

МУРТАЗАЕВ КУРБАН ШАМИЛЬЕВИЧ

**ИССЛЕДОВАНИЯ АНТИФЕРРОМАГНИТНЫХ МОДЕЛЕЙ ИЗИНГА И
ГЕЙЗЕНБЕРГА С КОНКУРИРУЮЩИМИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯМИ В
МАГНИТНЫХ ПОЛЯХ**

1.3.8. Физика конденсированного состояния

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

МАХАЧКАЛА- 2024

Диссертационная работа выполнена в Институте физики им. Х.И. Амирханова – обособленного подразделения Федерального государственного бюджетного учреждения науки Дагестанского федерального исследовательского центра Российской академии наук

Научный руководитель: **Муртазаев Акай Курбанович**
член-корреспондент РАН,
доктор физико-математических наук, профессор,
директор ФГБУН ДФИЦ РАН, г. Махачкала

Официальные оппоненты: **Белим Сергей Викторович**
доктор физико-математических наук, профессор
ФГАОУ ВО «Омский государственный технический
университет», г. Омск

Еремин Евгений Владимирович
доктор физико-математических наук, профессор
ФГБНУ ФИЦ «Красноярский научный центр СО
РАН», г. Красноярск

Ведущая организация: ФГАОУ ВО Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань

Защита состоится **20 декабря 2024 г.** в 12⁰⁰ часов на заседании диссертационного совета 24.2.431.01 на базе ФГБОУ ВО «Челябинский государственный университет» Министерства образования и науки РФ по адресу: 454001, г. Челябинск, ул. Братьев Кашириных, 129, конференц-зал.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Челябинского государственного университета и на сайте <https://www.csu.ru>.

Автореферат разослан « _____ » 2024 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета 24.2.431.01,
доктор физ.-мат. наук, доцент

Загребин М.А.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы

Изучение фазовых переходов (ФП), магнитных и термодинамических свойств спиновых систем с обменными взаимодействиями в настоящее время представляет большой интерес для физики конденсированного состояния. Конкурирующие обменные взаимодействия в магнитных системах приводят к фрустрированному состоянию [1]. Магнитные системы с фрустрациями имеют множество разнообразных фаз. Фрустрации могут менять тип фазового перехода в системе. Более того, сильное влияние на характер фазового перехода и термодинамических свойств может оказывать величина взаимодействия первых и вторых соседей [2, 3].

Последние 30-40 лет с большим интересом проводятся исследования спиновых систем с фрустрациями и конкурирующими обменными взаимодействиями, применяя теоретические, экспериментальные и численные методы. Несмотря на достигнутые успехи в этой области имеющиеся данные не позволяют в полной мере выстроить целостную картину свойств и процессов, протекающих в таких системах.

Особый интерес представляют исследования влияния на физические свойства подобных систем различных внешних и внутренних факторов: внешнее магнитное поле, взаимодействие вторых ближайших соседей, немагнитные спины, тепловые флуктуации [4]. Анализ научной литературы показывает, что внешнее магнитное поле в системах с конкурирующими обменными взаимодействиями может сыграть решающую роль в поведении системы вплоть до изменения рода фазового перехода [5].

В настоящее время невыясненными остаются вопросы, связанные с влиянием внешнего магнитного поля (МП) на ФП, термодинамические и магнитные свойства антиферромагнитных моделей Изинга и Гейзенберга на объемно-центрированной кубической (ОЦК) решетке. В научной литературе результаты по влиянию внешнего магнитного поля с конкурирующими обменными взаимодействиями для данных моделей практически нет.

Для исследования таких сложных спиновых систем с конкурирующими обменными взаимодействиями, систем с вырожденным основным состоянием, фрустрированных спиновых систем эффективнее всего оказались методы вычислительной физики в том числе методы Монте-Карло (МК) и различные алгоритмы этого метода. Множество экспериментальных и теоретических методов для исследования таких систем при температурах близких к критическим оказались не эффективными и почти не пригодными для исследования. Численный эксперимент на сегодняшний день является полноценным инструментом для изучения сложных систем [6]. Для выполнения численного расчета сложных моделей с учетом обменных взаимодействий первых J_1 и вторых J_2 ближайших соседей, с учетом внешнего магнитного поля на разных кристаллических решетках наиболее эффективным оказался репличный обменный алгоритм метода МК [7].

Таким образом, исследования систем с конкурирующими спиновыми взаимодействиями при наличии внешнего магнитного поля, с помощью методов МК представляют собой большой интерес в физике конденсированного состояния. Также

дискуссионным остается вопрос о влиянии МП на род ФП в спиновых антиферромагнитных системах.

Целью диссертационной работы является исследование влияния магнитного поля на фазовые переходы, термодинамические и магнитные свойства антиферромагнитных моделей Изинга и Гейзенберга на ОЦК решетке с конкурирующими взаимодействиями методом МК.

Для достижения цели диссертационной работы поставлены следующие научные задачи:

1. исследование термодинамических и магнитных свойств, а также особенностей влияния внешнего магнитного поля на фазовые переходы в антиферромагнитной модели Изинга на ОЦК решетке с учетом взаимодействия первых и вторых ближайших соседей;
2. построение кривых температурных зависимостей теплоёмкости C , намагниченности M , энергии E для антиферромагнитной модели Изинга на ОЦК решетке с учетом взаимодействия первых и вторых ближайших соседей в широком интервале значений магнитного поля;
3. построение фазовых диаграмм зависимостей критических температур от величины магнитного поля для антиферромагнитной модели Изинга на ОЦК решетке для разных величин взаимодействий первых и вторых ближайших соседей;
4. получение температурных зависимостей теплоёмкости C , восприимчивости χ , намагниченности M и минимальной энергии E_{min} для антиферромагнитной модели Гейзенберга на ОЦК решетке с учетом взаимодействия первых и вторых ближайших соседей;
5. построение фазовых диаграмм зависимостей критических температур от величины магнитного поля для антиферромагнитной модели Гейзенберга на ОЦК решетке для разных величин взаимодействий первых и вторых ближайших соседей.

Практическая ценность работы

Результаты исследований ФП, термодинамических и магнитных свойств антиферромагнитных спиновых систем при наличии внешнего магнитного поля имеют важную ценность для дальнейших исследований в разработке теории магнетизма и фазовых переходов. Исследования имеют практическую значимость потому, что такие возмущающие факторы как магнитное поле, взаимодействия вторых соседей и фрустрации могут оказывать большое влияние на характер фазовых переходов и термодинамические свойства магнитных систем. При исследовании реальных образцов эти особенности должны быть учтены. Разработанные программы для ЭВМ и модели формируют основу для последующего исследования ФП, термодинамических и магнитных свойств сложных спиновых систем.

Результаты данной работы показали, что репличный обменный алгоритм метода МК позволяет с высокой эффективностью и точностью исследовать спиновые системы практически любой сложности. Этот алгоритм успешно справляется с проблемами, где другие алгоритмы метода МК (алгоритм Метрополиса и другие) оказались малоэффективными или требуют много машинного времени.

Результаты компьютерного моделирования, полученные в ходе выполнения данной научно-квалификационной работы, используются при преподавании

специальных курсов на базовой кафедре Дагестанского государственного университета: «Исследование фазовых переходов и критических свойств методами Монте-Карло», «Компьютерное моделирование в физике», «Методы численного эксперимента в физике». Программы для ЭВМ служат основой при выполнении квалификационных работ студентами и аспирантами в Дагестанском государственном университете и Институте физики ДФИЦ РАН.

