0^{+\infty} d\xi b_0(\xi) \operatorname{cth} \xi \exp \left(\frac{it \operatorname{ch} \xi}{\operatorname{sh}^2 \xi} \right) \operatorname{Re} \left(\frac{\exp(iz \operatorname{sh}^{-1} \xi)}{\operatorname{sh}^{-1} \xi + ih} \right) \right],$$

$$m_3 = -\frac{2}{\pi} \operatorname{Im} \left[\int_0^{+\infty} d\xi \frac{b_0(\xi)}{\operatorname{sh} \xi} \exp \left(\frac{it \operatorname{ch} \xi}{\operatorname{sh}^2 \xi} \right) \operatorname{Re} \left(\frac{\exp(iz \operatorname{sh}^{-1} \xi)}{\operatorname{sh}^{-1} \xi + ih} \right) \right]. \quad (3.80)$$

Здесь мы учли, что $b_0(\xi) = b_0(-\xi)$ (3.35).

Непосредственной проверкой легко убедиться, что (3.80) является решением линеаризованного уравнения Ландау – Лифшица (3.3):

$$\partial_t m_2 + \partial_z^2 m_3 - m_3 = 0, \quad \partial_t m_3 - \partial_z^2 m_2 = 0, \quad |m_{2,3}| \ll 1, \quad 0 < z < +\infty,$$

с линеаризованными краевыми условиями (3.4), (3.5):

$$(\partial_z m_{2,3} - h m_{2,3})|_{z=0} = 0, \quad m_{2,3} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad z \rightarrow +\infty$$

и разложением Фурье начального распределения намагниченности в образце (3.6):

$$(m_0)_3 + i(m_0)_2 = \frac{i}{\pi} \int_0^{+\infty} d\xi [b_0(\xi) \operatorname{cth}(\xi/2) + b_0^*(\xi) \operatorname{th}(\xi/2)] \operatorname{Re} \left(\frac{\exp(iz \operatorname{sh}^{-1} \xi)}{\operatorname{sh}^{-1} \xi + ih} \right).$$

Приведенный пример подтверждает, что предложенную схему решения начально-краевой задачи (3.3)–(3.6) для полубесконечного ферромагнетика можно трактовать как нелинейное обобщение метода Фурье и метода изображений.

3.2.7 Солитонные решения

Как и в задачах, рассмотренных в предыдущих главах, при сильных внешних воздействиях в образце наряду со спиновыми волнами формируются

магнитные солитоны. На больших временах спин-волновые пакеты расплываются из-за эффектов дисперсии и остаются только частицеподобные солитоны. Поэтому солитоны определяют основные физические свойства магнитных сред при экстремальных внешних воздействиях. В данном разделе мы построим чисто солитонные состояния, которые сохраняются в образце в отсутствие спиновых волн. Тогда $b = \bar{b} \equiv 0$, и условие сопряжения матричных функций (3.73) упрощается:

$$\Psi_-^\dagger(z, u^*)\Psi_-(z, u) = \Psi_-(z, u)\Psi_-^\dagger(z, u^*) = I, \quad u \in \Gamma_u. \quad (3.81)$$

Солитонная матрица $\Psi_-(u)$ является периодической функцией комплексной переменной u с периодом $2\pi i$, мероморфной в полосе $-\infty < \operatorname{Re} u < +\infty$, $|\operatorname{Im} u| \leq \pi$. Ее полюсы совпадают с нулями $u_j \in D_1$ выражения:

$$\det \Psi_-^\dagger(u^*) = (-1)^M a_m(u).$$

Напомним, что $\Psi_-(u = +\infty) = I$. Поэтому $\Psi_-(u)$ допускает представление:

$$\Psi_-(u) = I + \sum_{k=1}^{2M+4N} \frac{A_k}{\exp u - \exp u_k}, \quad u \in D_1 \cup D_2. \quad (3.82)$$

Целые числа M и N задают наборы нулей функции $a(u)$, принадлежащие множествам (3.37) и (3.38) соответственно. Требование отсутствия полюсов в левой части равенства (3.81) приводит к $2M + 4N$ независимым матричным уравнениям:

$$\Psi_-(u_j^*)A_j^\dagger = 0, \quad j = 1, 2, \dots, 2M + 4N, \quad (3.83)$$

из которых следует вырожденность обеих матриц $\Psi_-(u_j)$ и A_j^\dagger . Представим A_j в виде [18; 56]:

$$(A_j)_{\alpha\beta} = (X_j)_\alpha(\xi_j^*)_\beta, \quad \alpha, \beta = 1, 2.$$

Тогда из (3.83) получим уравнения:

$$\Psi_-(u_j^*) \xi_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, 2M + 4N, \quad (3.84)$$

которые означают, что $\xi_j \in \operatorname{Ker} \Psi_-(u_j^*)$. При $z > 0$: $\Pi_-(u) = N \sigma_3^M \Psi_-(u)$, поэтому $\operatorname{Ker} \Psi_-(u_j^*) = \operatorname{Ker} \Pi_-(u_j^*)$.

С помощью формул (3.63), (3.34), (3.39) выявим алгебраическую структуру матрицы $\Pi_-(u_j^*)$ при $z > 0$:

$$\begin{aligned} \Pi_-(u_j^*) &= (T_+^{(1)}(u_j^*), T_-^{(2)}(u_j^*)) \varphi_0^{-1}(u_j^*) \operatorname{diag}[1, (2w_1(u_j^*) + i\alpha)^{-1}] = \\ &= i \sigma_2 (T_+^{*(2)}(u_j^*), -\gamma^*(u_j) T_+^{*(2)}(u_j^*)) \varphi_0^{-1}(u_j^*) \operatorname{diag}[1, (2w_1(u_j^*) + i\alpha)^{-1}]. \end{aligned}$$

Отсюда сразу находим векторы ξ_j с точностью до несущественного общего множителя:

$$\xi_j = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_j^*(x,t) \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_j(x,t) = \kappa(u_j) \exp[-2i w_1(u_j) z + 4i w_1(u_j) w_3(u_j) t], \quad (3.85)$$

где $\kappa(u_j) = \gamma_0(u_j)/[2w(u_j) - i\alpha]$.

Ограничения на выбор постоянных интегрирования $\gamma_0(u_j)$ (3.40), (3.41) переносятся на новые комплексные параметры $\kappa(u_j)$:

$$\kappa(u_s) = -\kappa^*(u_s), \quad \kappa(u_s)\kappa^*(-u_s^*) = \frac{\alpha \operatorname{ch} \rho_s - 1}{\alpha \operatorname{ch} \rho_s + 1}, \quad s = 1, 2, \dots, M, \quad (3.86)$$

$$\begin{aligned} \kappa(\mu_k^* + \pi i) &= -\kappa^*(\mu_k), & \kappa(-\mu_k + \pi i) &= -\kappa^*(-\mu_k^*), \\ \kappa(\mu_k)\kappa^*(-\mu_k^*) &= \frac{i\alpha + 2w_1(\mu_k)}{i\alpha - 2w_1(\mu_k^*)}, & k &= 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (3.87)$$

После подстановки ξ_j (3.85) в (3.84) получаем систему алгебраических уравнений для расчета векторов X_k :

$$\xi_j + \sum_{k=1}^{4N+2M} M_{jk} X_k = 0, \quad M_{jk} = \frac{(\xi_k^* \cdot \xi_j)}{\exp u_j^* - \exp u_k}.$$

Ее решение полностью определяет солитонную матричную функцию $\Psi_-(u)$:

$$[\Psi_-(u)]_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} - \sum_{k,j=1}^{4N+2M} \frac{(M^{-1})_{kj} (\xi_j)_\alpha (\xi_k^*)_\beta}{\exp u - \exp u_k}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \quad (3.88)$$

где

$$(M^{-1})_{kj} = \frac{\partial \ln \det M}{\partial M_{jk}}.$$

С помощью $\Psi_-(u)$ (3.88) по формулам (3.76) находим аналитические решения модели Ландау – Лифшица (3.3)–(3.5), которые описывают систему из $M + N$ солитонов в полубесконечном образце ферромагнетика с анизотропией типа «легкая плоскость».

3.3 Взаимодействие солитонов с границей образца

3.3.1 Отражение волн поворота намагниченности от границы

В этом разделе представлен детальный анализ простейших солитонных состояний (3.76) [A13–A15].

Солитоны полубесконечного легкоплоскостного ферромагнетика делятся на два класса. К первому из них относятся солитоны, ядра которых при удалении от границы образца принимают форму хорошо известных волн поворота без внутренних колебаний намагниченности. Такие солитоны не бывают неподвижны. Каждый из них полностью характеризуется двумя нулями функции $a(u)$ из набора (3.37). Обсудим элементарный солитон, которому соответствует пара нулей:

$$u_1 = \rho + \pi i/2, \quad u_2 = -\rho + \pi i/2, \quad -\infty < \rho < +\infty.$$

Тогда $M = 1$, а значит $\alpha = -h$ (3.58). Условия симметрии (3.86) конкретизируют множители $\kappa(u_{1,2})$:

$$\kappa(u_1) = i c_0, \quad \kappa(u_2) = \frac{i}{c_0} \left(\frac{h \operatorname{ch} \rho + 1}{h \operatorname{ch} \rho - 1} \right),$$

где c_0 – произвольная вещественная постоянная. Функции $\nu_{1,2}$ (3.85) будут иметь вид: $\nu_{1,2} = i n_{1,2}$,

$$n_1 = c_0 \exp \left(-\frac{z}{\operatorname{ch} \rho} + \frac{\operatorname{sh} \rho}{\operatorname{ch}^2 \rho} t \right), \quad n_2 = -i \kappa(u_2) \exp \left(-\frac{z}{\operatorname{ch} \rho} - \frac{\operatorname{sh} \rho}{\operatorname{ch}^2 \rho} t \right).$$

Распределение намагниченности в простейшем солитоне:

$$m_1 = -1 + 2 \operatorname{th}^2 \rho (1 - n_1 n_2)^2 d^{-1}, \quad m_2 = -2 \operatorname{th}^2 \rho (n_1 + n_2)(1 - n_1 n_2) d^{-1},$$

$$m_3 = 2 \operatorname{sh} \rho (n_2 - n_1)(1 - n_1 n_2)/(d \operatorname{ch}^2 \rho), \quad d = (n_2 - n_1)^2 + (1 + n_1 n_2)^2 \operatorname{th}^2 \rho,$$

$$n_1 = c_0 \exp \left(-\frac{z}{\operatorname{ch} \rho} + \frac{\operatorname{sh} \rho}{\operatorname{ch}^2 \rho} t \right), \quad n_2 = -i \kappa \exp \left(-\frac{z}{\operatorname{ch} \rho} - \frac{\operatorname{sh} \rho}{\operatorname{ch}^2 \rho} t \right), \quad (3.89)$$

$$\kappa = \frac{i f}{c_0}, \quad f = \frac{h \operatorname{ch} \rho + 1}{h \operatorname{ch} \rho - 1},$$

как и положено, удовлетворяет краевым условиям (3.4), (3.5). Далее, для определенности, полагаем $\rho > 0$.

В слабых поверхностных полях $|h| < \text{ch}^{-1}\rho$ параметр $f < 0$ и, наоборот, $f > 0$ при $|h| > \text{ch}^{-1}\rho$. Это проявляется в разных сценариях деформаций ядра солитона (3.89) в ходе взаимодействия с границей образца и приводит к отличиям его установившегося профиля в глубине образца до и после отражения от поверхности. В обоих случаях все спины внутри солитона наклонены к границе образца при $c_0 > 0$ или вглубь среды при $c_0 < 0$.

Поясним утверждение на примере слабых полей $|h| < \text{ch}^{-1}\rho$. Тогда подробная запись решения (3.89):

$$\begin{aligned} m_1 &= -1 + \frac{2}{\tau} \text{th}^2 \rho \text{ch}^2 y, & y &= \frac{z}{\text{ch} \rho} - \frac{1}{2} \ln |f|, & f &= \frac{h \text{ch} \rho + 1}{h \text{ch} \rho - 1} < 0, \\ m_2 &= -2 \text{sign} c_0 \text{th}^2 \rho \frac{\text{sh} s \text{ch} y}{\tau}, & s &= \frac{\text{sh} \rho}{\text{ch}^2 \rho} (t - t_0), & t_0 &= \frac{\text{ch}^2 \rho}{2 \text{sh} \rho} \ln \frac{|f|}{c_0^2}, \\ m_3 &= -2 \text{sign} c_0 \frac{\text{sh} \rho \text{ch} s \text{ch} y}{\tau \text{ch}^2 \rho}, & \tau &= \text{ch}^2 s + \text{th}^2 \rho \text{sh}^2 y. \end{aligned} \quad (3.90)$$

сразу показывает, что в момент t_0 столкновения солитона (3.90) с краем образца все спины в области локализации солитона ложатся в плоскость Oxz :

$$\begin{aligned} m_1(z, t = t_0) &= -1 + \frac{2 \text{th}^2 \rho \text{ch}^2 y}{1 + \text{th}^2 \rho \text{sh}^2 y}, & m_2(z, t = t_0) &= 0, \\ m_3(z, t = t_0) &= -2 \text{sign} c_0 \frac{\text{th} \rho \text{ch} y}{\text{ch} \rho (1 + \text{th}^2 \rho \text{sh}^2 y)}; & y &= \frac{z}{\text{ch} \rho} - \frac{\ln |f|}{2}. \end{aligned}$$

Распределение намагниченности в плоскости Oxz зависит от знака h . В отрицательных полях $-\text{ch}^{-1}\rho < h < 0$ компонента намагниченности $m_1(z, t = t_0)$ монотонно возрастает по мере удаления от края $z = 0$ вглубь образца. В самой точке $z = 0$ при достаточно больших значениях $\rho > \text{Arcsh} 1$ проекция $m_1(z = 0, t = t_0)$ положительна. В этом случае компонента $m_3(z, t = t_0)$ на всем протяжении образца также ведет себя монотонно, и намагниченность в солитоне в момент столкновения с границей разворачивается в плоскости Oxz меньше, чем на 90 градусов (см. рисунок 3.2а). При сравнительно малых значениях $\rho < \text{Arcsh} 1$ проекция $m_1(z, t = t_0)$ меняет знак с минуса на плюс при переходе через точку, определяемую условием $\text{ch} y \text{sh} \rho = 1$, а компонента $m_3(z, t = t_0)$ имеет в этой точке абсолютный минимум: $m_3 = -1$ (рисунок 3.2б).

В положительных полях $0 < h < \text{ch}^{-1}\rho$ вблизи границы образца в точке $z_0 = \text{ch} \rho \ln |f|/2 > 0$ происходит частичное перемагничивание среды:

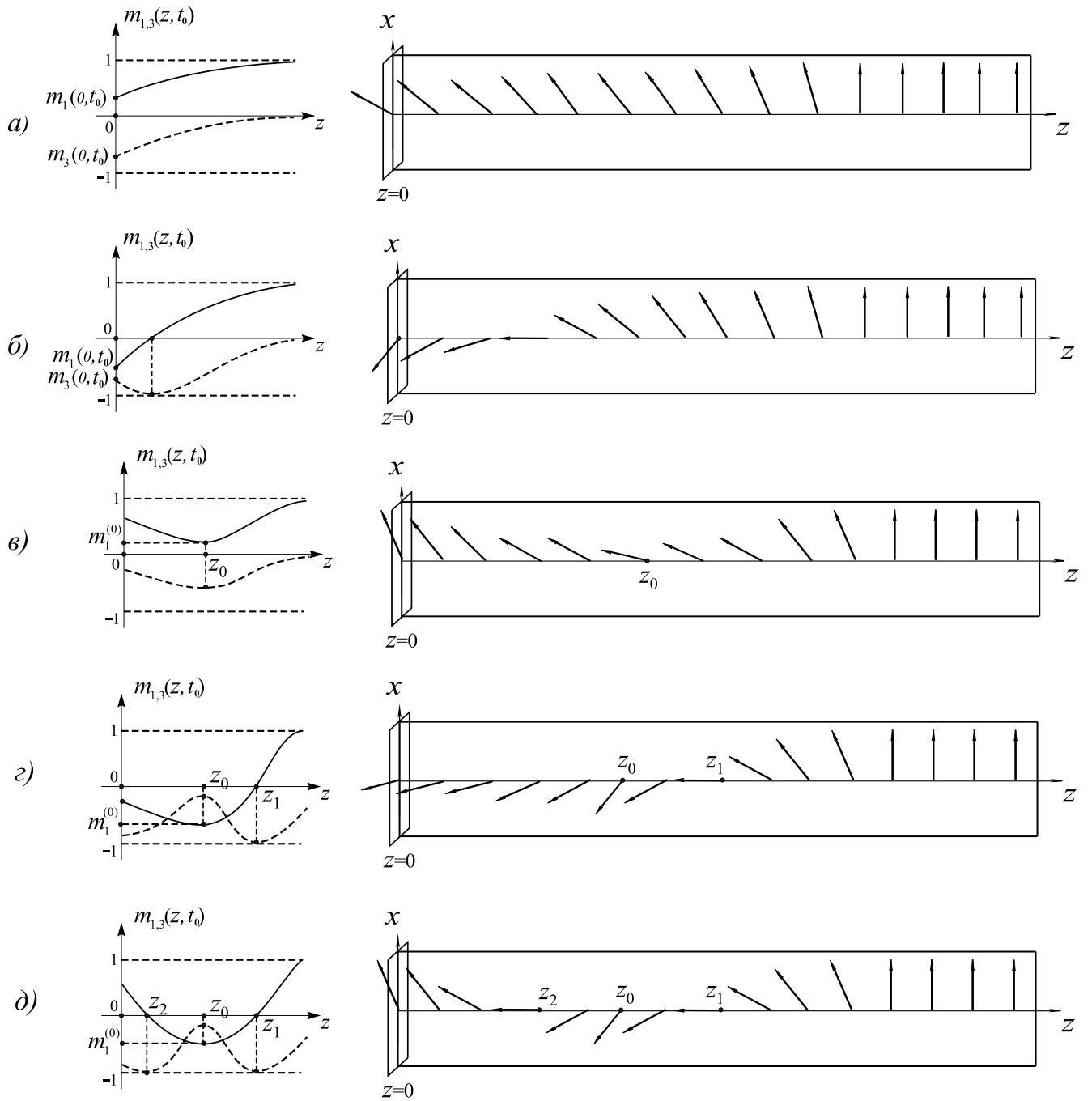


Рисунок 3.2 — Компоненты намагниченности $m_1(z, t_0)$ (сплошная линия), $m_3(z, t_0)$ (пунктирная линия) солитона (3.90) и распределение спинов в момент времени $t = t_0$ при значениях а) $-\text{ch}^{-1}\rho < h < 0$, $\rho > \text{Arcsh}1$; б) $-\text{ch}^{-1}\rho < h < 0$, $\rho < \text{Arcsh}1$; в) $0 < h < \text{ch}^{-1}\rho$, $\rho > \text{Arcsh}1$; г) $0 < h < \text{ch}^{-1}\rho\sqrt{1 - \text{sh}^2\rho}$, $\rho < \text{Arcsh}1$; д) $\text{ch}^{-1}\rho\sqrt{1 - \text{sh}^2\rho} < h < \text{ch}^{-1}\rho$, $\rho < \text{Arcsh}1$. Во всех случаях выбрано $c_0 > 0$.

$m_1^{(0)} = -1 + 2\text{th}^2\rho$. Компонента $m_1(z, t = t_0)$ имеет единственный минимум в точке z_0 . Что касается компоненты $m_3(z, t = t_0)$, то в зависимости от соотношения значений параметра ρ и величины поверхностного поля она может иметь только одну ($z = z_0$), две ($z = z_0$ и $z = z_1$), или даже три точки экстремума

($z = z_0$ и $z = z_{1,2}$). Соответствующие случаи приведены на рисунках 3.2в-д. Добавочные точки $z_{1,2}$ – нули функции $m_1(z, t = t_0)$, определяемые равенством: $\text{ch}[y(z_{1,2})] \text{sh}\rho = 1$.

На больших расстояниях от поверхности образца при $z \gg 1$ в пределе $t \rightarrow \pm\infty$ решение (3.90) принимает вид волны стационарного профиля (рисунок 3.3):

$$m_1 = \text{th } \xi_{\pm}, \quad m_2 = \mp \text{sign } c_0 \frac{\text{th}\rho}{\text{ch } \xi_{\pm}}, \quad m_3 = -\frac{\text{sign } c_0}{\text{ch}\rho \text{ ch } \xi_{\pm}}, \quad (3.91)$$

$$\xi_{\pm} = l_0^{-1}(z \mp Vt - z_{\pm}); \quad z_+ = \text{ch}\rho \ln(|c_0|/\text{th}\rho), \quad z_- = -\text{ch}\rho \ln(|c_0|/\text{th}\rho),$$

которая локализована в области шириной $l_0 = \text{ch}\rho > 1$ и движется со скоростью $V = \text{th}\rho > 0$ внутрь образца или к его поверхности, параметры z_{\pm} определяют координату центра волны в сопутствующей ей системе отсчета, где $z \mp Vt = 0$. Это типичный солитон безграничного легкоплоскостного ферромагнетика, который называют волной поворота намагниченности [11; 79]. Название связано с тем, что в области локализации волны намагниченность поворачивается на 180 градусов из положения $\mathbf{m} = (-1, 0, 0)$ в хвосте солитона, где $\xi_+ \ll -1$, в положение $\mathbf{m} = (1, 0, 0)$ в его голове, где $\xi_{\pm} \gg 1$. При этом, в области локализации солитона проекция вектора \mathbf{m} на плоскость Oyz образует постоянный угол с осью Oz . Ориентация намагниченности в центре волны поворота после и до отражения определяется формулами:

$$\mathbf{m} = (0, \sin \delta_{\pm}, \cos \delta_{\pm}), \quad \sin \delta_{\pm} = -\text{sign } c_0 \text{th}\rho, \quad \cos \delta_{\pm} = -\text{sign } c_0 / \text{ch}\rho.$$

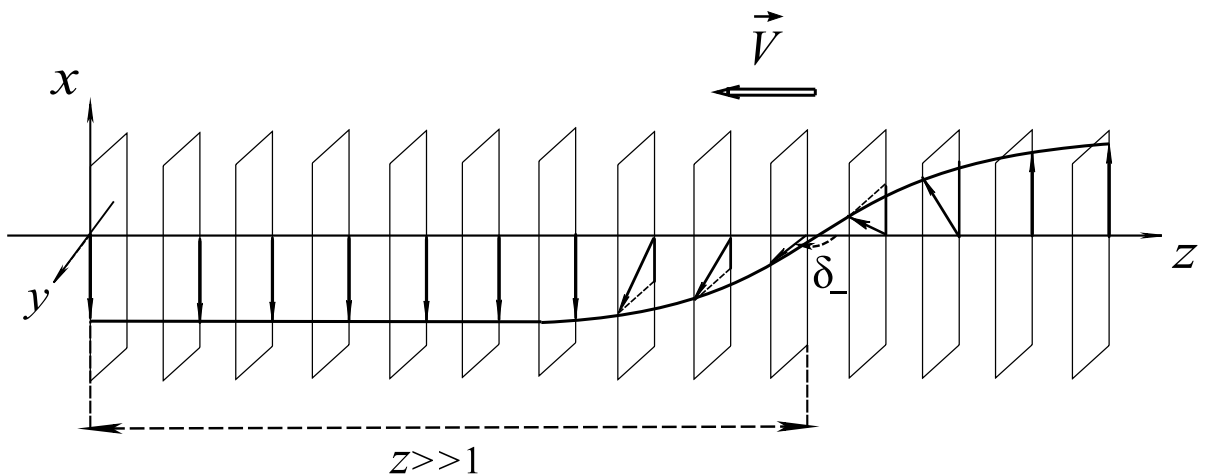


Рисунок 3.3 — Волна поворота (3.91) вдали от границы образца; выбран случай $c_0 > 0$.

В результате отражения волны поворота от края образца положение ее центра сдвигается на величину Δz :

$$\Delta z = z_+ - z_- = \text{ch} \rho \ln(c_0^2/|f|). \quad (3.92)$$

Отсюда находим время взаимодействия солитона (3.90) с поверхностью образца: $|t - t_0| \leq \Delta z/V$. Кроме того, намагниченность в центре солитона (3.90) после его столкновения с границей поворачивается на угол:

$$\delta_+ - \delta_- = 2 \arg[1 + i \text{sh} \rho] = 2 \text{arctg} \text{sh} \rho. \quad (3.93)$$

В промежуточном случае $h = 0$ формулы (3.90) упрощаются и описывают отражение волны поворота от границы образца со свободными поверхностными спинами:

$$[\mathbf{m} \times \partial_z \mathbf{m}]|_{z=0} = 0.$$

Можно легко убедиться, что выполняется даже более сильное условие:

$$\partial_z \mathbf{m}|_{z=0} = 0.$$

В сильных полях при $|h| > \text{ch}^{-1} \rho$ солитон (3.89) описывается выражением:

$$\begin{aligned} m_1 &= -1 + \frac{2}{\tau} \text{th}^2 \rho \text{sh}^2 y, & y &= \frac{z}{\text{ch} \rho} - \frac{1}{2} \ln f, & f &= \frac{h \text{ch} \rho + 1}{h \text{ch} \rho - 1} > 0, \\ m_2 &= -2 \text{sign} c_0 \text{th}^2 \rho \frac{\text{chs sh} y}{\tau}, & s &= \frac{\text{sh} \rho}{\text{ch}^2 \rho} (t - t_0), & t_0 &= \frac{\text{ch}^2 \rho}{2 \text{sh} \rho} \ln \frac{f}{c_0^2}, \\ m_3 &= -2 \text{sign} c_0 \frac{\text{sh} \rho \text{sh} s \text{sh} y}{\tau \text{ch}^2 \rho}, & \tau &= \text{sh}^2 s + \text{th}^2 \rho \text{ch}^2 y. \end{aligned} \quad (3.94)$$

которое получается из (3.90) формальными заменами:

$$|f| \rightarrow f > 0, \quad \text{ch} y \leftrightarrow \text{sh} y, \quad \text{sh} s \leftrightarrow \text{ch} s.$$

Определения y , s остаются прежними. С учетом этого замечания, нетрудно установить, что в сильных полях отражение солитона (3.89) от края образца происходит не в плоскости Oxz , как это было в случае $|h| < \text{ch}^{-1} \rho$, а в плоскости Oxy :

$$\begin{aligned} m_1(z, t = t_0) &= -1 + 2 \text{th}^2 y, & m_2(z, t = t_0) &= -2 \text{sign} c_0 \frac{\text{sh} y}{\text{ch}^2 y}, \\ m_3(z, t = t_0) &= 0; & y &= \frac{z}{\text{ch} \rho} - \frac{\ln f}{2}. \end{aligned}$$

При отрицательных полях $h < -\text{ch}^{-1}\rho$ в момент $t = t_0$ столкновения с границей образца компонента m_1 намагниченности по мере удаления вглубь образца монотонно возрастает. На границе образца $z = 0$ проекция $m_1(z = 0, t = t_0)$ положительна при значениях поля $-\sqrt{2}\text{ch}^{-1}\rho < h < -\text{ch}^{-1}\rho$ и отрицательна при $h < -\sqrt{2}\text{ch}^{-1}\rho$. Последний случай изображен на рисунке 3.4а.

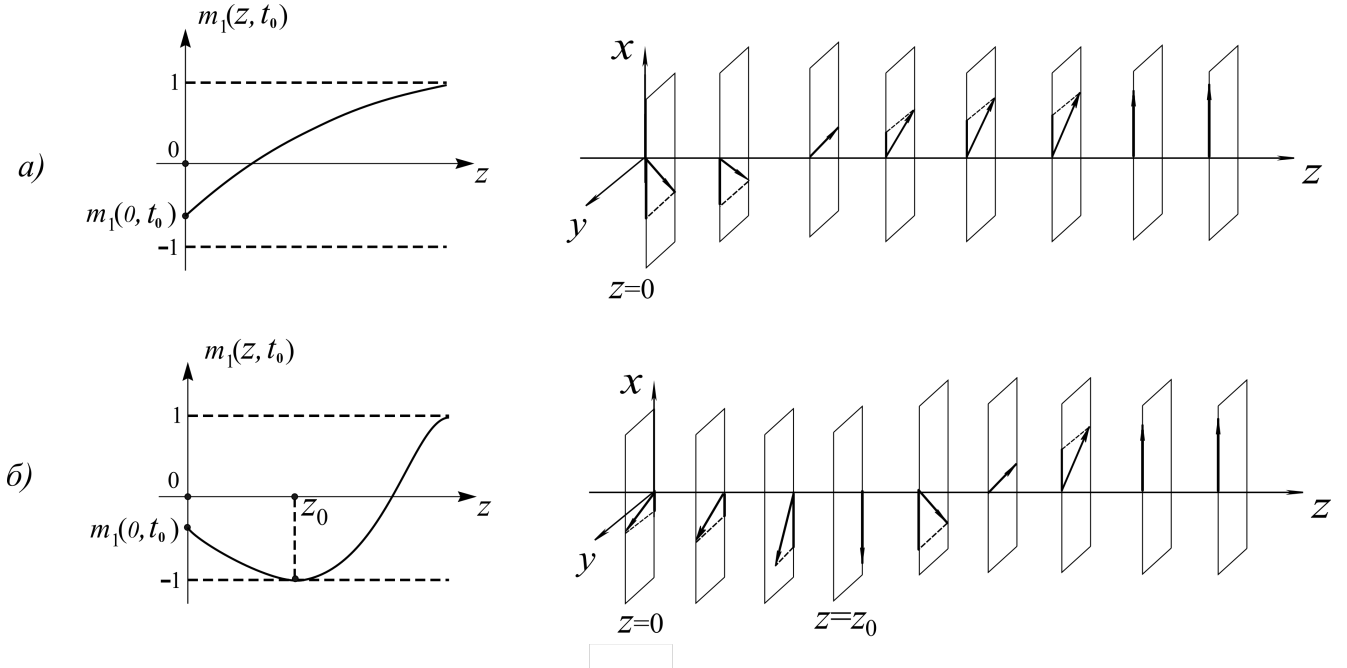


Рисунок 3.4 — Компонента намагниченности $m_1(z, t_0)$ солитона (3.89) и распределение спинов в момент времени $t = t_0$ при значениях поля а) $h < -\sqrt{2}\text{ch}^{-1}\rho$ и б) $h > \sqrt{2}\text{ch}^{-1}\rho$; в обоих случаях выбрано $c_0 > 0$.

При положительных значениях $h > \text{ch}^{-1}\rho$ в точке $z_0 = \text{ch}\rho (\ln f)/2$, в отличие от случая небольших полей (3.90), наблюдается полное перемагничивание среды: $m_1 = -1$. Проекция $m_1(z = 0, t = t_0)$ на границе образца отрицательна при $h > \sqrt{2}\text{ch}^{-1}\rho$ (рисунок 3.4б) и положительна при $\text{ch}^{-1}\rho < h < \sqrt{2}\text{ch}^{-1}\rho$.

На рисунках 3.4а,б в обоих случаях выбрано $c_0 > 0$. При $c_0 < 0$ направление закрутки намагниченности в плоскости Oxy будет обратным.

При $|h| > \text{ch}^{-1}\rho$ вдали от границы образца при $z \gg 1$, $t \rightarrow \pm\infty$ солитон (3.94) превращается в волну поворота, похожую на (3.91):

$$m_1 = \text{th } \xi_{\pm}, \quad m_2 = -\text{sign } c_0 \frac{\text{th } \rho}{\text{ch } \xi_{\pm}}, \quad m_3 = \mp \frac{\text{sign } c_0}{\text{ch } \rho \text{ ch } \xi_{\pm}}, \quad (3.95)$$

$$\xi_{\pm} = l_0^{-1}(z \mp Vt - z_{\pm}); \quad z_+ = \text{ch } \rho \ln(|c_0|/\text{th } \rho), \quad z_- = -\text{ch } \rho \ln(|c_0|\text{th } \rho/f).$$

Сравнение формул (3.91), (3.95) приводит к заключению, что в сильных полях $|h| > \text{ch}^{-1}\rho$ намагниченность в центре солитона (3.89) после его столкновения с границей образца поворачивается в плоскости Oyz на другой угол:

$$\delta_+ - \delta_- = \pi + 2 \operatorname{arctg} \operatorname{sh} \rho, \quad (3.96)$$

который отличается от прежнего (3.93) на π . Сдвиг положения солитона определяется прежней формулой (3.92).

Таким образом, изменение фазы комплексного поля $m_3 + im_2$ в центре волны поворота после её отражения от края образца в случаях слабого $|h| < \text{ch}^{-1}\rho$ и сильного $|h| > \text{ch}^{-1}\rho$ поверхностного полей аналогичен изменению фазы световой волны при её отражении от границы с менее и более оптически плотной средой. Далее будет показано, что пороговый по амплитуде поля h характер изменения ядер солитонов (3.89) после их отражения от границы образца наследуется хиральными волнами поворота в геликоидальной структуре. Особенности перемагничивания среды в ходе столкновения с краем образца хиральных волн поворота отличаются от рассмотренных здесь только дополнительным спиральным вращением спинов в области ядер солитонов.

3.3.2 Взаимодействие бризера с границей образца

Нули (3.38) функции $a(u)$ параметризуют пульсирующие солитоны – бризеры. В толще образца они упруго сталкиваются между собой и с волнами поворота намагниченности. Отражение бризеров от границы образца также является упругим и сопровождается сильной деформацией солитонных ядер.

Простейший бризер определяется формулами (3.76), (3.85), (3.87), в которых следует положить $M = 0$, $N = 1$. Тогда коэффициент $a(u)$ будет иметь четыре нуля:

$$u_1 = \mu, \quad u_2 = -\mu^*, \quad u_3 = -\mu + \pi i, \quad u_4 = \mu^* + \pi i,$$

где $\mu = \rho + i\varphi$, $-\infty < \rho < \infty$, $0 < \varphi < \pi$.

Им соответствуют четыре функции $\mathbf{v}_j(z, t)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \kappa(\mu) \exp \left[-\frac{iz}{\text{sh}\mu} + \frac{i\text{ch}\mu}{\text{sh}^2\mu} t \right], & \mathbf{v}_2 &= \left(\frac{f(\mu)}{\kappa(\mu)} \right)^* \exp \left[\frac{iz}{\text{sh}\mu^*} + \frac{i\text{ch}\mu^*}{\text{sh}^2\mu^*} t \right], \\ \mathbf{v}_3 &= -\mathbf{v}_2^*, & \mathbf{v}_4 &= -\mathbf{v}_1^*, & f(u) &= \frac{i h \text{sh} u + 1}{i h \text{sh} u - 1}. \end{aligned} \quad (3.97)$$

В подробной записи решение (3.76) записывается в форме стереографической проекции:

$$m_3 = \frac{|A|^2 - |B|^2}{|A|^2 + |B|^2}, \quad m_1 + i m_2 = \frac{2 B A^*}{|A|^2 + |B|^2}, \quad (3.98)$$

где

$$\begin{aligned} A &= -|c|^2 [|\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2|^2 + 1] g^2(2i\varphi) - \left(|\mathbf{v}_1|^2 \frac{g(\rho - i\varphi)}{g(\rho + i\varphi)} + |\mathbf{v}_2|^2 \frac{g(\rho + i\varphi)}{g(\rho - i\varphi)} \right) g^2(2i\varphi) + \\ &+ \frac{1}{4g^2(2\rho)} \left[\frac{\mathbf{v}_1^* \mathbf{v}_2^*}{16 |g(\rho + i\varphi)|^2} + \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 |g(\rho + i\varphi)|^2 \right] + |g(2\rho + 2i\varphi)|^2 (\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2^* + \mathbf{v}_1^* \mathbf{v}_2); \\ B &= -B_1 g(\rho - i\varphi) + B_2 g(\rho + i\varphi) + \frac{B_1^*}{4g(\rho + i\varphi)} - \frac{B_2^*}{4g(\rho - i\varphi)}; \\ B_1 &= g(2i\varphi) \mathbf{v}_1 (|\mathbf{v}_2|^2 + c^*) - |\mathbf{v}_1|^2 \left(\mathbf{v}_2 g(2\rho + 2i\varphi) + \frac{\mathbf{v}_2^*}{4g(2\rho)} \right), \\ B_2 &= g(2i\varphi) \mathbf{v}_2 (|\mathbf{v}_1|^2 + c) + |\mathbf{v}_2|^2 \left(\mathbf{v}_1 g(2\rho - 2i\varphi) + \frac{\mathbf{v}_1^*}{4g(2\rho)} \right); \\ c &= \frac{g(2\rho - 2i\varphi)}{g(2\rho)}, \quad g(u) \equiv \frac{\text{ch} u + 1}{2 \text{sh} u}. \end{aligned}$$

На поверхности $z = 0$ образца бризер (3.98) удовлетворяет граничному условию (3.4), т. к. при $M = 0$ параметр $\alpha = h$ (3.58). В пределе $h \rightarrow 0$ получим бризер со свободными спинами на поверхности образца:

$$[\mathbf{m} \times \partial_z \mathbf{m}]|_{z=0} = 0.$$

В противоположном пределе $h \rightarrow \infty$ получаем бризер с полностью закрепленными спинами на поверхности:

$$m_3|_{z=0} = 1, \quad m_3 \rightarrow 1 \quad \text{при} \quad z \rightarrow +\infty.$$

Вдали от поверхности образца (при $z \gg 1$, $t \rightarrow \pm\infty$) колебания бризера приобретают регулярный характер и он превращается в прецессирующий бризер неограниченной среды. Чтобы убедиться в этом, заметим, что поведение

одионого бизера при $z \gg 1$ определяется экспоненциальными множителями $\exp[-l_0^{-1}(z \mp Vt)]$ в выражениях ν_j (3.97):

$$l_0^{-1} = -\text{Im sh}^{-1}\mu = \frac{\text{ch}\rho \sin \varphi}{|\text{sh}\mu|^2} > 0,$$

$$V = -l_0 \text{Im}[\text{ch}\mu \text{sh}^{-2}\mu] = \frac{\text{th}\rho (\text{ch}^2\rho + \cos^2 \varphi)}{|\text{sh}\mu|^2} > 0,$$

$|\text{sh}\mu|^2 = \text{sh}^2\rho + \sin^2 \varphi$. Поскольку угол $0 < \varphi < \pi$, значение l_0 всегда положительно. Оно характеризует толщину стенок, ограничивающих ядро бизера. Величина V представляет скорость движения бизера как целого. Вдали от центра бизера (при $z \gg 1$) в сопутствующей ему системе отсчета, где $z - Vt = \text{const}$ ($z + Vt = \text{const}$) в пределе $t \rightarrow +\infty$ ($t \rightarrow -\infty$) мы можем положить соответственно $\nu_2 = 0$ ($\nu_1 = 0$). Тогда решение (3.98) упрощается, и в пределе $z \gg 1$, $t \rightarrow \pm\infty$ мы получаем распределение намагниченности вида:

$$m_1 = 1 - \frac{2}{\tau_{\pm}} \left[\cos^2 s_{\pm} + \frac{\cos^2 \varphi}{|\text{sh}\mu|^2} \right],$$

$$m_2 = \pm \frac{\text{ctg}\varphi}{\tau_{\pm} |\text{sh}\mu|^2} [\cos s_{\pm} \text{ch } y_{\pm} \text{sh}(2\rho) - \sin s_{\pm} \text{sh } y_{\pm} \sin(2\varphi)],$$

$$m_3 = \frac{2 \text{ctg}\varphi}{\tau_{\pm} |\text{sh}\mu|^2} [\text{sh}\rho \cos \varphi \sin s_{\pm} \text{ch } y_{\pm} + \sin \varphi \text{ch}\rho \cos s_{\pm} \text{sh } y_{\pm}], \quad (3.99)$$

$$y_{\pm} = l_0^{-1}(z \mp Vt - z_{\pm}^{(0)}), \quad s_{\pm} = kz \mp \omega t + s_{\pm}^{(0)}, \quad \tau_{\pm} = \text{ctg}^2 \varphi \text{ch}^2 y_{\pm} + \cos^2 s_{\pm}.$$

Величины

$$\omega = \frac{\text{ch}\rho \cos \varphi}{|\text{sh}\mu|^4} (\text{sh}^2\rho - \sin^2 \varphi), \quad k = \frac{\text{sh}\rho \cos \varphi}{|\text{sh}\mu|^2}$$

соответственно, определяют частоту и волновое число осцилляций в его ядре. В пределах ядра солитона (3.99) намагниченность совершает неоднородную эллиптическую прецессию с частотой ω вокруг оси Ox . Эллипс прецессии вытянут вдоль легкой плоскости Oxy . Конус прецессии пульсирует с частотой 2ω . Это приводит к продольным колебаниям размера солитона. Единственным результатом отражения бизера (3.99) от границы образца является сдвиг его центра

$$z_{+}^{(0)} = l_0 \ln \left| \frac{\kappa}{\text{th}\rho \text{cth}\mu} \right|, \quad z_{-}^{(0)} = l_0 \ln \left| \frac{f(\mu)}{\kappa \text{th}\rho \text{cth}\mu} \right|, \quad f = \frac{i h \text{sh}\mu + 1}{i h \text{sh}\mu - 1}$$

и изменение начальной фазы его прецессии:

$$s_{+}^{(0)} = \arg[\text{th}\rho \text{cth}\mu \kappa^{-1}], \quad s_{-}^{(0)} = \arg[\kappa \text{th}\rho \text{cth}\mu f^{-1}].$$

Асимптотические формулы (3.99) совпадают с выражениями для бризера неограниченной среды, которые получены и детально проанализированы в [11; 80; 81]. Однако, в отличие от случая неограниченной среды, бризер на полуоси так же, как и волна поворота, не может быть неподвижным ($\rho \neq 0$, $V \neq 0$).

В размерных переменных: $V_{\text{dim}} = V \gamma M_0 \sqrt{\alpha K}$, $l_{\text{dim}} = l_0 \sqrt{\alpha/K}$, $\omega_{\text{dim}} = \omega \gamma M_0 K$. Для легкоплоскостного ферромагнетика CsNiF_3 : $\sqrt{\alpha/K} = 5 \cdot 10^{-7} \text{ см}$, $\gamma M_0 K = 5 \cdot 10^{10} \text{ Гц}$, $\gamma M_0 \sqrt{\alpha K} \sim 10^2 - 10^3 \text{ м/с}$ [82].

Мы показали, что в пределе $|h| \rightarrow \infty$ решение начально-краевой задачи (3.3), (3.4) для полуограниченного образца, содержащее N волн поворота намагниченности и произвольное число бризеров и диспергирующих спин-волновых пакетов, переходит в решение той же модели при краевых условиях:

$$\mathbf{m}(z=0, t) \rightarrow (-1)^N \mathbf{e}_1; \quad \mathbf{m}(z, t) \rightarrow \mathbf{e}_1; \quad \partial_z \mathbf{m}(z, t) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad z \rightarrow +\infty.$$

При положительных (отрицательных) конечных значениях поверхностного поля энергетически более выгодно образование на полуоси четного (нечетного) числа волн поворота. Отсюда следует, что образованием четного или нечетного числа волн поворота в системе можно управлять, меняя характер закрепления спинов на границе. Установленная закономерность сохраняется и для хиральных волн поворота.

3.4 Аналитическое описание солитонов полуограниченного ферромагнетика с геликоидальной структурой

В данном разделе мы покажем, что модель полубесконечного ферромагнетика с анизотропией типа «легкая плоскость» изоморфна физически содержательной интегрируемой модели хирального ферромагнетика на полуоси и используем полученные нами явные выражения для солитонов в полуограниченном легкоплоскостном ферромагнетике для анализа сильновозбужденных состояний геликоидальной магнитной структуры.

Рассмотрим квазиодномерный ферромагнитный кристалл без центра инверсии с плотностью энергии:

$$w = \frac{\alpha}{2} (\partial_z \mathbf{M})^2 + \frac{K M_3^2}{2} - \kappa (M_1 \partial_z M_2 - M_2 \partial_z M_1).$$

Здесь мы используем прежние обозначения для намагниченности среды $\mathbf{M}(z, t)$ ($\mathbf{M}^2 = M_0^2 = \text{const}$), пространственной координаты $0 < z < \infty$, времени t , постоянных обменного взаимодействия $\alpha > 0$ и легкоплоскостной анизотропии $K > 0$. Кроме того, учитываем взаимодействие Дзялошинского, которому соответствует инвариант Лифшица:

$$-\kappa(M_1\partial_z M_2 - M_2\partial_z M_1),$$

совместимый с одноосной симметрией магнитного кристалла без центра инверсии. Знак постоянной κ может быть любым.

Условия $\alpha > 0$, $K > 0$ теперь не обеспечивают устойчивости однородного состояния среды в толще образца (при $z \gg 1$). Наиболее устойчивым оказывается неоднородное распределение намагниченности типа геликоидальной структуры:

$$\mathbf{M} = -M_0(\cos(pz), \sin(pz), 0), \quad (3.100)$$

где $p = \kappa/\alpha$. Период магнитной спирали $2\pi/|p|$ много больше кристаллографических периодов a : $2\pi\alpha/|\kappa| \gg a$ и обычно несоизмерим с ним.

Пусть, как и ранее, вдоль границы $z = 0$ образца приложено постоянное магнитное поле или имеется эффективное поле однонаправленной поверхностной анизотропии $\mathbf{H} = H\mathbf{e}_1$, где $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$. В толще образца спиральному упорядочению отвечает плотность энергии $-M_0^2\kappa^2/(2\alpha)$. Будем отсчитывать энергию системы от геликоидального основного состояния среды при $z \gg 1$. Тогда полная энергия образца запишется в виде:

$$E = \frac{1}{2} \int_0^\infty dz \left[\alpha (\partial_z \mathbf{M})^2 + K M_3^2 + \frac{M_0 \kappa^2}{\alpha} - 2\kappa(M_1\partial_z M_2 - M_2\partial_z M_1) \right] + H M_1|_{z=0}. \quad (3.101)$$

Перейдем к безразмерным переменным:

$$\mathbf{m} = -\frac{\mathbf{M}}{M_0}, \quad \tilde{z} = z \left[\frac{1}{\alpha} \left(K + \frac{\kappa^2}{\alpha} \right) \right]^{1/2},$$

$$\tilde{t} = \gamma M_0 t \left(K + \frac{\kappa^2}{\alpha} \right), \quad \tilde{h} = \frac{H}{M_0} \left[\alpha \left(K + \frac{\kappa^2}{\alpha} \right) \right]^{-1/2},$$

которые совпадают с прежними (3.1) при $\kappa = 0$. В новых переменных энергия системы примет вид:

$$\tilde{E} = \frac{E}{M_0^2} \left[\alpha \left(K + \frac{\kappa^2}{\alpha} \right) \right]^{-1/2} = \frac{1}{2} \int_0^\infty d\tilde{z} \left[(\partial_{\tilde{z}} \mathbf{m})^2 + (1 - q^2) m_3^2 - \right.$$

$$-2q(m_1\partial_{\tilde{z}}m_2 - m_2\partial_{\tilde{z}}m_1) + q^2] - \tilde{h}m_1|_{\tilde{z}=0}.$$

Спиральной структуре (3.100) соответствует распределение поля \mathbf{m} :

$$\mathbf{m} = (\cos(q\tilde{z}), \sin(q\tilde{z}), 0), \quad (3.102)$$

где $q = \kappa/[\alpha(K + \kappa^2/\alpha)]$.

Возможным нелинейным возбуждениям геликоидальной структуры полубесконечного ферромагнитного образца соответствуют решения уравнения Ландау – Лифшица:

$$\partial_{\tilde{t}}\mathbf{m} = [\mathbf{m} \times \partial_{\tilde{z}}^2\mathbf{m}] - (1 - q^2)[\mathbf{m} \times \mathbf{e}_3](\mathbf{m} \cdot \mathbf{e}_3) + 2q(\mathbf{m} \cdot \mathbf{e}_3)\partial_{\tilde{z}}\mathbf{m}, \quad (3.103)$$

где $\mathbf{m}^2 = 1$, $0 < \tilde{z} < \infty$, с краевыми условиями:

$$\begin{aligned} &[\mathbf{m} \times (\partial_{\tilde{z}}\mathbf{m} + q[\mathbf{m} \times \mathbf{e}_3] + \tilde{h}\mathbf{e}_1)]|_{\tilde{z}=0} = 0, \\ &\mathbf{m} \rightarrow (\cos(q\tilde{z}), \sin(q\tilde{z}), 0) \quad \text{при} \quad \tilde{z} \rightarrow +\infty, \end{aligned} \quad (3.104)$$

и заданным начальным возмущением спиральной структуры:

$$\mathbf{m}(\tilde{z}, \tilde{t} = 0) = \mathbf{m}_0(\tilde{z}), \quad (3.105)$$

которое совместимо с условиями (3.104). Вектор $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$, как и ранее, задает направление «трудной оси» намагничивания.

Для установления связи между задачами (3.3)–(3.6) и (3.103)–(3.105) воспользуемся параметризацией нормированной намагниченности углами Θ и Φ :

$$\mathbf{m} = (\cos \Theta \cos \Phi, \cos \Theta \sin \Phi, \sin \Theta).$$

Уравнение Ландау – Лифшица (3.103) вместе с краевыми условиями (3.104) следуют из вариационного принципа Гамильтона для функционала действия:

$$\begin{aligned} S = \int_0^\infty d\tilde{z} \left(\sin \Theta \partial_{\tilde{t}}\Phi - \frac{1}{2} \left[(\partial_{\tilde{z}}\Theta)^2 + \cos^2 \Theta (\partial_{\tilde{z}}\Phi - q)^2 + \sin^2 \Theta \right] \right) + \\ + \tilde{h} \cos \Theta \cos \Phi|_{z=0}. \end{aligned} \quad (3.106)$$

Начально-краевая задача (3.3)–(3.6) для легкоплоскостного ферромагнетика с однородным основным состоянием описывается действием, которое следует из (3.106) при $q = 0$. Отсюда сразу следует важное утверждение, которое является

обобщением установленного в [11; 73] для безграничной среды. Если известно решение $\Theta^{(l)}(z, t, h)$, $\Phi^{(l)}(z, t, h)$ уравнения Ландау – Лифшица (3.3) с краевыми условиями (3.4), (3.5), то решение $\Theta^{(g)}(\tilde{z}, \tilde{t}, \tilde{h}, q)$, $\Phi^{(g)}(\tilde{z}, \tilde{t}, \tilde{h}, q)$ модели (3.103), (3.104) хирального ферромагнетика определится формулами:

$$\begin{aligned}\Phi^{(g)}(\tilde{z}, \tilde{t}, \tilde{h}, q) &= \Phi^{(l)}(z = \tilde{z}, t = \tilde{t}, h = \tilde{h}) + q\tilde{z}, \\ \Theta^{(g)}(\tilde{z}, \tilde{t}, \tilde{h}, q) &= \Theta^{(l)}(z = \tilde{z}, t = \tilde{t}, h = \tilde{h}).\end{aligned}$$

После приведенного преобразования функционал действия одной задачи переходит в функционал действия другой. Это и обосновывает эквивалентность не только уравнений, но и начально–краевых условий для двух задач. Распределения намагниченности $\mathbf{m}^{(l)}(z, t, h)$ и $\mathbf{m}^{(g)}(\tilde{z}, \tilde{t}, \tilde{h}, q)$ этих задач связаны между собой:

$$\begin{aligned}m_+^{(g)}(\tilde{z}, \tilde{t}, \tilde{h}, q) &= m_+^{(l)}(z = \tilde{z}, t = \tilde{t}, h = \tilde{h}) e^{iq\tilde{z}}, \\ m_3^{(g)}(\tilde{z}, \tilde{t}, \tilde{h}, q) &= m_3^{(l)}(z = \tilde{z}, t = \tilde{t}, h = \tilde{h}),\end{aligned}\quad (3.107)$$

где $m_+ = m_1 + im_2$. При сопоставлении решений (3.107) изменяются также константы взаимодействия.

В частности, малоамплитудное спин-волновое поле в полубесконечном образце хирального ферромагнетика имеет вид:

$$\mathbf{m}^{(g)} = \mathbf{n} + (m_2^{(l)}[\mathbf{e}_3 \times \mathbf{n}] + m_3^{(l)}\mathbf{e}_3)|_{z=\tilde{z}, t=\tilde{t}, h=\tilde{h}}, \quad \mathbf{n} = (\cos(q\tilde{z}), \sin(q\tilde{z}), 0), \quad (3.108)$$

где функции $m_{2,3}^{(l)}$ определяются формулами (3.107). Непосредственной проверкой легко убедиться, что выражение (3.108) удовлетворяет линеаризованному уравнению Ландау – Лифшица (3.103) с линеаризованным краевым условием (3.104).

Волна поворота (3.89) ферромагнетика с однородным основным состоянием после преобразования (3.107) превращается в хиральную волну поворота в полубесконечном ферромагнетике с геликоидальной структурой:

$$m_1^{(g)} = m_1^{(l)} \cos(q\tilde{z}) - m_2^{(l)} \sin(q\tilde{z}), \quad m_2^{(g)} = m_1^{(l)} \sin(q\tilde{z}) + m_2^{(l)} \cos(q\tilde{z}), \quad m_3^{(g)} = m_3^{(l)}, \quad (3.109)$$

где выражения $m_j^{(l)}$ определяются формулами (3.89) с учетом замены: $z \rightarrow \tilde{z}$, $t \rightarrow \tilde{t}$, $h \rightarrow \tilde{h}$. На больших расстояниях от края образца решение (3.109) описывает простейший хиральный солитон безграничной среды [11; 73].

Намагниченность в таком солитоне может быть закручена по, либо против направления закрутки магнитной спирали (3.102), что, соответственно, приводит к уменьшению, либо увеличению шага спирали. И то, и другое сопровождается выходом магнитных моментов из плоскости Oxy .

Вблизи поверхности образца ядро хирального солитона (3.109) сильно деформируется, после чего упруго отражается от границы образца и восстанавливает свою стационарную форму. В результате отражения центр хиральной волны сдвигается на величину Δz (3.92).

Хиральные солитоны наследуют основные динамические свойства солитонов легкоплоскостного ферромагнетика.

Конкретизируем сделанные общие замечания. Будем считать, что параметр $\rho > 0$. Для упрощения анализа полагаем, что наличие солитона не меняет направления закрутки спирали (3.102), а приводит только к уменьшению, либо увеличению ее шага. Тогда в случае слабой поверхностной анизотропии $|h| < \text{ch}^{-1}\rho$ при значении константы интегрирования $c_0 > 0$ ($c_0 < 0$) до столкновения с границей образца в области локализации солитона (3.109) шаг спирали уменьшается (увеличивается), а после столкновения – увеличивается (уменьшается). При этом на всем протяжении образца при $c_0 > 0$ спины оказываются наклонены по направлению к границе, а при $c_0 < 0$ – от границы. При отражении солитона от края образца в его центре проекция намагниченности $m_3^{(g)}$ на ось спирали не меняется (см. формулы, (3.91), (3.109)). В момент $t = t_0$ (см. (3.90)) столкновения солитона (3.109) с границей образца шаг спирали и фаза вращения спинов в пределах солитона в точности совпадают с таковыми в спиральной структуре (3.102), и наличие солитона в структуре заметно только по выходу спинов из плоскости вращения Oxy .

В слабых отрицательных полях $-\text{ch}^{-1}\rho < h < 0$ при достаточно больших значениях $\rho > \text{Arcsh}1$ компонента намагниченности $m_3(z, t_0)$ монотонна по мере удаления вглубь образца. Это означает, что в таком случае огибающая солитона при $t = t_0$ оказывается наиболее узкой в точке $z = 0$ на его границе (рисунок 3.5а). При сравнительно малых $\rho < \text{Arcsh}1$ проекция $m_3^{(g)}$ достигает абсолютного минимума -1 в точке, определяемой условием: $\text{chysh}\rho = 1$ (рисунок 3.5б). В положительных полях $0 < h < \text{ch}^{-1}\rho$ при достаточно больших значениях $\rho > \text{Arcsh}1$ компонента намагниченности $m_3^{(g)}(z, t_0)$ имеет ровно одну точку экстремума $z_0 = \text{ch}\rho \ln |f|/2 > 0$ вблизи границы (рисунок 3.5в). Огибающая солитона сжата в точке $z = z_0$, а по обе стороны от точки z_0 расширяется,

постепенно выходя на предельное значение, соответствующее геликоидальной структуре (3.102). При сравнительно малых $\rho < \text{Arcsh}1$ в зависимости от значений поля h компонента $m_3^{(g)}(z, t_0)$ приобретает еще одну, либо две добавочных точки абсолютного минимума $z_{1,2}$, определяемые условием $\text{ch}[y(z_{1,2})] \text{sh}\rho = 1$ (рисунки 3.5г, 3.5д). В них намагниченность параллельна «трудной оси» объемной анизотропии: $\mathbf{m}^{(g)} = (0, 0, -1)$.

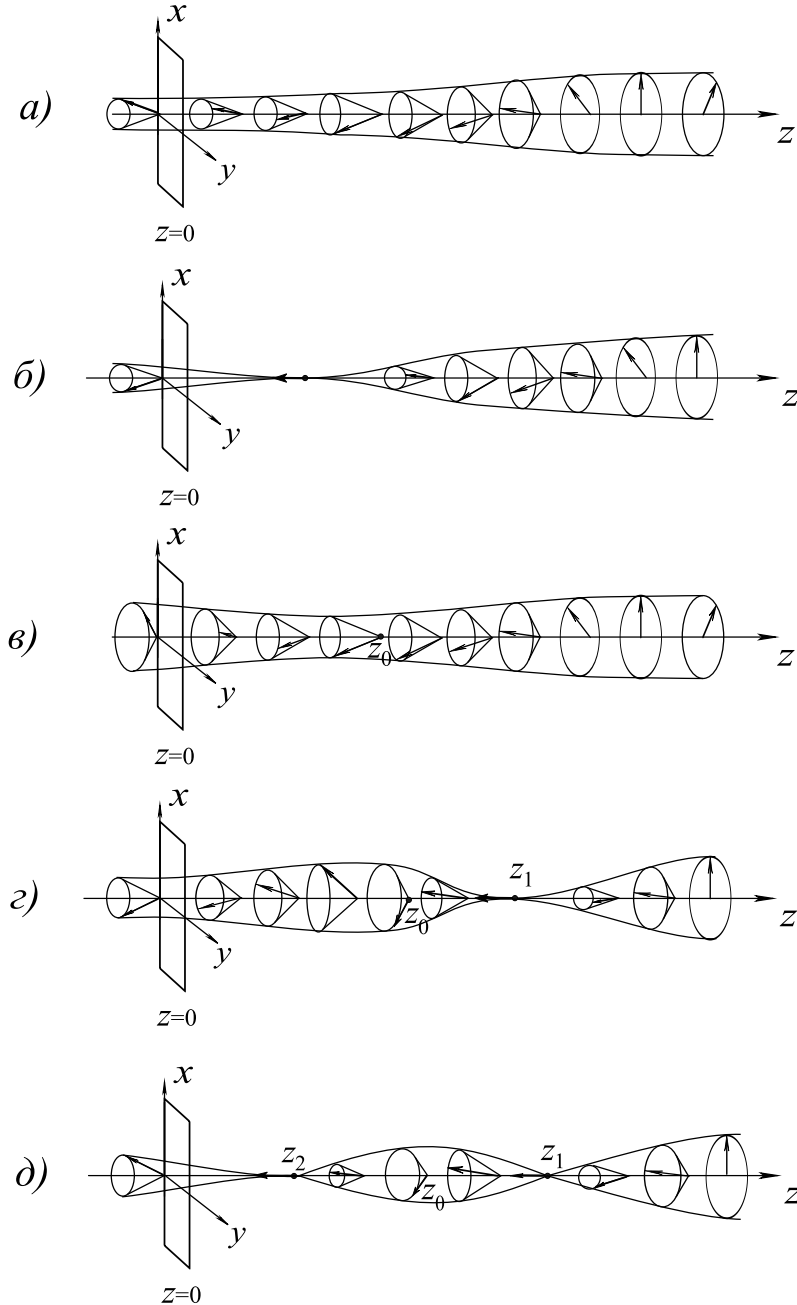


Рисунок 3.5 — Расположение спинов в солитоне (3.109) в момент времени $t = t_0$ столкновения с границей образца при значениях а) $-\text{ch}^{-1}\rho < h < 0$, $\rho > \text{Arcsh}1$; б) $-\text{ch}^{-1}\rho < h < 0$, $\rho < \text{Arcsh}1$; в) $0 < h < \text{ch}^{-1}\rho$, $\rho > \text{Arcsh}1$; г) $0 < h < \text{ch}^{-1}\rho\sqrt{1 - \text{sh}^2\rho}$, $\rho < \text{Arcsh}1$; д) $\text{ch}^{-1}\rho\sqrt{1 - \text{sh}^2\rho} < h < \text{ch}^{-1}\rho$, $\rho < \text{Arcsh}1$. Во всех случаях выбрано $c_0 > 0$.

Случаи 3.5а-д аналогичны представленным на рисунках 3.2а-д. Интервалы значений поверхностного поля, указанные в подписях к рисункам 3.5а-д, в точности совпадают с таковыми на рисунках 3.2а-д.

При сильной поверхностной анизотропии $|h| > ch^{-1}\rho$ компонента $m_3^{(g)}$ в центре солитона после отражения меняет знак (см. (3.95), (3.109)). Это означает, что в результате взаимодействия солитона (3.109) с границей образца наклон спинов к границе, либо от границы меняется на обратный (рисунки 3.6а, 3.6б). Непосредственно в момент $t = t_0$ столкновения солитона с поверхностью образца компонента намагниченности $m_3^{(g)} = 0$ и, следовательно, спины во всем образце ложатся в плоскость Oxy . В солитоне, встроенном в спиральную структуру, наклон спинов (к границе образца или от нее) зависит от знака параметров h и c_0 точно так же, как у «затравочного» солитона в ферромагнетике с однородным основным состоянием.

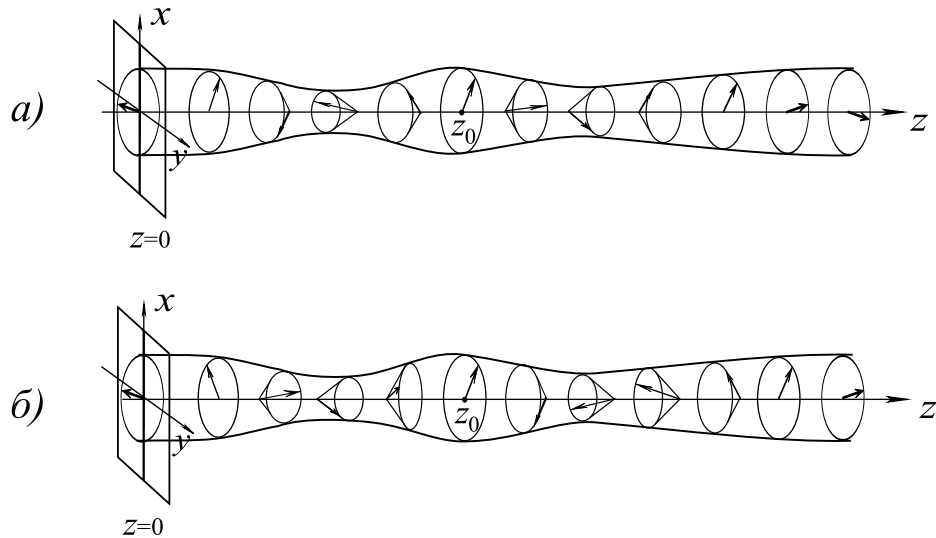


Рисунок 3.6 — Расположение спинов в солитоне (3.109) в случае больших положительных полей $h > ch^{-1}\rho$ непосредственно а) до и б) после столкновения с границей образца; выбрано $c_0 > 0$. В момент столкновения спины вдоль всего образца ложатся в плоскость Oxy .

Отметим, что в отличие от случая малых полей $|h| < ch^{-1}\rho$, в сильных полях $|h| > ch^{-1}\rho$ направление закрутки солитона (3.109) при отражении от границы образца не меняется. В области локализации солитона шаг спирали (3.102) при $c_0 > 0$ ($c_0 < 0$) как до, так и после столкновения солитона с границей образца оказывается увеличен (уменьшен) по сравнению с шагом спиральной структуры (ср. формулы (3.95), (3.102)).

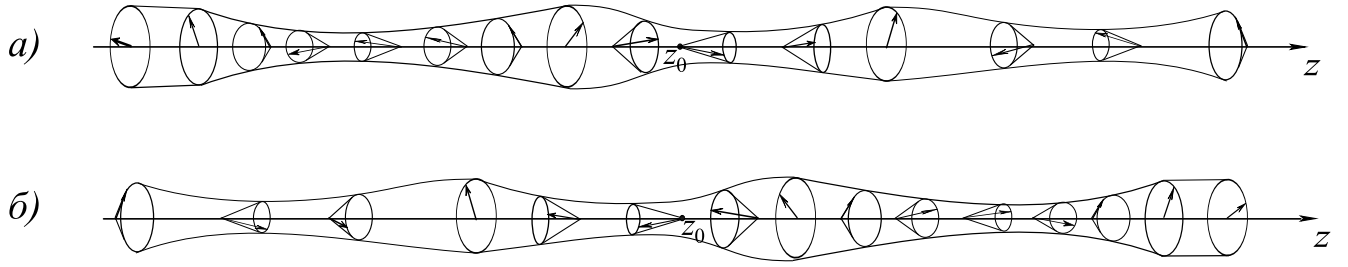


Рисунок 3.7 — Расположение спинов в пульсирующем солитоне – бризере – на фоне спиральной структуры (3.102) вдали от границы образца в моменты времени а) $t = 0$ и б) $t = T/2$, где T – период пульсаций.

В заключение обсудим хиральный бризер. Бризерное решение легкоплоскостного ферромагнетика под действием преобразования (3.109) переходит в пульсирующий солитон на фоне спиральной структуры (3.102). На рисунках 3.7а, 3.7б схематично приведен вид такого солитона вдали от края образца (при $z \gg 1$) в моменты времени $t = 0$ и $t = T/2$, где $T = 2\pi/\omega$ – период пульсаций. В центре солитона – точке z_0 – компонента намагниченности $m_3^{(g)}$ достигает экстремального значения, и вектор $\mathbf{m}^{(g)}(z, t)$ периодически меняет наклон от направления к границе образца на направление вглубь образца. В самом солитоне области растяжения спиральной структуры перемежаются областями сжатия. На рисунке 3.7а при $t = 0$ правее центра солитона (в области $z > z_0$) спиральная структура растянута, а левее центра (в области $z < z_0$) – сжата. По прошествии полупериода колебаний, при $t = T/2$ (рисунок 3.7б) растяжение спирали правее центра солитона сменяется ее сжатием, а сжатие спирали левее центра солитона сменяется растяжением. При этом, проекция $m_3^{(g)}$ как правее, так и левее центра периодически меняет знак на противоположный.

Кроме того, неоднородность прецессии намагниченности и пульсации в ядре бризера приводят к малым продольным колебаниям солитона вдоль оси магнитной спирали. На рисунке 3.7 они не указаны.

ВЫВОДЫ

1. Техника обратной задачи рассеяния в совокупности с методом «изображений» использована для построения явных решений уравнения Ландау – Лифшица, описывающих распространение солитонов и диспергирующих волн вдоль полубесконечного ферромагнетика с анизотропией типа «легкая плоскость». На границе образца учитывалось краевое условие, соответствующее частичному закреплению спинов. Его предельные случаи отвечают свободным краевым спинам и полному закреплению намагниченности на границе.

2. Показано, что солитоны в полуограниченном легкоплоскостном ферромагнетике делятся на два класса: движущиеся волны поворота и бризеры. Установлено, что учет легкоплоскостной анизотропии исключает формирование неподвижных приграничных солитонов: все полученные солитоны являются движущимися.

3. Исследованы возможные сценарии отражения солитонов от границы образца в зависимости от характера закрепления краевых спинов. Обнаружено, что разворот намагниченности в центре волн поворота в легкоплоскостном ферромагнетике после отражения от границы образца пороговым образом зависит от величины поля поверхностной анизотропии. Установлено, что формированием четного или нечетного числа волн поворота в образце можно управлять, меняя характер закрепления спинов на границе образца. Полученные особенности оказываются типичными для магнитных образцов конечных размеров. Большой интерес могло бы представлять их экспериментальное подтверждение.

4. Найдены спектральные разложения интегралов движения, которые позволяют трактовать сильновозбужденные состояния полубесконечного ферромагнетика в терминах идеального газа солитонов и квазичастиц непрерывного спектра спиновых волн. Получены дополнительные интегралы движения, гарантирующие выполнение солитонами верных граничных условий при их взаимодействии с краем образца.

5. Полученные результаты использованы для построения и анализа солитонов (хиральных волн поворота и бризеров), встроенных в геликоидальную структуру ферромагнетика с анизотропией типа «легкая плоскость». Установлено, что строение хиральных волн поворота после отражения от поверхности образца пороговым образом зависит от величины поверхностного поля. По-

казано, что характер деформации ядра солитона в момент столкновения с поверхностью образца существенно зависит от знака поля.

Результаты этой главы следует учитывать при моделировании динамики солитонных процессов в образцах конечных размеров. Аналитические решения могут быть использованы для планирования экспериментов и верификации численных расчетов.

4 БРИЗЕРЫ И ДВУХКИНКОВЫЕ СОСТОЯНИЯ В СПИРАЛЬНОЙ МАГНИТНОЙ СТРУКТУРЕ

В последнее десятилетие большое внимание уделяется магнитным материалам, основное состояние которых представляет спиральную структуру. В кристаллах без центра инверсии спиральное упорядочение часто связано с взаимодействием Дзялошинского – Мория, которое теоретически описывается инвариантами Лифшица в разложении свободной энергии [61; 83–85]. Взаимодействие Дзялошинского – Мория конкурирует с обменным взаимодействием, разворачивая спины друг относительно друга на малый угол. Исследованию физических свойств материалов со спиральной магнитной структурой посвящено значительное число работ (см., например, [72; 86–91]). Подробный обзор теории одноосных ферромагнетиков с геликоидальным основным состоянием представлен в работе [92].

При включении внешнего магнитного поля перпендикулярно оси геликоидальной структуры магнитная спираль с постоянным шагом превращается в одномерную решетку протяженных доменов (кинков). Внутри каждого из них распределение намагниченности почти однородно. Соседние домены разделены узкими доменными стенками – топологическими солитонами, в которых локализуется спиральный поворот намагниченности. Составляющие решетку солитоны ввиду своей мобильности и магниторезистивных свойств перспективны для использования в устройствах спинтроники. Большой интерес представляет исследование движения и устойчивости отдельных доменных стенок и решетки в целом под влиянием электрического тока [93–96]. Спиральное упорядочение реализуется в тяжелых редкоземельных металлах, в большом классе проводящих кубических магнетиков без центра инверсии и ряде других соединений. Среди известных одноосных гелимагнетиков ($\text{Cr}_{1/3}\text{NbS}_2$, CrNb_3S_6 , CrTaS_6 , CuV_2O_4 , CuCsCl_3 , $\text{Yb}(\text{Ni}_{1-x}\text{Cu}_x)_3\text{Al}_9$, $\text{Ba}_2\text{CuGe}_2\text{O}_7$) [1; 2; 97–100] наиболее изучен $\text{Cr}_{1/3}\text{NbS}_2$. В нем удалось экспериментально наблюдать решетку киральных солитонов [101].

Хиральные мультисолитоны, встроенные в геликоидальную структуру ферромагнетиков, обладают полезными технологическими свойствами [92; 102]. Однако их аналитическое описание связано со значительными трудностями из-за нелинейности базовых уравнений теории и по причине неоднородности

спирального упорядочения среды, которое само является существенно нелинейной решеткой из солитонов. В связи с этим, имеется мало работ на эту тему. Решение проблемы возможно с привлечением упрощенных моделей, которые корректно учитывают основные взаимодействия и в тоже время допускают точные решения [102–104]. При физически оправданных приближениях, уравнения Ландау – Лифшица для ферро- и антиферромагнетиков с преобладающей легкоплоскостной анизотропией и остаточной анизотропией в базисной плоскости часто сводятся к гиперболическому (волновому) уравнению sine–Gordon [40; 72; 105; 106]. В рамках модели sine–Gordon простейшие хиральные солитоны в решетке солитонов были получены преобразованиями Дарбу и Бэклунда в работах [107; 108].

В безграничной среде с однородным основным состоянием уравнение sine–Gordon полностью интегрируемо наиболее эффективным из методов нелинейной математической физики – методом обратной задачи рассеяния. Наличие нетривиального основного состояния осложняет построение частицеподобных возбуждений даже в случае неограниченной среды. В работах [11; 109] с помощью метода обратной задачи предсказаны и аналитически описаны новые типы солитонов в решетке кинков. Показано, что полный набор солитонов включает локализованные волны «растяжения» и/или «сжатия» в решетке кинков («лишние» доменные стенки разной хиральности) и бризеры (связанные состояния доменных стенок противоположных хиральностей).

Общая схема построения сколь угодно сложных мультисолитонных состояний приведена в работе [A7]. Там построены двухбризерное и двухкинковое возбуждения. В случае бризерных возбуждений соответствующее решение задачи Римана факторизуется и схема является рекуррентной. На ее $N - 1$ -ом шаге получаем описание N бризеров в геликоидальной структуре. Качественный анализ асимптотического поведения решения задачи Римана показывает, что столкновение между бризерами происходит упруго и всякий раз приводит только к изменению координат их центров и сдвигам фаз. Однако, даже двухбризерное точное решение модели sine–Gordon оказывается чрезвычайно громоздким и едва ли допускает подробный анализ. Двухкинковое решение задачи Римана, напротив, не может быть факторизовано, но зато соответствующее решение исходной модели sine–Gordon может быть проанализировано детально [A8; A17].

В данной главе представлен детальный анализ особенностей взаимодействия солитонов (кинков и бризеров) друг с другом и с фоновой структурой [A7—A9; A12; A17—A19]. Вычислен спектр поглощения мощности внешней накачки в геликоидальной структуре легкоплоскостных магнетиков без центра инверсии при наличии постоянного магнитного поля, перпендикулярного оси магнитной спирали. Показано, что эти данные можно использовать для диагностики спиновых волн и солитонов [A20]. Указаны возможности регистрации солитонов в геликоидальной структуре [A12; A20], их возбуждения и управления их свойствами посредством внешнего поля [A9; A12; A17]. Показано, что полученные результаты могут быть использованы для аналитического описания солитонов электрической поляризации в мультиферроиках с циклоидальной магнитной структурой [A21].

Материал главы основан на работах [A7—A9; A12; A17—A21].

4.1 Модель sine–Gordon для спиральной структуры, процедура «одевания» и спектр нелинейных возбуждений

4.1.1 Формулировка модели

Рассмотрим квазиодномерную (вдоль оси Oz) спиральную магнитную структуру. Будем описывать распределение намагниченности векторным полем $\mathbf{M}(z,t)$, где $\mathbf{M}^2 = M_0^2 = \text{const}$; z, t – пространственная координата и время. Для квазиодномерного ферромагнетика без центра инверсии с анизотропией типа «легкая плоскость» (плоскость xOy) плотность энергии в постоянном внешнем магнитном поле $\mathbf{H} = (H, 0, 0)$ ($H > 0$) записывается в виде:

$$\tilde{w} = \frac{\alpha}{2} (\partial_z \mathbf{M})^2 + \kappa (M_1 \partial_z M_2 - M_2 \partial_z M_1) + \frac{\beta}{2} M_3^2 - M_1 H. \quad (4.1)$$

Здесь $\alpha, \beta > 0$ и κ – постоянные обменного взаимодействия, магнитной анизотропии и взаимодействия Дзялошинского соответственно. В легкоплоскостных магнетиках при $\mathbf{H} = 0$ наличие в энергии (4.1) взаимодействия Дзялошинского (инвариантов Лифшица) приводит к идеальному магнитному упорядочению атомов. Вектор $\mathbf{M}(z,t)$ лежит в плоскости xOy и при смещении вдоль оси Oz

поворачивается так, что образуется спиральная структура, период которой l_0 несоизмерим с постоянной кристаллической решетки a и превосходит ее во много раз: $l_0 \sim \alpha/\kappa \gg a$. Внешнее поле \mathbf{H} стремится выстроить в плоскости xOy магнитные моменты атомов вдоль направления Ox . В результате конкуренции противоположных тенденций, вдоль оси Oz формируются протяженные области шириной L_0 , в пределах которых распределение намагниченности остается почти однородным. Вблизи критического поля $H < H_c$ соседние области разделяет узкий переходный слой шириной $l_0 \sim \alpha/\kappa \sim \sqrt{\alpha M_0/H_c} \ll L_0$, где сохраняется спиральный разворот намагниченности. При $H > H_c$ система имеет соизмеримое ферромагнитное упорядочение.

При сильной легкоплоскостной анизотропии (при условии $\beta \gg H/M_0$) в параметризации углами Θ, Φ :

$$\mathbf{M} = M_0(\sin \Theta \cos \Phi, \sin \Theta \sin \Phi, \cos \Theta)$$

даже в возбужденных состояниях геликоидальной структуры угол Θ близок к значению $\Theta = \pi/2$, $\partial_z \Phi \sim O(1/l_0)$. В терминах углов Θ, Φ уравнения Ландау – Лифшица квазиодномерного ферромагнетика имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma M_0} \sin \Theta \partial_t \Phi + \alpha \partial_z^2 \Theta + \sin \Theta \cos \Theta [\beta - \alpha (\partial_z \Phi)^2 - 2 \kappa \partial_z \Phi] + \\ + \frac{H}{M_0} \cos \Theta \cos \Phi = 0; \\ -\frac{1}{\gamma M_0} \sin \Theta \partial_t \Theta + \alpha \partial_z (\sin^2 \Theta \partial_z \Phi) + \kappa \partial_z \sin^2 \Theta - \frac{H}{M_0} \sin \Theta \sin \Phi = 0, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где γ – магнитомеханическое отношение. Для реальных материалов со спиральной структурой параметры задачи удовлетворяют неравенству [108]:

$$\frac{H}{M_0} \leq \frac{\kappa^2}{\alpha} \ll \beta.$$

Тогда, полагая $\Theta = \pi/2 + \theta$ ($\theta \ll 1$), из первого уравнения (4.2) находим: $\theta \approx (\gamma M_0 \beta)^{-1} \partial_t \Phi$, после чего второе уравнение (4.2) в главном приближении сводится к модели sine–Gordon [108] для расчета Φ :

$$-\frac{1}{(\gamma M_0)^2 \beta} \partial_t^2 \Phi + \alpha \partial_z^2 \Phi - \frac{H}{M_0} \sin \Phi = 0. \quad (4.3)$$

В безразмерных переменных $z' = z \sqrt{H/(\alpha M_0)}$, $t' = \gamma \sqrt{\beta H M_0} t$ уравнение sine–Gordon (4.3) примет стандартный вид:

$$\partial_{t'}^2 \Phi - \partial_{z'}^2 \Phi + \sin \Phi = 0. \quad (4.4)$$

«Штрихи» над новыми переменными далее опускаем. В основном приближении распределение намагниченности определяется формулой

$\mathbf{M} \approx M_0 (\cos \Phi, \sin \Phi, 0)$. В безразмерных переменных плотность энергии квазиодномерного ферромагнетика $w = \tilde{w}/(M_0 H)$ описывается выражением:

$$w = \frac{1}{2} \left[(\partial_z \Phi)^2 + (\partial_t \Phi)^2 \right] + q \partial_z \Phi + (1 - \cos \Phi), \quad (4.5)$$

где $q = \kappa \sqrt{M_0 / (\alpha H)}$.