Положения, выносимые на защиту:

1. Фазовые диаграммы зависимости критической температуры T_N от величины магнитного поля для модели Изинга на ОЦК решетке с учетом взаимодействия первых J_1 и вторых J_2 ближайших соседей при наличии внешнего магнитного поля в случаях антиферромагнитного упорядочения 2-го типа ($k=J_2/J_1=1$), 1-го типа ($k=0.5$) и в вырожденном состоянии ($k=2/3$). Определение области магнитных полей, где с ростом температуры в системе реализуется два фазовых перехода.
2. Исследование особенностей влияния магнитного поля на фазовые переходы в антиферромагнитной модели Изинга на ОЦК решетке при соотношении обменных взаимодействий $k=1.0$, $k=2/3$ и $k=0.5$. Определение условий существования ФП 1-го рода и 2-го рода в зависимости от значений внешнего магнитного поля. Демонстрация существования частично разупорядоченных структур основного состояния.
3. Фазовые диаграммы антиферромагнитных моделей Гейзенберга на ОЦК решетке с учетом взаимодействия первых J_1 и вторых J_2 ближайших соседей при наличии внешнего магнитного поля в случае антиферромагнитного упорядочения 2-го типа ($k=1$) и 1-го типа ($k=0.5$). Доказательство существования только фазовых переходов 2-го рода во всем диапазоне значений магнитного поля и отсутствие влияния магнитного поля на род фазового перехода в данной модели.
4. Доказательство отсутствия полностью фрустрированного состояния в моделях Изинга и Гейзенберга на ОЦК решетке с взаимодействиями первых и вторых ближайших соседей при наличии внешнего магнитного поля.

Научная новизна и значимость диссертационной работы

В физике конденсированного состояния до сих пор невыясненными остаются некоторые вопросы, связанные с влиянием магнитного поля на ФП, термодинамические и магнитные свойства антиферромагнитных спиновых систем. В рамках данной работы был впервые проведен комплекс исследований антиферромагнитных моделей Изинга и Гейзенберга на ОЦК решетке с учетом конкурирующих обменных взаимодействий при наличии внешнего магнитного поля. В результате определены некоторые закономерности влияния внешнего магнитного поля и величины взаимодействий вторых ближайших соседей на ФП, на структуры магнитного упорядочения, на фрустрации. Впервые построены фазовые диаграммы зависимости температуры ФП от величины МП как для антиферромагнитной модели Изинга, так и для антиферромагнитной модели Гейзенберга при разных соотношениях параметров обменных взаимодействий. Впервые для рассмотренных моделей Изинга и Гейзенберга определены магнитные структуры основного

состояния, особенности ФП и диапазоны существования различных магнитных структур, в зависимости от величины внешнего магнитного поля.

Апробация результатов работы

Основные результаты диссертационной работы были представлены на следующих конференциях и семинарах: Международная конференция «Фазовые переходы, критические и не линейные явления в конденсированных средах» (Махачкала 2019); XXI Всероссийская школа-семинар по проблемам физики конденсированного состояния вещества (СПФКС-21) (Екатеринбург 2021); XXIV международной конференции «Новое в Магнетизме и Магнитных Материалах» НМММ-2021 (Москва 2021); Международная конференция «Фазовые переходы, критические и не линейные явления в конденсированных средах» (Махачкала 2021); Региональная научная сессия «Интеграция науки и образования» посвященная Дню Российской науки (Махачкала 2022); XIX Конференция «Сильно коррелированные электронные системы и квантовые критические явления» (Москва 2022); Научно-практическая онлайн-конференция «Междисциплинарные исследования науки, техники и образования (НТО-1)» приуроченной к 75-летию доктора физико-математических наук, профессора, академика РАН, Матиева Ахмета Хасановича (Грозный 2023); XX Конференция «Сильно коррелированные электронные системы и квантовые критические явления» (Москва 2023); Третья международная конференция ФКС-2023 «Физика конденсированных состояний», посвященная 60-летию ИФТТ РАН (Черноголовка 2023); Всероссийская научная школа для молодых исследователей, аспирантов и студентов старших курсов по проблемам исследований в сильных и сверхсильных магнитных полях (Технопарк Саров) 2023 и 2024 году; Международная конференция «Фазовые переходы, критические и не линейные явления в конденсированных средах» (Махачкала 2023); Первая всероссийская школа-семинар по компьютерному моделированию «АтоМ» (Челябинск 2024 г.); Результаты также многократно докладывались на лабораторных и институтских семинарах в ИФ ДФИЦ РАН.

Достоверность результатов обеспечивается строгой математической обоснованностью использованных численных методов, применением надежной теоретической базы для интерпретации полученных данных и сравнением с имеющимися в литературе данными других авторов. Полученные результаты хорошо согласуются между собой.

Личный вклад автора

При выполнении данной научно-квалификационной работы научным руководителем были сформулированы основные цели и задачи исследования. Автором лично была проведена серия численных экспериментов и выполнены все расчеты на ЭВМ, обработаны и проанализированы все выходные данные. Разработка программ исследуемых моделей, проводилось совместно с Магомедовым М.А. и Рамазановым М.К. Подготовка публикаций и фазовых диаграмм выполнено совместно с Курбановой Д.Р. Обсуждение и обобщение результатов проводились

совместно с научным руководителем и соавторами. Также автор лично представлял результаты исследований на научных конференциях, семинарах и сессиях.

Публикации по теме диссертации.

Результаты исследования опубликованы в 32 научных работах, из которых: 6 статей в журналах, индексируемых в наукометрических базах Scopus и Web of Science, 2 – в журнале, входящей в РИНЦ. Получены 3 свидетельства о государственной регистрации программы для ЭВМ. Список научных работ автора приведен в конце автореферата.

Объем работы

Данная диссертационная работа содержит введение, 4 главы, заключение, публикации автора и список цитируемой литературы. Полный объем диссертации составляет 137 страниц. Объем литературы составляет 219 наименований.

Содержание работы

Во введении приведена актуальность и освещение проблемы по исследуемой тематике диссертационной работы. Сформулированы основные цели и задачи исследования. Также сформулированы основные положения, выносимые на защиту.

Первая глава состоит из четырех параграфов. Приводится литературный обзор фрустрированных спиновых систем. Описаны классические модели Изинга и Гейзенберга. Рассматривается гистограммный метод анализа Монте-Карло данных.

Вторая глава состоит из трех параграфов. Описаны методы численного эксперимента. Подробно описан классический алгоритм метода Монте-Карло (алгоритм Метрополиса) и вариант репличного обменного алгоритма метода Монте-Карло.

В третьей главе приведены результаты исследований модели Изинга на ОЦК решетке с конкурирующими взаимодействиями при наличии внешнего магнитного поля в случаях антиферромагнитного упорядочения 2-го типа ($k=J_2/J_1=1$), 1-го типа ($k=0.5$) и в вырожденном состоянии ($k=2/3$). Приведены фазовые диаграммы зависимости критической температуры от величины магнитного поля для разных соотношений величин обменных взаимодействий первых и вторых ближайших соседей ($k=1$, $k=0.5$ и $k=2/3$). Определен род фазового перехода для разных величин магнитного поля при различных значениях обменных взаимодействий J_1 и J_2 . Определены структуры основного состояния при наличии внешнего магнитного поля для рассматриваемых систем.

Влияние магнитного поля на фазовые переходы и термодинамические свойства модели Изинга в антиферромагнитной фазе 2-го типа.

Для проведения исследований антиферромагнитной модели Изинга на объемно-центрированной кубической решетке использовался репличный обменный алгоритм метода Монте-Карло на модели с периодическими граничными условиями. Расчеты проводились для систем с линейными размерами $L=8\div 60$, $L\times L\times L\times 2=N$, где L измеряется в размерах элементарной ячейки, N -количество спинов в системе. Здесь и

далее в данной работе для вывода системы в состояние термодинамического равновесия отсекался участок длиной $\tau_0 = 2.5 \cdot 10^4$ шагов МК на спин, что в несколько раз больше длины неравновесного участка для тестовой модели. Усреднение термодинамических параметров проводилось вдоль марковской цепи длиной до $\tau = 20\tau_0$ Монте-Карло шагов на спин.