В зависимости от величины q , минимуму энергии (4.5) отвечает либо однородное распределение намагниченности $\Phi = 0 \pmod{2\pi}$, либо периодическая структура, для которой:

$$\begin{aligned} \Phi = \varphi_0(\chi) &= \pi - 2 \operatorname{am}(\chi, k), & \chi &\equiv z/k; \\ \cos \frac{\varphi_0}{2} &= \operatorname{sn}(\chi, k), & \sin \frac{\varphi_0}{2} &= \operatorname{cn}(\chi, k), & \frac{\partial_\chi \varphi_0}{2} &= -\operatorname{dn}(\chi, k), \end{aligned} \quad (4.6)$$

где $\operatorname{am}(\chi, k)$, $\operatorname{sn}(\chi, k)$, $\operatorname{cn}(\chi, k)$, $\operatorname{dn}(\chi, k)$ – эллиптические функции Якоби с модулем k ($k^2 \leq 1$) [41; 43].

Средняя энергия, приходящаяся на период спиральной структуры, имеет вид:

$$\bar{w} = \frac{1}{L_0} \int_0^{L_0} dz w(z) = -\frac{\pi q}{K k} - 2 \left(\frac{k'}{k} \right)^2 + \frac{4E}{K k^2},$$

где $E = E(k)$ – полный эллиптический интеграл второго рода. Минимизируем \bar{W} по переменной k . Отсюда получим условие, определяющее k :

$$\pi q k - 4E = 0. \quad (4.7)$$

При $q < 4/\pi$ уравнение (4.7) не имеет решений. Основным состоянием системы (4.5) является соизмеримая фаза: $\Phi = 0 \pmod{2\pi}$. При $q > 4/\pi$ уравнение (4.7) разрешимо. Энергия, соответствующая спиральной структуре (4.6), ниже, чем энергия однородного распределения параметра порядка. На периоде $L_0 = 2Kk$ функция φ_0 изменяется на 2π , где $K = K(k)$ – полный эллиптический интеграл первого рода. Согласно разложению [11]:

$$\partial_\chi \varphi_0 = -2 \operatorname{dn} \chi = -\frac{\pi}{K'} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \operatorname{sech} \left[\frac{\pi}{2K'} (\chi - 2Kp) \right],$$

где p – целое, $K' = K(k')$, $k' = \sqrt{1 - k^2}$, изменения поля φ_0 сосредоточены вблизи точек $z = 2Kkp$. В окрестности каждой из них с характерным размером

$l_0 \sim 2K'k/\pi$ функцию φ_0 можно аппроксимировать 2π -кинком, поскольку:

$$-\frac{\pi}{K'} \int d\chi' \operatorname{sech} \left(\frac{\pi\chi'}{2K'} \right) = 4 \operatorname{arctg} \left[\exp \left(-\frac{\pi}{2K'k} z \right) \right] + \operatorname{const}. \quad (4.8)$$

Таким образом, решение (4.6) определяет одномерную решетку из 2π -кинков (4.8), разделенных протяженными областями L_0 (обычно $L_0 \gg l_0$), в пределах которых $\varphi_0(\chi) \approx 2\pi s$, где s – целое число (см. рисунок 4.1).

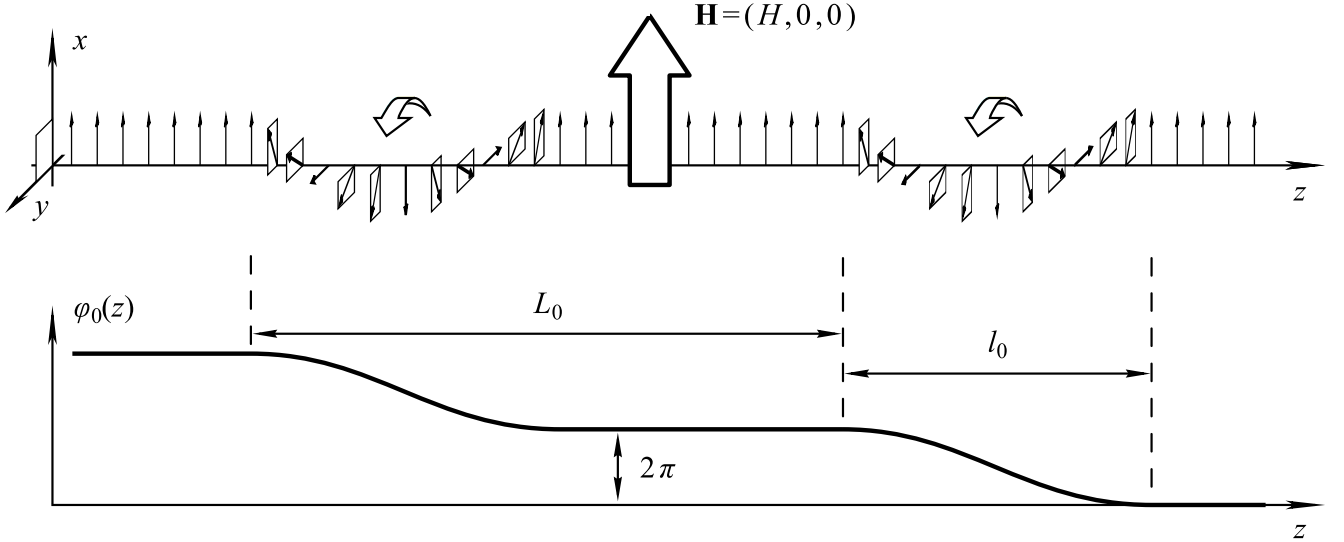


Рисунок 4.1 — Геликоидальная структура и решетка кинков $\varphi_0(z)$.

Период спиральной структуры можно изменять, меняя внешнее поле или температуру. При наличии внешнего магнитного поля, перпендикулярного оси магнитной спирали, вблизи точки $H_c = (\kappa\pi/4)^2 M_0/\alpha$ перехода по полю из несоизмеримой фазы в соизмеримую, период геликоидальной структуры в размерных переменных имеет вид:

$$L_0 \approx \sqrt{\frac{\alpha M_0}{H_c}} \ln \left(\frac{1}{\sqrt{H_c/H} - 1} \right), \quad H < H_c.$$

В работе [101] показано, что для соединения $\text{Cr}_{1/3}\text{NbS}_2$ модель (4.5) верно описывает магнитооптические данные о зависимости периода спиральной структуры от внешнего магнитного поля, перпендикулярного оси магнитной спирали.

Мы будем рассматривать сильно нелинейные длиннопериодичные структуры, в которых период структуры $L_0 = 2Kk$ больше ширины её доменных стенок $l_0 = 2Kk'/\pi$. Это накладывает ограничения на значения модуля k эллиптических функций. Например, при $L_0 = 3l_0$ модуль $k = 0.67$. При этом оказывается, что изгибы доменных стенок на фоне структуры почти незаметны.

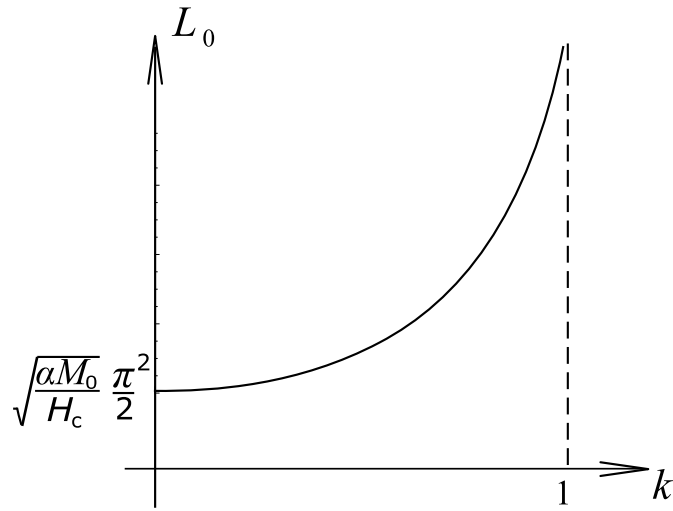


Рисунок 4.2 — Зависимость периода спиральной структуры от модуля k эллиптических функций.

При проведении дальнейшего анализа использован пакет Mathematica. В нём для расчётов полагаем $L_0 \simeq 7l_0$, тогда $k = 0.99$. Важно, что при таком выборе k удаётся соблюсти баланс: с одной стороны, период структуры, логарифмически растущий с ростом k (см. рисунок 4.2), остаётся конечным ($L_0 = 3.3566$), а с другой стороны, изгибы доменных стенок на фоне структуры хорошо заметны.

4.1.2 Процедура «одевания» и солитонные решения

Процедура построения точных решений уравнения (4.4), описывающих солитоны (дополнительные кинки и бризеры) в геликоидальной структуре (решетке кинков) (4.6) приведена в работах [11; 109]. Вспомогательная система линейных уравнений для уравнения (4.4) имеет вид [56]:

$$\begin{aligned} \partial_t \Psi &= \frac{i}{2} \left[\frac{\partial_z \Phi}{2} \sigma_3 + \sigma_1 w_1 \cos \frac{\Phi}{2} + \sigma_2 w_2 \sin \frac{\Phi}{2} \right] \Psi \equiv V \Psi, \\ \partial_z \Psi &= \frac{i}{2} \left[\frac{\partial_t \Phi}{2} \sigma_3 + \sigma_1 w_2 \cos \frac{\Phi}{2} + \sigma_2 w_1 \sin \frac{\Phi}{2} \right] \Psi \equiv U \Psi. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Здесь σ_i ($i = 1, 2, 3$) — матрицы Паули, коэффициенты $w_{1,2}$ подчинены ограничению: $w_1^2 - w_2^2 = 1$. Эта связь будет согласована со свойствами периодической структуры (4.6), если использовать униформизацию: $w_1 = \operatorname{cn}(u, k)$, $w_2 = i \operatorname{sn}(u, k)$.

Геликоидальной структуре (4.6) отвечает частное решение системы (4.9):

$$\begin{aligned}
\Psi_\delta(u, \chi, t) &= M(u, \chi + \delta) \exp \left(A(u, \chi, t) \sigma_3 + \frac{\eta_1 \delta}{K} u \sigma_3 \right); \\
A(u, \chi, t) &= i p(u) \chi + \frac{it}{2k} \operatorname{dn}(u, k), \\
p(u) &= -i \left(\frac{\eta_1 u}{K} - \frac{1}{2} [\zeta(u - iK') + \zeta(u + iK')] \right); \\
M(u, \chi) &= \begin{pmatrix} \sigma(\chi + u) & i \sigma(\chi + 2iK' - u) e^{-\eta_3(\chi + iK' - u)} \\ -i \sigma(\chi + 2iK' + u) e^{-\eta_3(\chi + iK' + u)} & \sigma(\chi - u) \end{pmatrix} \times \\
&\times \frac{m(\chi)}{\sigma(u)} \exp \left[-\frac{\eta_1 u}{k} \chi \sigma_3 \right]; \quad m(\chi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \frac{\sigma(iK')}{\sigma(\chi + iK')} \right|. \quad (4.10)
\end{aligned}$$

Здесь параметр δ сдвигает решение (4.10) вдоль оси Oz , функции $\sigma(u)$ и $\zeta(u)$ имеют периоды $2K, 4iK'$, где $K = K(k)$ и $K' = K(k')$ – полные эллиптические интегралы первого рода от модуля k и сопряженного модуля $k' = \sqrt{1 - k^2}$. Используются стандартные обозначения: $\eta_1 = \zeta(K)$, $\eta_3 = \zeta(2iK')$ [43]. По форме записи решение (4.10) схоже с рассмотренными в главах 1, 2 «затравочными» решениями, соответствующими периодической доменной структуре легкоосного и двухосного ферромагнетиков.

Образование солитонов в геликоидальной структуре (решетке кинков) неизбежно меняет граничные условия задачи. В зависимости от числа дополнительных кинков, возможны краевые задачи двух типов. Первый тип учитывает наличие нечетного числа кинков (лишних доменных стенок) в структуре:

$$\begin{aligned}
\Phi(z, t) &\rightarrow \varphi_2^{(0)}(\chi) \equiv \varphi_0(\chi) \quad \text{при} \quad z \rightarrow +\infty; \\
\Phi(z, t) &\rightarrow \varphi_1^{(0)}(\chi) = 2\pi\sigma + \varphi_0(\chi + \Delta, k) \quad \text{при} \quad z \rightarrow -\infty, \quad (4.11)
\end{aligned}$$

где $\chi = z/k$, $\sigma = \pm 1$. Второй предполагает наличие четного числа кинков (лишних доменных стенок) с противоположными топологическими зарядами (хиральностями):

$$\begin{aligned}
\Phi(z, t) &\rightarrow \varphi_2^{(0)}(\chi) \equiv \varphi_0(\chi) \quad \text{при} \quad z \rightarrow +\infty; \\
\Phi(z, t) &\rightarrow \varphi_1^{(0)}(\chi) \equiv \varphi_0(\chi + \Delta, k) \quad \text{при} \quad z \rightarrow -\infty. \quad (4.12)
\end{aligned}$$

Наличие солитонов приводит к макроскопическим сдвигам структуры. Параметр Δ в выражениях (4.11), (4.12) отвечает за сдвиг геликоидальной структуры из-за наличия в ней кинков и бризеров. Величина сдвига $0 < \Delta < 2K$

определена с точностью до периода структуры. При $\sigma = 1$ в случае (4.11) спиральная структура испытывает сжатие на период и дополнительное смещение вдоль оси Oz на расстояние $k\Delta$, меньшее периода решетки кинков. В результате в одной из ячеек решетки кинков обязательно появится солитон – лишний 2π -кинк поля Φ с тем же топологическим зарядом, что и у остальных кинков структуры. Когда $\sigma = -1$, происходит локальное расширение решетки кинков на период и сбой при образовании геликоидальной структуры, такой, что в одной из ячеек решетки кинков появляется лишний 2π -кинк с топологическим зарядом противоположным зарядам остальных кинков структуры.

При тех же краевых условиях (4.11), (4.12) в спиральной структуре могут дополнительно существовать другие солитоны: четное число кинков с попарно противоположными топологическими зарядами и произвольное число бризеров. Кроме того, вдоль структуры могут распространяться спин-волновые пакеты, образование которых происходит без трансляций решетки кинков и связано с колебаниями намагниченности около равновесных положений.

Асимптотическим условиям (4.11) отвечают граничные условия для вспомогательной системы (4.9) следующего вида:

$$\begin{aligned}\Psi_1(z, t, u) &\rightarrow \Psi_1^{(0)} = \sigma_3 \Psi_\Delta(z, t, u) \sigma_3 && \text{при } z \rightarrow -\infty; \\ \Psi_2(z, t, u) &\rightarrow \Psi_2^{(0)} = \Psi_0(z, t, u) && \text{при } z \rightarrow +\infty.\end{aligned}\quad (4.13)$$

В случае асимптотических условий (4.12) они изменяются следующим образом:

$$\begin{aligned}\Psi_1(z, t, u) &\rightarrow \Psi_1^{(0)} = \Psi_\Delta(z, t, u) && \text{при } z \rightarrow -\infty; \\ \Psi_2(z, t, u) &\rightarrow \Psi_2^{(0)} = \Psi_0(z, t, u) && \text{при } z \rightarrow +\infty.\end{aligned}\quad (4.14)$$

Задача Римана для солитонов на геликоидальном фоне формулируется на контуре $\Gamma = \{u : \text{Im}p(u) = 0\}$, разделяющем области

$$\begin{aligned}D_+ &= \{u : \text{Im}p(u) > 0\} = \{0 < \text{Re}u < K, \quad |\text{Im}u| \leq 2K'\}, \quad \text{mod}(2K, 4iK'), \\ D_- &= \{u : \text{Im}p(u) < 0\} = \{-K < \text{Re}u < 0, \quad |\text{Im}u| \leq 2K'\}\end{aligned}\quad (4.15)$$

$\text{mod}(2K, 4iK')$ (рисунок 4.3). На контуре Γ решения $\Psi_{1,2}$ определены одновременно, и потому связаны между собой:

$$\Psi_1(u) = \Psi_2(u) T(u), \quad u \in \Gamma. \quad (4.16)$$

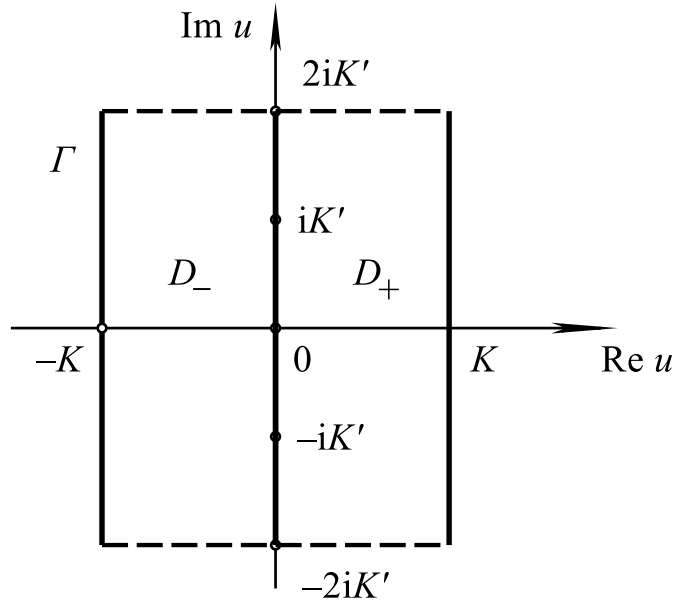


Рисунок 4.3 — Области D_+ и D_- и контур Γ в комплексной u -плоскости.

В области D_- нули коэффициента прохождения $a(u) = T_{11}(u)$ разбиваются на две группы:

$$\begin{aligned} a) \quad u &= v_p + i \varepsilon_p K' \equiv \nu_p, & -K < v_p < 0, & \quad \varepsilon_p = \pm 1; & \quad p = 1, 2 \dots M; \\ b) \quad u &= \mu_s, & \mu_s^* - 2iK', & \quad -K < \operatorname{Re} \mu_s < 0; & \quad s = 1, 2 \dots N. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Каждый особый нуль ν_p обеспечивает появление одного дополнительного кинка в решетке 2π -кинков геликоидальной структуры. Заметим, что краевые условия (4.11) будут справедливыми не только при наличии одного кинка в структуре, но и тогда, когда общее число кинков M будет нечетным. При этом все кинки, кроме одного, должны иметь попарно противоположные хиральности (направления закрутки).

Каждая группа нулей $b)$ описывает пульсирующий солитон – бризер – на фоне структуры, который можно трактовать как связанное состояние двух кинков с противоположными хиральностями. Бризеры не меняют асимптотических условий (4.13), (4.14), поэтому на их число нет ограничений.

Коэффициент $a(u)$ записывается в виде разложения по σ -функциям Вейштрасса:

$$a(u) = c \prod_{p=1}^M \varepsilon_p \frac{\sigma(u - \nu_p)}{\sigma(u + \nu_p^*)} e^{-\eta_3 \varepsilon_p \nu_p} \prod_{s=1}^N \frac{\sigma(u - \mu_s) \sigma(u - \mu_s^* + 2iK')}{\sigma(u + \mu_s^*) \sigma(u + \mu_s + 2iK')} e^{\eta_3 (\mu_s + \mu_s^*)}, \quad (4.18)$$

где $c = i\sigma$, когда число кинков M нечетно – при граничных условиях (4.11), и $c = 1$ в случае, когда число M четно, – при граничных условиях (4.12). Положение нулей (4.18) связано со сдвигом Δ геликоидальной структуры:

$$\sum_{p=1}^M v_p + \sum_{s=1}^N (\mu_s + \mu_s^*) = -\Delta/2, \quad \text{mod}(2K). \quad (4.19)$$

Простейшее решение модели sine–Gordon (4.4) имеет вид:

$$\begin{aligned} \Phi(z, t) &= 4 \arg \left[\sqrt{p} \exp \left(\frac{i\varphi_2^{(0)}}{4} \right) + \frac{1}{\sqrt{p}} \exp \left(\frac{i\varphi_1^{(0)}}{4} \right) \right], \\ p &= \left| \frac{\sigma(\chi + iK')}{\sigma(\chi + \Delta + iK')} \right| \exp \left[\frac{\eta_1 \Delta}{K} \chi + A(\nu_1, \chi, t) + A^*(\nu_1, \chi, t) \right] c_0, \end{aligned} \quad (4.20)$$

где c_0 – вещественная постоянная интегрирования. Оно описывает «лишний» кинк шириной $d \sim [2 \operatorname{Re} \partial_z A(\nu_1, \chi, t)]^{-1}$, движущийся в геликоидальной структуре со скоростью $V = -\operatorname{Re}[\partial_t A(\nu_1, \chi, t)]/\operatorname{Re}[\partial_z A(\nu_1, \chi, t)]$.

Запись (4.20) однокинкового состояния проще найденной преобразованиями Бэклунда в [108] в терминах эллиптических интегралов третьего рода. Из (4.20) также легко получить следующие эквивалентные формы записи:

$$\begin{aligned} \Phi(z, t) &= 4 \operatorname{Arctg} \left[\frac{\sqrt{p} \sin \left(\frac{i\varphi_2^{(0)}}{4} \right) + \frac{1}{\sqrt{p}} \sin \left(\frac{i\varphi_1^{(0)}}{4} \right)}{\sqrt{p} \cos \left(\frac{i\varphi_2^{(0)}}{4} \right) + \frac{1}{\sqrt{p}} \cos \left(\frac{i\varphi_1^{(0)}}{4} \right)} \right]; \\ \exp \left(\frac{i\Phi(z, t)}{4} \right) &= \frac{\sqrt{p} \exp \left(\frac{i\varphi_2^{(0)}}{4} \right) + \frac{1}{\sqrt{p}} \exp \left(\frac{i\varphi_1^{(0)}}{4} \right)}{\sqrt{p + p^{-1} + 2 \cos \left(\frac{\varphi_2^{(0)} - \varphi_1^{(0)}}{4} \right)}}; \\ \frac{\Phi(z, t) - \varphi_2^{(0)}(z)}{4} &= \operatorname{Arctg} \left[\frac{\sin \left(\frac{\varphi_2^{(0)} - \varphi_1^{(0)}}{4} \right)}{p + \cos \left(\frac{\varphi_2^{(0)} - \varphi_1^{(0)}}{4} \right)} \right]. \end{aligned}$$

Решение нелинейной модели sine–Gordon (4.4), соответствующее бризеру на фоне геликоидальной структуры, представляется в виде:

$$\Phi(z, t) = \varphi_0(\chi + \Delta/2) + \frac{2}{i} \ln \left(\frac{|m_2|^2 + |m_1|^2 e^{i\theta}}{|m_1|^2 + |m_2|^2 e^{i\theta}} \right), \quad (4.21)$$

где $\Delta = -4 \operatorname{Re} \mu_1$, $\tilde{\theta} = \operatorname{am}(\mu_1, k) + \operatorname{am}(\mu_1^*, k)$, $\operatorname{Arctg}(x)$ – полная квазипериодическая функция; $\mathbf{m} = (m_1, m_2) = \Psi_{\Delta/2}(\chi, t, \mu_1) \mathbf{c}$, \mathbf{c} – произвольный постоянный комплексный вектор.

Поскольку матрица $M(\mu_1, \chi)$, входящая в $\Psi_{\Delta/2}(\chi, t, \mu_1)$, квазипериодична, протяженность и динамические свойства бризера (4.21) определяются экспоненциальными множителями: $e^{\pm A(\mu_1, \chi, t)}$, $e^{\pm A^*(\mu_1, \chi, t)}$. Линейную по χ, t функцию A (4.10) удобно представить в виде:

$$2A(\mu_1, \chi, t) = l^{-1}(z - Vt) + i(pz + \omega t),$$

где

$$l^{-1} = -\frac{2}{k} \operatorname{Im} p(\mu_1) > 0, \quad V = \frac{1}{k q_0} \operatorname{Im} \operatorname{dn} \mu_1, \quad p = \frac{2}{k} \operatorname{Re} p(\mu_1), \quad \omega = \frac{1}{k} \operatorname{Re} \operatorname{dn} \mu_1. \quad (4.22)$$

Тогда параметр l характеризует размер бризера, V – скорость его движения как целого, p и ω – волновой вектор и частота пульсаций намагниченности в области локализации бризера.

4.1.3 Спектр нелинейных возбуждений спиральной структуры

В задаче о нелинейных возбуждениях модели sine–Gordon для несоизмеримой фазы кристаллов без центра инверсии период спиральной структуры фиксируется взаимодействием Дзялошинского – Мория (инвариантами Лифшица). Спектр линейных мод содержит две ветви, отвечающие «внутридоменным» и «внутриграничным» колебаниям полосовой структуры. Подробный анализ такой задачи содержится в работах [107; 110].

Свойство интегрируемости модели sine–Gordon (4.4) предполагает существование бесконечной серии законов сохранения для локализованных возбуждений на фоне спиральной структуры (4.6). При формулировке сохраняющихся величин для возбужденных состояний следует отделить вклад в эти величины от неоднородного основного состояния среды (для безграничной среды такой вклад бесконечен). Как и в задаче о солитонах на фоне нелинейной спиновой волны [54], все затруднения преодолеваются, если использовать независимую от времени аналитическую в области D_- функцию $a(u)$ в качестве производящего

функционала интегралов движения. Полный набор нетривиальных интегралов движения, которые управляют нелинейной динамикой магнитных возбуждений на фоне спиральной структуры, получается при разложении функции $\ln a(u)$ вблизи особых точек $u = \pm iK'$ вспомогательной системы (4.9) [A7]. Физический смысл имеют первые два интеграла движения – энергия и импульс нелинейных возбуждений на фоне структуры.

Под энергией H коллективных возбуждений будем понимать разность полной энергии системы и энергии основного состояния. Пусть длина магнитной спирали равна $2R$ ($|z| \leq R = 2Kkm$, где $m \gg 1$ – целое число). При граничных условиях (4.12), величина H имеет вид:

$$H = \frac{4}{k} \left(Z(\Delta) + \frac{2\eta_1 \Delta}{K} \right) + \int_{-R}^R dz \left(\cos \varphi_1^{(0)} - \cos \Phi + \frac{1}{2} \left[(\partial_t \Phi)^2 + (\partial_z \Phi)^2 - (\partial_z \varphi_1^{(0)})^2 \right] + q(\partial_z \Phi - \partial_z \varphi_1^{(0)}) \right) = \frac{4}{k} \frac{d}{d\varepsilon} \ln [a(iK' + \varepsilon)a(-iK' + \varepsilon)] \Big|_{\varepsilon=0} + 2q \operatorname{am}(\Delta, k).$$

Параметры q и k в геликоидальной структуре связаны формулой (4.7).

Спектральные разложения интегралов движения могут быть найдены с помощью дисперсионного соотношения на торе для функции $\ln a(u)$ [A7]. При краевых условиях (4.12) имеем четное число $2M$ лишних доменных стенок (2π -кинков поля Φ) с попарно противоположными хиральностями (топологическими зарядами) и произвольное число N бризеров. Комплексные нули функции $a(u)$: $\nu_p = v_p + i\varepsilon_p K'$ ($\varepsilon_p = \pm 1$) и μ_s ($\mu_s \neq \nu_p$) лежат в области D_- и параметризуют, соответственно, кинки и бризеры. Тогда спектральное разложение энергии коллективных возбуждений записывается в виде [A7; A9; A18]:

$$H = \int_{-K'}^{K'} dv [\varepsilon_a(v) n_a(v) + \varepsilon_{\text{opt}}(v) n_{\text{opt}}(v)] - \frac{8}{k} \left(\sum_{p=1}^{2M} \operatorname{Re} \left[Z(\nu_p) + \frac{2\eta_1 \nu_p}{K} \right] + 2 \sum_{s=1}^N \operatorname{Re} \left[Z(\mu_s) + \frac{2\eta_1 \mu_s}{K} \right] \right) + 2q \operatorname{am}(\Delta, k). \quad (4.23)$$

Величины ε_a (n_a) и ε_{opt} (n_{opt}) определяют спектр (плотность) квазиакустических и квазиоптических спин-волновых мод в структуре:

$$\varepsilon_a(v) = (k')^2 \operatorname{sn}^2(v + K', k'), \quad n_a(v) = \frac{4}{\pi k} \ln(1 + |b(-K + iv)|^2 e^{2\eta_1 \Delta}) > 0; \\ \varepsilon_{\text{opt}}(v) = \frac{1}{\operatorname{sn}^2(v + K', k')}, \quad n_{\text{opt}}(v) = -\frac{4}{\pi k} \ln(1 - |b(iv)|^2) > 0. \quad (4.24)$$

Спектр спин-волновых мод имеет только две полосы. Это связано с конкретной формой периодического потенциала решетки кинков структуры [31; 72]. Из-за образования солитонов, спиральная структура «сжимается» вдоль оси Oz на величину $k\Delta$. Это обстоятельство проявляется в изменении плотности квазиакустических спин-волновых мод, а также в изменении энергии сверхструктуры, которое учитывается последним слагаемым в (4.23). Дискретные слагаемые (4.23) соответствуют энергиям кинков и бризеров в структуре.

Полевой импульс солитонов и спин-волновых мод в задаче с граничными условиями (4.12) определяется выражением:

$$P = \int_{-R}^R dz \partial_t \Phi \partial_z \Phi = \int_{-K'}^{K'} dv [p_a(v) n_a(v) + p_{\text{opt}}(v) n_{\text{opt}}(v)] - \frac{8}{k} \left(\sum_{p=1}^{2M} \text{Im}(\text{dn} v_p) + 2 \sum_{s=1}^N \text{Im}(\text{dn} \mu_s) \right), \quad (4.25)$$

где p_a и p_{opt} – импульсы квазиакустических и квазиоптических спин-волновых мод:

$$p_a(v) = k' \text{dn}(v + K', k') \text{cn}(v + K', k'),$$

$$p_{\text{opt}}(v) = - \frac{\text{dn}(v + K', k') \text{cn}(v + K', k')}{\text{sn}^2(v + K', k')}.$$

Отметим, что в спектральных разложениях интегралов движения удалось полностью разделить вклады двух независимых типов коллективных возбуждений на фоне геликоидальной структуры: солитонов и спиновых волн.

Законы дисперсии спиновых волн в геликоидальных структурах обычно записывают в терминах квазиимпульса функций Ламе [72]. Соответствующие зависимости являются трансцендентными. Между тем, полученные результаты показывают, что квазиимпульс решений уравнения Ламе отличается от импульса магнонов. В терминах импульса магнонов законы дисперсии спин-волновых мод приобретают простой вид и становятся алгебраическими:

$$\varepsilon_a(p_a) = \frac{1}{2} \left(1 + (k')^2 - \sqrt{k^4 + 4p_a^2} \right), \quad |p_a| \leq k';$$

$$\varepsilon_{\text{opt}}(p_{\text{opt}}) = \frac{1}{2} \left(1 + (k')^2 + \sqrt{k^4 + 4p_{\text{opt}}^2} \right), \quad -\infty \leq p_{\text{opt}} \leq +\infty.$$

В задаче с граничными условиями (4.11) формулы для энергии и импульса коллективных возбуждений в геликоидальной структуре содержат нечетное число кинков и получаются из (4.23) и (4.25) после замены $2M \rightarrow 2M + 1$, $\text{am}\Delta \rightarrow \text{am}\Delta - \pi\sigma$.

4.1.4 Нелинейные спиновые волны

При малых внешних воздействиях, недостаточных для формирования солитонов, в геликоидальной структуре образуются спиновые волны, в которых намагниченность колеблется около своих равновесных положений. В отличие от солитонов, образование спиновых волн не сопровождается локальными сдвигами структуры. Первоначально локализованные на фоне структуры спин-волновые состояния расплываются с течением времени из-за эффектов дисперсии. Теоретическое описание нелинейной динамики спиновых волн связано с решением так называемой регулярной задачи Римана, для которой функции $a(u)$ и $a^*(-u^*)$ не имеют нулей в областях своей аналитичности. Краевые условия для такой задачи совпадают с (4.12) при $\Delta = 0$: $\Phi(z, t) \rightarrow \varphi_0(\chi)$ при $|z| \rightarrow \infty$.

В работе [A7] показано, что решения уравнения sine-Gordon, описывающие нелинейную динамику диспергирующих спиновых волн, определяются формулой:

$$\Phi(\chi, t) - \varphi_0(\chi) = 4 \arg F(\chi, t, u = iK')_{11}, \quad (4.26)$$

где матричная функция $F(\chi, t, u)$ находится из решения линейного интегрального уравнения:

$$F(\nu) \left(I - \frac{G(\nu)}{2} \right) = I + \frac{\text{v.p.}}{2\pi} \int_{-K'}^{K'} dv [M(iv) - M(iv - K)]. \quad (4.27)$$

Здесь «v.p.» означает, что интегрирование осуществляется в смысле главного значения Коши,

$$G(u) = \Psi_0(u) \begin{pmatrix} 0 & b^*(-u^*) \\ b(u) & 0 \end{pmatrix} \Psi_0^{-1}(u);$$

$$\begin{aligned} M(iv) &= [Y(iv, \nu) F(iv) - Y(2K - 2K'i - iv, \nu) \sigma_2 F^*(iv) \sigma_2] G(iv) + \\ &+ [Y(2K + iv, \nu) \sigma_3 F(iv) \sigma_3 - Y(-2K'i - iv, \nu) \sigma_1 F^*(iv) \sigma_1] \sigma_3 G(iv) \sigma_3, \\ Y(u', u) &= \zeta(u' - u) - \zeta(u' + iK'). \end{aligned}$$

Дзета-функции Вейерштрасса [41; 43] имеют периоды $4K, 4iK'$; решение $\Psi_0(u)$ определено в (4.10).

Обсудим простой пример. Для малоамплитудных волн (при $|b(u)| \ll 1$) решение уравнения (4.27) можно найти методом последовательных приближений: $F(\mathbf{v}) = I + O(b)$. Из (4.26), (4.27) в линейном приближении по $|b|$ получим:

$$\begin{aligned} \Phi - \varphi_0 \approx \frac{4}{\pi} \int_{-K'}^{K'} dv \left(\operatorname{Re} [(\Psi_0(iv))_{11}(\Psi_0(iv))_{21}b^*(iv)] (\operatorname{dn}(iv) - 1) - \right. \\ \left. - \operatorname{Re} [(\Psi_0(iv - K'))_{11}(\Psi_0(iv - K'))_{21}b^*(iv - K')] (\operatorname{dn}(iv - K') - 1) \right) \end{aligned} \quad (4.28)$$

Интересно, что

$$(\operatorname{dnu} - 1)(\Psi_0(u))_{11}(\Psi_0(u))_{21} = \Lambda(\chi, u) \exp(it \operatorname{dn}(u, k)/k),$$

где

$$\begin{aligned} \Lambda(\chi, u) = \frac{i}{2} \frac{|\sigma(iK')|^2 \sigma(K) \sigma(K + 2iK')}{\sigma^2(K + iK') \sigma(u - iK') \sigma(u + iK')} \frac{\sigma(\chi + u) \sigma(\chi + 2iK' + u)}{\sigma(\chi - iK') \sigma(\chi + iK')} \times \\ \times \exp(-\eta_3(\chi + iK' + u) - \chi[\zeta(u + iK') + \zeta(u - iK')]) \end{aligned}$$

– решение уравнения Ламе [43], записанное в терминах сигма-функций Вейерштрасса с периодами $[2K, 4iK']$. Уравнение Ламе возникает при линеаризации уравнения sine-Gordon относительно фоновой структуры $\varphi_0(\chi, k)$:

$$\left(\partial_t^2 - \frac{1}{k^2} [\partial_\chi^2 - 2k^2 \operatorname{sn}^2 \chi + k^2] \right) (\Phi - \varphi_0) = 0, \quad [\partial_\chi^2 - 2k^2 \operatorname{sn}^2 \chi + k^2] \Lambda = -\varepsilon \Lambda.$$

Два слагаемых в правой части (4.28) соответствуют «внутриграницной» и «внутридоменной» ветвям спектра линейных спиновых волн в полосовой структуре [31]. Квазиимпульс $p_\Lambda(u)$ функции Ламе отличается от квазиимпульса $p(u)$ матричных функций $\Psi_{1,2}(u)$: $p_\Lambda(u) = 2p(u) - \pi/(2K)$. Частота ω спин-волновых мод соотносится со спектром ε уравнения Ламе следующим образом: $\omega = \sqrt{\varepsilon}/k$. В [72] в этом соотношении утерян множитель k^{-1} . Спектр уравнения Ламе совпадает со спектром спин-волновых мод (4.24) в геликоидальной структуре, полученным из дисперсионных соотношений. Например, для квазиоптической («внутридоменной») ветви имеем: $\sqrt{\varepsilon_{\text{opt}}} = \operatorname{dn}(iv, k) = \operatorname{sn}^{-1}(v + K', k')$ (рисунок (4.4)).

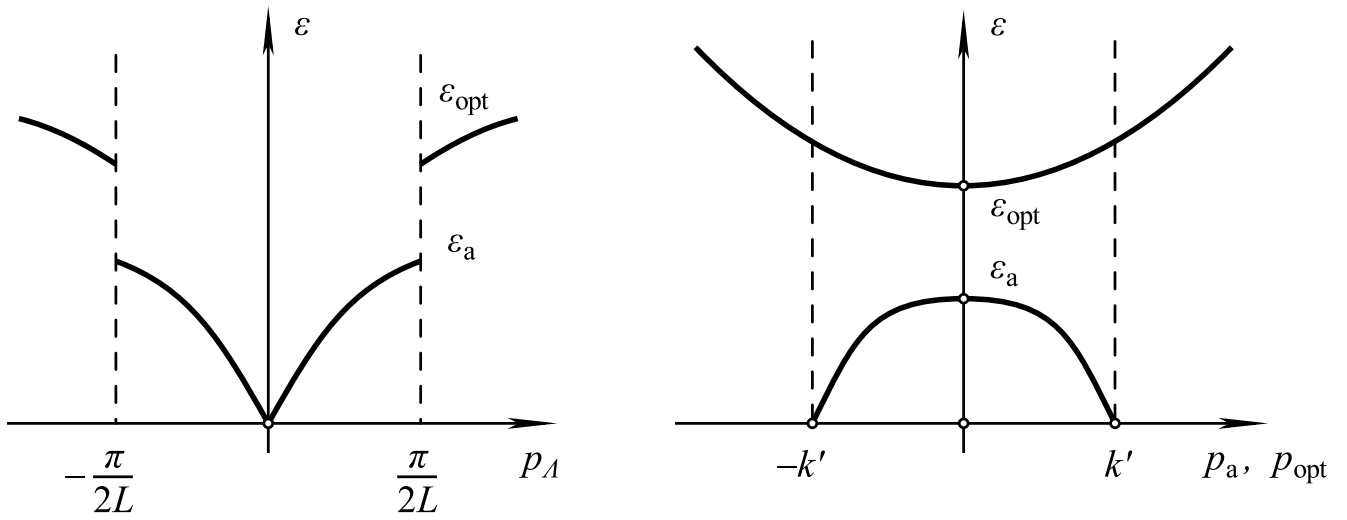


Рисунок 4.4 — Законы дисперсии спиновых волн в геликоидальной структуре в терминах квазиимпульса функций Ламе (слева) и квазиимпульса $p(u)$ (справа).

4.2 Нелинейная динамика комплекса из двух кинков в магнитной спирали

Перейдем к анализу полученных солитонных решений. Обсудим вначале поведение одного кинка в структуре. Заметим, что согласно (4.20), простейший дополнительный кинк в спиральной структуре может формироваться двумя способами. При первом из них в результате локального сжатия спиральной структуры на период в одном из ее доменов появляется лишняя доменная стенка той же хиральности, что и доменные стенки фоновой структуры. Лишняя доменная стенка (2π -кинк поля Φ) стабильна и деформирует спиральную структуру. В таком случае в граничных условиях (4.11) параметр $\sigma = +1$. При втором сценарии происходит локальное расширение спиральной структуры на период и образование в одном из ее доменов лишней доменной стенки с хиральностью, противоположной хиральностям стенок спиральной структуры. Тогда параметр $\sigma = -1$. В обоих случаях геликоидальная структура стремится избавиться от новообразований, и это проявляется в движении солитона вдоль структуры. Отметим, что солитон (4.20) ни при каких значениях параметров не может быть неподвижен. Его движение сопровождается макроскопическими локальными трансляциями геликоидальной структуры на расстояние $k\Delta$ в направлении, противоположном движению солитона, после которых структура восстано-

вает свою периодичность.

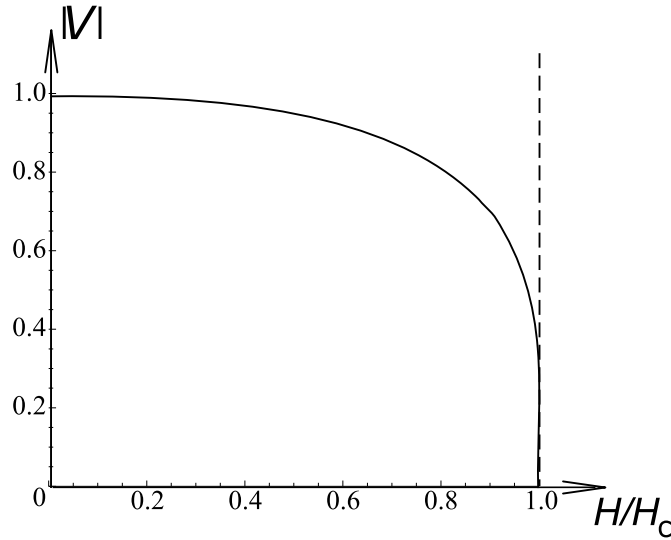


Рисунок 4.5 — Зависимость скорости V «лишнего» кинка с наименьшей энергией от внешнего поля $0 \leq H < H_c$.

Согласно (4.23), наименьшей энергией обладают «лишние» доменные стенки, хиральность которых совпадает с хиральностями доменных стенок спиральной структуры. При значении $\Delta = K$ соответствующее решение (4.20) выражается в терминах эллиптических функций Якоби [A9]:

$$\Phi(z', t) = 4 \arg \left[\sqrt{p} \exp \left(\frac{i\varphi_0(\chi)}{4} \right) + \frac{i}{\sqrt{p}} \exp \left(\frac{i\varphi_0(\chi + K)}{4} \right) \right],$$

$$p = \frac{1}{\sqrt{\text{dn}\chi}} \exp \left[\frac{(1+k')\chi}{2} - \varepsilon\sqrt{k't} \right] c \quad (4.29)$$

где $\varepsilon = \pm 1$, $c = \text{const} > 0$. Тогда, в безразмерных переменных, ширина солитона (4.20) $d \sim 2k/(1+k')$, а средняя скорость его движения V в структуре зависит от знака ε : $V = 2\varepsilon\sqrt{k'}/(1+k')$.

Реальная ширина и скорость солитона получаются умножением безразмерных значений этих величин на множители $\sqrt{\alpha M_0/H}$ и $\gamma M_0\sqrt{\alpha\beta}$ соответственно. В размерных переменных ширина солитона (4.29) в диапазоне $0 < H \lesssim 0.6H_c$ слабо зависит от внешнего магнитного поля и для параметров соединения $\text{Cr}_{1/3}\text{NbS}_2$ составляет величину порядка $\pi\sqrt{\alpha M_0/H_c} \sim 30,5$ нм. Размерная скорость солитона (4.29) (см. рисунок 4.5) заметно меняется только вблизи точки фазового перехода, где она уменьшается по закону:

$$\tilde{V} \sim \gamma M_0\sqrt{\alpha\beta} \left[\sqrt{H_c/H} - 1 \right]^{1/4}, \quad H < H_c.$$

Используя для оценки данные для $\text{Cr}_{1/3}\text{NbS}_2$ и полагая $\beta \sim 1 - 10$, находим значение $\gamma M_0 \sqrt{\alpha\beta} \sim 13 - 40$ м/с. Малые значения скорости солитона благоприятны для его наблюдения.

Вблизи точки фазового перехода несоизмеримость–соизмеримость (в пределе $k \rightarrow 1$) период спиральной структуры $L = 2K(k)k$ неограниченно растёт (см. рисунок 4.2). Согласно формулам [41], в таком случае эллиптические функции вырождаются в тригонометрические. А именно:

$$\begin{aligned} \sigma(z) &\rightarrow 2 \operatorname{sh} \frac{z}{2} \exp\left(-\frac{z^2}{24}\right), & \zeta(z) &\rightarrow -\frac{z}{12} + \frac{1}{2} \operatorname{cth} \frac{z}{2}, \\ \operatorname{sn} z &\rightarrow \operatorname{th} z, & \operatorname{cn} z &\rightarrow \frac{1}{\operatorname{ch} z}, & \operatorname{dn} z &\rightarrow \frac{1}{\operatorname{ch} z}; \\ K' &\rightarrow \frac{\pi}{2}, & \eta_3 &\rightarrow -\frac{\pi i}{12}, & K &\approx \ln \frac{4}{k'}, & \eta_1 &\approx \frac{1}{2} - \frac{1}{12} \ln \frac{4}{k'}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

С учётом соотношений (4.30), при $k \rightarrow 1$ солитонное решение (4.20) принимает простой вид:

$$\Phi = 4 \operatorname{arctg} \left[\frac{e^\rho (e^\xi + \sigma e^y)}{\sigma e^\xi e^y - 1} \right], \quad (4.31)$$

где $\rho = \Delta/2$, $\sigma = \pm 1$, $\xi = z + \rho$, $y = z \operatorname{cth} \rho - \varepsilon t / \operatorname{sh} \rho - \rho + \ln |c|$, $\varepsilon = \pm 1$, $c = \operatorname{const}$. В легкоплоскостных магнетиках с остаточной квадратичной по намагниченности анизотропии в базисной плоскости, выражение (4.31) описывает прохождение движущейся 180° -ной доменной стенки через неподвижную. В безразмерных переменных ширина неподвижной доменной стенки порядка единицы, скорость движущейся стенки $V = \varepsilon / \operatorname{ch} \rho$, а ее ширина $\sim \operatorname{th} \rho$. При $\sigma = 1$ доменные стенки имеют одинаковую, а при $\sigma = -1$ – противоположную хиральность. В обоих случаях, они восстанавливают свои первоначальные форму и скорость после взаимодействия друг с другом (рисунок 4.6). Встреча доменных стенок разной хиральности сопровождается их частичной аннигиляцией и колебаниями намагниченности, характер которых зависит от величины Δ . При $\Delta \ll 1$ доменные стенки почти полностью компенсируют друг друга: при столкновении амплитуда колебаний поля Φ порядка Δ . При $\Delta \gg 1$ колебания поля Φ при встрече доменных стенок происходят «в противофазе». Когда значения Φ в левой стенке близки к нулю, в правой стенке $\Phi \sim \pm 4 \operatorname{arctg} e^{2\Delta} \approx \pm 2\pi$ (и наоборот).

Перейдем к анализу решения модели sine–Gordon, описывающего взаимодействие двух кинков. Двухкинковое решение задачи Римана с нулями в точках

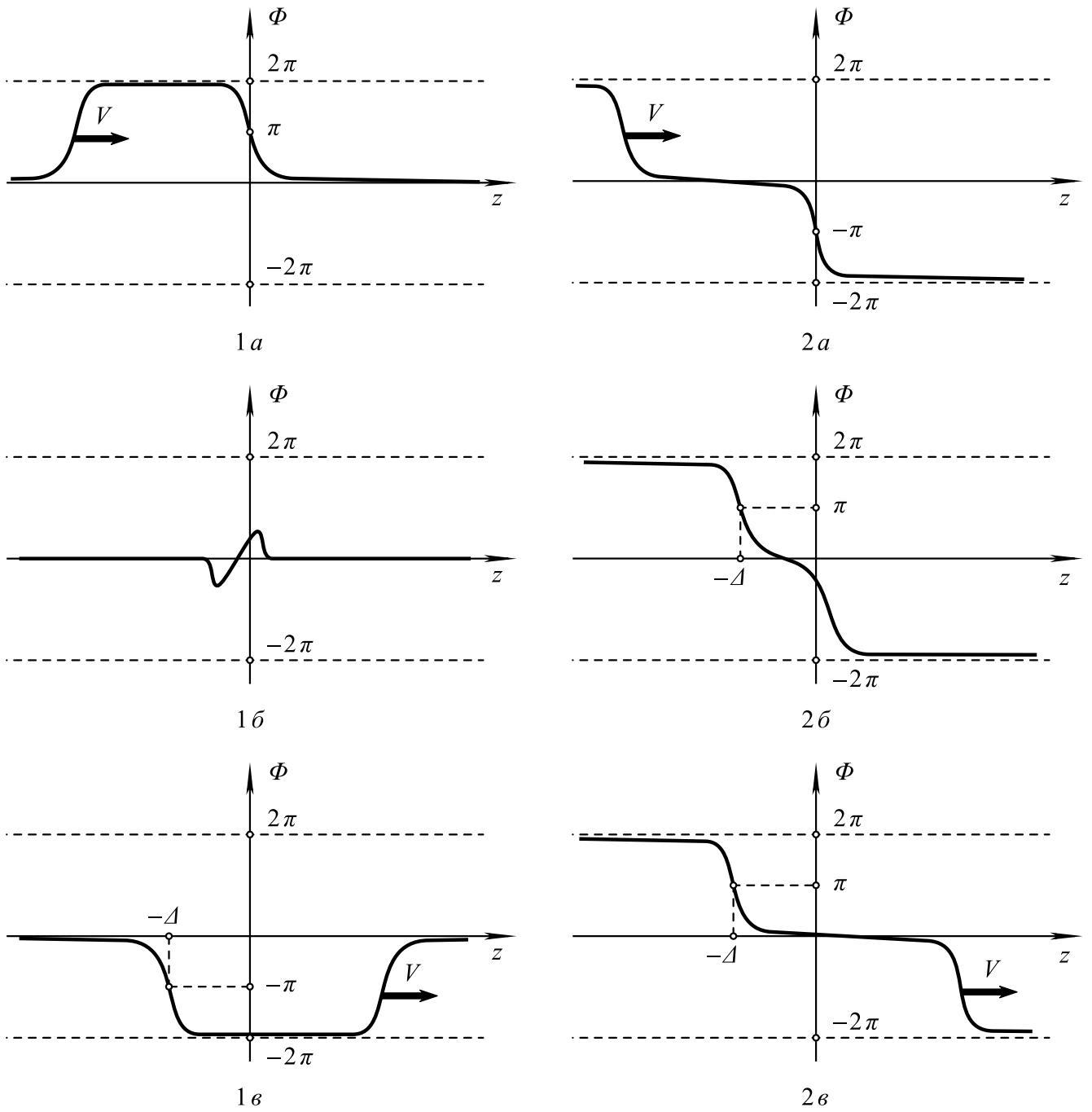


Рисунок 4.6 — Прохождение движущейся доменной стенки через неподвижную при $\sigma = -1$ (1а, 1б, 1в) и при $\sigma = 1$ (2а, 2б, 2в).

$\nu_s = -\Delta_s/2 + i\varepsilon_s K'$ ($s = 1, 2$), $\Delta_1 + \Delta_2 = \Delta$ соответствует двум однокинковым состояниям $\Phi^{(s)}$ модели sine-Gordon с асимптотическими условиями

$$\begin{aligned} \Phi^{(s)} &\rightarrow \varphi_2^{(0)}(\chi + \delta_s) \equiv \varphi_0(\chi + \delta_s, k) && \text{при } z \rightarrow +\infty, \\ \Phi^{(s)} &\rightarrow \varphi_1^{(0)}(\chi + \delta_s) \equiv -2\pi\sigma + \varphi_0(\chi + \Delta_2 + \delta_s, k) && \text{при } z \rightarrow -\infty, \end{aligned} \quad (4.32)$$

где $\sigma = \pm 1$, $\delta_1 = \Delta_1$, $\delta_2 = 0$; $0 < \Delta_{1,2} < K$. В развернутой форме записи оно имеет вид [A17]:

$$\Phi(\chi, t) = 4 \operatorname{Arctg} \left[\frac{\alpha_1 \cos \varphi_1 - s_2 \sin \varphi_{12} + s_1 \alpha (\alpha_2 \sin \varphi + s_2 \cos \varphi_2)}{s_1 \alpha (\alpha_2 \cos \varphi - s_2 \sin \varphi_2) - \alpha_1 \sin \varphi_1 - s_2 \cos \varphi_{12}} \right], \quad (4.33)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha &= \left| \frac{\sigma(\chi + \Delta_2 + i K')}{\sigma(\chi + \Delta_1 + \Delta_2 + i K')} \right| c_0 e^{\tilde{A}(\nu_1) + \tilde{A}^*(\nu_1)}, \\ \alpha_2 &= \left| \frac{\sigma(\chi + i K')}{\sigma(\chi + \Delta_2 + i K')} \right| c_2 e^{\tilde{A}(\nu_2) + \tilde{A}^*(\nu_2)}, \\ \alpha_1 &= \left| \frac{\sigma(\chi + \Delta_1 + i K')}{\sigma(\chi + \Delta_1 + \Delta_2 + i K')} \right| c_1 e^{\tilde{A}(\nu_2) + \tilde{A}^*(\nu_2)}, \\ \varphi &\equiv \frac{\varphi_0(\chi)}{4}, \quad \varphi_1 \equiv \frac{\varphi_0(\chi + \Delta_1)}{4}, \quad \varphi_2 \equiv \frac{\varphi_0(\chi + \Delta_2)}{4}, \quad \varphi_{12} \equiv \frac{\varphi_0(\chi + \Delta_1 + \Delta_2)}{4}, \\ \varphi_0(\chi) &= \pi - 2 \operatorname{am}(\chi, k), \quad \chi = \frac{z}{k}; \\ \tilde{A}(\nu_{1,2}) &= \frac{i t}{2k} \operatorname{dn} \nu_{1,2} - \frac{\chi}{2} [\zeta(\nu_{1,2} - i K') - \zeta(\nu_{1,2} + i K')], \\ \nu_1 &= \rho_1 + i \varepsilon_1 K', \quad \rho_1 = -\frac{\Delta_1}{2}, \quad \nu_2 = \rho_2 + i \varepsilon_2 K', \quad \rho_2 = -\frac{\Delta_2}{2}, \end{aligned}$$

$0 < \Delta_{1,2} < 2K$. Здесь c_0 , c_1 и c_2 – положительные вещественные константы интегрирования. Константы c_1 и c_2 связаны соотношением:

$$\frac{c_2}{c_1} = |a(\nu_2 | \nu_1)|^2, \quad a(\nu_2 | \nu_1) = i \sigma_1 \varepsilon_1 \frac{\sigma(\nu_2 - \nu_1)}{\sigma(\nu_2 + \nu_1^*)} \exp \left(\frac{\varepsilon_1 \eta_3 \Delta_1}{2} \right).$$

Возбуждение (4.33) имеет асимптотики:

$$\begin{aligned} \Phi(\chi, t) &\rightarrow \varphi_0(\chi), & z &\rightarrow +\infty, \\ \Phi(\chi, t) &\rightarrow \varphi_0(\chi + \Delta_1 + \Delta_2) + 2\pi(s_1 + s_2), & z &\rightarrow -\infty. \end{aligned} \quad (4.34)$$

В длиннопериодических структурах параметр k близок к единице. Проанализируем предельный случай, когда период спиральной структуры неограниченно увеличивается. При $k \rightarrow 1$ решение (4.33) принимает вид:

$$\Phi(z, t) = 4 \operatorname{Arctg} \left[\frac{s_1 c_0 e^{y_1} (e^{z+\Delta_2} + s_2 c_2 e^{y_2}) + s_2 c_1 e^{z+\Delta_1} e^{y_2} - 1}{s_1 c_0 e^{y_1} (s_2 c_2 e^z e^{y_2} - 1) - e^{z+\Delta_1+\Delta_2} - s_2 c_1 e^{y_2}} \right], \quad (4.35)$$

где $y_1 = (z - V_1 t)/|\operatorname{th} \rho_1|$, $y_2 = (z - V_2 t)/|\operatorname{th} \rho_2|$. Здесь $c_0, c_1, c_2 > 0$ – константы интегрирования, причем величины c_1, c_2 связаны соотношением:

$$\frac{c_2}{c_1} = \left(\frac{\operatorname{sh}([\Delta_1 - \Delta_2 + \pi i (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)]/4)}{\operatorname{sh}([\Delta_1 + \Delta_2 + \pi i (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)]/4)} \right)^2.$$

Выражение (4.35) описывает взаимодействие двух движущихся доменных стенок (кинков) с одним из неподвижных кинков структуры вида $4 \arctg e^{-z}$. Скорости V_1 , V_2 и характерные размеры l_1 , l_2 движущихся кинков определяются формулами:

$$V_i = \varepsilon_i / \operatorname{ch} \rho_i, \quad l_i = |\operatorname{th} \rho_i| \quad (i = 1, 2).$$

Направления движения кинков определяются знаками величин $\varepsilon_1 = \pm 1$, $\varepsilon_2 = \pm 1$. Очередность, в которой неподвижная и движущиеся доменные стенки взаимодействуют между собой, зависит от соотношений констант интегрирования c_0 и c_1 , c_2 и направления движения стенок. Так два кинка могут двигаться в противоположных направлениях, – тогда один из них сначала пройдет через неподвижную доменную стенку, и только потом встретится со вторым кинком, – или же они могут двигаться сонаправленно. Во втором случае они могут сначала поочередно проходить через неподвижную доменную стенку, а после взаимодействовать между собой, или же, напротив, сначала один из них нагонит другой, а потом они по очереди встретятся со стенкой.

Несмотря на обилие возможностей, характер взаимодействия доменных стенок при столкновении определяется только соотношением их хиральностей. Хиральности двух движущихся кинков задаются, соответственно, параметрами s_1 и s_2 , которые могут независимо принимать значения ± 1 . При $s_j = 1$ j -ый кинк ($j = 1, 2$) имеет ту же хиральность, что и неподвижная доменная стенка, а при $s_j = -1$ хиральности j -ого кинка и неподвижной доменной стенки структуры противоположны.

Во всех перечисленных случаях описание поочередных столкновений трех кинков сводится к анализу их парных взаимодействий. 2π -перегибы (кинки) одной хиральности при взаимодействии «складываются», а 2π -перегибы разных хиральностей – напротив, почти полностью компенсируют друг друга (см. рисунки 4.7.1б, 4.7.2б, 4.7.3б). При этом неподвижный кинк при прохождении через него j -ого кинка хиральности s_j со скоростью $V_j = \varepsilon_j / \operatorname{ch}(\Delta_j/2)$ смещается навстречу движущемуся на величину $k \Delta_j$ вдоль оси спирали (оси Oz) и приобретает аддитивный фазовый сдвиг, равный $2\pi s_j \varepsilon_j$.

Указанные особенности справедливы и в общем случае для взаимодействия друг с другом «лишних» кинков на фоне спиральной структуры, а также для поочередных столкновений каждого из движущихся кинков с неподвижными кинками структуры. Рис 4.7а,б,в иллюстрируют поведение системы до,

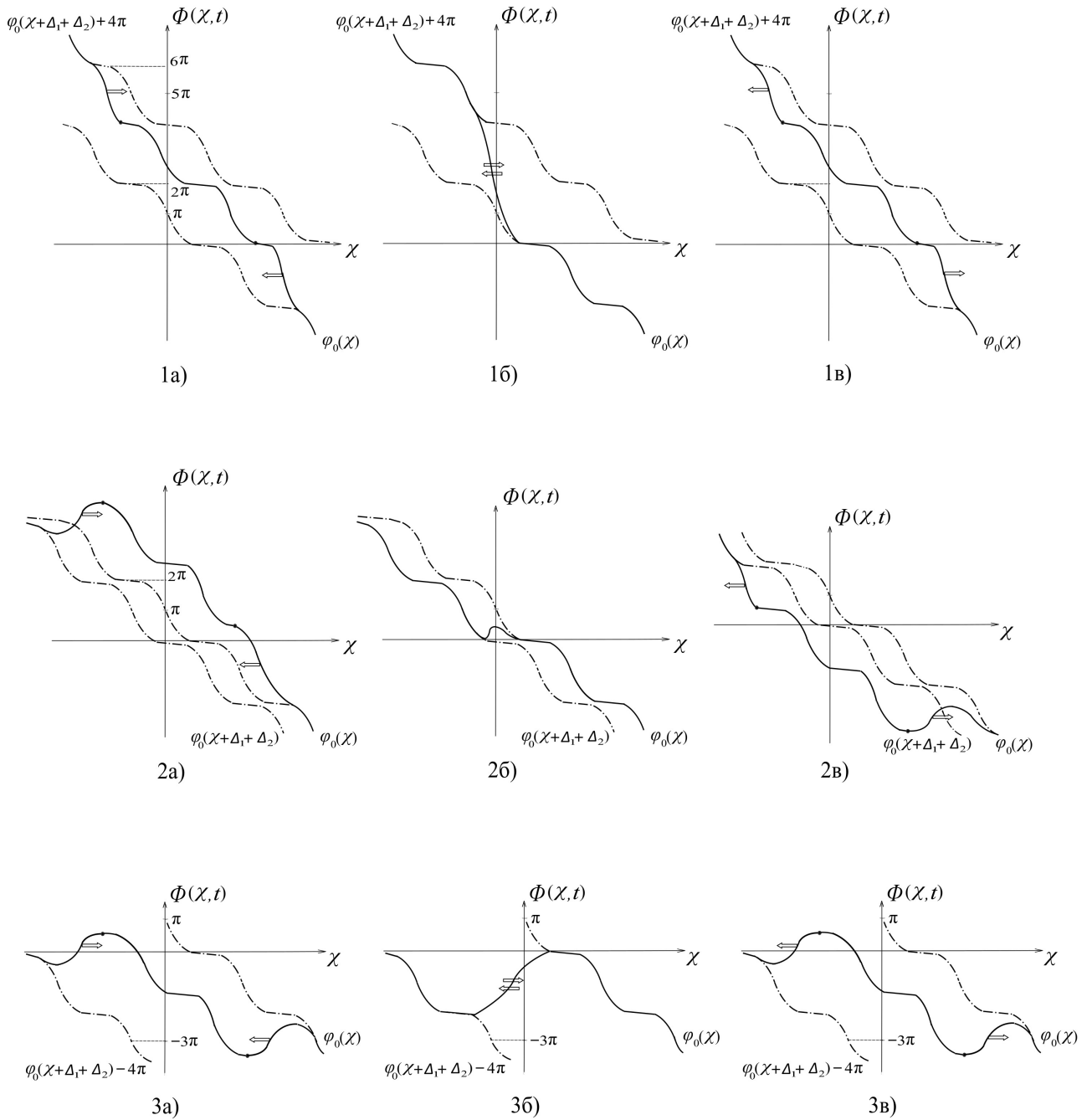


Рисунок 4.7 — Двухкинковое возбуждение (4.33) при значениях параметров $\varepsilon_2 = -1$, $\varepsilon_1 = 1$ и $s_1 = s_2 = 1$ (1), $s_1 = -1$, $s_2 = 1$ (2), $s_1 = s_2 = -1$ (3) в моменты времени до (а), во время (б) и после (в) столкновения кинков.

во время и после взаимодействия кинков. Направления движения кинков отмечены светлыми стрелками. Мы выбираем наиболее «симметричные» случаи, а именно, когда кинки движутся навстречу друг другу. Для определенности считаем, что $\varepsilon_2 = -1$, $\varepsilon_1 = 1$. Хиральности кинков соответствуют значениям $s_1 = s_2 = 1$ (рисунки 4.7.1а,б,в), $s_1 = -1$, $s_2 = 1$ (рисунки 4.7.2а,б,в) и

$s_1 = s_2 = -1$ (рисунки 4.7.3а,б,в). Выбор значений $s_1 = 1, s_2 = -1$ иллюстрируется набором рисунков 4.7.2, но в обратной последовательности и с обратным направлением стрелок. Рассмотрение случаев, когда оба кинка движутся сонаправленно ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$), не представляет затруднений, но не дает качественно новой информации.

Асимптотические значения поля Φ (4.34) помечены штрих-пунктиром. Требование непрерывности функции $\Phi(\chi, t)$ для всех значений χ приводит к возникновению между кинками протяженного сдвинутого участка структуры $\varphi(\chi) = \varphi_0(\chi + \Delta_2) + 2\pi s_2$ до и $\varphi(\chi) = \varphi_0(\chi + \Delta_1) + 2\pi s_1$ – после столкновения кинков. На рисунках края сдвинутых областей $\varphi(\chi)$ выделены жирными точками. Эти области не совпадают ни с одним из краевых условий задачи.

4.3 Анализ бризерного возбуждения

4.3.1 Общие замечания

Решение, описывающее пульсирующий солитон – бризер в спиральной структуре, – удобно представить в виде [A8; A12; A19]:

$$\Phi(\chi, t) = \varphi_0(\bar{\chi}) + 4 \operatorname{Arctg} \left[\operatorname{tg} \frac{\tilde{\theta}}{2} \left(\frac{|m_1|^2 - |m_2|^2}{|m_1|^2 + |m_2|^2} \right) \right], \quad (4.36)$$

где $\bar{\chi} = \chi + 2\rho$, $\tilde{\theta} = \operatorname{am}(\mu, k) + \operatorname{am}(\mu^*, k)$; $\mu = -\rho + i\theta$, $0 < \rho < K$, $-2K' < \theta < 2K'$ ($\theta \neq \pm K'$); $K' = K(k')$ – полный эллиптический интеграл первого рода с модулем k' . Угол $\tilde{\theta}$ определяется выражением:

$$\operatorname{tg} \frac{\tilde{\theta}}{2} = \frac{\operatorname{sn}(\rho, k)}{\operatorname{cn}(\rho, k)} \operatorname{dn}(i\theta, k). \quad (4.37)$$

Отношение m_1/m_2 выражается через сигма-функции Вейерштрасса с периодами $[2K, 4iK']$:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_1(\bar{\chi}) \exp(y + i\gamma) + b_2(\bar{\chi})}{a_2(\bar{\chi}) - b_1(\bar{\chi}) \exp(y + i\gamma)}, \quad (4.38)$$

$$\begin{aligned}
a_1 &= \sigma(\bar{\chi} + \mu) \exp[-\eta_1 \bar{\chi} \mu / K], & a_2 &= \sigma(\bar{\chi} - \mu) \exp[\eta_1 \bar{\chi} \mu / K], \\
b_1 &= i \sigma(\bar{\chi} + 2iK' + \mu) \exp[-\eta_3(\bar{\chi} + iK' + \mu) - \eta_1 \bar{\chi} \mu / K], \\
b_2 &= i \sigma(\bar{\chi} + 2iK' - \mu) \exp[-\eta_3(\bar{\chi} + iK' - \mu) + \eta_1 \bar{\chi} \mu / K]; \\
y + i\gamma &= -Z(\mu, k) \chi + \frac{it}{k} \operatorname{dn}(\mu, k) + \ln c,
\end{aligned}$$

где c – комплексная постоянная интегрирования, $Z(\mu, k)$ – зета-функция Якоби.

С точностью до несущественного переопределения постоянной c выполняется равенство:

$$\Phi(\mu \pm 2iK', \chi, t) = \Phi(\mu, \chi, -t). \quad (4.39)$$

Поэтому достаточно обсудить решение (4.36) при значениях $|\theta| < K'$, $0 < \rho < K$. Свойства решения в пределе $\mu \rightarrow -\rho \pm iK'$ требуют специального обсуждения.

Комплексный параметр μ определяет скорость V бризера, ширину l ограничивающих его доменных стенок, волновое число p и частоту ω пульсаций поля Φ в области локализации бризера (4.22):

$$l = -\frac{k}{\operatorname{Re} Z(\mu)}, \quad p = \frac{1}{k} \operatorname{Im} Z(\mu), \quad \omega = \frac{1}{k} \operatorname{Re} \operatorname{dn} \mu, \quad V = -\frac{\operatorname{Im} \operatorname{dn} \mu}{\operatorname{Re} Z(\mu)}.$$

Явные выражения для скорости движения бризера как целого и его частоты имеют вид [42]:

$$V = \frac{k^2 s_\rho c_\rho s'_\theta}{Z(\rho, k)[1 - s_\theta'^2 d_\rho^2] + k^2 s_\rho c_\rho d_\rho s_\theta'^2}, \quad \omega = \frac{d_\rho c'_\theta d'_\theta}{k(1 - s_\theta'^2 d_\rho^2)}. \quad (4.40)$$

Здесь введены сокращенные обозначения для эллиптических функций Якоби от модулей k и $k' = \sqrt{1 - k^2}$: $\operatorname{sn}(\rho, k) = s_\rho$, $\operatorname{sn}(\theta, k') = s'_\theta$ и т. д.

Внутренние колебания и поступательное движение стабилизируют частицеподобные свойства бризера. На интервале $|\theta| < K'$ его скорость – нечетная функция параметра θ . Поэтому направление движения солитона определяется только знаком θ . Если $\theta = 0$, бризер неподвижен. При заданном сдвиге структуры (при $\rho = \text{const}$) возрастание параметра θ от нуля до K' сопровождается монотонным ростом скорости бризера от нуля до наибольшего значения при $\theta \rightarrow K' - 0$, которое зависит от ρ . Предельная скорость бризера в спиральной структуре не превышает максимальной групповой скорости активационных спиновых волн [107], которая в безразмерных переменных равна единице. При том

же изменении параметра θ частота бризера в лабораторной системе координат варьируется от конечных до близких к нулю значений.

Первый член решения (4.36) не зависит от времени, поэтому амплитуда пульсаций бризера определяется вторым слагаемым. Поскольку $|(|m_1|^2 - |m_2|^2)| / (|m_1|^2 + |m_2|^2) \leq 1$, это слагаемое по величине не превышает $4 \operatorname{arctg} \operatorname{tg}(\tilde{\theta}/2) = 2\tilde{\theta}$. Детальный анализ показывает, что амплитуда A неподвижного бризера (параметр $\theta = 0$) в точности соответствует такой оценке: $A = 2\tilde{\theta} = 4 \operatorname{am} \rho$ (см. (4.37)). Амплитуда пульсирующего солитона тем больше, чем больше сопровождающий его образование сдвиг структуры. Отметим, что среди всех бризеров с амплитудой, равной π , максимальную частоту имеет неподвижный бризер.

4.3.2 Форма записи бризерного решения

Образование бризера сопровождается макроскопическим сдвигом спиральной структуры на величину $\Delta = 4\rho$ (4.12):

$$\begin{aligned} \Phi(\chi, t) &\rightarrow \varphi_0(\chi) && \text{при } z \rightarrow +\infty, \\ \Phi(\chi, t) &\rightarrow \varphi_0(\chi + \Delta) && \text{при } z \rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

Специально подчеркнем, что, хотя первое слагаемое в (4.36) формально соответствует некоторой равновесной спирали, оно отличается от верных граничных значений (4.12) однобризерного возбуждения в спиральной структуре. Потому бризерное решение в форме записи (4.36) во многих отношениях неудобно для анализа. Даже простая проверка справедливости условий (4.12), которая казалось бы должна быть легко выполнима, оказывается затруднена.

В самом деле, с помощью тождества

$$-\frac{i \sigma(\chi - i K')}{\sigma(\chi + i K')} \exp(\eta_3 \chi) = -\operatorname{sn} \chi + i \operatorname{cn} \chi$$

можно показать, что

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{m_1}{m_2} &= \frac{k \operatorname{sn}(\bar{\chi} + \mu)}{1 + \operatorname{dn}(\bar{\chi} + \mu)} = q(\bar{\chi} + \mu), \\ \lim_{z \rightarrow -\infty} \frac{m_1}{m_2} &= -\frac{1 + \operatorname{dn}(\bar{\chi} - \mu)}{k \operatorname{sn}(\bar{\chi} - \mu)} = -\frac{1}{q(\bar{\chi} - \mu)}, \end{aligned}$$

$\bar{\chi} \equiv \chi + \Delta/2$, и на первый взгляд, кажется, что асимптотические условия (4.12) нарушаются. Для того, чтобы показать, что они всё же выполнены, приходится пользоваться тождествами:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} &= \operatorname{dn} v \frac{\operatorname{sn} R}{\operatorname{cn} R}, \quad |q(\tilde{\chi} \pm \mu)|^2 = \frac{\operatorname{dn} v - \operatorname{dn}(\tilde{\chi} \pm R)}{\operatorname{dn} v + \operatorname{dn}(\tilde{\chi} \pm R)}, \quad R = \operatorname{Re} \mu, \quad v = i \operatorname{Im} \mu; \\ \operatorname{Arctg} \left(\frac{\operatorname{cn} \alpha}{1 + \operatorname{sn} \alpha} \right) - \operatorname{Arctg} \left(\frac{\operatorname{sn} \beta}{\operatorname{cn} \beta} \operatorname{dn}(\alpha + \beta) \right) &= \operatorname{Arctg} \left(\frac{\operatorname{cn}(\alpha + 2\beta)}{1 + \operatorname{sn}(\alpha + 2\beta)} \right) \end{aligned} \quad (4.41)$$

Указанной трудности сопутствует другая. Она состоит в том, что второе слагаемое формулы (4.36) сконструировано искусственным образом, и для того, чтобы, скажем, найти точки экстремума, необходимо предварительно объединить первое слагаемое со вторым.

Поэтому необходимо начать анализ с приведения общего решения к такому виду, в котором его скрытая алгебраическая симметрия проявится полностью. В данном случае для этого нужно выделить вклад от фоновой структуры, соответствующий граничным условиям (4.12). Это можно сделать двумя разными способами в зависимости от того, рассматриваются асимптотические условия $z \rightarrow +\infty$ или $z \rightarrow -\infty$. Таким образом, однобрызренное решение допускает две эквивалентные формы записи:

$$\Phi(\chi, t) = \varphi_0(\chi) + 4 \operatorname{Arctg} \left[A_1 \left(\frac{|c| B_1 \cos \gamma - |c| D_1 \sin \gamma - e^{-y}}{|c|^2 e^y G_1 + e^{-y} G_2 + |c| G_3 \cos \gamma - |c| G_4 \sin \gamma} \right) \right] \quad (4.42)$$

и

$$\Phi(\chi, t) = \varphi_0(\chi - 4\rho) + 4 \operatorname{Arctg} \left[A_3 \left(\frac{|c| B_3 \cos \gamma - |c| D_3 \sin \gamma + e^y}{|c|^2 e^y H_1 + e^{-y} H_2 + |c| H_3 \cos \gamma - |c| H_4 \sin \gamma} \right) \right], \quad (4.43)$$

где $\Delta = -4\rho$, $\mu = \rho + i\theta$, $-K < \rho < 0$, $-2K' < \theta < 2K'$; $\varphi_0(\chi) = \pi - 2 \operatorname{am}(\chi, k)$, $\chi = z/k$, $c \equiv c_1/c_2$,

$$\begin{aligned} y &= -\chi \operatorname{Re}[\zeta(\rho + i\theta + iK') + \zeta(\rho + i\theta - iK')] - \frac{t}{k} \operatorname{Im} \operatorname{dn}(\rho + i\theta), \\ \gamma &= -\chi \operatorname{Im}[\zeta(\rho + i\theta + iK') + \zeta(\rho + i\theta - iK')] + \frac{t}{k} \operatorname{Re} \operatorname{dn}(\rho + i\theta) + 2 \arg c, \\ A_1 &= \frac{s_\rho}{c_\rho} \frac{(d_\theta + d_1)}{|b_1|^2} (|a_1 a_3|^2 - |b_1 b_3|^2), \quad B_1 = \frac{2 [|b_1|^2 \operatorname{Re}(a_1 b_3^*) + |a_1|^2 \operatorname{Re}(b_1 a_3^*)]}{|a_1 a_3|^2 - |b_1 b_3|^2}, \\ A_3 &= \frac{s_\rho}{c_\rho} \frac{(d_\theta + d_3)}{|b_3|^2} (|a_1 a_3|^2 - |b_1 b_3|^2), \quad B_3 = \frac{2 [|a_3|^2 \operatorname{Re}(a_1 b_3^*) + |b_3|^2 \operatorname{Re}(b_1 a_3^*)]}{|a_1 a_3|^2 - |b_1 b_3|^2}, \end{aligned}$$

$$D_1 = \frac{2[|b_1|^2 \operatorname{Im}(a_1 b_3^*) + |a_1|^2 \operatorname{Im}(b_1 a_3^*)]}{|a_1 a_3|^2 - |b_1 b_3|^2}, \quad D_3 = \frac{2[|a_3|^2 \operatorname{Im}(a_1 b_3^*) + |b_3|^2 \operatorname{Im}(b_1 a_3^*)]}{|a_1 a_3|^2 - |b_1 b_3|^2},$$

$$G_1 = |a_1|^2 g_- + |b_1|^2 g_+, \quad G_2 = |b_3|^2 g_- + |a_3|^2 g_+,$$

$$H_1 = |a_1|^2 h_+ + |b_1|^2 h_-, \quad H_2 = |b_3|^2 h_+ + |a_3|^2 h_-,$$

$$G_3 = 2[g_- \operatorname{Re}(a_1 b_3^*) - g_+ \operatorname{Re}(b_1 a_3^*)], \quad G_4 = 2[g_- \operatorname{Im}(a_1 b_3^*) - g_+ \operatorname{Im}(b_1 a_3^*)],$$

$$H_3 = 2[h_+ \operatorname{Re}(a_1 b_3^*) - h_- \operatorname{Re}(b_1 a_3^*)], \quad H_4 = 2[h_+ \operatorname{Im}(a_1 b_3^*) - h_- \operatorname{Im}(b_1 a_3^*)],$$

$$g_{\pm} = 1 \pm \frac{s_{\rho}^2}{c_{\rho}^2} d_1 d_{\theta}, \quad h_{\pm} = 1 \pm \frac{s_{\rho}^2}{c_{\rho}^2} d_3 d_{\theta};$$

$$s_{\rho} \equiv \operatorname{sn} \rho, \quad c_{\rho} \equiv \operatorname{cn} \rho, \quad d_{\theta} \equiv \operatorname{dn}(i\theta), \quad d_1 \equiv \operatorname{dn}(\chi - \rho), \quad d_3 \equiv \operatorname{dn}(\chi - 3\rho);$$

$$a_1 = \sigma(\chi - \rho + i\theta), \quad b_1 = i\sigma(\chi + 2iK' - \rho + i\theta) e^{-\eta_3(\chi + iK' - \rho + i\theta)},$$

$$a_3 = \sigma(\chi - 3\rho - i\theta), \quad b_3 = i\sigma(\chi + 2iK' - 3\rho - i\theta) e^{-\eta_3(\chi + iK' - 3\rho - i\theta)}.$$

При этом выполняются тождества:

$$\left| \frac{a_1}{b_1} \right|^2 = \frac{d_{\theta} - d_1}{d_{\theta} + d_1}, \quad \left| \frac{a_3}{b_3} \right|^2 = \frac{d_{\theta} - d_3}{d_{\theta} + d_3}.$$

При получении выражения (4.42), (4.43) использованы соотношения (4.41). Они в частности позволяют показать, что изначально присутствующие в числителях под знаком арктангенса слагаемые $\sim e^y$ (в (4.42)) и $\sim e^{-y}$ (в (4.43)) тождественно обращаются в ноль.