Гамильтониан этой системы может быть представлен в следующем виде:

$$H = -J_1 \sum_{\langle i,j \rangle} S_i \cdot S_j - J_2 \sum_{\langle\langle i,l \rangle\rangle} S_i \cdot S_l - h \sum_i S_i \quad (1)$$

где $S_{i,j,l} = \pm 1$ – изинговский спин, J_1 и J_2 – константы обменного взаимодействия первых и вторых ближайших соседей соответственно, h – величина магнитного поля (приводится в единицах $|J_1|$). Магнитное поле менялось в интервале $0.0 \leq h \leq 18.0$. В данной работе будет использоваться параметр $k = J_2/J_1$ – соотношение обменных взаимодействий вторых ближайших соседей к первым. В данном параграфе представлены результаты исследований при $k=1$, $k=0.5$ и $k=2/3$.

Для получения зависимости теплоемкости от температуры использовалось выражение:

$$C = (NK^2) (\langle U^2 \rangle - \langle U \rangle^2) \quad (2)$$

Намагниченность вычислялась по формуле:

$$M = \frac{1}{N} \sum_{\langle i \rangle} S_i \quad (3)$$

Для определения критической температуры T_N и анализа природы ФП был использован метод кумулянтов Биндера U_L четвертого порядка:

$$U_L = 1 - \frac{\langle M^4 \rangle_L}{3 \langle M^2 \rangle_L^2}, \quad (4)$$

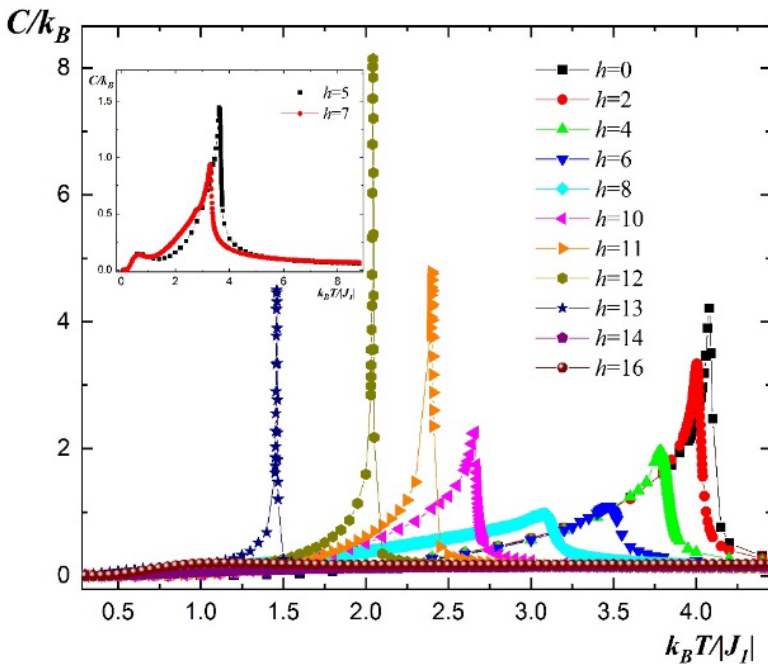


Рис. 1. Температурные зависимости теплоемкости для разных значений h .

где M – намагниченность системы с линейными размерами L . В случае фазового перехода 2-го рода кумулянт Биндера U_L имеет четко выраженную точку пересечения, и эта точка является критической точкой. Этот метод позволяет определить T_N с большой точностью [8]. В данной работе, на исследуемых моделях, нами продемонстрирована высокая эффективность этого метода.

На рисунке 1. показаны температурные зависимости

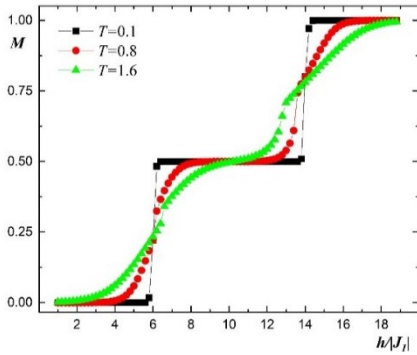


Рис. 2. Зависимость намагниченности от h для разных значений температур.

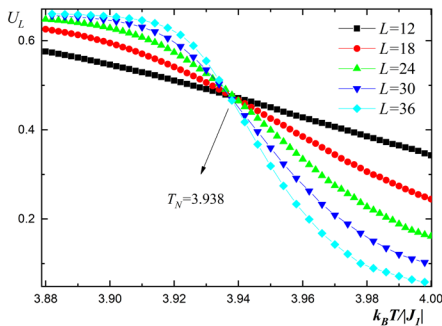


Рис. 3. Зависимость кумулянта Биндера от температуры для разных L при $h=3.0$.

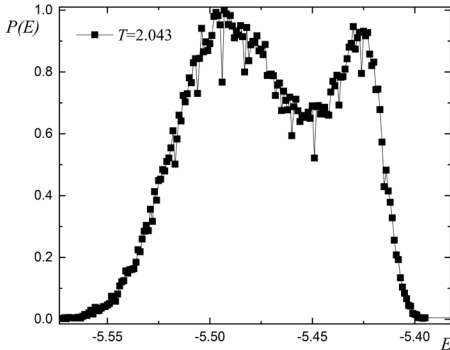


Рис. 4. Гистограмма распределения энергии для $h=12.0$.

теплоемкости при $L=24$ для разных значений величины магнитного поля h . На рисунке видно, что в интервале $0.0 \leq h \leq 14.0$ с увеличением значения h наблюдается сдвиг максимумов теплоемкости в сторону низких температур. Сдвиг максимумов теплоемкости в сторону более низких температур обусловлен конкуренцией внутренних обменных взаимодействий и внешнего магнитного поля. Обменные взаимодействия пытаются выстроить антиферромагнитное упорядочение спинов, а внешнее магнитное поле упорядочить спины по направлению поля. В результате этого при увеличении h происходит усиление конкурирующих взаимодействий и система становится восприимчивой при более низких температурах. Также заметно, что рост значения h сначала подавляет флуктуации при фазовом переходе и максимум теплоемкости сначала уменьшается, а затем увеличивается. Можно заметить, что для значений магнитного поля $11.0 \leq h \leq 13.0$ в критической области наблюдаются более ярко выраженные максимумы. Такие резкие максимумы обычно характерны для фазовых переходов 1-го рода. Можно предположить, что при этих значениях полей в системе происходит ФП первого рода. На рисунке 2 представлены зависимости намагниченности от h для разных температур. На рисунке наблюдаются плато намагниченности, которые приходятся на $M=0$, $M=1/2$, $M=1$. В области значений магнитного поля $0.0 \leq h < 6.0$ спины двух подрешеток направлены вдоль внешнего поля, а двух других подрешеток - против поля т.е. система упорядочена антиферромагнитно. Такое упорядочение подрешеток приводит к тому, что намагниченность всей системы становится равной нулю. При значениях поля $6.0 < h < 14.0$, еще одна подрешетка поворачивается вдоль направления поля. Спины трех подрешеток направлены вдоль внешнего поля, а спины одной подрешетки - против поля. Система находится в «ферромагнитном» упорядочении. Этим обусловлено появление плато намагниченности равное $1/2$ намагниченности насыщения (рис 2.). При сильных магнитных полях ($h > 14.0$) все четыре подрешетки ориентируются вдоль поля, что приводит к максимальному насыщению намагниченности. В основном состоянии для значения МП $h=6$ система частично разупорядочена. Поэтому при данном значении поля намагниченность примерно равна $M \sim 0.25$. Аналогично и для значения магнитного поля $h=14$ система частично разупорядочена и намагниченность равна

$M \sim 0.75$. С увеличением температуры плато постепенно исчезает и наблюдается более плавный рост намагниченности. Это объясняется тепловыми флуктуациями спинов