Сравнивая формулы (4.42) и (4.43), можно показать, что их коэффициенты связаны между собой ограничениями (редукциями):

$$A_3(\chi) = A_1(-\chi_{\rho}), \quad B_3(\chi) = -B_1(-\chi_{\rho}), \quad D_3(\chi) = D_1(-\chi_{\rho}), \quad H_2(\chi) = G_1(-\chi_{\rho}),$$

$$H_1(\chi) = G_2(-\chi_{\rho}), \quad H_3(\chi) = G_3(-\chi_{\rho}), \quad H_4(\chi) = -G_4(-\chi_{\rho}); \quad \chi_{\rho} \equiv \chi - 4\rho.$$

Несмотря на свою громоздкость, выражения (4.42), (4.43) позволяют достаточно легко провести анализ поведения бризера. Первым преимуществом новой формы записи является то, что теперь проверка граничных условий (4.12) осуществляется элементарным образом.

4.3.3 Взаимодействие бризера с отдельной доменной стенкой

Взаимодействия между соседними кинками спиральной структуры являются экспоненциально слабыми, а расстояния между ними – большими. Поля

бризеров в спиральной структуре также экспоненциально убывают при удалении от их центров. В такой ситуации сильнонелинейные трансформации поля Φ наблюдаются только при встрече ядра бризера с одним из кинков структуры. Сравнительно простое, но достаточно точное выражение для поля Φ , характеризующее процесс взаимодействия бризера с отдельным кинком структуры, можно найти разложением аналитического решения модели по малому параметру $k' \ll 1$.

Решение, описывающее взаимодействие бризера с одной стенкой (кинком) структуры, получим в пределе $k \rightarrow 1$, $\mu = -\rho + i\theta = \text{const}$. Оно имеет вид

$$\Phi(z, t) = 4 \operatorname{Arctg} \left[\frac{e^{\bar{x}} \operatorname{sh} \rho \cos(\gamma + \theta) + \operatorname{ch}(y + \rho) \cos \theta}{e^{\bar{x}} \cos \theta \operatorname{ch}(y - \rho) + \operatorname{sh} \rho \cos(\gamma - \theta)} \right], \quad (4.44)$$

$$y = \frac{z \operatorname{sh}(2\rho) - 2 \sin \theta \operatorname{sh} \rho t}{\operatorname{ch}(2\rho) + \cos(2\theta)} - y_0, \quad \gamma = \frac{-z \sin(2\theta) + 2 \cos \theta \operatorname{ch} \rho t}{\operatorname{ch}(2\rho) + \cos(2\theta)} - \gamma_0,$$

где $\bar{x} = z + 2\rho$; y_0, γ_0 – вещественные параметры. При выводе (4.44) мы сложили первое и второе слагаемое в правой части (4.36), следуя тождествам:

$$\operatorname{Arctg} \alpha + \operatorname{Arctg} \beta = \operatorname{Arctg} \left(\frac{\alpha + \beta}{1 - \alpha \beta} \right),$$

$$\varphi_0(\chi) = \pi - 2 \operatorname{am}(\chi, k) = 4 \operatorname{Arctg} \left(\frac{\operatorname{cn}(\chi, k)}{1 + \operatorname{sn}(\chi, k)} \right), \quad \chi = \frac{z}{k}. \quad (4.45)$$

Бризер (4.44) движется со скоростью $V = \sin \theta / \operatorname{ch} \rho$ и пульсирует с частотой $\omega = 2 \cos \theta \operatorname{ch} \rho [\operatorname{ch}(2\rho) + \cos(2\theta)]^{-1}$ в лабораторной системе отсчета и с частотой $\Omega = \cos \theta / \operatorname{ch} \rho$ в системе отсчета, связанной с бризером. Доменная стенка после прохождения через нее бризера сдвигается на величину $\Delta = 4\rho$ в сторону, противоположную направлению движения бризера. Приближение (4.44) хорошо описывает прохождение бризера через доменную стенку лишь при сравнительно небольших значениях параметра: $0 < \rho \leq K/2$, когда можно пренебречь влиянием других стенок структуры.

Решение (4.44), описывающее взаимодействие бризера с одиночным кинком, обладает свойством симметрии:

$$\Phi(\rho, \theta \pm \pi, z, t) = \Phi(\rho, \theta, -t),$$

поэтому ограничимся его анализом при $0 < \rho < \infty$, $|\theta| < \pi/2$. Наиболее удобен для наблюдения неподвижный бризер. В интервале $|\theta| < \pi/2$ его скорость обращается в нуль только при $\theta = 0$. В этом случае параметр y_0 задает положение бризера относительно доменной стенки (2π -кинка поля Φ). В пределе

$y_0 \rightarrow \pm\infty$ бризер отодвигается на бесконечность, и формула (4.44) при $\theta = 0$ описывает изолированный кинк:

$$\Phi \simeq 4 \operatorname{arctg} e^{-z-4\rho} \quad \text{при } y_0 \rightarrow +\infty, \quad (4.46)$$

$$\Phi \simeq 4 \operatorname{arctg} e^{-z} \quad \text{при } y_0 \rightarrow -\infty. \quad (4.47)$$

Когда бризер находится вдали от доменной стенки, его вид находим из (4.44) ($\theta = 0$) при $y = \text{const}$, $|\bar{x}| \gg 1$:

$$\Phi \simeq 4 \operatorname{arctg} \left[\frac{\operatorname{sh}\rho \cos \gamma}{\operatorname{ch}(y - \rho)} \right] \quad \text{при } \bar{x} \gg 1, \quad (4.48)$$

$$\Phi \simeq 2\pi - 4 \operatorname{arctg} \left[\frac{\operatorname{sh}\rho \cos \gamma}{\operatorname{ch}(y + \rho)} \right] \quad \text{при } \bar{x} \ll -1. \quad (4.49)$$

Формулы (4.46), (4.48) характеризуют состояние, в котором кинк находится слева от бризера в точке $z_k = -4\rho$, а бризер – справа в точке $z_b = (\rho + y_0)/\operatorname{th}\rho \gg 1$. Выражения (4.47), (4.49) отвечают противоположному случаю, когда кинк находится справа в точке $z_k = 0$, а бризер – слева в точке $z_b = (y_0 - \rho)/\operatorname{th}\rho \ll -1$. В обоих случаях расстояние между кинком и бризером велико, и они не взаимодействуют друг с другом. Частота и амплитуда изолированного бризера

$$\omega = \operatorname{ch}^{-1}\rho, \quad A = 4 \operatorname{arctg} \operatorname{sh}\rho,$$

а его ширина (на половине амплитуды):

$$d_b = \frac{2}{\operatorname{th}\rho} \operatorname{Arcsh}[2 \operatorname{ch}^2(\rho/2)].$$

В отсутствие движения бризера вдоль структуры, его интенсивное взаимодействие с кинком наблюдается, только когда области их локализации сближаются (при $-\rho[1 + 4 \operatorname{th}\rho] \leq y_0 \leq \rho$). При сближении бризера и кинка их ядра начинают совершать продольные колебания. Кинк отодвигается от бризера, когда глубина пульсаций бризера увеличивается, и приближается к нему с ростом высоты пульсаций. Максимальная амплитуда продольных колебаний кинка – порядка его полуширины. По мере дальнейшего сближения ядер солитонов на удаленном от бризера крае кинка (впереди бризера) зарождаются малые периодические всплески (углубления). Они находятся в противофазе с пульсациями ядра бризера: достигают наибольшей высоты (глубины), когда

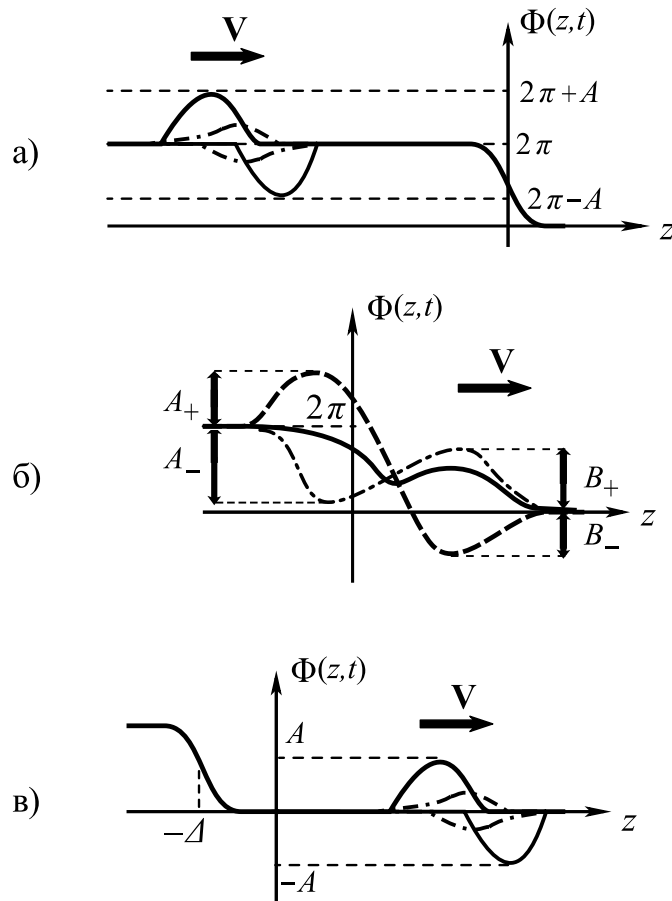


Рисунок 4.8 — Прохождение бризера (4.44) через доменную стенку. На рисунках а, б, в соответственно изображены пульсации бризера до, во время и после его столкновения со стенкой

глубина (высота) бризера возрастает. На подходе к стенке величина максимума бризера заметно уменьшается, в то время как глубина минимума остается практически неизменной (на рисунке 4.8б: $A_+ < A$, $A_- \simeq A$). При дальнейшем сближении ядер солитонов весь первоначальный бризер «перетекает» в образовавшийся зародыш пульсаций, оставляя после себя на противоположном краю кинка противофазные пульсации малой амплитуды. При этом на противоположном конце доменной стенки формируется впадина глубины $B_- < A$, в которую бризер как бы «перетекает», спускаясь по доменной стенке в последующие моменты времени. По мере прохождения через стенку минимум бризера глубиной A_- переходит в максимум высотой B_+ , причем $B_- < B_+ \simeq A$. При дальнейшем расхождении ядер бризера и кинка оба объекта приобретают стационарную форму. Спустившись по стенке, бризер постепенно восстанавливает свою симметрию и продолжает движение, как показано на рисунке 4.8в.

4.3.4 Неподвижные бризеры

При наличии спиральной структуры указанные свойства солитонов сохраняются лишь отчасти. Даже в длиннопериодических структурах бризер не отделим от спиральной структуры. Сильные взаимодействия модифицируют свойства как структуры, так и солитона. Обсудим изменение характера коллективных колебаний системы в зависимости от значений параметра ρ , отражающего макроскопический сдвиг $\Delta = 4\rho$ структуры из-за образования в ней неподвижного бризера (4.36).

Согласно (4.40), в интервале $|\theta| < K'$ бризер неподвижен только при $\theta = 0$, следовательно, $\mu = -\rho$, $0 < \rho < K$. В таком случае величины a_1 , b_1 , a_3 , b_3 вещественны, и коэффициенты в формулах (4.42), (4.43) принимают более простой вид:

$$\begin{aligned}
 y &= -\chi [\zeta(\rho + iK') + \zeta(\rho - iK')], & \gamma &= \frac{t}{k} \operatorname{dn} \rho + 2 \arg c, \\
 A_1 &= \frac{s_\rho}{c_\rho} \frac{(1 + d_1)}{b_1^2} (a_1^2 a_3^2 - b_1^2 b_3^2), & B_1 &= \frac{2a_1 b_1}{a_1 a_3 - b_1 b_3}, \\
 A_3 &= \frac{s_\rho}{c_\rho} \frac{(1 + d_3)}{b_3^2} (a_1^2 a_3^2 - b_1^2 b_3^2), & B_3 &= \frac{2a_3 b_3}{a_1 a_3 - b_1 b_3}, \\
 G_1 &= a_1^2 g_- + b_1^2 g_+, & G_2 &= b_3^2 g_- + a_3^2 g_+, & G_3 &= 2(a_1 b_3 g_- - b_1 a_3 g_+), & G_4 &= 0, \\
 H_1 &= a_1^2 h_+ + b_1^2 h_-, & H_2 &= b_3^2 h_+ + a_3^2 h_-, & H_3 &= 2(a_1 b_3 h_+ - b_1 a_3 h_-), & H_4 &= 0.
 \end{aligned} \tag{4.50}$$

При $\rho \leq 0.2K$ бризер представляет собой протяженную область малоамплитудных колебаний поля Φ около равновесных положений слабо деформированной спиральной структуры. Используя тождество:

$$i \frac{\sigma(\chi)}{\sigma(\chi + 2iK')} \exp[\eta_3(\chi + iK')] = \frac{k \operatorname{sn} \chi}{1 + \operatorname{dn} \chi} \tag{4.51}$$

и приближение

$$4 \operatorname{Arctg} \left(\frac{\operatorname{cn}(\bar{\chi}, k)}{1 + \operatorname{sn}(\bar{\chi}, k)} \right) + 4\rho \operatorname{dn} \chi \operatorname{th} y \approx 4(1 - 2\rho \operatorname{th} y \partial_{\bar{\chi}}) \varphi_0(\bar{\chi}) \approx \varphi_0(\bar{\chi} - 2\rho \operatorname{th} y),$$

для поля Φ получаем выражение:

$$\Phi(\chi, t) \simeq \varphi_0(\chi + 2\rho [1 - \operatorname{th} y]) + \frac{4\rho k}{\operatorname{ch} y} \operatorname{sn} \chi \cos \gamma. \tag{4.52}$$

Здесь

$$\gamma = \frac{t}{k} - \gamma_0, \quad y = \left(1 - \frac{E}{K}\right) \rho \chi - y_0,$$

γ_0, y_0 – вещественные постоянные.

Первое слагаемое в (4.52) характеризует малую неоднородную трансляцию исходной спиральной структуры из-за образования бризера. Второй член описывает слаболокализованные колебания на фоне сдвинутой структуры. Они имеют вид «обрезанной» стоячей малоамплитудной волны. Функция $\operatorname{sn} \chi$ удовлетворяет уравнению Ламе:

$$[\partial_\chi^2 + k^2(1 - 2 \operatorname{sn}^2 \chi) + 1] \operatorname{sn} \chi = 0,$$

которое определяет активационную линейную моду с нулевым квазиимпульсом и частотой $\omega = 1/k$ на фоне спиральной структуры [111]. В области локализации бризера пучности колебаний поля Φ совпадают с центрами $\chi = (2m + 1)K$ доменов, а узлы – с центрами $\chi = 2Km$ стенок структуры (m – целое число).

При $0.2K < \rho < K$ пульсации бризера локализуются в конечной области – в его ядре. Центр бризера сдвигается вдоль спиральной структуры при изменении параметра $y_0 = \ln |c|$. Далее будем рассматривать случай, когда область интенсивных колебаний попадает внутрь одного из доменов структуры. Тогда ядро бризера относительно слабо взаимодействует с ближайшими к нему стенками структуры.

При $\rho = K/2$ неподвижный бризер имеет особенно простой вид, т. к. приводит к сдвигу спиральной структуры по переменной χ на период: $\Delta = 2K$. Используя тождество (4.51) и соотношения

$$\begin{aligned} i \frac{\sigma(u + K + 2iK')}{\sigma(u)} \exp[\eta_2 u - \eta_3(K + iK')] &= -r \left[\frac{\operatorname{cn}(v, k)}{\operatorname{sn}(v, k)} + k' \frac{\operatorname{sn}(v, k)}{\operatorname{cn}(v, k)} \right] \Bigg|_{v=u/2}, \\ i \frac{\sigma(u + K)}{\sigma(u + 2iK')} \exp[\eta_2 u - \eta_3 iK'] &= -r \left[\operatorname{dn}(v, k) - \frac{k'}{\operatorname{dn}(v, k)} \right] \Bigg|_{v=u/2}; \end{aligned} \quad (4.53)$$

$Z(K/2) = (1 - k')/2$, $2ir = \sigma(K + 2iK') e^{-\eta_3(K + iK')} = \operatorname{const}$ (см. Приложение), поле Φ для такого бризера можно выразить через эллиптические функции Якоби:

$$\Phi(\chi, t) = \varphi_0(\chi) + 4 \operatorname{Arctg} \left(\frac{\alpha \cos \gamma - \exp(-y)}{\beta \cos \gamma + \exp y} \right), \quad (4.54)$$

где

$$y = \frac{(1 - k')}{2k} z - y_0, \quad \gamma = \frac{\sqrt{k'}}{k} t + \gamma_0,$$

y_0, γ_0 – вещественные постоянные. Коэффициенты в формуле (4.54) имеют вид:

$$\begin{aligned}\alpha &= a \sqrt{k'} (1 + k') s_0 \left(\frac{s_0(1 - k')}{1 + d_0} + \frac{d^2 + k'}{d^2 - k'} \right), \\ \beta &= a (d_0 + k') \left[1 + \frac{s_0(1 + k')^2}{(1 + d_0)(1 - k')} \left(\frac{d^2 - k'}{d^2 + k'} \right) \right], \\ a &= (k')^{-1/4} [2(1 - k')]^{-1/2} \left(\frac{1 + d_0}{k' + d_0^2} \right) \left(d - \frac{k'}{d} \right).\end{aligned}$$

Для сокращения записи введены обозначения $s_0 = \text{sn} \left(\chi + \frac{K}{2} \right)$, $s = \text{sn} \left(\frac{\chi}{2} + \frac{K}{4} \right)$ и т. д. Здесь мы преобразовали формулу (4.36) так, чтобы выделить асимптотическое поведение поля Φ (4.12) на бесконечности.

Когда ядро бризера (4.54) находится в одном из доменов структуры, его форма отчасти аппроксимируется решением (4.48), (4.49) на однородном фоне с параметром $\rho = K/2 \approx \ln(2/\sqrt{k'})$. Заметим, что при $k' \ll 1$ величина ρ не является большой. Даже при $k = 0.99$ имеем: $K/2 \approx 1.68$.

В то же время, взаимодействие ядра бризера со структурой оказывается важным и проявляется в новых свойствах всей системы. Прежде всего ядро бризера отодвигает от себя ближайшие 2π -кинки спиральной структуры. В результате оно колеблется в пределах домена, длина которого в терминах $\chi = z/k$ больше периода $2K$ спиральной структуры и составляет величину порядка $3K$. Именно в этом кроется причина изменения краевых условий задачи (4.12) при образовании бризера в решетке кинков. В отличие от бризера на однородном фоне, ядро бризера в структуре не только пульсирует, но и совершает дополнительные малые колебания между стенками протяженного домена. Протяженный домен играет роль резонатора. Половинки ядра бризера по-разному деформируются в ходе колебаний центра бризера вдоль такого резонатора. Продольные колебания ядра бризера передаются ближайшим к нему кинкам структуры.

При $k = 0.99$ для бризера (4.54) сдвиг структуры $\Delta = 2K \approx 6.7$, а амплитуда колебаний ядра бризера вдоль спирали ~ 0.4 . В общем случае, с ростом сдвига структуры Δ увеличиваются амплитуда пульсаций бризера, протяженность резонаторного домена, амплитуды продольных осцилляций ядра бризера и стенок структуры. Зависимость амплитуды пульсаций бризера от параметра Δ представлена на рисунке 4.9. При $\Delta \leq 1.05K$ и $3K \leq \Delta \leq 4K$ эта зависимость почти линейна. В интервале $2K \leq \Delta \leq 3K$ амплитуда продольных колебаний ядра бризера – порядка 0.4–0.6, а при $3K \leq \Delta \leq 4K$ – возрастает от

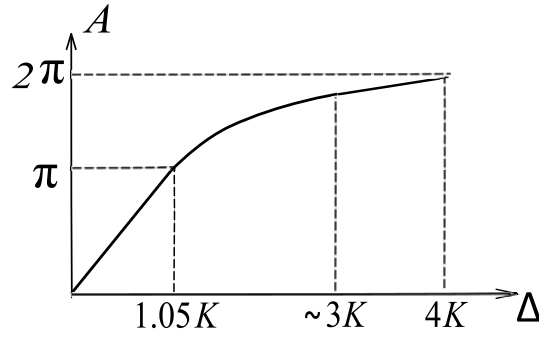


Рисунок 4.9 — Амплитуда бризера как функция сдвига структуры Δ .

0.6 до 0.8 и достигает сорока процентов от периода структуры. При этом протяженность резонаторного домена возрастает почти до двух периодов структуры.

Для определения характера продольных колебаний стенок структуры около неподвижного бризера проанализируем асимптотики решения (4.36) при $\theta = 0$, $|y| \gg 1$ (вне ядра бризера). При $\theta = 0$ коэффициенты a_1 , b_1 , a_2 , b_2 вещественны и удовлетворяют соотношениям:

$$\frac{a_1}{b_1} = -\frac{k s_-}{1 + d_-}, \quad \frac{a_2}{b_2} = -\frac{k s_+}{1 + d_+},$$

где $s_{\pm} \equiv \text{sn}(\bar{\chi} \pm \rho, k)$, $d_{\pm} \equiv \text{dn}(\bar{\chi} \pm \rho, k)$, $\bar{\chi} = \chi + 2\rho$. С учетом этого замечания, находим:

$$\begin{aligned} \Phi(\chi, t) &\simeq \varphi_0(\chi) + 4 \text{Arctg}[R_+ \exp(-y) \cos \gamma], & y \gg 1; \\ \Phi(\chi, t) &\simeq \varphi_0(\chi - 4\rho) + 4 \text{Arctg}[R_- \exp y \cos \gamma], & y \ll -1, \end{aligned} \quad (4.55)$$

$$R_+ = \frac{2 s_{\rho} k s_1 (a_1 a_2 + b_1 b_2)}{c_{\rho} (a_1^2 g_- + b_1^2 g_+) |c|}, \quad R_- = \frac{2 s_{\rho} k s_3 |c| (a_1 a_2 + b_1 b_2)}{c_{\rho} (b_2^2 h_+ + a_2^2 h_-)};$$

$$g_{\pm} = 1 \pm \frac{s_{\rho}^2}{c_{\rho}^2} d_- d_{\theta}, \quad h_{\pm} = 1 \pm \frac{s_{\rho}^2}{c_{\rho}^2} d_+ d_{\theta}.$$

Здесь для сокращения записи введены обозначения: $\text{sn}(\rho, k) = s_{\rho}$, $\text{sn}(i\theta, k) = s_{\theta}$ и т. д.

Коэффициенты R_{\pm} определяют величину и направление смещения доменных стенок относительно равновесных положений. Коэффициент R_+ обращается в нуль в узловых точках:

$$\chi_n = 2K(1 + n) - \rho, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad \chi_n \gg 1.$$

Аналогично, $R_- = 0$ в точках

$$\chi_m = -3\rho - 2Km, \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad \chi_m \ll -1.$$

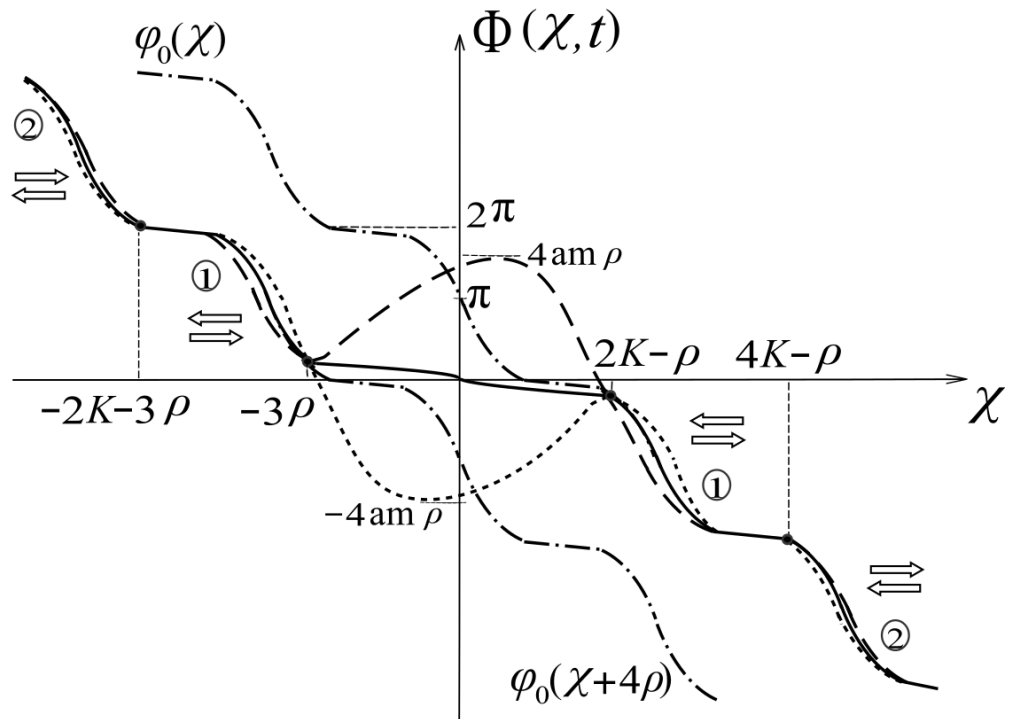


Рисунок 4.10 — Неподвижный бризер на фоне спиральной структуры. Сплошной, штриховой и пунктирной линиями отмечены положения бризера в различные моменты времени. В асимптотике при $z \rightarrow \pm\infty$ бризер выходит на фоновую структуру, изображенную штрихпунктиром.

Доменные стенки располагаются между узлами (жирные точки на рисунке 4.10). Функции $R_{\pm}(\chi)$ периодичны, знакоопределены в пределах каждого домена, а при переходе от одной стенки к другой меняют знак. Отсюда следует, что все четные (нечетные) стенки структуры колеблются в фазе по отношению друг к другу и в противофазе по отношению к нечетным (четным) стенкам. Это отражено выбором направлений стрелок на рисунке 4.10.

Ядро бризера колеблется между узловыми точками $\chi = -3\rho$ и $\chi = 2K - \rho$. В некоторые моменты времени ядро принимает форму «плато» протяженностью $2K + 2\rho$. «Плато» образует с осью Ox малый угол α : $\text{tg}\alpha \approx \alpha = -\varphi_0(\rho)/(K + \rho)$.

Ближайшие к ядру бризера доменные стенки (с номером $n = 1$) колеблются в противофазе с ядром. Их колебания имеют амплитуду $\sim 0.2 - 0.4$ в зависимости от величины Δ . Колебания последующих кинков (с номерами $n = 2, 3, \dots$) экспоненциально убывают с ростом номера кинка. На рисунке 4.10

числа в кружочках нумеруют кинки. Частота предельных колебаний стенок равна частоте бризера.

В пределе $\mu = -K + \varepsilon$, $\varepsilon \rightarrow +0$ бризер (4.36) теряет пространственную локализацию. Его делокализация сопровождается сильными периодическими во времени продольными колебаниями кинков структуры. Само ядро бризера колеблется в пределах протяженного домена длиной порядка $4K - 2\varepsilon$, однако вне его образуется протяженная область модуляций спиральной структуры в форме нелинейной стоячей волны.

Как было отмечено ранее, для соединения $\text{Cr}_{1/3}\text{NbS}_2$ зависимость периода спиральной структуры от модуля k хорошо описывается моделью sine-Gordon [101]. Примем за материальные параметры этого соединения значения, использованные в работах [101], [A20]. Тогда при $0.2K < \rho < K$ для частоты пульсаций бризера получим оценку $\nu = 10^7 - 10^8$ Гц. Отсюда следует, что бризер в спиральной структуре можно обнаружить по поглощению СВЧ-мощности на характерных частотах его пульсаций.

4.3.5 Движущиеся бризеры

В общем случае (при $0 < \rho < K$, $|\theta| < 2K'$, $\theta \neq \pm K'$) решение (4.36) описывает движение бризера в решетке 2π -кинков поля Φ . Размер ядра бризера $\sim (2K + \Delta/2)$ определяется сдвигом структуры $\Delta = 4\rho$ и слабо зависит от параметра θ . В то же время, структура бризера как целого существенно зависит от параметра θ , а точнее от соотношения его поступательной скорости V (4.40) и фазовой скорости $V_{\text{ph}} = \omega/\rho$ волновых процессов в ядре бризера. При $V < V_{\text{ph}}$ деформации спиральной структуры подстраиваются к пульсациям бризера. В ходе движения ядра бризера пульсации его поля «перетекают» из одного домена структуры в соседний подобно тому, как это происходило при сближении неподвижного бризера и кинка на однородном фоне. После прохождения через очередную доменную стенку бризер «опрокидывается», и его ядро пульсирует в области, размер которой практически совпадает с размером бризера.

На рисунке 4.11 критическому значению скорости бризера $V = V_{\text{ph}}$ соответствует сплошная линия в прямоугольнике параметров $0.05K \leq \rho \leq 0.75K$, $0 \leq \theta \leq K'$. При $V \simeq V_{\text{ph}}$ частота бризера $\Omega \simeq 0$ в сопутствующей ему системе

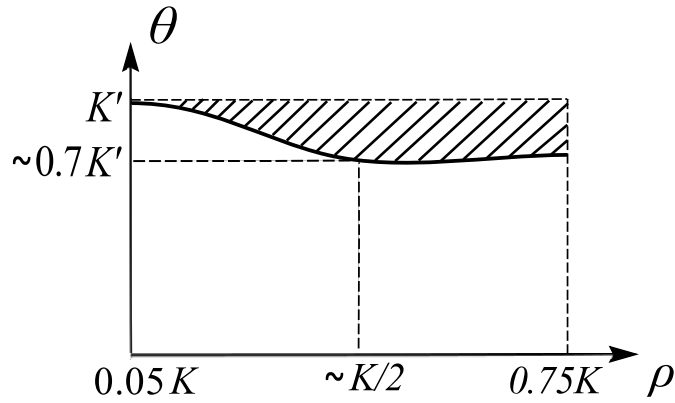


Рисунок 4.11 — Линия $V = V_{\text{ph}}$ в прямоугольнике $0.05K \leq \rho \leq 0.75K$, $0 \leq \theta \leq K'$. Область, где $V > V_{\text{ph}}$, заштрихована.

отсчета, а размер участка, на котором бризер отклоняется от фона, заметно превосходит размер ядра бризера. Так при $\rho = K/2$, $|\theta| \simeq 0.7K'$ ($\Omega \approx 0$) ширина бризера по переменной χ становится порядка $4K$ (это два периода структуры), в то время как ядро имеет размер $3K$. При дальнейшем росте скорости бризера $V > V_{\text{ph}}$ ($\rho = K/2$, $|\theta| > 0.7K'$) деформации спиральной структуры из-за их инерционности не успевают следовать за быстрыми изменениями ядра бризера. Это проявляется в том, что к ядру периодически добавляются вытянутые участки сильных квазистатических деформаций структуры, которые возникают альтернативно: либо как «предвестники», либо как «хвосты» движущегося солитона.

Рисунок 4.12 иллюстрирует колебания бризера в системе отсчета, движущейся со средней скоростью бризера V . При $t \approx 0$ решение ведет себя подобно неподвижному бризеру: его пульсации сосредоточены в ядре и в малой степени передаются соседним стенкам. Как и в случае неподвижного бризера, подберем константу интегрирования c (см. (4.38)) так, чтобы центр бризера в начальный момент времени оказался в середине домена. Тогда при $t = 0$ формируется плато, ширина которого $\sim (2K + \Delta/2)$ определяет область локализации ядра бризера. Затем в некоторый момент времени центр ядра бризера достигает предельного значения (точка A), после чего левый край ядра (точка B) «отрывается» от фоновой структуры. Начиная с этого момента, левый край бризера ведет себя как центр нового ядра, в то время как центр прежнего ядра становится краем доменной стенки. Новый центр ядра немного замедляется. Поэтому на рисунке 4.12 он начинает «подниматься» вверх по ступенькам структуры. Удаленная от него часть прежнего ядра лишь слегка отодвигается от точки A

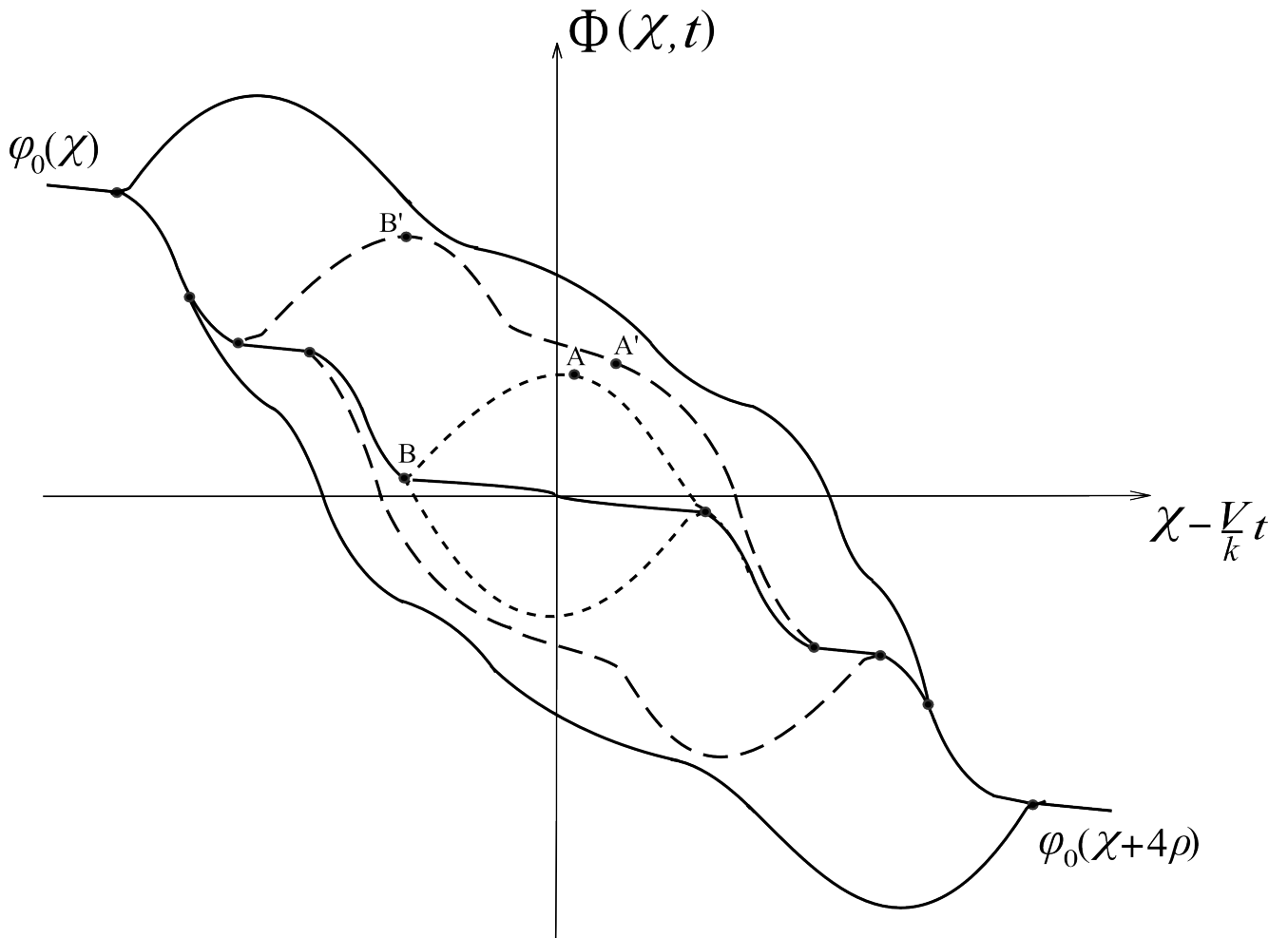


Рисунок 4.12 — Эволюция бризерного решения (4.36) при $V > V_{ph}$.

вверх и вправо. В ходе своего движения центр ядра сначала оказывается на одном уровне с A , формируя плато той же ширины, что и прежде, а потом продолжает подниматься до максимального значения B' . Таким образом, ядро, немного замедляясь, оставляет перед собой «предвестник», состоящий из сдвинутых доменов и доменных стенок.

Со временем «предвестник» постепенно удаляется от ядра. При $t = T/4$, где $T = 2\pi/\omega$ – период колебаний, ядро бризера и его «предвестник» оказываются в предельных положениях, отмеченных на рисунке 4.12 жирной линией. Затем ядро начинает ускоряться. Поскольку оно проходит все предыдущие стадии в обратной последовательности, «предвестник» сокращается. При $t \approx T/2$ центр ядра бризера вновь попадает в точку A , и бризер принимает тот же вид, что и в начальный момент времени. На следующем полупериоде ядро бризера по инерции «проскакивает» равновесное положение и движется вправо, оставляя за собой «хвост» по аналогии с тем, как это было с «предвестником».

Протяженность «хвоста» равна протяженности «предвестника» в соответствующие моменты времени. Их предельная длина монотонно возрастает как с ростом ρ , так и с ростом θ . При $\theta = K' - 0$ решение (4.36) принимает вид:

$$\Phi(\chi, t) = \varphi_0(\chi + 2\rho) + 4 \operatorname{Arctg} \left[-\frac{s_\rho}{c_\rho} \left(\frac{e^y d_- |a_-|^2 - e^{-y} d_+ |a_+|^2 + 2B}{e^y |a_-|^2 + e^{-y} |a_+|^2 + 2 \operatorname{Im}(a_+ a_-)} \right) \right], \quad (4.56)$$

где $B = \operatorname{Re}[a_+ a_- (\zeta_+ + \zeta_- + \tilde{\gamma})]$, $d_\pm \equiv \operatorname{dn}(\bar{\chi} \pm \rho, k)$, $\bar{\chi} = \chi + 2\rho$;
 $\zeta_\pm \equiv \zeta(\bar{\chi} \pm [\rho - iK'])$,

$$\tilde{\gamma} = \chi \left(\frac{c_\rho}{s_\rho} \right)^2 - \frac{t d_\rho}{k s_\rho^2}, \quad y = -\chi \operatorname{Re} Z(-\rho + iK') - \frac{t c_\rho}{k s_\rho} + \ln |c|,$$

$a_\pm = \sigma(\bar{\chi} \pm [\rho - iK']) \exp[\eta_3 \rho / 2] \exp[\pm \eta_1 \bar{\chi} \rho / K]$. При получении этого выражения возникает неопределенность. Для ее правильного раскрытия необходимо выбрать $\arg c = 2i\eta_3 \rho$. При этом использованы разложения [41; 43]:

$$\sigma(u + \varepsilon) = \sigma(u) + \varepsilon \sigma(u) \zeta(u) + O(\varepsilon^2), \quad \zeta(u + \varepsilon) = \zeta(u) - \varepsilon \wp(u) + O(\varepsilon^2).$$

Решение (4.56) аperiodично. При $t \ll -1$ передняя часть бризера (4.56) вытянута и охватывает несколько лежащих перед ним доменных стенок. С ростом t вытянутая часть начинает сжиматься и в «срединной» области, где слагаемое $B \simeq 0$, она сходит на нет, а весь бризер локализуется в ядре, аналогично рисунку 4.10. После этого задняя часть бризера растягивается, формируя «хвост», длина которого по мере движения ядра бризера неограниченно возрастает.