На рис. 3. представлены зависимости кумулянта Биндера четвертого порядка U_L для разных размеров системы L при значении магнитного поля $h=3.0$. Из этих данных видно отчетливая точка пересечения кривых, которая свидетельствует о том, что в системе реализуется фазовый переход второго рода, а сама точка является критической температурой. Аналогичные зависимости кумулянтов Биндера были построены для всех значений магнитного поля в интервале $0.0 \leq h \leq 10.0$. Анализ наших результатов показывает, что в интервале $0.0 \leq h \leq 10.0$ наблюдается фазовый переход второго рода. В интервале $11.0 \leq h \leq 14.0$ на зависимостях кумулянтов Биндера не удалось обнаружить точки пересечения. Это затрудняет определение критической температуры и проведение анализа фазовых переходов в данном интервале полей. Для дальнейшего анализа природы ФП в интервале МП $11.0 \leq h \leq 14.0$ нами был использован гистограммный метод анализа МК данных. Гистограммный метод анализа МК данных весьма эффективно можно использовать для анализа характера ФП [9]. На рисунке 4 приведена гистограмма распределения энергии для системы с линейными размерами $L=24$ при значении МП $h=12$. Гистограмма построена для значения температуры близкой к критической температуре. Видно, что на гистограмме наблюдается два максимума (бимодальность). Наличие двух максимумов на гистограмме свидетельствует о том, что в системе реализуется ФП 1 рода. Такое же бимодальное распределение энергии наблюдается на гистограмме для значений МП $h=10$ и $h=11$. Таким образом, из полученных результатов можно предположить, что в области значений МП $11.0 \leq h \leq 13.0$ в системе происходит ФП 1 рода.

На рисунке 5 представлена фазовая диаграмма зависимости критической температуры T_N от величины магнитного поля h . На диаграмме видно, что в точке $h=10$ пересекаются три различные фазы: антиферромагнитная фаза 2-го типа-AF2, ферримагнитная и парамагнитная. Черными и красными стрелками обозначены направления спинов в каждой подрешетке. Красная линия соответствует ФП первого рода из ферримагнитной фазы в парамагнитную. Черными квадратами отмечены точки ФП второго рода ($0.0 \leq h \leq 10.0$) из антиферромагнитной фазы 2-го типа в

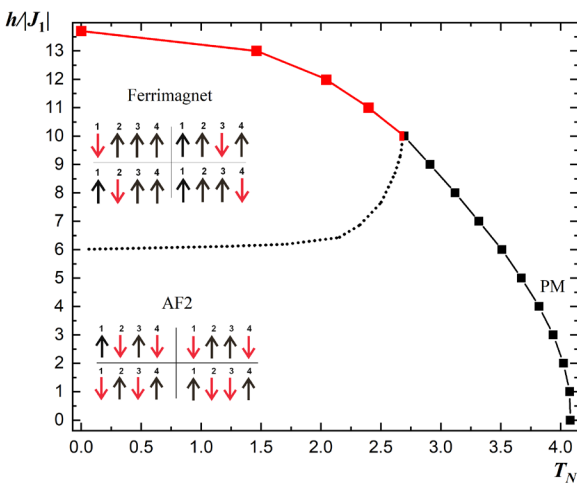


Рис. 5. Фазовая диаграмма зависимости критической температуры от магнитного поля.

парамагнитную. Черными квадратами отмечены точки ФП второго рода ($0.0 \leq h \leq 10.0$) из антиферромагнитной фазы 2-го типа в

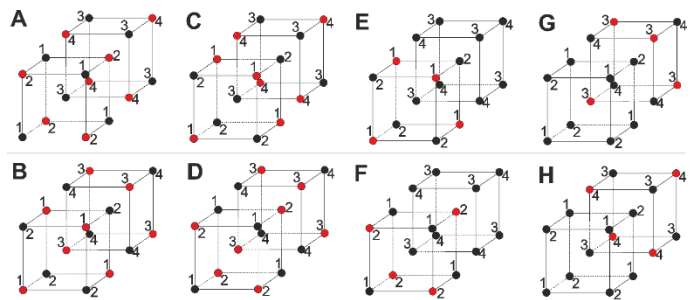


Рис. 6. Магнитные структуры основного состояния модели Изинга на ОЦК решетке с учетом взаимодействия магнитного поля при $k=1$.

парамагнитную [10]. Красными квадратами отмечены точки ФП первого рода ($11.0 \leq h \leq 13.7$).

Пунктиром обозначена предполагаемая граница антиферромагнетик-ферримагнетик [11]. На рисунке 6 приведено схематическое изображение магнитных структур основного состояния для исследуемой модели. Структуры получены путем визуализации системы в основном состоянии т.е. при минимальной исследуемой температуре ($T=0.1$). Эти структуры соответствуют указанным на фазовой диаграмме структурам. Цифрами на рисунке обозначены номера подрешеток. Красный или черный цвет в узлах решетки это условные направления спинов «вверх» или «вниз». На этом рисунке буквами от «А» до «Н» показаны все возможные магнитные структуры для разных значений магнитных полей.

Как видно на фазовой диаграмме (рис. 5.), в фазе AF2 могут реализоваться четыре структуры основного состояния (рис. 6. А-Д). В фазе Ferrimagnet реализуются четыре структуры основного состояния (рис. 6. Е-Н).

Влияние магнитного поля на фазовые переходы и термодинамические свойства модели Изинга в вырожденном состоянии

Рассмотрим случай, когда $J_1=-1$, $J_2=-2/3$. $k=J_2/J_1=2/3$

Для этой модели ($k=2/3$) без наличия магнитного поля в работе [12] было показано, что в системе происходит шестикратное вырождение системы и возможны шесть различных антиферромагнитных упорядочений в основном состоянии. В рассматриваемой модели без учета МП происходит ФП 2 рода из антиферромагнитной фазы в парамагнитную [12].

На рисунке 7 показаны температурные зависимости теплоемкости при $L=24$ для разных значений величины МП. На данном рисунке видно, что для полей $h=3.0$ и $h=3.5$ на графиках теплоемкости наблюдаются два максимума. Причем с увеличением значения МП первый максимум смещается в сторону низких температур. Наличие двух максимумов на теплоемкости связано с двумя фазовыми переходами. Первый максимум соответствует ФП 1 рода из антиферромагнитной фазы в ферримагнитную, второй максимум соответствует ФП 2 рода из ферримагнитной фазы в парамагнитную. Для некоторых полей ($h \approx 3.5$) в низкотемпературной области ($k_B T/|J_1| \approx 0.35$) мы обнаружили слабо выраженные максимумы. Наличие слабых максимумов в низкотемпературной области связано с промежуточным частичным разупорядочением основного состояния. При значениях МП $4.0 \leq h \leq 11.0$. пропадает первый максимум и остается один максимум, соответствующий ФП 1 рода. При дальнейшем увеличении значения МП $h \geq 12$ пропадает характерный максимум на графике теплоемкости и происходит подавление ФП. Незначительный скачок теплоемкости (рис $h=13$) связан с тем, что при данном значении магнитного поля система в основном состоянии имеет максимальную намагниченность $M=1$ и при увеличении температуры намагниченность плавно спадает. Можно предположить, что при значениях МП $h \geq 12$ ФП подавляется магнитным полем.

На рисунке 8 представлена зависимость намагниченности от магнитного поля для разных значений температур. Для основного состояния при температуре $T=0.025$

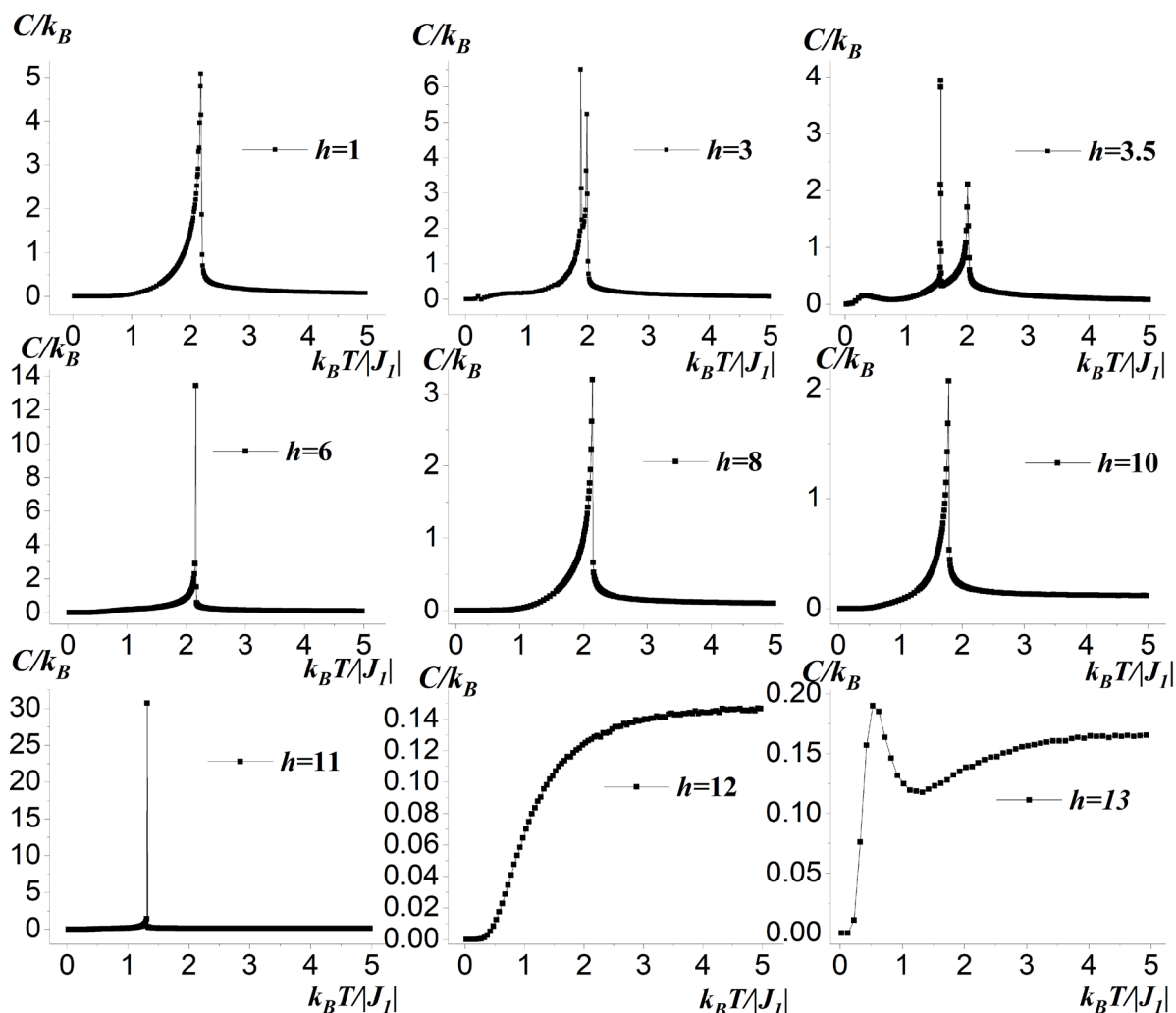


Рис. 7. Зависимость теплоемкости от температуры для разных значений h .

на рисунке наблюдаются три плато намагниченности, которые приходятся на 0, 1/2 и 1 намагниченности насыщения. В диапазоне значения магнитного поля $0.0 \leq h < 4.0$ спины двух подрешеток направлены по внешнему полю, а две оставшиеся подрешетки ориентированы противоположно, против внешнего МП. Такое антиферромагнитное упорядочение и приводит к нулевой намагниченности всей системы. При $h > 4.0$ еще одна подрешетка поворачивается вдоль поля. Все спины трех подрешеток направлены по внешнему полю, а спины одной подрешетки - против поля. Система переходит в ферромагнитное состояние. Это объясняет появление плато намагниченности равное 1/2 намагниченности насыщения. При еще бóльших значениях МП $h > 12.0$ все четыре подрешетки ориентируются вдоль поля, что приводит к насыщению намагниченности. С ростом температуры плато исчезают и наблюдается плавный рост намагниченности. Это объясняется тепловыми флуктуациями спинов. Для основного состояния при $T=0.025$ на рисунке 8 видны промежуточные значения намагниченности $M \approx 0.25$ и $M \approx 0.8$ приходящие на значения МП $h=4$ и $h=12$ соответственно. При этих значениях МП основное состояние системы частично разупорядочено. Для всех значений магнитных полей кроме $h=4$ и $h=12$ намагниченности отдельных подрешеток равны $|M| = 1/4$ от общей намагниченности системы.

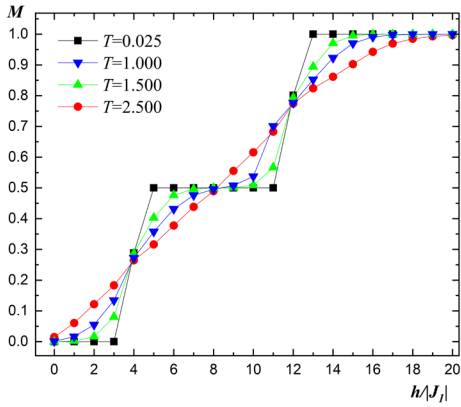


Рис. 8. Зависимость намагниченности от h для разных значений температуры.

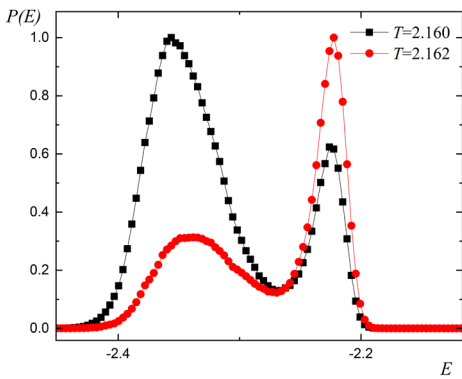


Рис. 9. Гистограмма распределения энергии для $h=6.0$.

антиферромагнитная. Причем в антиферромагнитной области могут реализоваться два разных типа упорядочения AF1-антиферромагнитная 1-го типа и AF2 - антиферромагнитная 2-го типа. Полученные структуры согласуются с результатами, которые получены в работе [12]. На фазовой диаграмме черными и красными

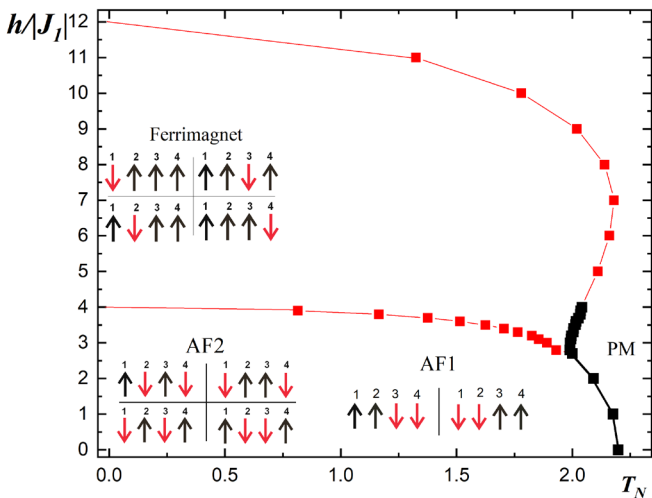


Рис. 10. Фазовая диаграмма зависимости критической температуры от магнитного поля.

Для анализа рода фазового перехода был использован метод кумулянтов Биндера и гистограммный метод анализа Монте-Карло данных. В области $0.0 \leq h < 5.0$. (черные точки на рис 10.) на кривых кумулянтов Биндера 4-го порядка были обнаружены точки пересечения для разных L , указывающий на фазовый переход 2-го рода. На рисунке 9 приведена гистограмма распределения энергии для системы с линейными размерами $L=24$ при значении МП $h=6.0$. Гистограмма построена для температур близкой к критической температуре. Видно, что на гистограмме наблюдается два максимума (бимодальность). Наличие двух максимумов на гистограмме свидетельствует о том, что в системе реализуется ФП 1 рода. Такое же поведение гистограмм наблюдается в диапазоне значения МП $2.8 \leq h < 4.0$. и $5.0 \leq h < 12.0$ (красные точки на рис. 10.).