Бризеры, движущиеся со сравнительно небольшими скоростями $V \ll V_{\text{ph}}$, имеют более простое строение. Их легче обнаружить. При материальных параметрах соединения $\text{Cr}_{1/3}\text{NbS}_2$ [101], [A20] для скорости хорошо локализованных бризеров ($K/4 < \rho < 3K/4$) получаем оценки: $0 < V \leq 13 - 40$ м/с. Образование и движение таких солитонов должно сопровождаться локальными сдвигами спиральной структуры на расстояния от 0.5 до 1.5 ее периода.

4.4 Поглощение СВЧ-мощности спиновыми волнами и бризерами

При сравнительно малых внешних воздействиях геликоидальная структура не испытывает локальных трансляций и не содержит солитонов. При

таких условиях вдоль магнитной спирали распространяются линейные [85] и слабонелинейные [A7; A9] спиновые волны с колебаниями намагниченности около равновесных положений. Рассмотрим задачу о поглощении мощности однородной накачки на стоячих спиновых волнах в геликоидальной магнитной структуре без центра инверсии с анизотропией типа «легкая плоскость» (плоскость Oxy) [A20]. Когда магнитное поле накачки $h = h(t)$ направлено вдоль оси Oz структуры, плотность энергии ферромагнетика в постоянном внешнем магнитном поле $\mathbf{H} = (H, 0, 0)$ ($H > 0$) принимает вид:

$$\tilde{w} = \frac{\alpha}{2} (\partial_z \mathbf{M})^2 + \kappa (M_1 \partial_z M_2 - M_2 \partial_z M_1) + \frac{\beta}{2} M_3^2 - M_1 H - M_3 h.$$

Здесь $\alpha, \beta > 0$ и κ – постоянные обменного взаимодействия, магнитной анизотропии и взаимодействия Дзялошинского соответственно.

В параметризации

$$\mathbf{M} = M_0 = (\sin \Theta \cos \Phi, \sin \Theta \sin \Phi, \cos \Theta)$$

при преобладающей легкоплоскостной анизотропии даже в возбужденных состояниях геликоидальной структуры угол Θ близок к значению $\Theta = \pi/2$. Для реальных гелимагнетиков в приближении [108]:

$$\frac{\kappa^2}{\alpha} < \frac{H}{M_0} \ll \beta$$

угол Θ выражается через Φ : $\Theta = \pi/2 + (\gamma M_0 \beta)^{-1} \partial_t \Phi$, где γ – магнитомеханическое отношение. Предполагая справедливость такой оценки и малость накачки: $|h|/(M_0 \beta) \ll 1$, решение уравнений Ландау – Лифшица будем искать в виде:

$$\Theta = \frac{\pi}{2} + u(z, t), \quad \Phi = \varphi_0(z) + v(z, t), \quad |u(z, t)|, |v(z, t)| \ll 1.$$

В результате получаем линейную систему для расчета спин-волновых полей u, v :

$$-\frac{1}{\gamma M_0} \partial_t u + \left[\alpha \partial_z^2 - \frac{H}{M_0} \cos \varphi_0 \right] v \approx 0; \quad \frac{1}{\gamma M_0} \partial_t v - \beta u - \frac{h}{M_0} \approx 0. \quad (4.57)$$

Отсюда следует замкнутое уравнение для v :

$$-\partial_t^2 v - \nu \partial_t v + (\partial_z^2 - \cos \varphi_0) v + \frac{\partial_t h}{\sqrt{M_0 \beta H}} \approx 0. \quad (4.58)$$

В левую часть (4.58) введено слагаемое $-\nu \partial_t v$ ($\nu > 0$) для того, чтобы учесть релаксацию спиновых волн. При переходе от (4.57) к (4.58) использованы безразмерные переменные $z' = z\sqrt{H/(\alpha M_0)}$, $t' = t\gamma\sqrt{\beta HM_0}$.

В том же приближении выражение для изменения энергии единицы длины спиральной структуры за единицу времени имеет вид:

$$\langle \partial_t \tilde{w} \rangle = \frac{\gamma M_0 H}{2K} \int_0^{2K} d\chi \left(\partial_t v \partial_t h - \nu \sqrt{M_0 \beta H} (\partial_t v)^2 - \frac{\partial_t h^2}{2\sqrt{M_0 \beta H}} \right). \quad (4.59)$$

В левой части (4.59) используются размерные переменные \tilde{w} , t , а в правой – безразмерные t' , χ . Как будет показано далее, функция $v = v(\chi)$ имеет период $2K$. Поэтому граничные вклады от v , возникающие от интегрирований по частям при получении (4.59), оказываются равными нулю.

В случае периодического поля $h = \text{Re}[h_0 \exp(i\omega_0 t')]$ усреднение $\langle \partial_t \tilde{w} \rangle$ по периоду накачки $T = 2\pi/\omega_0$ дает поглощаемую мощность:

$$Q = \frac{\gamma M_0 H}{2KT} \int_0^T dt' \int_0^{2K} d\chi \left(\partial_t v \partial_t h - \nu \sqrt{M_0 \beta H} (\partial_t v)^2 \right).$$

Будем искать поле v в виде: $v(\chi) = \text{Re}[f(\chi) \exp(i\omega_0 t')]$. Тогда для расчета амплитуды $f(\chi)$ получаем уравнение:

$$\left(\omega_0^2 - i\omega_0 \nu + \frac{1}{k^2} [\partial_\chi^2 - 2k^2 \text{sn}^2(\chi, k) + k^2] \right) f(\chi) = -\frac{i\omega_0 h_0}{\sqrt{M_0 \beta H}}. \quad (4.60)$$

Покажем, что функция $f(\chi)$ выражается через решения уравнения Ламе. Линейно независимыми решениями уравнения Ламе:

$$[-\partial_\chi^2 + 2\wp(\chi + iK')] \Psi = E\Psi, \quad (4.61)$$

отвечающими собственному значению $E = -\wp(\lambda)$, являются функции $\Psi(\chi, \pm\lambda)$, где

$$\Psi(\chi, \lambda) = A(\chi, \lambda) \exp(ip(\lambda)\chi); \quad (4.62)$$

$$A(\chi, \lambda) = \frac{\sigma(\chi + iK' + \lambda)}{\sigma(\chi + iK') \sigma(\lambda)} \exp\left(-\frac{\eta_1 \lambda}{K} \chi - \eta_3 \lambda\right); \quad (4.63)$$

$$p(\lambda) = \frac{i}{K} [K\zeta(\lambda) - \eta_1 \lambda] = iZ(\lambda + iK') - \frac{\pi}{2K}. \quad (4.64)$$

Здесь $\sigma(\lambda)$, $\zeta(\lambda)$, $\wp(\lambda)$ – функции Вейерштрасса с периодами $[2K, 2iK']$, $K' = K(k')$ – полный эллиптический интеграл первого рода от дополнительного модуля k' .

Параметр $p(\lambda)$ (4.64) для функции $\Psi(\chi, \lambda)$ играет роль блоховского квазиимпульса. Квазиимпульс вещественен на отрезках $\Gamma_1 = \{iv : |v| \leq K'\}$ и $\Gamma_2 = \{iv + K : |v| \leq K'\}$, которые определены по $\text{mod}(2K, 2iK')$. Эти отрезки соответствуют квазиоптической и квазиакустической ветвям спин-волнового спектра.

Модулирующий множитель $A(\chi, \lambda)$ (4.63) периодичен по χ с периодом $2K$, и потому допускает разложение в ряд Фурье [85]:

$$A(\chi, \lambda) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m(\lambda) \exp\left(\frac{i\pi m}{K} \chi\right). \quad (4.65)$$

Коэффициенты Фурье найдем, вычисляя интеграл от

$B = A(\chi, \lambda) \exp(-i\pi n \chi/K)$ по контуру C , изображенному на рисунке 4.13а. С одной стороны, в силу квазипериодичности функции $A(\chi)$: $A(\chi \pm 2K) = A(\chi)$, $A(\chi - 2iK') = A(\chi) \exp(i\pi\lambda/K)$, имеем:

$$\oint_C d\chi B(\chi) = \int_{-K}^K d\chi B(\chi) \left[1 - \exp\left(\frac{i\pi\lambda}{K} - \frac{\pi n}{K} 2K'\right)\right].$$

С другой стороны, подынтегральная функция внутри контура C аналитична по χ всюду, за исключением простого полюса в точке $u = -iK'$. Напомним, что $\sigma(s)$ – целая функция с нулями в вершинах сетки периодов: $s = 2Kl + 2iK'm$, где l, m – целые числа. Учитывая, что $\partial_s \sigma(s)|_{s=0} = 1$, по теореме Коши о вычетах находим:

$$\oint_C d\chi B(\chi, \lambda) = -2\pi i \exp\left(\frac{i\pi\lambda}{2K} - \frac{\pi n K'}{K}\right).$$

Отсюда:

$$A_n(\lambda) = \frac{1}{2K} \int_{-K}^K d\chi B(\chi, \lambda) = \frac{\pi}{2K} \sin^{-1} \left[\frac{\pi}{2K} (\lambda + 2iK'n) \right],$$

где $|\text{Im}\lambda| \leq K'$.

Интегрирование уравнения (4.60) нетрудно выполнить, если заметить, что на контуре $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ функции Ламе удовлетворяют условию замкнутости:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} d\mu \Psi(\chi, \mu) \Psi(\chi', -\mu) = \delta(\chi - \chi'). \quad (4.66)$$

Для доказательства соотношения (4.66), найдем резольвенту $R(\chi, \chi', \lambda)$ уравнения Ламе, т. е. решение сингулярного уравнения:

$$[-\partial_\chi^2 + 2\wp(\chi + iK') + \wp(\lambda)] R(\chi, \chi', \lambda) = \delta(\chi - \chi') \quad (4.67)$$

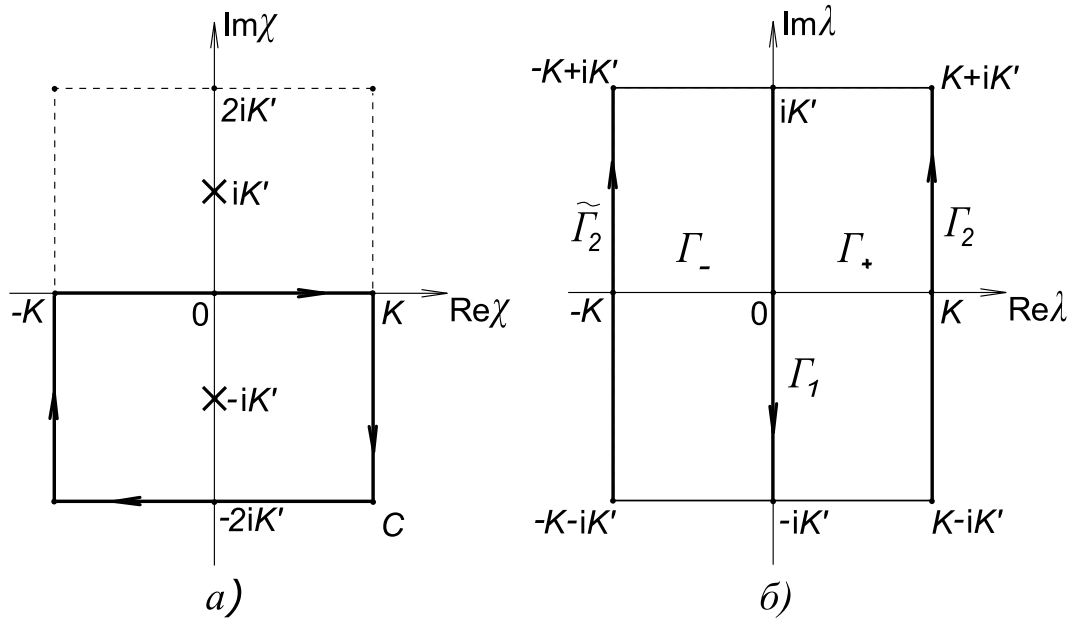


Рисунок 4.13 — Контур C в комплексной χ -плоскости (а) и области Γ_{\pm} в λ -плоскости (б).

с граничными условиями:

$$\partial_{\chi} R(\chi, \chi', \lambda) \Big|_{\chi=\chi'+\varepsilon} - \partial_{\chi} R(\chi, \chi', \lambda) \Big|_{\chi=\chi'-\varepsilon} = 1, \quad \varepsilon \rightarrow +0.$$

Учитывая тождество: $\Psi(\mu) \partial_{\chi} \Psi(-\mu) - \Psi(-\mu) \partial_{\chi} \Psi(\mu) = \partial_{\mu} \wp(\mu)$, выразим резольвенту в терминах функций Ламе:

$$\begin{aligned} R(\chi, \chi', \lambda) &= -\frac{\Psi(\chi, \lambda) \Psi(\chi', -\lambda)}{\partial_{\lambda} \wp(\lambda)} && \text{при } \chi > \chi'; \\ R(\chi, \chi', \lambda) &= -\frac{\Psi(\chi, -\lambda) \Psi(\chi', \lambda)}{\partial_{\lambda} \wp(\lambda)} && \text{при } \chi < \chi'. \end{aligned} \quad (4.68)$$

Полезно представить (4.68) в виде контурного интеграла:

$$R(\chi, \chi', \lambda) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} \frac{d\mu \Psi(\chi, \mu) \Psi(\chi', -\mu)}{\wp(\mu) - \wp(\lambda)}. \quad (4.69)$$

Убедимся в эквивалентности формул (4.68), (4.69). Возможность (или невозможность) аналитического продолжения функций Ламе $\Psi(\chi, \lambda)$ по параметру λ обуславливают неравенства:

$$\begin{aligned} \text{Im} p(\lambda) < 0 & \quad \text{при } \lambda \in \Gamma_- = \{\lambda : -K \leq \text{Re} \lambda \leq 0, \quad |\text{Im} \lambda| \leq K'\}, \\ \text{Im} p(\lambda) > 0 & \quad \text{при } \lambda \in \Gamma_+ = \{\lambda : 0 \leq \text{Re} \lambda \leq K, \quad |\text{Im} \lambda| \leq K'\}, \end{aligned} \quad (4.70)$$

которые определены по $\text{mod}(2K, 2iK')$. Подынтегральное выражение (4.69) является двоякопериодической функцией параметра μ с периодами $[2K, 2iK']$.

Согласно формулам (4.62)–(4.64), (4.70), при $\chi > \chi'$ эта функция аналитически продолжается с контура $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ в область Γ_+ , где имеет простой полюс в точке $\mu = \lambda$. Ввиду периодичности подынтегрального выражения (4.69) при сдвигах аргумента μ на $\pm 2iK'$, интегрирование по отрезкам Γ_1 и Γ_2 в (4.69) можно заменить интегрированием по замкнутому контуру $\tilde{\Gamma}$, ограничивающему область Γ_+ (см. рисунок 4.13б). При обходе $\tilde{\Gamma}$ область Γ_+ остается слева. Интегрирование по контуру Γ осуществляется с помощью теоремы Коши о вычетах и дает результат:

$$-\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{d\mu \Psi(\chi, \mu) \Psi(\chi', -\mu)}{\wp(\mu) - \wp(\lambda)} = -\frac{\Psi(\chi, \lambda) \Psi(\chi', -\lambda)}{\partial_{\lambda} \wp(\lambda)},$$

который согласуется с (4.68) при $\chi > \chi'$.

При $\chi < \chi'$ подынтегральное выражение (4.69) аналитично в области Γ_- всюду, за исключением простого полюса в точке $\lambda = -\mu$. Интегрирование по отрезкам $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ можно заменить на интегрирование по замкнутому контуру $\tilde{\Gamma}$, который охватывает область Γ_- (напомним, что все контуры определены по $\text{mod}(2K, 2iK')$). При обходе контура $\tilde{\Gamma}$ область Γ_- остается справа от него. Применение теоремы Коши при вычислении интеграла по контуру $\tilde{\Gamma}$ снова дает верный результат:

$$-\frac{1}{2\pi i} \oint_{\tilde{\Gamma}} \frac{d\mu \Psi(\chi, \mu) \Psi(\chi', -\mu)}{\wp(\mu) - \wp(\lambda)} = -\frac{\Psi(\chi, -\lambda) \Psi(\chi', \lambda)}{\partial_{\lambda} \wp(\lambda)}.$$

Здесь мы учли, что изменение знака правой части равенства, связанное с отрицательным направлением обхода $\tilde{\Gamma}$, компенсируется нечетностью производной:

$$\partial_{\mu} \wp(\mu) \Big|_{\mu=-\lambda} = -\partial_{\lambda} \wp(\lambda).$$

Таким образом, представление (4.69) обосновано. Условие замкнутости (4.66) следует из формул (4.67), (4.69).

Для дальнейшего анализа полезно разложение единицы:

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-K'}^{K'} ds \Psi(\chi, K + is) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n(-K - is) \delta(p(K + is) - \pi n/K) - \\ &\quad - \int_{-K'}^{K'} ds \Psi(\chi, is) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n(-is) \delta(p(is) - \pi n/K), \end{aligned} \quad (4.71)$$

которое получается в результате интегрирования равенства (4.66) по переменной χ' при использовании разложения (4.65). На контуре Γ_2 уравнения

$p(K + is) = \pi n/K$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, имеют единственное решение: $s = 0$ при $n = 0$. На контуре Γ_1 уравнения $p(is) = \pi n/K$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, имеют парные корни $s = v_m$ и $s = v_{-m} = -v_m$, где $m = 1, 2, \dots$, причем при $m \gg 1$ имеем: $v_m \approx K/(\pi m)$.

Применим формулу:

$$\delta[\varphi(x)] = \sum_i \delta(x - x_i) \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{x=x_i}^{-1},$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака, x_i – корни уравнения $\varphi(x) = 0$ и распишем тождество (4.71) подробнее:

$$1 = \Psi(\chi, K) \frac{A_0(-K)K}{E} - \sum_{n=1}^{+\infty} [\Psi(\chi, iv_n)A_n(-iv_n) + \Psi(\chi, -iv_n)A_{-n}(iv_n)] \times \\ \times \left(\frac{1}{\operatorname{sn}^2(v_n, k')} - \frac{E}{K} \right)^{-1}. \quad (4.72)$$

Здесь

$$A_0(-K) = -\frac{\pi}{2K} = -A_0(K); \quad A_n(-iv_n) = \frac{\pi i}{2K} \operatorname{sh}^{-1} \left[\frac{\pi}{2K} (-v_n + 2K'n) \right].$$

С целью записать окончательные формулы в терминах более популярных функций Якоби воспользуемся тождеством [41]:

$$\wp(\lambda) = -\frac{(1+k^2)}{3} + \operatorname{sn}^{-2}(\lambda, k),$$

и перепишем уравнение уравнение Ламе (4.61) в виде:

$$[\partial_\chi^2 - 2k^2 \operatorname{sn}^2(\chi, k) + k^2] \Psi = -\kappa^2(\lambda, k) \Psi, \quad \kappa^2(\lambda, k) = k'^2 - \frac{\operatorname{dn}^2(\lambda, k)}{\operatorname{sn}^2(\lambda, k)}. \quad (4.73)$$

Тогда соотношения (4.72), (4.73) сразу приводят к решению уравнения (4.60) для амплитуды спиновых волн:

$$f(\chi) = -\frac{i \omega_0 h_0}{\sqrt{M_0 \beta H}} \left(\frac{K A_0(-K)}{(\omega_0^2 - i \omega_0 \nu - \Omega_0^2) E} \Psi(\chi, K) - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{[\operatorname{sn}^{-2}(v_n, k') - E/K]^{-1}}{(\omega_0^2 - i \omega_0 \nu - \Omega_n^2)} [A_n(-iv_n) \Psi(\chi, iv_n) + A_{-n}(iv_n) \Psi(\chi, -iv_n)] \right) \quad (4.74)$$

Здесь $\Omega_0^2 = \kappa^2(\lambda = K, k)/k^2 = 0$, $\Omega_n^2 = \kappa^2(\lambda = iv_n, k)/k^2 = (k^2 \operatorname{sn}^2(v_n, k'))^{-1}$.

С помощью (4.59), (4.74) вычисляем резонансную часть поглощаемой мощности в единице длины геликоидальной структуры:

$$\tilde{Q}_{\text{rez}} = \frac{\gamma M_0 H}{2KT} \int_0^T dt' \int_0^{2K} d\chi \partial_{t'} v \partial_{t'} h = -2 h_0^2 \tilde{\omega}_0 \chi''_{33}(\tilde{\omega}_0) < 0.$$

Окончательный результат приведен в исходных (размерных) переменных $\tilde{\omega}_0$, $\tilde{v} = \text{const}$, $\tilde{\Omega}_n = \gamma \Omega_n \sqrt{\beta M_0 H}$, $\chi''_{33}(\tilde{\omega}_0)$ – мнимая часть продольной магнитной восприимчивости единицы длины среды:

$$\chi''_{33} = \frac{\tilde{\omega}_0^3 \tilde{v}}{\beta} \left(\frac{K A_0^2(K)}{\tilde{\omega}_0^2 (\tilde{\omega}_0^2 + \tilde{v}^2) E} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|A_n(-iv_n)|^2}{(\text{sn}^{-2}(v_n, k') - E/K) \left((\tilde{\omega}_0^2 - \tilde{\Omega}_n^2)^2 + \tilde{\omega}_0^2 \tilde{v}^2 \right)} \right).$$

Амплитуды пиков поглощаемой мощности возрастают с ростом поля H и экспоненциально убывают с ростом n (см. рисунок 4.14; на рисунке $a^{-1} = \gamma \sqrt{\beta M_0 H_c}$, $b = \sqrt{\beta} / (2h_0^2 \gamma \sqrt{M_0 H_c})$).

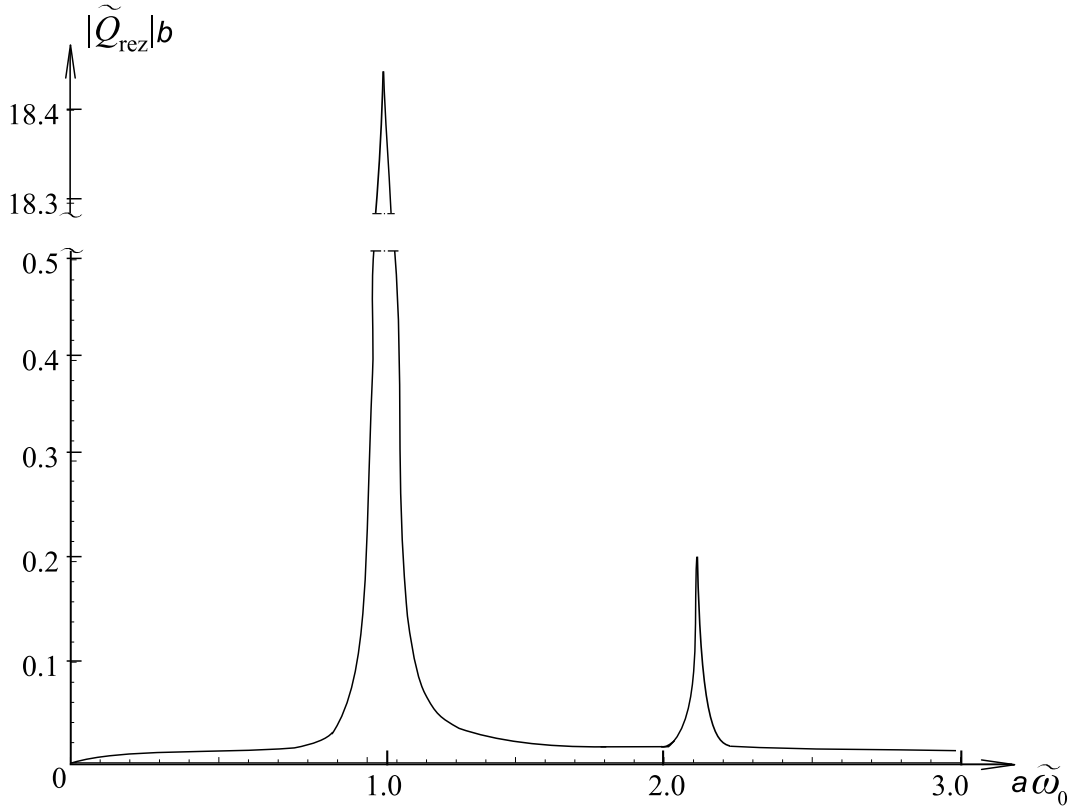


Рисунок 4.14 — Пики резонансного поглощения мощности геликоидальной структуры при $H = 0.8H_c$, $\tilde{v}/\tilde{\Omega}_1 = 0.01$.

Резонансные частоты Ω_n связаны с полем H и величиной k сложными трансцендентными соотношениями. Численный счет показывает, что приведенная ранее оценка $\Omega_n \approx \pi n / (kK) = 2\pi n / L_0$ на самом деле с точностью до нескольких процентов пригодна для любых $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$

Приведенные расчеты последовательнее, а полученные результаты полнее по сравнению с выполненными в [112], где рассматривалась близкая модель кирального магнетика. Отметим также, что в [112] в формулах для частот Ω_n утерян множитель $1/k$.

Отметим, что в отличие от частот стоячих спиновых волн, частоты внутренних колебаний неподвижного бризера в геликоидальной структуре меняются непрерывно и оказываются меньшими по абсолютной величине (возможно незначительное перекрытие частотных интервалов). На рисунке 4.15 приведена полоса частот $\omega = b\tilde{\omega} = \text{dn}(\rho, k)/E(k)$ неподвижного бризера (4.22) и спектр резонансных частот $\Omega_n = b\tilde{\Omega}_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) стоячих спиновых волн в геликоидальной структуре при наличии постоянного внешнего поля H , перпендикулярного оси магнитной спирали. По оси ординат отложены значения в безразмерных переменных; константа $b^{-1} \equiv \gamma\sqrt{\beta M_0 H_c}$.

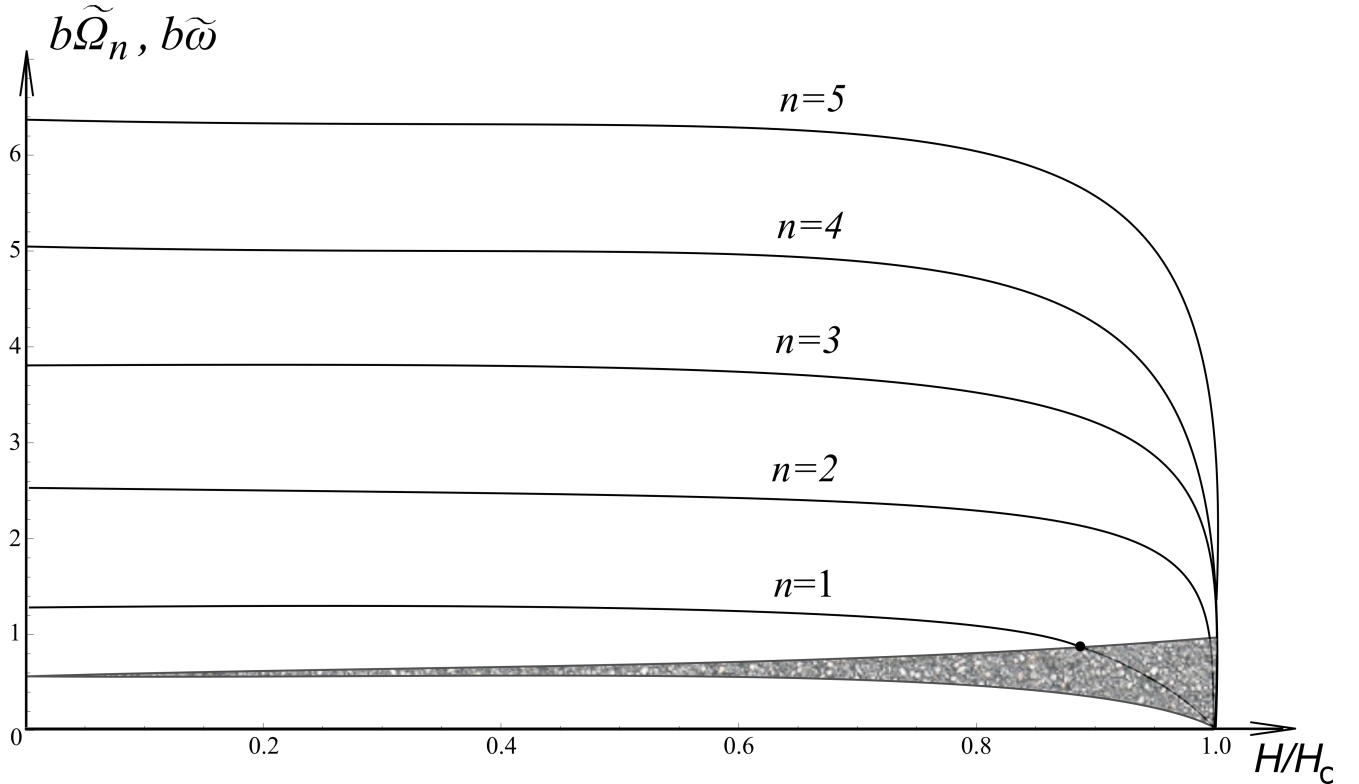


Рисунок 4.15 — Полоса частот $\omega_0 = b\tilde{\omega}$ неподвижного бризера и спектр резонансных частот $\Omega_n = b\tilde{\Omega}_n$ стоячих спиновых волн в геликоидальной структуре.

В интервале магнитных полей $0 < H < 0.8H_c$ размерные частоты $\tilde{\Omega}_n$ почти не меняются: $\tilde{\Omega}_n \approx 4n/(\pi b)$. Вблизи точки фазового перехода из несоизмеримой в соизмеримую фазу (при H близком к H_c) зависимость резонансных частот $\tilde{\Omega}_n$ от внешнего магнитного поля имеет вид:

$$\tilde{\Omega}_n \approx -2\pi n b^{-1} / \ln \left(\sqrt{H_c/H} - 1 \right), \quad H < H_c,$$

в то время, как размерные частоты $\tilde{\omega} = b^{-1}\omega$ внутренних мод неподвижного бризера лежат в интервале:

$$\left[\sqrt{\frac{H_c}{H}} - 1 \right]^{1/2} < b|\tilde{\omega}| < 1.$$

В недавней работе [113] для соединения CrNb_3S_6 в эксперименте были получены значения резонансных частот $\tilde{\Omega}_n$ порядка 10^{12} Гц. Обычно для хиральных магнетиков $a\kappa/\alpha \sim 10^{-2}$, где $a \sim 10^{-8}$ см – постоянная кристаллической решетки, $H_c = (\kappa\pi/4)^2 M_0/\alpha \sim 10^3$ Э, $M_0 \sim \mu_B/a^3 \sim 10^4$ Гс (μ_B – магнетон Бора). Тогда $\alpha \sim 10^3 a^2$. Для оценок полагаем $\beta \sim 1 - 10$, $\gamma \sim 10^7$ Э $^{-1}$ с $^{-1}$. Отсюда следует, что бризер можно обнаружить по поглощению СВЧ-мощности на частотах порядка $10^{10} - 10^{11}$ Гц.

4.5 Исследование возможностей формирования солитонов в спиральной структуре

4.5.1 Возбуждение бризера

Проведенный анализ подсказывает пути возбуждения солитонов (кинков и бризеров) в спиральной структуре. Для возбуждения бризера необходимо посредством внешних полей удлинить и закрутить магнитную спираль в одном из доменов структуры так, чтобы он стал для бризера резонатором. Проще говоря, начальное возмущение спиральной структуры должно иметь форму, близкую к представленной на рисунке 4.10.

В геликоидальных ферромагнетиках с анизотропией типа «легкая плоскость» закрутку спирали можно осуществить кратковременным включением циркулярно поляризованного магнитного поля в базисной плоскости. При сильной легкоплоскостной анизотропии такой же результат вызовет кратковременная прецессия намагниченности под действием постоянного магнитного поля, направленного вдоль оси спирали. Удлинение домена на фронте закрутки можно вызвать локальным увеличением магнитного поля, перпендикулярного

оси магнитной спирали.

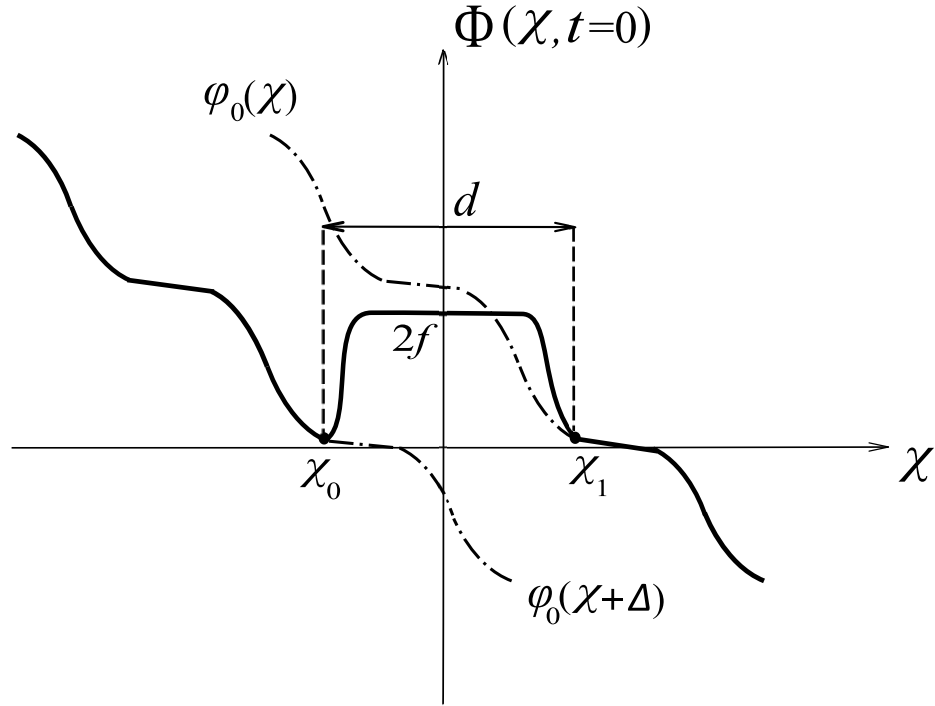


Рисунок 4.16 — Начальное возмущение $\Phi(\chi, t = 0)$ (4.75) спиральной структуры (4.6) высотой $2f$ и шириной d .

Используемый нами метод обратной задачи рассеяния позволяет подтвердить приведенные качественные соображения аналитическим расчетом [A8]. Зададим начальное возмущение спиральной структуры в виде протяженного участка со ступенькой прямоугольной формы (рисунок 4.16):

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= \varphi_0(\chi + \Delta) && \text{при } \chi < \chi_0, \\ \Phi_0 &= 2f = \text{const} && \text{при } \chi_0 < \chi < \chi_1, \\ \Phi_0 &= \varphi_0(\chi) && \text{при } \chi > \chi_1. \end{aligned} \quad (4.75)$$

Здесь $\Phi_0 = \Phi(\chi, t = 0)$, Δ – постоянный сдвиг структуры на пространственной бесконечности. Асимптотические значения поля Φ_0 при $\chi \rightarrow \pm\infty$ определены по $\text{mod } 4\pi$.

Матрица перехода задачи рассеяния допускает представление (см. (4.16)):

$$T(u, t) = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \left(\Psi^{(0)}(\chi, t, u) \right)^{-1} \Psi_1(\chi, t, u), \quad \Psi^{(0)}(\chi, t, u) = M(u, \chi) e^{A(u, \chi, t) \sigma_3}. \quad (4.76)$$

В рамках метода обратной задачи условие генерирования солитонов сводится к обращению в нуль одного из коэффициентов матрицы перехода [18; 56].

При выборе начального возмущения (4.75) функция Ψ_1 будет решением вспомогательного линейного уравнения

$$\partial_z \Psi_1 = \frac{i}{2} \left(\sigma_1 i \operatorname{sn} u \cos \frac{\Phi_0}{2} + \sigma_2 \operatorname{cn} u \sin \frac{\Phi_0}{2} \right) \Psi_1 \quad (4.77)$$

с асимптотическим условием

$$\Psi_1(u, \chi, t) \rightarrow \Psi_1^{(0)}(u, \chi, t) = M(u, \chi + \Delta) \exp \left(A(u, \chi + \Delta, t) \sigma_3 + \frac{\eta_1 \Delta}{K} u \sigma_3 \right). \quad (4.78)$$

На участке $\chi < \chi_0$ решение Йоста Ψ_1 совпадает с $\Psi_1^{(0)}$ (4.78). На интервале $\chi_0 < \chi < \chi_1$ решение системы (4.77) имеет вид:

$$\begin{aligned} \Psi_2^{(0)}(u, \chi, t) &= U \exp \left[-\frac{\xi}{2} k \chi \sigma_3 \right] C_1, \\ U &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -c_-/\xi \\ c_+/\xi & 1 \end{pmatrix}, \quad \xi = \sqrt{\cos^2 f - \operatorname{cn}^2(u, k)}; \\ c_{\pm} &= \operatorname{sn}(u, k) \cos f \pm \operatorname{cn}(u, k) \sin f. \end{aligned} \quad (4.79)$$

Входящая в (4.79) постоянная матрица C_1 определяется из условия «сшивки» решений $\Psi_1^{(0)}$ и $\Psi_2^{(0)}$ в точке $\chi = \chi_0$ в начальный момент времени (при $t = 0$):

$$\begin{aligned} C_1 &= \exp \left[\frac{\xi}{2} k \chi_0 \sigma_3 \right] U^{-1}(u, \chi_0) M(\chi_0 + \Delta, u) \times \\ &\quad \times \exp \left(A(u, \chi_0 + \Delta, t = 0) \sigma_3 + \frac{\eta_1 \Delta}{K} u \sigma_3 \right). \end{aligned}$$

В области $\chi > \chi_1$ уравнение (4.77) имеет решение:

$$\Psi_3^{(0)}(u, \chi, t) = M(u, \chi) e^{A(u, \chi, t) \sigma_3} C_2.$$

Постоянная матрица C_2 также находится из условия сшивки решений $\Psi_2^{(0)}$ и $\Psi_3^{(0)}$ при $\chi = \chi_1$ при $t = 0$:

$$\begin{aligned} C_2 &= e^{-A(u, \chi_1, t=0) \sigma_3} M^{-1}(u, \chi_1) U(u, \chi_1) \exp \left[-\frac{\xi}{2} k (\chi_1 - \chi_0) \sigma_3 \right] \times \\ &\quad \times U^{-1}(u, \chi_0) M(\chi_0 + \Delta, u) \exp \left(A(u, \chi_0 + \Delta, t = 0) \sigma_3 + \frac{\eta_1 \Delta}{K} u \sigma_3 \right) \end{aligned} \quad (4.80)$$

Согласно (4.76), C_2 совпадает со значением матрицы перехода при $t = 0$:

$$T(u, t = 0) = \begin{pmatrix} a(u) & -\bar{b}(u) \\ b(u) & \bar{a}(u) \end{pmatrix} = C_2(u); \quad \bar{b}(u) = b^*(-u^*), \quad \bar{a}(u) = a^*(-u^*). \quad (4.81)$$

Солитоны параметризуются нулями коэффициента $a(u)$ матрицы перехода. Начальное возмущение генерирует солитоны лишь тогда, когда имеет корни уравнение:

$$a(u) = 0. \quad (4.82)$$

С точностью до несущественных множителей, уравнение (4.82) эквивалентно условию:

$$\operatorname{cth} \left(\frac{\xi}{2} k d \right) - \frac{c_+ \alpha_2 + c_- \alpha_1}{\xi (1 + \alpha_1 \alpha_2)} = 0, \quad (4.83)$$

где $d = \chi_1 - \chi_0$,

$$\alpha_1 = \frac{1 + \operatorname{dn}(\chi_0 + \Delta + u)}{k \operatorname{sn}(\chi_0 + \Delta + u)}, \quad \alpha_2 = \frac{1 + \operatorname{dn}(\chi_1 - u)}{k \operatorname{sn}(\chi_1 - u)}.$$

При переходе от (4.82) к (4.83) использовано тождество (4.51).