На рисунке 10 представлена фазовая диаграмма зависимости критической температуры от величины МП. Черными квадратами отмечены точки ФП второго рода, красными квадратами отмечены точки ФП первого рода. На диаграмме видно, что вблизи точки $h=2.7$ пересекаются три различные фазы: антиферромагнитная, ферримагнитная и парамагнитная. Изображены направления спинов во всех подрешетках.

Наши исследования показывают, что в диапазоне значений МП $0.0 \leq h < 2.7$ реализуется ФП 2 рода из антиферромагнитной фазы в парамагнитную. В интервале значений МП $2.8 \leq h \leq 4.0$ с увеличением температуры в системе происходят два ФП. Вначале наблюдается ФП 1 рода из антиферромагнитной фазы в ферримагнитную, затем ФП 2 рода из ферримагнитной фазы в парамагнитную. В интервале значений МП $5.0 \leq h \leq 11.0$. в системе наблюдается ФП 1 рода из

ферромагнитной фазы в парамагнитную. Дальнейшее увеличение МП $h \geq 12$ приводит к подавлению ФП.

Влияние магнитного поля на фазовые переходы и термодинамические свойства модели Изинга в антиферромагнитной фазе 1-го типа.

Рассмотрим случай, когда $J_1 = -1, J_2 = -0.5, k = J_2/J_1 = 0.5$.

Отметим, что для рассматриваемой антиферромагнитной модели Изинга на ОЦК решетке при $k=0.5$ без наличия внешнего магнитного поля происходит ФП 2 рода и система упорядочена как AF1-антиферромагнетик 1-го типа [12].

Для построения графиков зависимости теплоемкости от температуры использовалось выражение (2). Расчет восприимчивости χ выполнялся на основе формулы:

$$\chi = \begin{cases} (NK) (\langle M^2 \rangle - \langle M \rangle^2), & T < T_N \\ (NK) \langle M^2 \rangle, & T \geq T_N \end{cases} \quad (5)$$

где N – число частиц, $K = |J_1| / k_B T$, M – намагниченность. Намагниченность вычислялась по формуле (3).

На рисунке 11 и 12 показаны температурные зависимости теплоемкости и магнитной восприимчивости при $L=24$ для разных значений величины МП. На

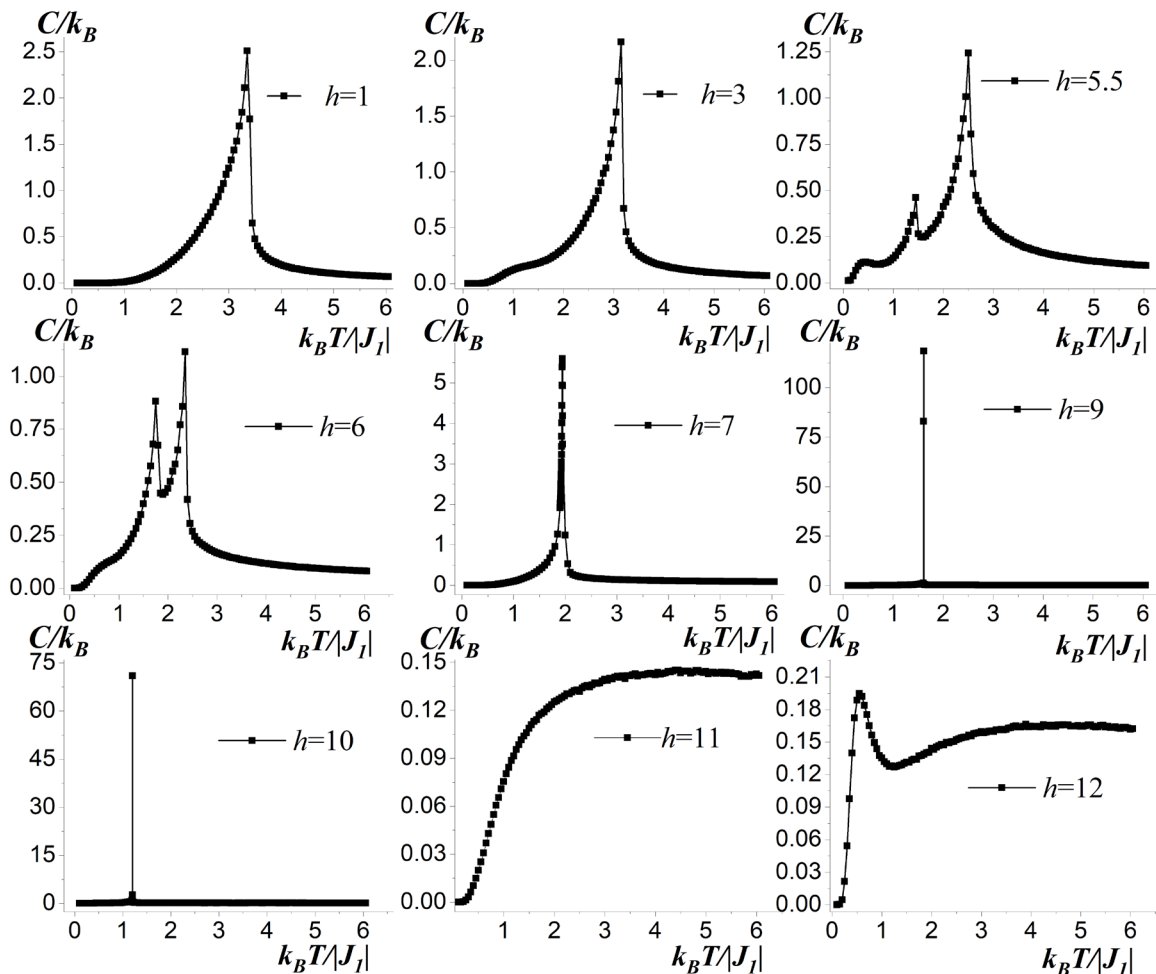


Рис. 11. Зависимость теплоемкости от температуры для разных значений h .

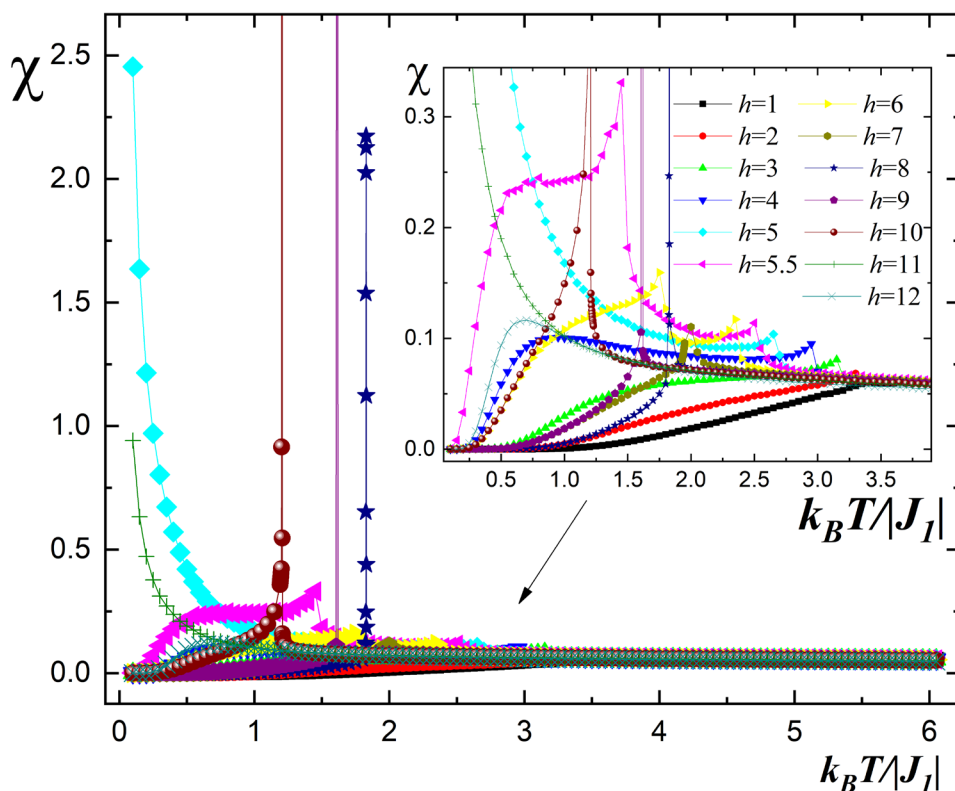


Рис. 12. Зависимость магнитной восприимчивости от температуры для разных значений h .