Пусть для определенности $\chi_0 = r - K$, $\chi_1 = 2K - r$, тогда: $\chi_1 - \chi_0 = d = 2(K - r) + \Delta$. Неподвижный бризер параметризуется значением $u = \mu = -\rho + i\theta$; $\theta = 0$. В этом случае уравнение (4.83) упрощается и принимает вид:

$$\operatorname{cth} \left(\frac{\xi}{2} k d \right) - \frac{k}{\xi} \operatorname{sn} u \operatorname{sn}(u + K) \cos f = 0. \quad (4.84)$$

Величина $K - r$ ($0 \leq r \leq K$) определяет смещение ступеньки относительно спиральной структуры. При $r = K$ ступенька моделирует начальное возмущение одного из доменов структуры длиной $d = \Delta$. При $0 \leq d \leq 1.8K$ такое возмущение не порождает бризера: фоновые распределения $\varphi_0(\chi)$ и $\varphi_0(\chi + \Delta)$ сближаются, формируя единую структуру $\varphi_0(\chi + \Delta/2)$ на всей области изменения χ . Согласно численному моделированию, ступенька генерирует бризер, начиная с пороговых значений ее высоты $2f \geq 3 \operatorname{am}(\rho, k)$. В случае $4 \operatorname{am} \rho < 2f \leq 6 \operatorname{am} \rho$ начальное возмущение сначала снижает амплитуду до уровня $A = 4 \operatorname{am} \rho$, сбрасывая избыток энергии в виде диспергирующих волн. Затем из него формируется неподвижный бризер, ядро которого располагается в середине резонаторного домена. Когда высота ступеньки $2f \geq 6 \operatorname{am} \rho$, она распадается на два бризера, движущихся в противоположных направлениях.

Аналитический расчет (4.84) дает близкие результаты. А именно, если задать ступеньку высоты $2f \sim 4 \operatorname{am} \rho$, то уравнение (4.84) будет иметь решения $\mu = -\rho$, когда параметр ρ лежит в интервале $1.8K \leq \rho \leq 2.5K$. При этом $\Delta = 4\rho = d$.

4.5.2 Возбуждение двух кинков одинаковой хиральности

В отличие от бризеров, кинки (4.20) в спиральной структуре не бывают неподвижными. Потому по закону сохранения импульса локализованное возмущение структуры без начальной скорости должно породить два кинка, движущихся в противоположных направлениях.

Для возбуждения двух кинков в структуре проще всего дополнительно «закрутить» часть спиральной структуры на 4π , а затем удлинить один из ее доменов на величину $\Delta_1 + \Delta_2 = \Delta$ (по переменной χ) на фронте закрутки. Соответствующее начальное возмущение имеет вид, приведенный на рисунке 4.17:

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= \varphi_0(\chi + \Delta) + 4\pi && \text{при } \chi < \chi_0, \\ \Phi_0 &= 2f = \text{const} && \text{при } \chi_0 < \chi < \chi_1, \\ \Phi_0 &= \varphi_0(\chi) && \text{при } \chi > \chi_1. \end{aligned} \quad (4.85)$$

Заметим, что начальное условие (4.85) только сдвигом на 4π отличается от соответствующего начального возмущения (4.75), используемого для возбуждения бризера.

Положим $\chi_0 = K - \Delta$, $\chi_1 = K$, тогда: $\chi_1 - \chi_0 = d = \Delta$. При $0 < \Delta < 4K$ начальному возмущению (4.85) соответствует удлинение одного из доменов структуры с одновременным образованием в нем прямоугольной ступеньки высотой $2f$. В этом случае аналог уравнения (4.83) принимает вид:

$$\text{cth} \left(\frac{\xi}{2} k d \right) - \frac{k}{\xi} \text{sn} u \text{sn}(u + K) \cos f = 0. \quad (4.86)$$

Кинки параметризуются четырьмя комплексными корнями уравнения (4.86): $u = -\rho \pm iK'$, $-\rho \pm iK' + 2K$ ($0 < \rho < K$), которые лежат в параллелограмме периодов со сторонами $4K$, $4iK'$. В их число входят два независимых нуля $u = -\rho \pm iK'$. Они параметризуют два кинка одинаковой ширины, движущиеся в противоположных направлениях.

Уравнение (4.86) имеет требуемые решения при условии $\cos f < 0$. Так из (4.86) следует, что когда f близко к π , удлиненный домен шириной $\Delta \sim 1.2K$ порождает два кинка шириной $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta \sim 0.6K$. Этот результат подтверждается данными численного моделирования, согласно которому ступенька шириной $0 < d = \Delta < 4K$ и высотой $0 \leq 2f \leq 4\pi$ порождает два кинка равной

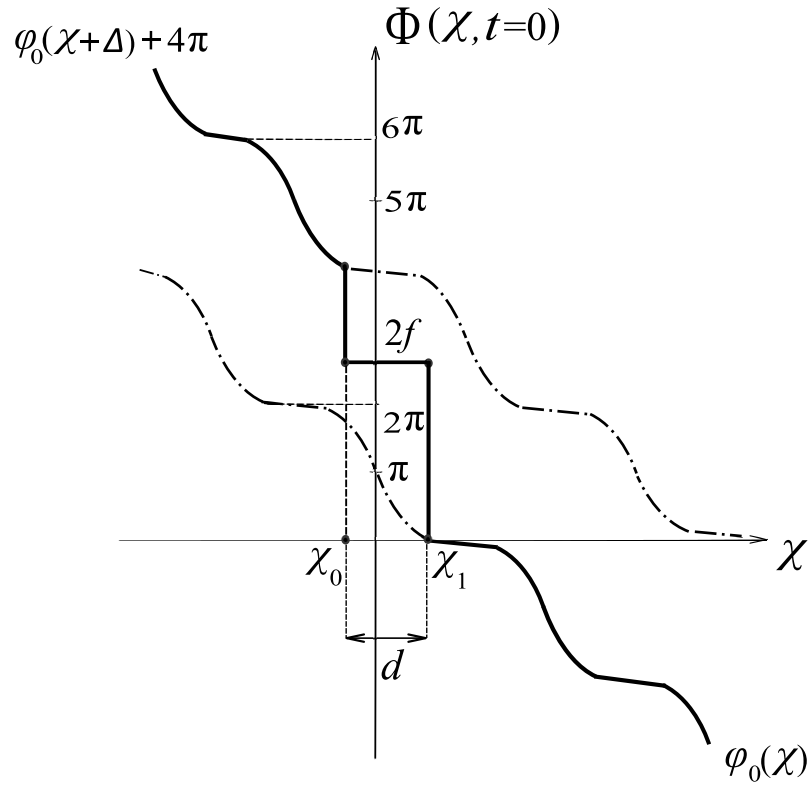


Рисунок 4.17 — Начальное возмущение $\Phi(\chi, t=0)$ (4.85) спиральной структуры, пригодное для формирования двух кинков одинаковой хиральности.

ширины $\Delta/2$. Оба полученных кинка имеют одинаковую хиральность, совпадающую с хиральностями доменных стенок структуры $s_1 = s_2 = +1$. С течением времени они движутся в противоположных направлениях (см. рисунок 4.7.1в).

Заметим, что начальные условия (4.75), (4.85) порождают не только солитоны, но и диспергирующее излучение, т. к. спектральное преобразование ступеньки (4.75), (4.75) содержит нетривиальный коэффициент отражения $b(u)$ (см. (4.81)). При больших временах t амплитуда излучения убывает по закону $\sim t^{-1/2}$. Поле излучения проявляется в дополнительных осцилляциях как самих солитонов, так и их окружения. В работе [A7] изложена общая схема интегрирования модели (4.4), которая позволяет проследить, как из произвольного начального распределения намагниченности на фоне геликоидальной структуры рождаются солитоны и диспергирующие волны.

4.6 Применение полученных результатов для аналитического описания солитонов электрической поляризации в мультиферроиках

В заключение остановимся на возможностях использования полученных результатов. Прежде всего, стоит упомянуть, что в последние годы синтезировано много молекулярных хиральных магнетиков со значительным вкладом взаимодействия Дзялошинского – Мории в магнитные свойства [1–7; 112; 114–116]. Такие соединения оптически прозрачны. Изменяя их химический состав, можно менять спин-спиновые взаимодействия и энергию анизотропии, и тем самым создавать условия, благоприятные для наблюдения солитонов [117–119]. В оптически прозрачных материалах макроскопические сдвиги геликоидальной структуры при движении в ней кинков и бризеров можно напрямую наблюдать с помощью магнитооптического эффекта Фарадея. Этим методом в [120; 121] был визуализирован динамический дрейф полосовых доменов в кристаллах ферритов–гранатов.

Отметим также, что модель sine–Gordon достаточно универсальна. Она позволяет успешно описать не только нелинейные возбуждения в геликоидальной магнитной структуре, но и солитоны электрической поляризации в циклоидальной структуре мультиферроиков. Циклоидальная структура представляет собой весьма распространенный тип магнитного упорядочения [122]. В частности, она реализуется в группе двухподрешеточных антиферромагнетиков, принадлежащих кристаллографическому классу D_{2h} [123]. Согласно [102; 123; 124], плотность функции Лагранжа для антиферромагнетика в электрическом поле $\mathbf{E} = (0, 0, E)$, параллельном оси z , имеет вид:

$$L = M_0^2[(\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}') [c^2(\partial_t \mathbf{l})^2 - (\partial_i \mathbf{l} \cdot \partial_i \mathbf{l})] + b_3 l_3^2 + b_2 l_2^2 + E \kappa (l_3 \partial_y l_2 - l_2 \partial_y l_3)]. \quad (4.87)$$

Здесь $\mathbf{l}(\mathbf{r}, t)$ – нормированный вектор антиферромагнетизма ($\mathbf{l}^2 = 1$), M_0 – номинальная намагниченность подрешеток, $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}'$ – константы неоднородного обмена между одинаковыми и разными подрешетками соответственно ($\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}' > 0$), $b_3 > b_2 > 0$ – постоянные кристаллографической анизотропии, κ – параметр неоднородного магнитоэлектрического взаимодействия;

$c = \gamma M_0 \sqrt{2 \delta (\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}')} -$ максимальная групповая скорость активационных спиновых волн в спиральной структуре, γ – магнитомеханическое отношение, δ – постоянная однородного обмена между подрешетками.

Плотность энергии кристалла записывается как

$$w = M_0^2[(\alpha - \alpha')[c^2(\partial_t \mathbf{l})^2 + (\partial_i \mathbf{l} \cdot \partial_i \mathbf{l})] - b_3 l_3^2 - b_2 l_2^2 + E \kappa (l_2 \partial_y l_3 - l_3 \partial_y l_2)].$$

В работе [123] показано, что при достаточной величине E энергетически выгодной станет неоднородная структура вдоль оси Oy с циклоидальным вращением вектора \mathbf{l} в плоскости yOz .

Для теоретического описания нелинейной динамики такой структуры в параметризации вектора $\mathbf{l} = (0, \sin \Phi(y, t), \cos \Phi(y, t))$ перейдем к безразмерным переменным $y' = y \sqrt{(b_3 - b_2)/(\alpha - \alpha')}$, $t' = t c \sqrt{(b_3 - b_2)/(\alpha - \alpha')}$. Тогда для расчета Φ из (4.87) получим уравнение sine-Gordon:

$$(\partial_{t'}^2 - \partial_{y'}^2)\Phi = \sin \Phi \cos \Phi,$$

которое отличается от модели (4.4) постоянным коэффициентом «2». «Штрихи» над новыми переменными далее опускаем.

В безразмерных переменных плотность энергии (4.1) системы примет вид:

$$w/[M_0^2 (b_3 - b_2)] = (\partial_t \Phi)^2 + (\partial_y \Phi)^2 + q \partial_y \Phi + \sin^2 \Phi, \quad (4.88)$$

где $q = E \kappa [(b_3 - b_2)(\alpha - \alpha')]^{-1/2}$. При $q < 4/\pi$ минимуму энергии (4.88) отвечает однородное распределение параметра порядка $\Phi = 0 \pmod{\pi}$, а при $q > 4/\pi$ — циклоидальная структура в виде одномерной решетки π -кинков поля Φ :

$$\varphi_0(\chi) = \frac{\pi}{2} - \text{am}(\chi, k), \quad \chi = \frac{y}{k}. \quad (4.89)$$

Полученные в этой главе решения модели sine-Gordon (4.6) позволяют описать солитоны электрической поляризации на фоне решетки (4.89) [A21]. Образование бризера сопровождается макроскопическим сдвигом фоновой структуры на величину Δ по координате $\chi = y/k$:

$$\begin{aligned} \Phi(\chi, t) &\rightarrow \varphi_0(\chi) && \text{при } y \rightarrow +\infty, \\ \Phi(\chi, t) &\rightarrow \varphi_0(\chi + \Delta) && \text{при } y \rightarrow -\infty. \end{aligned} \quad (4.90)$$

Сдвиг выражается через параметр ρ бризера (4.36): $\Delta = 4\rho$.

Составляющая электрической поляризации среды вдоль оси Oz определяется выражением:

$$P = -\frac{\partial w}{\partial E} = M_0^2 \kappa \sqrt{\frac{b_3 - b_2}{\alpha - \alpha'}} \partial_y \Phi. \quad (4.91)$$

Согласно (4.90), циклоидальная магнитная структура на больших расстояниях от бризера остается невозмущенной и порождает решетку солитонов электрической поляризации (4.91):

$$\begin{aligned} P(\chi, t) &\rightarrow \tilde{P}(\chi) && \text{при } y \rightarrow +\infty, \\ P(\chi, t) &\rightarrow \tilde{P}(\chi + \Delta) && \text{при } y \rightarrow -\infty, \end{aligned} \quad (4.92)$$

где $\tilde{P}(\chi) = -M_0^2 \kappa k^{-1} \sqrt{(b_3 - b_2)/(\alpha - \alpha')}$ $\text{dn}(\chi, k)$. Это следует из разложения:

$$\text{dn}(\chi, k) = \frac{\pi}{K'} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \text{sech} \left[\frac{1}{l_0} (\chi - 2Kp) \right],$$

где $l_0 = 2Kk'/\pi$ – ширина доменной границы, в которой происходит локализованный разворот вектора антиферромагнетизма $\mathbf{l}(y, t)$, p – целые числа. Наличие решетки из солитонов поляризации приводит к периодическому изменению диэлектрической проницаемости среды [122; 125]. Поэтому в прозрачных материалах циклоидальную структуру и ее деформации из-за образования бризера можно визуализировать не только магнитооптическими, но и оптическими методами.

Важно, что в мультиферроиках с циклоидальной структурой посредством комбинации внешних электрического и магнитного полей можно создавать условия, благоприятные для наблюдения солитонов и эффективно управлять возможностями их генерирования. В частности, длинный домен с ядром бризера можно обнаружить, фиксируя локальные электрические поля от стенок структуры. На границах образца, перпендикулярных оси Oz , циклоидальная структура порождает электрические заряды с поверхностной плотностью P . Суммарный заряд, приходящийся на единицу длины каждого из солитонов решетки (4.92), равен: $q = \pm M_0^2 \kappa \pi \sqrt{(b_3 - b_2)/(\alpha - \alpha')}$. При $\kappa > 0$ знак заряда на нижней грани образца положителен, а на верхней – отрицателен. Сканирование электрического поля поляризационных зарядов также дает информацию о деформациях циклоидальной структуры при образовании в ней бризера.

ВЫВОДЫ

1. На основе модификации метода обратной задачи рассеяния детально исследованы пульсирующие солитоны – бризеры – в геликоидальной магнитной структуре в рамках модели sine–Gordon. Показано, что наличие солитонов приводит к макроскопическим трансляциям структуры, которые можно визуализировать с помощью магнитооптических методов. Выявлен сценарий разрушения бризера при условии, что скорость его движения как целого намного превышает фазовую скорость распространения пульсаций в его ядре. Установлено, что частотный спектр внутренних колебаний бризера лежит ниже дискретного спектра частот стоячих спиновых волн в структуре. Отсюда следует, что поглощение СВЧ–мощности на частоте внутренних колебаний бризера может указать на его присутствие в геликоидальной структуре.

2. Представлен детальный анализ строения и свойств мультисолитонных состояний, отвечающих наличию в геликоидальной структуре двух движущихся кинков произвольных хиральностей. Выявлены характерные особенности взаимодействия движущихся кинков друг с другом и с неподвижными доменными стенками (кинками) структуры.

3. Исследованы возможности наблюдения и возбуждения бризеров в спиральных структурах магнетиков и мультиферроиков. Показано, что в силу универсальности модели sine–Gordon, полученные в данной главе результаты могут быть применены для аналитического описания солитонов электрической поляризации в мультиферроиках с циклоидальным магнитным упорядочением.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1) Получены новые аналитические решения уравнения Ландау – Лифшица для ферромагнетика с анизотропией типа «легкая ось», которые описывают солитоны, сильно связанные с периодической полосовой доменной структурой. Для построения решений приспособлена модификация метода обратной задачи рассеяния – процедура «одевания» частного решения вспомогательной линейной системы дифференциальных уравнений с последующим решением задачи Римана теории функций комплексной переменной. Успешно преодолены две основные трудности рассматриваемой задачи. Первая трудность – принципиальная – состояла в том, что задача Римана формулируется не в комплексной плоскости спектрального параметра задачи рассеяния, как это было при интегрировании уравнения Ландау – Лифшица на однородном фоне, а на двулистной римановой поверхности, возникновение которой обусловлено наличием периодического основного состояния – доменной структуры. Это препятствие удалось преодолеть униформизацией спектрального параметра в терминах двоякопериодических эллиптических функций Якоби с последующим использованием теории эллиптических функций. Вторая трудность – техническая – была связана с тем, что матричные решения задачи Римана являются не периодическими, а квазипериодическими: при сдвиге пространственной координаты или переносе спектрального параметра задачи из одного параллелограмма периодичности в другой они приобретают дополнительные множители блоховского типа. Эту проблему удалось решить путем подбора комбинаций эллиптических функций, обеспечивающих верные трансформационные свойства решений.

2) Развитая техника интегрирования уравнения Ландау – Лифшица для легкоосного ферромагнетика на нелинейном периодическом фоне успешно использована для построения и анализа нелинейных коллективных возбуждений в более реалистичной модели двухосного ферромагнетика на фоне периодической доменной структуры блоховского типа. В общем случае, метод обратной задачи рассеяния сталкивается с существенными затруднениями в применении к данной модели. Операторы вспомогательной линейной системы сами аналитичны на римановой поверхности, отличной от той, которая вызвана наличием доменной структуры. В работах диссертации интегрирование модели проведено

для выделенного случая доменной структуры, риманова поверхность которой конгруэнтна римановой поверхности операторов вспомогательной линейной системы. Это позволило построить новые солитонные решения модели в терминах хорошо изученных эллиптических функций.

3) Получены новые точные решения уравнения Ландау – Лифшица для ферромагнетика с анизотропией типа «легкая плоскость», которые описывают отражение солитонных возбуждений от границы ферромагнетика при краевых условиях, отвечающих произвольной степени закрепления спинов на границе. Для решения этой задачи использована модификация метода обратной задачи рассеяния в совокупности с методом изображений, применяемым в электростатике. В контексте метода изображений, поле намагниченности, заданное на полуоси (в полубесконечном образце) четным образом продолжается на всю ось. Это ведет к видоизменению схемы обратной задачи. Задача Римана приобретает новые редукции, а число нулей задачи Римана удваивается. Это связано с тем, что каждая группа нулей задачи Римана отвечает не только за действительный солитон, присутствующий в образце, но и за фиктивный «солитон изображения», который с математической точки зрения расположен зеркально симметрично по отношению к границе образца, но по другую сторону от границы. Используемая схема позволила получить полное решение задачи и впервые провести аналитическое описание взаимодействия солитонов с границей легкоплоскостного ферромагнетика.

4) Представлен полный анализ неподвижных и движущихся прецессионных солитонов в полосовой доменной структуре легкоосного ферромагнетика. Движущиеся солитоны служат элементарными переносчиками макроскопических трансляций структуры, которые могут быть зафиксированы методами магнитооптики. Неподвижные солитоны делятся на два типа. Оба они представляют обобщение солитонов на фоне однородного основного состояния среды. Отличие первого неподвижного солитона состоит в том, что фазы вращения намагниченности правее и левее его центра различаются на π . Ядро солитона периодически меняет свой размер. Его колебания передаются соседним доменам, вызывая их синфазные смещения. В центре второго неподвижного солитона намагниченность никогда не достигает насыщения. Частота его прецессии конечна, а размер ядра всегда удовлетворяет континуальному приближению. Эллиптичность и неоднородность прецессии намагниченности в ядре солитона приводит к колебаниям доменных стенок структуры. Несмотря на сложность

решения, характер таких колебаний удалось проанализировать детально. Вдали от центра солитона имеются выделенные точки – узлы, в которых колебания отсутствуют. Положения узлов найдены аналитически, соседние узлы по обе стороны от центра отстоят друг от друга на полпериода структуры. Части доменов, расположенные между соседними узлами, периодически смещаются вдоль структуры, причем направления смещений соседних доменов противоположны друг другу. Возможность формирования такого солитона в структуре подтверждена численным экспериментом.

5) Исследовано поведение солитонов в доменной структуре легкоосного ферромагнетика вблизи границ области их существования. В областях неустойчивости структуры по линейному приближению солитоны превращаются в протяженные модуляции структуры, которые движутся с большой скоростью. Среди них найдено два выделенных случая, когда модуляции структуры остаются неподвижны. В обоих случаях солитоны вырождаются в аperiodические слабо локализованные эллиптически-полиномиальные возбуждения. Их поведение специфично. В первом из них намагниченность на протяжении двух центральных доменов не меняется со временем, однако, удаленные от центра доменные стенки с четными номерами с течением времени сдвигаются по направлению к центру возбуждения, а затем возвращаются в исходные положения. В ядре второго возбуждения намагниченность меняется интенсивно: продольные смещения областей доменной структуры сопровождаются разворотом намагниченности на 360° градусов в плоскости, перпендикулярной оси анизотропии. Конец вектора намагниченности движется по сердцевидной траектории с выколотой угловой точкой, которой соответствуют бесконечно удаленные моменты времени. Изменения намагниченности в ядре передаются прилегающим к нему областям структуры, которые притягиваются к ядру, а затем отталкиваются обратно. Рассмотренные слабо локализованные состояния служат аналогами «солитонов Перегринна» на модуляционно неустойчивом фоне, которые наблюдаются в оптоволокне экспериментально.

6) Представлен полный анализ неподвижных и движущихся прецессионных солитонов в физически выделенной доменной структуре двухосного ферромагнетика и сравнительный анализ солитонов двухосного ферромагнетика с солитонами легкоосного ферромагнетика в доменной структуре, а также двухосного ферромагнетика на фоне однородного основного состояния среды. Показано, что наличие двухосной анизотропии слабо сказывается на свойствах

неподвижных солитонов: их строение и качественные особенности остаются теми же, что и в доменной структуре легкоосного ферромагнетика. В обоих случаях наличие солитонов приводит к макроскопическому сдвигу структуры, а допустимая ширина ядер солитонов не превышает периода структуры. Установлены возможности формирования в доменной структуре двухосного ферромагнетика внутримоменных солитонов, а также солитонных возбуждений, которые можно трактовать как зародыши перемагничивания материала. Изучены особенности поведения солитонов вблизи границы спектра бесщелевых мод доменной структуры. Тогда солитоны преобразуются в апериодические протяженные модуляции структуры – аналоги «солитонов Перегринна». В отличие от случая легкоосного ферромагнетика, такие модуляции, хотя и имеют большую амплитуду, но сохраняют конечную скорость. Рассмотрены два особых случая, когда модуляции структуры становятся неподвижны. Установлено, что они отличаются от таковых в случае легкоосного ферромагнетика траекторией, описываемой вектором намагниченности в их центрах и характером смещений прилегающих к центру доменных стенок. Найдены спектральные разложения импульса и энергии локализованных возбуждений доменной структуры двухосного ферромагнетика, учитывающие вклады солитонов и спиновых волн. Анализ нелинейной динамики диспергирующих спиновых волн в доменной структуре сведен к решению линейного интегрального уравнения.

7) Проведен детальный анализ взаимодействия солитонов с границей полубесконечного ферромагнетика с анизотропией типа «легкая плоскость». Показано, что солитоны в полубесконечном ферромагнетике делятся на два типа: волны поворота намагниченности и солитоны, имеющие собственную частоту пульсаций – бризеры. Оба типа солитонов могут быть только движущимися, – наличие легкоплоскостной анизотропии исключает формирование вблизи границы образца неподвижных солитонов. Вдали от границы образца солитоны (волны поворота и бризеры) приобретают форму, характерную для локализованных возбуждений неограниченной среды. Характер взаимодействия волн поворота с границей существенно определяется величиной эффективного поля однонаправленной поверхностной анизотропии, определяющего степень закрепления спинов на границе. В зависимости от соотношения величины поверхностного поля и физических параметров волны поворота, при столкновении с границей образца распределение спинов в ней становится блоховским, либо неелевским. При положительных значениях поля разворот намагниченности

в момент столкновения сопровождается частичным перемагничиванием среды вблизи границы. Выявлена аналогия между отражением волны поворота от границы легкоплоскостного ферромагнетика в случаях слабого и сильного поверхностных полей и отражением света от границы менее или более оптически плотной среды: а именно, в сильном поле намагниченность в центре волны поворота приобретает дополнительный разворот на π . Установлено, что при взаимодействии бризеров с границей образца их ядра сильно деформируются, а в случае сильно закрепленных спинов намагниченность вблизи границы за время взаимодействия меняется на величину порядка намагниченности насыщения. Вычислены интегралы движения, гарантирующие стабильность солитонов и выполнение ими верных краевых условий при взаимодействии с границей образца. Получено сингулярное интегральное уравнение для описания нелинейной динамики спиновых волн в полубесконечном образце в отсутствие солитонов.

8) Полученные явные решения модели Ландау – Лифшица для полубесконечного легкоплоскостного ферромагнетика использованы для аналитического описания нелинейных возбуждений в полубезграницном хиральном ферромагнетике с легкоплоскостной анизотропией при краевых условиях, соответствующих полному, либо частичному закреплению магнитной спирали на границе поверхностным полем. Обе модели связаны калибровочным преобразованием, что позволяет воспроизвести солитонные решения одной модели, исходя из уже найденных солитонов другой модели. Показано, что хиральные солитоны наследуют основные динамические свойства солитонов легкоплоскостного ферромагнетика. Формирование локализованных вблизи границы образца неподвижных хиральных солитонов, как и в случае легкоплоскостного ферромагнетика, оказывается невозможным.

9) Представлен анализ комплекса из двух кинков, встроенных в одномерную решетку доменных стенок (2π -кинков) геликоидальной магнитной структуры без центра инверсии в рамках модели sine-Gordon. Движущиеся кинки в структуре могут обладать произвольными направлениями закрутки (хиральностями). Соотношение хиральностей кинков определяет характер их взаимодействия при столкновении. В ходе анализа поочередно описан каждый из 9-и возможных вариантов сочетания хиральностей кинков основного состояния (решетки кинков) и движущихся кинков, добавленных в решетку. Исследованы возможности возбуждения двух кинков в структуре из локализованного начального возмущения. Наиболее пригодным для этой цели оказалось

возмущение, полученное закруткой части спирали на угол 4π , кратный периоду спирали, и дополнительным удлинением одного из ее доменов. Численное моделирование подтвердило, что из полученного таким образом начального условия формируются два движущихся в противоположных направлениях одинаковых кинка той же хиральности, что и кинки структуры.

10) Исследованы строение и свойства движущегося бризера в геликоидальной структуре. Показано, что характер его взаимодействия со структурой определяется соотношением скорости движения бризера как целого и фазовой скорости пульсаций в его ядре. Когда поступательная скорость движения бризера превышает фазовую, его ядро сохраняет фиксированный размер, в то время как полная ширина бризера периодически меняется от размеров ядра до нескольких периодов структуры. В системе отсчета, связанной с движущимся бризером, к его ядру периодически добавляются вытянутые участки квазистатических деформаций структуры – «хвосты» и «предвестники» движущегося солитона. Вблизи границ своей области существования бризер превращается в аperiодическую модуляцию структуры. При этом протяженность его «хвостов» и «предвестников» неограниченно возрастает.

11) Детально исследованы строение и свойства неподвижного бризера в геликоидальной магнитной структуре. Наличие солитонов приводит к макроскопическому сдвигу структуры. Ядро неподвижного бризера отодвигает от себя ближайшие к нему 2π -кинки и колеблется в пределах протяженного домена, ширина которого может достигать двух периодов структуры. Колебания ядра бризера приводят к смещениям прилегающих к нему доменных стенок вдоль оси магнитной спирали. Соседние доменные стенки смещаются в противофазе по отношению друг к другу. Характер этих смещений таков, что домены структуры оказываются поделены на равные участки. На границах этих участков образуются узловые точки, в которых колебания структуры отсутствуют. Положения узлов найдены аналитически, расстояние между соседними узлами по обе стороны от ядра бризера равно периоду структуры. Неподвижный бризер с указанным строением получен численным моделированием. Для его формирования намагниченность в пределах одного из доменов была локально закручена на постоянный угол, а сам домен был удлинен для учета макроскопического сдвига структуры, сопутствующего образованию бризера.

12) Решена задача о поглощении мощности продольной внешней накачки на частотах стоячих спиновых волн в геликоидальной структуре при наличии

постоянного внешнего поля, перпендикулярного оси магнитной спирали. Показано, что диапазон частот пульсаций неподвижных бризеров лежит в щели спектра стоячих спиновых волн, что облегчает его обнаружение в структуре.

Отметим, что ввиду универсальности модели sine-Gordon, результаты 9)-11) подходят для описания не только магнитных солитонов в геликоидальной структуре, но и солитонов электрической поляризации в циклоидальной структуре мультиферроиков.

Список литературы

1. Formation of a magnetic soliton lattice in copper metaborate / D. Roessli, J. Schefer, G. A. Petrakovskii, B. Ouladdiaf, M. Boehm, U. Staub, A. Vorotinov, L. Bezmaternikh // *Phys. Rev. Lett.* — 2001. — Vol. 86. — P. 1885—1888.
2. Field-induced commensurate-incommensurate phase transition in a Dzyaloshinskii – Moriya spiral antiferromagnet / A. Zheludev, S. Maslov, G. Shirane, Y. Sasago, N. Koide, K. Uchinokura // *Phys. Rev. Lett.* — 1997. — Vol. 78, no. 25. — P. 4857—4860.
3. An approach to chiral magnets using α -hydroxycarboxylates / A. Beghidja, G. Rogez, A. Rabu, R. Welter, M. Drillon // *J. Mater. Chem.* — 2006. — Vol. 16, no. 26. — P. 2715—2728.
4. *Kishine, J.* Synthesis, structure and magnetic properties of chiral molecule-based magnets / J. Kishine, K. Inoue, Y. Yoshida // *Progr. Theor. Phys. Supplement.* — 2005. — Vol. 159. — P. 82—85.
5. Magnetism: molecules to materials. V / Edited by J. S. Miller and M. Drillon. — Weinheim : Wiley – VCH Verlag GmbH, Co. KGaA, 2005. — 395 p.
6. Chiral molecular magnets: Synthesis, structure and magnetic behavior of series $[M(L\text{-tart})]$ ($M = \text{Mn}^{\text{II}}, \text{Fe}^{\text{II}}, \text{Co}^{\text{II}}, \text{Ni}^{\text{II}}$; L-tart=(2R,3R)-(+)-tartrate) / E. Coronado, J. R. Galán-Mascarós, C. J. Gómez-Garsía, A. Murcia-Martinez // *Chem. Eur. J.* — 2006. — Vol. 12. — P. 3484—3492.
7. Possible magnetic chirality in optically chiral magnet $[\text{Cr}(\text{CN})_6][\text{Mn}(\text{S} - \text{pnH}(\text{H}_2\text{O}))(\text{H}_2\text{O})]$ muon spin rotation and relaxation / K. Ohishi, W. Higemoto, A. Koda, S. R. Saha, R. Kadano, K. Inoue, H. Higashikawa // *J. Phys. Soc. Jpn.* — 2006. — Vol. 75, no. 6. — P. 063705.
8. *Туров, Е. А.* Физические свойства магнитоупорядоченных кристаллов / Е. А. Туров. — Москва : Издательство АН СССР, 1963. — 224 с.
9. *Ахиезер, А. И.* Спиновые волны / А. И. Ахиезер, В. Г. Барьяхтар, С. В. Пелетминский. — Москва : Наука, 1967. — 368 с.

10. Симметрия и физические свойства антиферромагнетиков / Е. А. Туров, А. В. Колчанов, В. В. Меньшенин, И. Ф. Мирсаев, В. В. Николаев. — Москва : Физматлит, 2001. — 560 с.
11. *Борисов, А. Б.* Квазиодномерные магнитные солитоны / А. Б. Борисов, В. В. Киселев. — Москва : Физматлит, 2014. — 520 с.
12. Fast micromagnetic simulations on GPU – recent advances made with mumax3 / J. Leliaert, M. Dvornik, J. Mulkers, J. de Clercq, M. V. Milosevic, B. van Waeyenberge // J. Phys. D.: Appl. Phys. — 2018. — Vol. 51. — P. 123002.
13. *Leliaert, J.* Tomorrow’s micromagnetic simulations / J. Leliaert, J. Mulkers // J. Appl. Phys. — 2019. — Vol. 125. — P. 180901.
14. *Косевич, А. М.* Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны / А. М. Косевич, Б. А. Иванов, А. С. Ковалев. — Киев : Наукова думка, 1983. — 192 с.
15. *Захаров, В. Е.* Схема интегрирования нелинейных эволюционных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния. I / В. Е. Захаров, А. Б. Шабат // Функц. анализ и его прил. — 1974. — Т. 8, № 3. — С. 43—53.
16. *Абловиц, М.* Солитоны и метод обратной задачи рассеяния / М. Абловиц, Х. Сигур. — Москва : Мир, 1987. — 479 с.
17. Солитоны и нелинейные волновые уравнения / Р. Додд, Д. Эйлбек, Д. Гиббон, Х. Моррис. — Москва : Мир, 1988. — 694 с.
18. Теория солитонов: Метод обратной задачи / В. Е. Захаров, С. В. Мананков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский. — Москва : Наука, 1980. — 320 с.
19. *Захаров, В. Е.* Релятивистски-инвариантные двумерные модели теории поля, интегрируемые методом обратной задачи / В. Е. Захаров, А. В. Михайлов // ЖЭТФ. — 1978. — Т. 74, № 6. — С. 1953—1973.
20. *Захаров, В. Е.* Интегрирование нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния. II / В. Е. Захаров, А. Б. Шабат // Функц. анализ и его прил. — 1979. — Т. 13, № 3. — С. 13—22.
21. *Hirota, R.* Bilinearization of soliton equation / R. Hirota // J. Phys. So. Jpn. — 1982. — Vol. 51, no. 1. — P. 323—331.

22. *Хирота, Р.* Прямые методы в теории солитонов. – В кн.: Солитоны – под ред. Р. Буллафа, Ф. Кодри / Р. Хирота. — Москва : Мир, 1983. — 408 с.
23. *Лэм, Д. Л.* Введение в теорию солитонов / Д. Л. Лэм. — Москва : Мир, 1983. — 294 с.
24. *Ньюэлл, А.* Солитоны в математике и физике / А. Ньюэлл. — Москва : Мир, 1989. — 328 с.
25. *Скотт, Э.* Нелинейная наука: рождение и развитие когерентных структур / Э. Скотт. — Москва : Физматлит, 2007. — 560 с.
26. *Карпман, В. И.* Теория возмущений для солитонов / В. И. Карпман, Е. М. Маслов // ЖЭТФ. — 1977. — Т. 3, № 2. — С. 537—559.
27. *Мак-Лафлин, Д.* Многосолитонная теория возмущений / Д. Мак-Лафлин, Э. Скотт // Солитоны в действии. — Москва : Мир, 1981. — С. 210—268.
28. *Kivshar, Y. S.* Dynamics of solitons in nearly integrable systems / Y. S. Kivshar, B. A. Malomed // Rev. Mod. Phys. — 1989. — Vol. 61, no. 4. — P. 763—916.
29. *Хуберт, А.* Теория доменных стенок в упорядоченных средах / А. Хуберт. — Москва : Наукова думка, 1977. — 310 с.
30. *Браун, У. Ф.* Микромагнетизм / У. Ф. Браун. — Москва : Наука, 1979. — 160 с.
31. *Филиппов, Б. Н.* Динамические эффекты в ферромагнетиках с доменной структурой / Б. Н. Филиппов, А. П. Танкеев. — Москва : Наука, 1987. — 216 с.
32. *Фартздинов, М. М.* Спиновые волны в ферро- и антиферромагнетиках с доменной структурой / М. М. Фартздинов. — Москва : Наука, 1988. — 238 с.
33. *Borovik, A. E.* Integration of the Landau – Lifshitz equation with preferred-axis anisotropy by the method of the inverse scattering problem / A. E. Borovik, S. Klama, S. I. Kulinich // Physica D. — 1988. — Vol. 32, no. 1. — P. 107—134.

34. *Бикбаев, Р. Ф.* Уравнение Ландау – Лифшица. Теория точных решений II / Р. Ф. Бикбаев, А. И. Бобенко, Р. А. Итс. — Донецк : Препринт Дон ФТИ-84-7 (82), 1984. — 51 с.
35. *Бикбаев, Р. Ф.* О конечнозонном интегрировании уравнения Ландау – Лифшица / Р. Ф. Бикбаев, А. И. Бобенко, Р. А. Итс // ДАН. — 1983. — Т. 272, № 6. — С. 1293–1298.
36. Интегрируемые динамические системы: спектральные и дифференциально-геометрические аспекты / Ю. Ф. Митропольский, Н. Н. Боголюбов (мл.), А. К. Прикарпатский, В. Г. Самойленко. — Киев : Наукова думка, 1987. — 296 с.
37. *Бобенко, А. И.* Вещественные алгебро–геометрические решения уравнения Ландау – Лифшица в тета–функциях Прима / А. И. Бобенко // Функц. анализ и его прил. — 1985. — Т. 19, № 1. — С. 6–19.
38. *Мусхелишвили, Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения / Н. И. Мусхелишвили. — Москва : Наука, 1968. — 511 с.
39. *Гахов, Ф. Д.* Краевые задачи / Ф. Д. Гахов. — Москва : Гос. изд. физ.-мат. лит., 1963. — 639 с.
40. *Широбоков, М. К.* К теории механизма намагничивания ферромагнетиков / М. К. Широбоков // ЖЭТФ. — 1945. — Т. 15, № 1/2. — С. 57–76.
41. *Бейтмен, Г.* Высшие трансцендентные функции. Т. 3: Эллиптические и автоморфные функции, функции Ламе и Матье / Г. Бейтмен. — Москва : Наука, 1967. — 300 с.
42. *Byrd, P. F.* Handbook of elliptic integrals for engineers and scientists / P. F. Byrd, M. D. Friedman. — Berlin – Heidelberg – New York : Springer – Verlag, 1971. — 358 p.
43. *Ахиезер, А. И.* Элементы теории эллиптических функций / А. И. Ахиезер. — Москва : Наука, 1970. — 304 с.
44. *Biondini, G.* The integrable nature of modulational instability / G. Biondini, E. Fagerstrom // SIAM J. Appl. Math. — 2015. — Vol. 75, no. 1. — P. 136–163.