рисунках видно, что в интервале $0.0 \leq h \leq 10.0$ с увеличением значения h наблюдается сдвиг максимумов теплоемкости и восприимчивости в сторону низких температур. Сдвиг максимумов теплоемкости в сторону более низких температур обусловлен конкуренцией обменных взаимодействий и внешнего магнитного поля.

Обменные взаимодействия пытаются выстроить антиферромагнитное упорядочение, а внешнее магнитное поле выстраивает спины по направлению поля. В результате этого в системе происходит сдвиг максимума теплоемкости в сторону более низких температур. На зависимостях теплоемкости можно заметить, что для значений МП $7.0 \leq h \leq 10.0$ в критической области наблюдаются более резкие максимумы. Такие резкие максимумы обычно характерны для ФП первого рода. Можно предположить, что для этих значений полей в системе происходит ФП первого рода. Для значения магнитного поля $h=5.5$ и $h=6$ на зависимостях теплоемкости и восприимчивости наблюдаются по два максимума. Скорее всего это связано с тем, что здесь реализуется два ФП. Первый максимум соответствует ФП из ферромагнитной фазы в антиферромагнитную, а второй максимум соответствует ФП из антиферромагнитной фазы в парамагнитную. Наличие небольших максимумов в низкотемпературных областях связано с промежуточным частным разупорядочением основного состояния. При значениях поля $h \geq 11$ максимум теплоемкости исчезает, при значениях МП $h \geq 11$ внешнее магнитное поле подавляет ФП. На рисунке 12 восприимчивость для МП $h=5$ и $h=11$ при нулевой температуре имеет максимальное значение и с ростом температуры падает. Это является следствием того, что эти значения полей соответствуют граничным значениям между антиферромагнитным - ферромагнитным для $h=5$ и ферромагнитным - ферромагнитным состоянием для $h=11$. Для этих значений полей система в основном состоянии вырождена и частично разупорядочена. Причем для поля $h=5$ с ростом температуры система восстанавливает антиферромагнитное упорядочение и при $T=2.650$ происходит ФП в парамагнитное состояние, а для $h=11$ МП подавляет ФП и наблюдается плавный спад

без максимума восприимчивости. Также на рисунке 12 можно заметить, что для МП $h=8$, $h=9$ и $h=10$ максимум восприимчивости является более резким, что характерно для ФП 1 рода.

Для данной системы проводился анализ рода фазового перехода гистограммным методом анализа Монте-Карло данных и методом кумулянта Биндера четвертого порядка по намагниченности U_L . Для данной модели были обнаружены точки пересечения кривых кумулянтов Биндера в интервале $0.0 \leq h \leq 7.0$ которые свидетельствует, что в системе реализуется ФП второго рода. Для значений магнитного поля $h \geq 8.0$ на зависимостях кумулянтов Биндера не удалось обнаружить точки пересечения и с помощью гистограммного метода анализа МК данных были получены бимодальные распределения энергии в диапазоне значения МП $8 \leq h \leq 10.0$ которые свидетельствуют в пользу ФП первого рода.

На рисунке 13 представлена фазовая диаграмма зависимости критической температуры T_N от величины магнитного поля h . На диаграмме видно, что в точке $h=7$ пересекаются три различные фазы: антиферромагнитная фаза 1-го типа, ферримагнитная и парамагнитная. Черными и красными стрелками обозначены направления спинов в каждой подрешетке. Черными квадратами отмечены точки ФП второго рода, красными квадратами отмечены точки ФП первого рода ($7.0 \leq h \leq 10.0$).

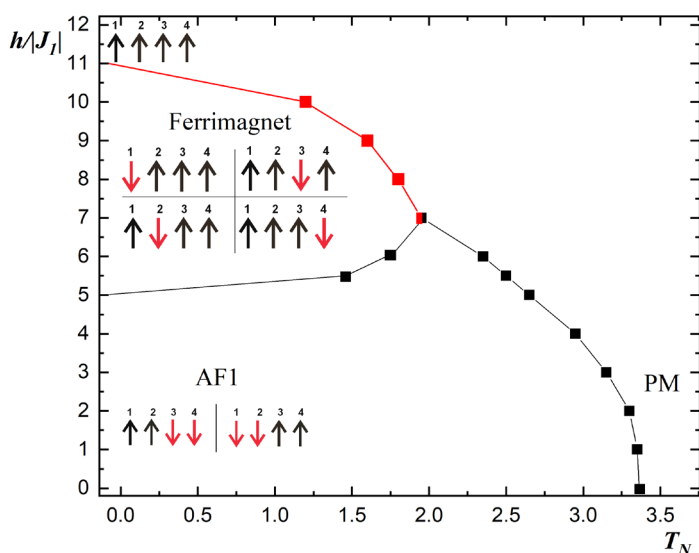


Рис. 13. Фазовая диаграмма зависимости критической температуры от магнитного поля.

Каждой фазе соответствуют различные магнитные структуры. Как видно на диаграмме, для значений поля $h < 5$ в основном состоянии наблюдается антиферромагнитное упорядочение, а для полей $5.5 \leq h \leq 10$ – ферримагнитное. При значении МП $h=5$ антиферромагнитное состояние частично разупорядочено. При $h=5$ с увеличением температуры происходит ФП 2 рода.

Исходя из результатов численного эксперимента можно сказать, что для данной модели для значений магнитных полей $0.0 \leq h \leq 5.0$ происходит ФП 2 рода. Для значений магнитных полей $5.5 \leq h < 7.0$ с увеличением температуры происходят два ФП 2 рода, а для $7.0 < h \leq 10.0$ ФП 1 рода. При значении МП $h=7$ происходит ФП 2 рода. Магнитное поле $h \geq 11$ приводит к подавлению ФП.

Как видно на фазовой диаграмме (рис. 13), в фазе AF1 могут реализоваться только две структуры основного состояния. В фазе Ferrimagnet реализуются четыре структуры основного состояния.

Все выше полученные фазовые диаграммы, качественно совпадают с фазовыми диаграммами представленными в обзорной статье [10] для двух и четырех подрешеточных метамагнетиков с сильной одноосной анизотропией.

Четвертая глава посвящена результатам исследования антиферромагнитной модели Гейзенберга на ОЦК решетке с конкурирующими спиновыми взаимодействиями при наличии внешнего магнитного поля. В этой главе приведены результаты исследований антиферромагнитной модели Гейзенберга на ОЦК решетке с учетом обменных взаимодействий J_1 и J_2 при наличии внешнего магнитного поля для случая $k=1.0$ и $k=0.5$. Построены фазовые диаграммы зависимости критической температуры от величины магнитного поля.

Влияние магнитного поля на термодинамические и магнитные свойства модели Гейзенберга в антиферромагнитном состоянии 2-го типа

Гамильтониан рассматриваемой системы может быть представлен в следующем виде:

$$H = -J_1 \sum_{\langle i,j \rangle} (\vec{S}_i \cdot \vec{S}_j) - J_2 \sum_{\langle i,l \rangle} (\vec{S}_i \cdot \vec{S}_l) - h \sum_{\langle i \rangle} \vec{S}_i \quad (6)$$

где \vec{S}_i - трехкомпонентный единичный вектор $\vec{S}_i = (S_i^x, S_i^y, S_i^z)$. Первый член в формуле учитывает обменное взаимодействие ближайших соседей $J_1 < 0$, а второй – следующих за ближайшими соседями $J_2 < 0$. h - величина магнитного поля (приводится в единицах $|J_1|$). Магнитное поле менялось в интервале $0.0 \leq h \leq 20.0$ и направлена вдоль направления оси z . Рассматривается случай, когда $J_2 = J_1 = -1.0$, $k = J_2/J_1 = 1$ при наличии внешнего магнитного поля. Отметим, что для этой модели ($k = J_2/J_1 = 1$) без наличия МП система в основном состоянии имеет антиферромагнитное упорядочение 1-го типа и с повышением температуры происходит ФП 2 рода [13].