45. *Biondini, G.* Universal nature of the nonlinear stage of modulational instability / G. Biondini, D. Mandzavinos // Phys. Rev. Lett. — 2016. — Vol. 116. — P. 043902.
46. Universal behavior of modulationally unstable media / G. Biondini, S. Li, D. Mandzavinos, S. Trillo // SIAM Review. — 2018. — Vol. 60, no. 4. — P. 888—908.
47. *Mikhailov, A. V.* The Landau – Lifshitz equation and the Riemann-boundary problem on a torus / A. V. Mikhailov // Phys. Lett. A. — 1982. — Vol. 92, no. 2. — P. 51—55.
48. *Борисов, А. Б.* Многосолитонные решения асимметричных хиральных $SU(2)$, $SL(2,R)$ – теорий ($d = 1$) / А. Б. Борисов, В. В. Киселев // ТМФ. — 1983. — Т. 54, № 2. — С. 246—257.
49. *Rodin, Y. L.* The Riemann boundary problem on Riemann surfaces and the inverse scattering problem for the Landau – Lifshitz equation / Y. L. Rodin // Physica D. — 1984. — Vol. 11. — P. 90—108.
50. *Кузнецов, Е. А.* Устойчивость стационарных волн в нелинейных средах со слабой дисперсией / Е. А. Кузнецов, А. В. Михайлов // ЖЭТФ. — 1974. — Т. 67, № 5. — С. 1717—1727.
51. *Склянин, Е. К.* О полной интегрируемости уравнения Ландау – Лифшица / Е. К. Склянин. — Ленинград : Препринт ЛОМИ Е-3-79, 1979. — 32 с.
52. *Бхатнагар, П.* Нелинейные волны в одномерных дисперсных системах / П. Бхатнагар. — Москва : Мир, 1983. — 136 с.
53. *Киселев, В. В.* Взаимодействие бризера с волной намагниченности в ферромагнетике с анизотропией типа «легкая ось» / В. В. Киселев, А. А. Расковалов // ТМФ. — 2010. — Т. 163, № 1. — С. 94—113.
54. *Киселев, В. В.* Вынужденное движение уединенных доменов и доменных границ в поле нелинейной волны намагниченности / В. В. Киселев, А. А. Расковалов // ФММ. — 2010. — Т. 109, № 6. — С. 625—638.
55. *Kiselev, V. V.* Forced motion of breathers and domain boundaries against the background of nonlinear magnetization wave / V. V. Kiselev, A. A. Raskovalov // Chaos, Solitons and Fractals. — 2012. — Vol. 45. — P. 1551—1565.

56. *Тахтаджян, Л. А.* Гамильтонов подход в теории солитонов / Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев. — Москва : Наука, 1986. — 528 с.
57. *Косевич, А. М.* Дислокации в теории упругости (влияние дислокаций на механические свойства кристаллов) / А. М. Косевич. — Киев : Наукова думка, 1978. — 220 с.
58. *Хирт, Д.* Теория дислокаций / Д. Хирт, И. Лоте. — Москва : Атомиздат, 1972. — 600 с.
59. *Шамсутдинов, М. А.* Нелинейные волны в цепочке плоскопараллельных доменных границ в ферромагнетике / М. А. Шамсутдинов, С. Э. Рахимов, А. Т. Харисов // ФТТ. — 2001. — Т. 43, № 4. — С. 690—692.
60. *Peregrin, D. H.* Water waves, nonlinear Schrödinger equations and their solutions / D. H. Peregrin // J. Austral. Math. Soc. Ser. B. — 1983. — Vol. 25. — P. 16—43.
61. *Ландау, Л. Д.* Электродинамика сплошных сред (серия «Теоретическая физика», т. VIII) / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский. — Москва : Физматлит, 2005. — 656 с.
62. *Winter, J. M.* Bloch wall excitation. Application to nuclear resonance in a Bloch wall / J. M. Winter // Phys. Rev. — 1961. — Vol. 124, no. 2. — P. 452—459.
63. *Лифшиц, Е. М.* Статистическая физика, часть 2 (серия «Теоретическая физика», т. IX) / Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский. — Москва : Физматлит, 2002. — 496 с.
64. *Склянин, Е. К.* Граничные условия для интегрируемых уравнений / Е. К. Склянин // Функц. анализ и его прилож. — 1987. — Т. 21, № 2. — С. 86—87.
65. *Бикбаев, Р. Ф.* Конечнозонные решения краевых задач для интегрируемых уравнений / Р. Ф. Бикбаев // Мат. заметки. — 1990. — Т. 48, № 2. — С. 10—18.
66. *Бибиков, П. Н.* Краевая задача для нелинейного уравнения Шредингера / П. Н. Бибиков, В. О. Тарасов // ТМФ. — 1989. — Т. 79, № 3. — С. 334—346.

67. *Tarasov, V. O.* The integrable initial-boundary value problem on a semiline: nonlinear Schroedinger and sine-Gordon equations / V. O. Tarasov // Inverse Problems. — 1991. — Vol. 7. — P. 435—450.
68. *Fokas, A.* An initial-value problem for the nonlinear Schrödinger equation / A. Fokas // Physica D. — 1989. — Vol. 35, no. 1/2. — P. 167—185.
69. *Киселев, В. В.* Взаимодействие солитонов с границей ферромагнитной пластины / В. В. Киселев, А. А. Расковалов // ЖЭТФ. — 2022. — Т. 120, 5 (11). — С. 693—707.
70. *Киселев, В. В.* Нелинейная динамика гейзенберговского ферромагнетика на полуоси / В. В. Киселев // ЖЭТФ. — 2023. — Т. 136, № 3. — С. 375—386.
71. *Киселев, В. В.* Солитоны в полубесконечном ферромагнетике с анизотропией типа «легкая ось» / В. В. Киселев // ТМФ. — 2024. — Т. 219, № 1. — С. 55—79.
72. *Изюмов, Ю. А.* Дифракция нейтронов на длиннопериодических структурах / Ю. А. Изюмов. — Москва : Энергоатомиздат, 1987. — 199 с.
73. *Борисов, А. Б.* Нелинейные возбуждения в спиральных магнитных структурах / А. Б. Борисов, Ю. А. Изюмов // ДАН СССР. — 1985. — Т. 283, № 4. — С. 859—861.
74. *Meiklejohn, W. H.* New magnetic anisotropy / W. H. Meiklejohn, C. P. Bean // Phys. Rev. — 1956. — Vol. 102, no. 5. — P. 1413—1414.
75. *Meiklejohn, W. H.* New magnetic anisotropy / W. H. Meiklejohn, C. P. Bean // Phys. Rev. — 1957. — Vol. 105, no. 3. — P. 904—913.
76. *Филиппов, Б. Н.* Микромагнитные структуры и их нелинейные свойства, Часть 1 / Б. Н. Филиппов. — Екатеринбург : УрО РАН, 2019. — 423 с.
77. *Nogués, J.* Exchange bias / J. Nogués, I. K. Schuller // J. Magn. Magn. Mat. — 1999. — Vol. 192, no. 2. — P. 203—232.
78. *Лаврентьев, Л. А.* Методы теории функций комплексного переменного / Л. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. — Москва : Наука, 1987. — 688 с.
79. *Ахиезер, И. А.* Нелинейные спиновые волны в ферромагнетиках и антиферромагнетиках / И. А. Ахиезер, А. Е. Боровик // ЖЭТФ. — 1967. — Т. 52, № 5. — С. 1332—1344.

80. *Borisov, A. B.* Dynamical solitons in a quasi-one-dimensional ferromagnet with easy-plane type anisotropy / A. B. Borisov, V. V. Kiselev // *Physica D.* — 1986. — Vol. 19. — P. 411—422.
81. *Борисов, А. Б.* Динамика квазиодномерного ферромагнетика с легкоплоскостной анизотропией / А. Б. Борисов, В. В. Киселев // *ФММ.* — 1984. — Т. 58, № 2. — С. 238—251.
82. Faraday kinks connecting parametric waves in magnetic wires / A. O. Leon, E. Berrios-Caro, A. León, M. G. Clerc // *Commun. Nonlinear. Sci. Numer. Simulat.* — 2024. — Vol. 131. — P. 107841.
83. *Moriya, T.* Anisotropic superexchange interaction and weak ferromagnetism / T. Moriya // *Physical Review.* — 1960. — Vol. 120, no. 1. — P. 91—98.
84. *Дзялошинский, И. Е.* Теория геликоидальных структур в антиферромагнетиках, часть III / И. Е. Дзялошинский // *ЖЭТФ.* — 1964. — Т. 47, № 3. — С. 992—1003.
85. *Изюмов, Ю. А.* Модулированные, или длиннопериодические, магнитные структуры кристаллов / Ю. А. Изюмов // *УФН.* — 1984. — Т. 114, № 3. — С. 439—474.
86. *Buchel'nikov, V. D.* Coupled magnetoelastic and electromagnetic waves in uniaxial crystals having spiral magnetic structure / V. D. Buchel'nikov, I. V. Bychkov, V. G. Shavrov // *JMMM.* — 1993. — Vol. 118, no. 1/2. — P. 169—174.
87. *Fraerman, A. A.* Diode effect in a medium with helical magnetic structure / A. A. Fraerman, O. G. Udalov // *Phys. Rev. B.* — 2008. — Vol. 77, no. 9. — P. 094401.
88. *Bychkov, I. V.* Hybridization of electromagnetic, spin and acoustic waves in magnetic having conical spiral ferromagnetic order / I. V. Bychkov, D. A. Kuzmin, V. G. Shavrov // *JMMM.* — 2013. — Vol. 329. — P. 142—145.
89. Theory of magnetoelastic resonance in a monoaxial chiral helimagnet / A. A. Tereshchenko, A. S. Ovchinnikov, I. Proskurin, E. V. Sinitsyn, J. Kishine // *Phys. Rev. B.* — 2018. — Vol. 97, no. 18. — P. 184303.

90. *Kishine, J.* Magnetic response of a highly nonlinear soliton lattice in a monoaxial chiral helimagnet / J. Kishine, A. S. Ovchinnikov // *Phys. Rev. B.* — 2020. — Vol. 101, no. 18. — P. 184425.
91. *Кудасов, Ю. Б.* Топологические зоны в металле с геликоидальным магнитным порядком / Ю. Б. Кудасов // *ФТТ.* — 2023. — Т. 65, № 6. — С. 937–942.
92. *Kishine, J.* Theory of monoaxial chiral helimagnet / J. Kishine, A. S. Ovchinnikov // *Solid State Physics.* — 2015. — Vol. 66. — P. 1–130.
93. *Kishine, J.* Sliding conductivity of a magnetic kink crystal in a chiral helimagnet / J. Kishine, A. S. Ovchinnikov, I. V. Proskurin // *Phys. Rev. B.* — 2010. — Vol. 82, no. 6. — P. 064407.
94. *Tokushuku, K.* Tunable spin dynamics in chiral soliton lattice / K. Tokushuku, J. Kishine, M. Ogata // *J. Phys. Soc. Jpn.* — 2017. — Vol. 86, no. 1/2. — P. 124701.
95. *Laliena, V.* Dynamics of chiral solitons driven by polarized currents in monoaxial helimagnets / V. Laliena, S. Bustingorry, J. Campo // *Scientific Reports.* — 2020. — Vol. 10. — P. 20430.
96. Response of the chiral soliton lattice to spin-polarized currents / S. A. Osorio, A. Athanasopoulos, V. Laliena, J. Campo, S. Bustingorry // *Phys. Rev. B.* — 2022. — Vol. 106, no. 9. — P. 094412.
97. Long periodic helimagnetic ordering in CrM_3S_6 ($M = \text{Nb}$ and Ta) / Y. Kousaka, T. Ogura, J. Zhang, P. Miao, S. Lee, S. Torii, T. Kamiyama, J. Campo, K. Inoue, J. Akimitsu // *J. Phys. Conf. Series.* — 2016. — Vol. 746. — P. 012061.
98. *Adachi, K.* Helical magnetic structure in CsCuCl_3 / K. Adachi, N. Achiwa, M. Mekata // *Phys. Soc. Jpn.* — 1980. — Vol. 49, no. 2. — P. 545–553.
99. Study of chiral structure and magnetism in heavy-fermion $\text{Yb}(\text{Ni}_{1-x}\text{Cu}_x)_3\text{Al}_9$ / S. Ohara, S. Fukuta, K. Ohta, H. Kono, T. Yamashita, Y. Matsumoto, J. Yamaura // *JPS Conf. Proc.* — 2014. — Vol. 3. — P. 017016.
100. Chiral soliton lattice formation in monoaxial helimagnet $\text{Yb}(\text{Ni}_{1-x}\text{Cu}_x)_3\text{Al}_9$ / T. Matsumura, Y. Kita, K. Kubo, Y. Yoshikawa, S. Michimura, T. Inami, Y. Kousaka, K. Inoue, O. S. // *J. Phys. Soc. Jpn.* — 2017. — Vol. 86, no. 12. — P. 124702.

101. Chiral magnetic soliton lattice on a chiral helimagnet / Y. Togawa, T. Koyama, K. Takayanagi, S. Mori, Y. Kousaka, J. Akimitsu, S. Nishihara, K. Inoue, A. S. Ovchinnikov, J. Kishine // *Phys. Rev. Lett.* — 2012. — Vol. 108. — P. 107202.
102. *Борисов, А. Б.* Двумерные и трехмерные топологические дефекты, солитоны и текстуры в магнетиках / А. Б. Борисов, В. В. Киселев. — Москва : Физматлит, 2022. — 456 с.
103. *Borisov, V. V.* Vortex dipoles on a solution lattice background: Solution of the boundary-value problem by inverse spectral transform /. *Borisov, V. V. Kiseliev* // *Physica D.* — 1998. — Vol. 111. — P. 96—128.
104. *Kiselev, V.* 2D vortices in incommensurate (stripe-domain) magnetic structures / V. Kiselev // *Phys. Met. Metallogr.* — 2003. — Vol. 95, Suppl. 1. — S28—S34.
105. *Барьяхтар, И. В.* Нелинейные волны намагниченности антиферромагнетиков / И. В. Барьяхтар, Б. А. Иванов // *ФНТ.* — 1979. — Т. 5, № 7. — С. 759—770.
106. *Звездин, А. К.* О динамике доменных границ в слабых ферромагнетиках / А. К. Звездин // *Письма в ЖЭТФ.* — 1979. — Т. 29, № 2. — С. 605—610.
107. *Ковалев, А. С.* Нелинейная локализация возбуждений и динамика солитонов в самомодулированных системах / А. С. Ковалев, И. В. Герасимчук // *ЖЭТФ.* — 2002. — Т. 122, № 5. — С. 1116—1124.
108. Soliton excitations in a chiral spiral with strong easy-plane anisotropy / A. B. Borisov, J. Kishine, Y. G. Bostrem, A. S. Ovchinnikov // *Phys. Rev. B.* — 2009. — Vol. 79. — P. 134436—134446.
109. *Расковалов, А. А.* Нелинейные возбуждения в магнетиках с неоднородным основным состоянием : дис. ... кандидата физ.-мат. наук : 01.04.11 / А. А. Расковалов. — Екатеринбург, 2012. — 160 с.
110. *Kovalev, A. S.* Nonlinear excitations of incommensurate surface structures. Contribution to Euromech 436, Nonlinear Waves in Microstructured Solids, Tallinn, May 2002 / A. S. Kovalev, I. V. Gerasimchuk, G. A. Maugin // *Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math.* — 2003. — Vol. 52. — P. 94—102.

111. *Покровский, В. Л.* Фазовые переходы и спектры колебаний почти соизмеримых структур / В. Л. Покровский, А. П. Талапов // ЖЭТФ. — 1978. — Т. 75, № 3. — С. 1151—1157.
112. *Kishine, J.* Theory of spin resonanse in a chiral helimagnet / J. Kishine, A. S. Ovchinnikov // Phys. Rev. B. — 2009. — Vol. 79, no. 22. — P. 220405.
113. Observation of collective resonanse modes in a chiral spin soliton lattice with tunable magnon dispersion / Y. Shimamoto, Y. Matsushima, T. Hasegawa, Y. Kousaka, I. Proskurin, J. Kishine, O. A. S., G. F. J. T., Y. Togawa // Phys. Rev. Lett. — 2022. — Vol. 128, no. 24. — P. 247203.
114. Синтез нового оксокупрата $\text{Cu}_2\text{V}_2\text{B}_4\text{O}_{14}$ и исследование его структурных, магнитных и резонансных свойств / Г. А. Петраковский, К. А. Саблина, А. И. Панкрац, Д. А. Великанов, А. Д. Балаев, О. А. Баюков, В. И. Тугаринов, А. М. Воротынов, А. Д. Васильев, Г. В. Романенко, Ю. Г. Шведенков // ФТТ. — 2002. — Т. 47, № 7. — С. 1280—1284.
115. *Моргунов, Р. Б.* Влияние хиральности на электронный спиновый резонанс в молекулярных магнетиках $[\text{Mn}^{\text{II}}(\text{HL})(\text{H}_2\text{O})][\text{Mn}^{\text{III}}(\text{CN})_6] \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ с хиральными лигандами L / Р. Б. Моргунов, Ф. Б. Мушенок, М. В. Кирман // ФТТ. — 2008. — Т. 50, № 7. — С. 1252—1256.
116. Влияние хиральности на динамику доменных стенок в молекулярном ферримагнетике $[\text{Mn}^{\text{II}}(\text{HL} - \text{pn})(\text{H}_2\text{O})][\text{Mn}^{\text{III}}(\text{CN})_6] \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ / Ф. Б. Мушенок, Р. Б. Моргунов, О. В. Коплак, М. В. Кирман // ФТТ. — 2012. — Т. 54, № 4. — С. 709—714.
117. Спиновые солитоны в молекулярных магнетиках с хиральной структурой / Р. Б. Моргунов, В. Л. Бердинский, М. В. Кирман, К. Иное, Ж. Кишине, И. Йошида // Письма в ЖЭТФ. — 2006. — Т. 84, № 8. — С. 524—528.
118. Spin solitons and spin waves in chiral and racemic molecular based ferrimagnets / R. Morgunov, M. V. Kirman, K. Inoue, Y. Tanimoto, J. Kishine, A. S. Ovchinnikov, O. Kazakova // Phys. Rev. B. — 2008. — Vol. 77. — P. 184419.

119. Спиновые солитоны и волны в молекулярных хиральных ферримагнетиках / Р. Б. Моргунов, М. В. Кирман, К. Иное, Й. Танимото, Ж. Кишине // ЖЭТФ. — 2008. — Т. 134, 1 (7). — С. 95—104.
120. *Памятных, Л. А.* Механизм дрейфа полосовых доменов в кристаллах ферритов-гранатов / Л. А. Памятных, М. С. Лысов, Г. С. Кандаурова // Изв. РАН, сер. Физическая. — 2007. — Т. 71, № 11. — С. 1542—1544.
121. Динамический дрейф магнитных доменов в кристаллах ферритов-гранатов / Л. А. Памятных, М. С. Лысов, Г. А. Шматов, Г. С. Кандаурова, А. В. Дружинин // Изв. РАН, сер. Физическая. — 2010. — Т. 74, № 1. — С. 1478—1480.
122. *Пятаков, А. П.* Магнитоэлектрические материалы и мультиферроики / А. П. Пятаков, А. К. Звездин // УФН. — 2012. — Т. 182, № 6. — С. 593—620.
123. *Барьяхтар, В. Г.* Индуцирование длинопериодических структур в ромбических и ромбоэдрических антиферромагнетиках / В. Г. Барьяхтар, Д. А. Яблонский // ФТТ. — 1982. — Т. 24, № 8. — С. 2522—2524.
124. *Андреев, А. Ф.* Симметрия и макроскопическая динамика магнетиков / А. Ф. Андреев, В. И. Марченко // УФН. — 1980. — Т. 130, № 1. — С. 37—63.
125. *Mostovoy, M.* Ferroelectricity in spiral magnets / M. Mostovoy // Phys. Rev. Lett. — 2006. — Vol. 96, no. 6. — P. 06760.

Публикации автора по теме диссертации

- A1. *Киселев, В. В.* Солитоны в доменной структуре ферромагнетика / В. В. Киселев, А. А. Расковалов // Теоретическая и математическая физика. — 2018. — Т. 197, № 1. — С. 89—107.
- A2. *Borisov, A. B.* Precessing solitons in the stripe domain structure / A. B. Borisov, V. V. Kiselev, A. A. Raskovalov // Low Temperature Physics. — 2018. — Vol. 44, no. 8. — P. 765—774.

- A3. *Киселев, В. В.* Локализованные нелинейные возбуждения доменной структуры ферромагнетика / В. В. Киселев, А. А. Расковалов // Физика металлов и металловедение. — 2019. — Т. 120, № 2. — С. 115—129.
- A4. *Kiselev, V. V.* Solitons in the stripe domain structure of an easy-axis ferromagnet / V. V. Kiselev, A. A. Raskovalov // Chaos, Solitons and Fractals. — 2019. — Vol. 127. — P. 302—311.
- A5. *Баталов, С. В.* Генерирование солитонов в доменной структуре ферромагнетика / С. В. Баталов, В. В. Киселев, А. А. Расковалов // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2019. — Т. 59, № 8. — С. 117—126.
- A6. *Расковалов, А. А.* Резонансное взаимодействие бризеров в системе Манакова / А. А. Расковалов, А. А. Гелаш // Теоретическая и математическая физика. — 2022. — Т. 213, № 3. — С. 418—436.
- A7. *Киселев, В. В.* Нелинейная динамика квазиодномерной спиральной структуры / В. В. Киселев, А. А. Расковалов // Теоретическая и математическая физика. — 2012. — Т. 173, № 2. — С. 268—292.
- A8. *Kiselev, V. V.* Solitons and nonlinear waves in the spiral magnetic structures / V. V. Kiselev, A. A. Raskovalov // Chaos, Solitons and Fractals. — 2016. — Vol. 84. — P. 88—103.
- A9. *Киселев, В. В.* Нелинейные коллективные возбуждения в геликоидальных магнитных структурах / В. В. Киселев, А. А. Расковалов // Физика металлов и металловедение. — 2012. — Т. 113, № 12. — С. 1180—1192.
- A10. *Kiselev, V. V.* Solitons in the domain structure of a two-axis ferromagnet / V. V. Kiselev, A. A. Raskovalov // Chaos, Solitons and Fractals. — 2020. — Vol. 135. — P. 109803.
- A11. *Kiselev, V. V.* Soliton dynamics in the domain structure of a biaxial ferromagnet / V. V. Kiselev, A. A. Raskovalov // Low Temperature Physics. — 2020. — Vol. 46, no. 11. — 1098 (1—10).
- A12. *Киселев, В. В.* Нелинейная динамика бризеров в спиральных структурах магнетиков / В. В. Киселев, А. А. Расковалов // Журнал экспериментальной и теоретической физики. — 2016. — Т. 149, № 6. — С. 1260—1269.

- A13. *Киселев, В. В.* Солитоны в полубесконечном ферромагнетике с анизотропией типа «легкая плоскость» / В. В. Киселев, А. А. Расковалов // Известия РАН. Серия физическая. — 2024. — Т. 88, № 9. — С. 36—41.
- A14. *Kiselev, V. V.* Nonlinear dynamics of the semi-infinite ferromagnetic samples with an easy-plane anisotropy / V. V. Kiselev, A. A. Raskovalov // Chaos, Solitons and Fractals. — 2024. — Vol. 188. — P. 115500.
- A15. *Kiselev, V. V.* Solitons in the semi-infinite ferromagnets with the different types of anisotropy / V. V. Kiselev, A. A. Raskovalov // Annals of Physics. — 2025. — Vol. 475. — P. 169933.
- A16. *Киселев, В. В.* Нелинейная динамика полубесконечного ферромагнетика с геликоидальной структурой / В. В. Киселев, А. А. Расковалов // Физика твердого тела. — 2024. — Т. 66, № 10. — С. 1742—1753.
- A17. *Kiselev, V. V.* Twokink excitation in a spiral magnetic structure / V. V. Kiselev, A. A. Raskovalov // Low Temperature Physics. — 2016. — Vol. 42, no. 1. — P. 50—56.
- A18. *Киселев, В. В.* Нелинейная динамика квазиодномерной спиральной структуры / В. В. Киселев, А. А. Расковалов // Известия РАН. Серия физическая. — 2014. — Т. 78, № 2. — С. 151—154.
- A19. *Киселев, В. В.* Аналитическое описание солитонов и волн на фоне квазиодномерной магнитной спирали / В. В. Киселев, А. А. Расковалов // Фундаментальные проблемы современного материаловедения. — 2016. — Т. 13. — С. 19—31.
- A20. *Киселев, В. В.* Стоячие спиновые волны и солитоны в квазиодномерной спиральной структуре / В. В. Киселев, А. А. Расковалов // Журнал экспериментальной и теоретической физики. — 2013. — Т. 143, № 2. — С. 313—321.
- A21. *Киселев, В. В.* Солитоны электрической поляризации в мультиферроиках / В. В. Киселев, А. А. Расковалов // Физика твердого тела. — 2016. — Т. 58, № 3. — С. 485—490.

А Техника работы с эллиптическими функциями

Основные положения теории эллиптических функций изложены в [43]. Согласно теореме Якоби, не существует отличной от константы однозначной аналитической функции с $n \geq 3$ примитивными периодами. С двумя заданными примитивными периодами 2ω и $2\omega'$ отличная от константы функция существует в том и только в том случае, когда отношение этих периодов не вещественно:

$$\operatorname{Im} \left(\frac{\omega'}{\omega} \right) \neq 0.$$

Под эллиптическими функциями понимают двоякопериодические функции $f(u)$, единственными особенностями которых в любой конечной части u -плоскости могут быть лишь полюсы. При изучении эллиптической функции $f(u)$ можно ограничиться ее рассмотрением в каком-нибудь параллелограмме периодов. Далее считаем, что из двух параллельных сторон параллелограмму принадлежит лишь одна.

Сумма вычетов эллиптической функции относительно всех полюсов, лежащих в параллелограмме периодов, равна нулю. Будем называть две точки u_1 и u_2 сравнимыми по модулю периодов (или эквивалентными), если

$$u_1 - u_2 = 2m\omega + 2m'\omega',$$

где m, m' – целые числа, и будем писать

$$u_1 = u_2 \pmod{(2\omega, 2\omega')}.$$

Условимся называть α -точками функции $f(u)$ те точки, в которых функция принимает значение α : $f(u) = \alpha$.

Для эллиптических функций справедливы следующие фундаментальные теоремы Лиувилля:

1. Правильно подсчитанное (т. е. подсчитанное с учетом кратности) число полюсов отличной от константы эллиптической функции в параллелограмме периодов равно правильно подсчитанному числу α -точек, каково бы ни было α .
2. Не существует отличной от константы эллиптической функции, регулярной в параллелограмме периодов.

3. Число полюсов эллиптической функции в параллелограмме периодов, подсчитанное с учетом кратности (его называют порядком эллиптической функции), не может быть меньше, чем два.
4. Сумма α -точек функции $f(u)$ при любом α сравнима по модулю периодов с суммой полюсов этой функции, если рассматриваются все α -точки, принадлежащие одному параллелограмму периодов.

Все теоретические построения, связанные с эллиптическими функциями, проще проводить в терминах функций Вейерштрасса. Приведем их определения и основные свойства.

Сигма-функция Вейерштрасса определяется бесконечным произведением:

$$\sigma(u) = u \prod'_{m,m'} \left(1 - \frac{u}{s}\right) \exp \left[\frac{u}{s} + \frac{u^2}{2s^2} \right], \quad s = 2m\omega + 2m'\omega'.$$

Произведение распространяется на все целые числа m, m' , кроме пары $m = m' = 0$. Это обстоятельство отмечается штрихом у знака произведения.

Как видим, $\sigma(u)$ — целая функция, имеющая лишь простые нули, лежащие в вершинах сетки периодов:

$$u = 2m\omega + 2m'\omega'. \quad (\text{П.1})$$

Сигма-функция нечетна:

$$\sigma(-u) = -\sigma(u).$$

Дзета-функция Вейерштрасса является аналитической функцией с простыми полюсами:

$$\zeta(u) = \frac{d}{du} \ln \sigma(u) = \frac{1}{u} + \sum'_{m,m'} \left(\frac{1}{u-s} + \frac{1}{s} + \frac{u}{s^2} \right),$$

которая нечетна:

$$\zeta(-u) = -\zeta(u).$$

Функция Вейерштрасса $\wp(u)$ определяется сходящимся рядом:

$$\wp(u) = -\frac{d}{du} \zeta(u) = \frac{1}{u^2} + \sum'_{m,m'} \left[\frac{1}{(u-s)^2} - \frac{1}{s^2} \right],$$

который показывает, что единственные особенности функции $\wp(u)$ это полюсы второго порядка в точках (П.1). Функция $\wp(u)$ является четной:

$$\wp(-u) = \wp(u).$$

Любая производная от \wp -функции выражается рационально через мероморфные функции $\wp(u)$ и $\wp'(u)$.

Трансформационные свойства функций Вейерштрасса обычно записывают в симметричной форме с помощью обозначений:

$$\omega_1 = \omega, \quad \omega_2 = -\omega - \omega', \quad \omega_3 = \omega'; \quad \eta_\alpha = \zeta(\omega_\alpha), \quad \alpha = 1, 2, 3.$$

Константы η_α удовлетворяют следующим тождествам:

$$\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = 0, \quad \eta_1 \omega_3 - \eta_3 \omega_1 = i\pi/2. \quad (\text{П.2})$$

Функция $\wp(u)$ оказывается двоякопериодической, а функции $\sigma(u)$ и $\zeta(u)$ — квазипериодичны:

$$\begin{aligned} \wp(u + 2\omega_\alpha) &= \wp(u), & \zeta(u + 2\omega_\alpha) &= \zeta(u) + 2\eta_\alpha, \\ \sigma(u + 2\omega_\alpha) &= -\sigma(u) \exp[2\eta_\alpha(u + \omega_\alpha)]. \end{aligned} \quad (\text{П.3})$$

Всякая рациональная функция $R(z)$ допускает следующие два представления:

$$R(z) = c \frac{(z - b_1)(z - b_2) \dots (z - b_m)}{(z - a_1)(z - a_2) \dots (z - a_n)}; \quad R(z) = E(z) + \sum_{i,k} \frac{A_k^{(i)}}{(z - a_k)^i},$$

где $c, b_i, a_k, A_k^{(i)}$ — константы, а $E(z)$ — многочлен, так называемая целая часть функции $R(z)$. Каждое из этих представлений дает определенную информацию относительно функции $R(z)$. Из первого представления видно, каковы нули и полюсы функции $R(z)$, а второе представление, которым всегда пользуются в интегральном исчислении, дает главную часть функции $R(z)$ для каждого ее полюса.

Важно, что аналогичные представления допускает любая эллиптическая функция. Разложение эллиптической функции на «множители» имеет вид:

$$f(u) = c_1 \frac{\sigma(u - b_1) \sigma(u - b_2) \dots \sigma(u - b_n)}{\sigma(u - a_1) \sigma(u - a_2) \dots \sigma(u - a_n)}. \quad (\text{П.4})$$

В формуле (П.4) каждый нуль и полюс повторяется столько раз, какова его кратность.

Разложение эллиптической функции $f(u)$ на «простейшие дроби» есть

$$f(u) = c_2 + \sum_{k=1}^n A_k \zeta(u - a_k) + \sum_{k,r (r \geq 2)} A_k^{(r-1)} \wp^{(r-2)}(u - a_k). \quad (\text{П.5})$$

В представлении (П.5) числа $A_k, A_k^{(r-1)}$ характеризуют главную часть функции $f(u)$ вблизи полюса $u = a_k$:

$$f \approx \frac{A_k}{u - a_k} + \sum_{r=2}^{m_k} \frac{(-1)^r (r-1)! A_k^{(r-1)}}{(u - a_k)^r}.$$

В формулах (П.4), (П.5) постоянные c_1, c_2 определяются по известному значению функции $f(u)$ в какой-нибудь точке. Отметим, что постоянную c_2 в разложении (П.5) часто можно найти по заранее известным свойствам симметрии функции $f(u)$.

Представления (П.4), (П.5) чрезвычайно полезны при алгебраических вычислениях с эллиптическими функциями. Для примера рассмотрим функцию:

$$\gamma(u) \equiv \frac{\sigma(u + iK' + K/2)}{\sigma(u - iK' - K/2)} \exp(\eta_2 u).$$

Здесь сигма-функции имеют периоды $2K, 4iK'$. Используя трансформационные свойства сигма-функций (П.3) и второе тождество (П.2) (соотношение Лежандра), нетрудно проверить, что:

$$\gamma(u + 2K) = -\gamma(u), \quad \gamma(u + 4iK') = -\gamma(u).$$

Иными словами, примитивными периодами функции $\gamma(u)$ будут $4K, 8iK'$. Поэтому ее разложение на множители правильнее записывать в терминах сигма-функций с периодами $4K, 8iK'$:

$$\begin{aligned} \gamma(u) \sim & \frac{\sigma(u + iK' + K/2) \sigma(u - 3iK' + K/2)}{\sigma(u - iK' - K/2) \sigma(u + 3iK' - K/2)} \times \\ & \times \frac{\sigma(u + iK' - 3K/2) \sigma(u - 3iK' - 3K/2)}{\sigma(u - iK' + 3K/2) \sigma(u + 3iK' + 3K/2)} \exp[2(\eta_1 - \eta_3)u]. \end{aligned}$$

Здесь $\eta_1 = \zeta(K|2K, 4iK')$, $\sigma(u) = \sigma(u|2K, 4iK')$, после вертикальной черты иногда указывают половинки примитивных периодов.

В фундаментальном прямоугольнике со сторонами $4K$, $8iK'$ функция $\gamma(u)$ имеет четыре простых полюса. Сумма вычетов в этих полюсах должна обращаться в нуль. Тогда, по теореме о разложении эллиптической функции на простые дроби, имеем:

$$\gamma(u) \sim \zeta(u - iK' - K/2) - \zeta(u + 3iK' - K/2) - \\ - \zeta(u - iK' + 3K/2) + \zeta(u + 3iK' + 3K/2) + c.$$

Здесь периоды дзета-функций суть $4K$, $8iK'$. Постоянную c найдем с помощью свойств симметрии функции $\gamma(u)$. Учитывая квазипериодичность дзета-функций (П.3), получим $c = 0$.

Перепишем это представление в терминах функций Якоби. Примитивными периодами всех трех функций Якоби: $\operatorname{sn}u$, $\operatorname{cn}u$, $\operatorname{dn}u$ будут $4K$, $4iK'$. В то же время, элементарная ячейка функции $\gamma(u)$ представляет прямоугольник со сторонами $4K$, $8iK'$. Согласовать свойства периодичности функций можно, например, в пределах фундаментального прямоугольника со сторонами $8K$, $8iK'$. Поэтому заменим представление функции $\gamma(u)$ ее разложением по дзета-функциям с периодами $8K$, $8iK'$:

$$\gamma(u) \sim \sum_{\alpha=1}^4 [\zeta(\nu_{\alpha} + 4iK'|4K, 4iK') - \zeta(\nu_{\alpha}|4K, 4iK') - \zeta(4iK'|4K, 4iK')]. \quad (\text{П.6})$$

Здесь $\nu_1 = u - iK' - K/2$, $\nu_2 = u - iK' + 3K/2$, $\nu_3 = u - iK' - 5K/2$, $\nu_4 = u - iK' + 7K/2$.

Для дзета-функций с периодами $2\omega_{\alpha}$ справедливы соотношения [41]:

$$\zeta(z \pm \omega_{\alpha}) - \zeta(z) \mp \eta_{\alpha} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \ln[\wp(z) - e_{\alpha}].$$

Поскольку только такие комбинации дзета-функций входят в разложение (П.6), проблема перехода в формуле (П.6) к функциям Якоби сводится к задаче перехода от \wp -функций Вейерштрасса к функциям Якоби. Оказывается [41], что

$$e_1 : e_2 : e_3 = (2 - k^2) : (2k^2 - 1) : (-1 - k^2)$$

и

$$\operatorname{sn}(u, k) = \sqrt{\frac{e_1 - e_3}{\wp(z) - e_3}}, \quad \operatorname{cn}(u, k) = \sqrt{\frac{\wp(z) - e_1}{\wp(z) - e_3}}, \quad \operatorname{dn}(u, k) = \sqrt{\frac{\wp(z) - e_2}{\wp(z) - e_3}},$$

где $z = u(e_1 - e_3)^{-1/2}$.

В силу однородности функций Вейерштрасса:

$$\begin{aligned}\partial_t z \wp(tz|t\omega, t\omega') &= t^{-3} \partial_z \wp(z|\omega, \omega'), & \wp(tz|t\omega, t\omega') &= t^{-2} \wp(z|\omega, \omega'), \\ \zeta(tz|t\omega, t\omega') &= t^{-1} \zeta(z|\omega, \omega'), & \sigma(tz|t\omega, t\omega') &= t \sigma(z|\omega, \omega'),\end{aligned}$$

выбор коэффициента пропорциональности между переменными z и u при конкретных расчетах обычно не вызывает затруднений. В нашем случае имеем:

$$\begin{aligned}\zeta(\nu/2 + 2iK'|2K, 2iK') - \zeta(\nu/2|2K, 2iK') - \\ - \zeta(2iK'|2K, 2iK') = -\frac{1}{2} \frac{\operatorname{cn}(\nu/4, k) \operatorname{dn}(\nu/4, k)}{\operatorname{sn}(\nu/4, k)}.\end{aligned}\quad (\text{П.7})$$

В конечном счете, в справедливости формулы (П.7) проще убедиться проверкой: сравнением свойств симметрии и вычетов в полюсах левой и правой частей равенства.

После преобразований разложения (П.6) с использованием тождества (П.7) и стандартных формул для функций Якоби [41], сдвигом по переменной u на $iK' + K/2$ получаем первое из соотношений (4.53) главы 4:

$$i \frac{\sigma(u + K + 2iK')}{\sigma(u)} \exp[\eta_2 u - \eta_3(K + iK')] = -r \left[\frac{\operatorname{cn}(v, k)}{\operatorname{sn}(v, k)} + k' \frac{\operatorname{sn}(v, k)}{\operatorname{cn}(v, k)} \right] \Bigg|_{v=u/2},$$

где $2ir = \sigma(K + 2iK') e^{-\eta_3(K+iK')} = \text{const}$. Второе соотношение (4.53):

$$i \frac{\sigma(u + K)}{\sigma(u + 2iK')} \exp[\eta_2 u - \eta_3 iK'] = -r \left[\operatorname{dn}(v, k) - \frac{k'}{\operatorname{dn}(v, k)} \right] \Bigg|_{v=u/2}$$

получается из первого сдвигом по переменной u на $2iK'$.