Для наблюдения за температурным ходом теплоемкости было использовано соотношение (2). Магнитная восприимчивость вычислялась по формуле (5), где в качестве M был использован параметр порядка m

Параметр порядка системы определялся по формуле:

$$\vec{m} = 3\vec{m}_1 - \vec{m}_2 - \vec{m}_3 - \vec{m}_4 \quad (7)$$

где $\vec{m}_1, \vec{m}_2, \vec{m}_3, \vec{m}_4$ – параметры порядка по подрешеткам.

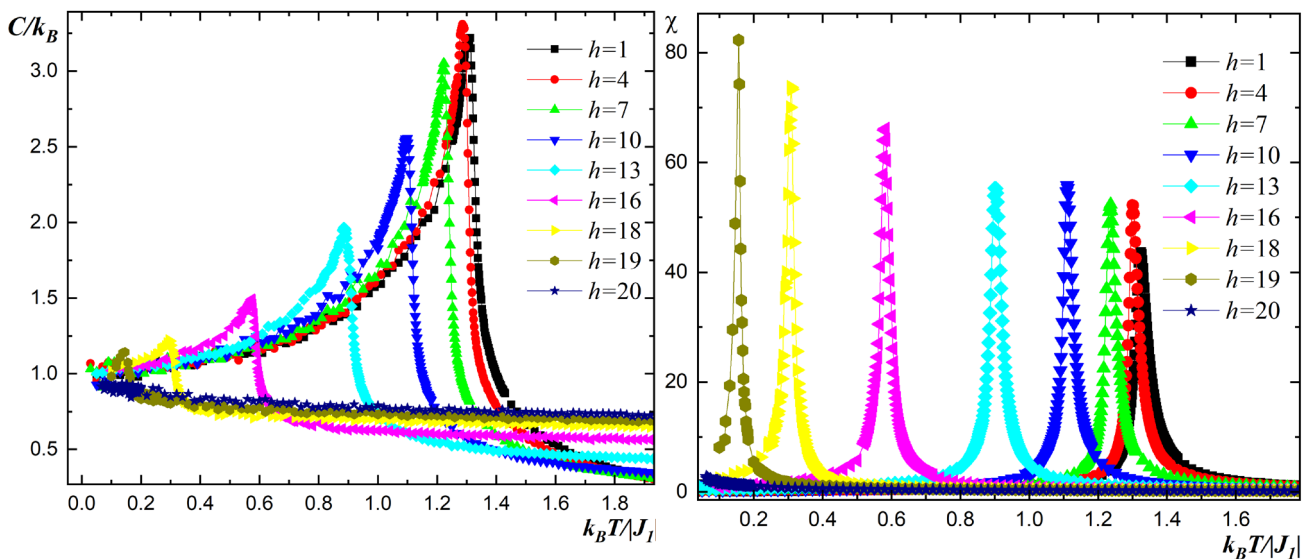


Рис. 14. Зависимости теплоемкости (рис. слева) и магнитной восприимчивости (рис. справа) от температуры $k_B T / |J_1|$ для разных значений h .

Намагниченность вычислялась по формуле:

$$M = \frac{1}{N} \sum_{\langle i \rangle} \overline{S}_i \quad (8)$$

Температурные зависимости для теплоемкости и восприимчивости приведены на рисунке 14. Отметим, что рост значения h сопровождается сдвигом максимумов в сторону более низких температур, одновременно с этим наблюдается спад абсолютных значений максимумов теплоемкости и незначительный рост абсолютных значений восприимчивости. Очевидно, что это связано с подавлением флуктуаций с увеличением магнитного поля. Рост абсолютных значений магнитной восприимчивости (рис. 14, справа) с ростом значения МП связан с тем, что происходит рост флуктуаций намагниченности в точке ФП. Рост значения магнитного поля смещает температуру упорядочения к более низким значениям. На рисунке 14 на зависимости теплоемкости и восприимчивости видно, что с увеличением МП температура ФП стремится к более низким значениям нулю и в конце концов ФП подавляется.

Для определения рода ФП и критической температуры для всех рассмотренных значений МП для данной модели также был использован метод кумулянтов Биндера четвертого порядка (4). Были построены зависимости кумулянтов Биндера четвертого порядка U_L для разных размеров системы L при значениях магнитного поля $0.0 \leq h \leq 19.0$. Анализ наших результатов показывает, что в интервале $0.0 \leq h \leq 19.0$ наблюдается ФП второго рода.

На рисунке 15 показана фазовая диаграмма зависимости критической температуры T_N от величины магнитного поля h . Черными и красными стрелками обозначены направления спинов в каждой подрешетке, а цифры над стрелками указывают на номер подрешетки. При небольшом или нулевом значении магнитного поля система упорядочена как антиферромагнетик 2-го типа [10]. Как показано на рисунке 15 с увеличением значения МП две противонаправленные подрешетки

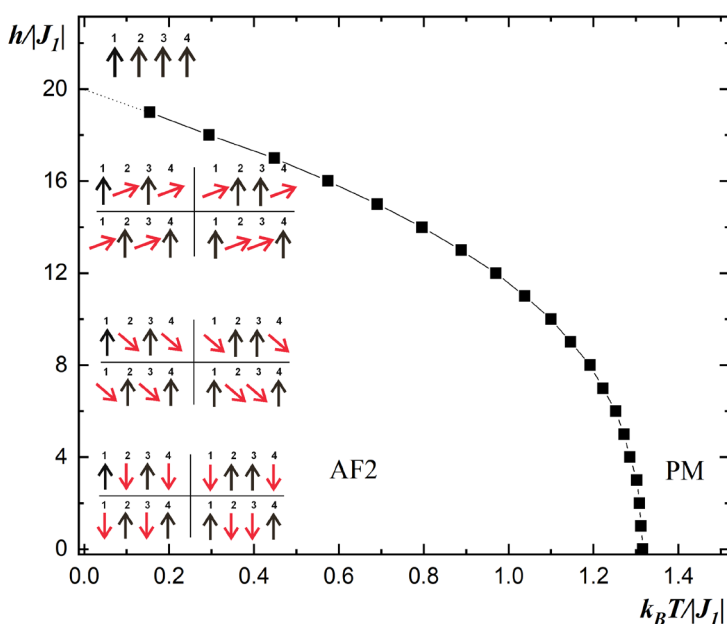


Рис. 15. Фазовая диаграмма зависимости критической температуры от магнитного поля.

плавно поворачиваются по направлению магнитного поля и при значении $h=20$ система находится в ферромагнитном состоянии. Дальнейшее увеличение магнитного поля $h \geq 20$ подавляет ФП.

Анализ результатов показывает, что во всем интервале значений магнитных полей $0.0 \leq h \leq 19.0$ в системе реализуется ФП 2 рода из антиферромагнитной фазы-AF2 в парамагнитную фазу PM. С увеличением значения магнитного поля антиферромагнитная фаза основного состояния плавно переходит в ферромагнитную фазу.

Влияние магнитного поля на фазовые переходы и магнитные свойства модели Гейзенберга в антиферромагнитном состоянии 1-го типа.

Рассмотрим влияние магнитного поля на термодинамические свойства и фазовые переходы антиферромагнитной модели Гейзенберга на ОЦК решетке с учетом взаимодействий ближайших и вторых ближайших соседей в случае, когда $J_1 = -1$, $J_2 = -0.5$, $k = J_2/J_1 = 0.5$.

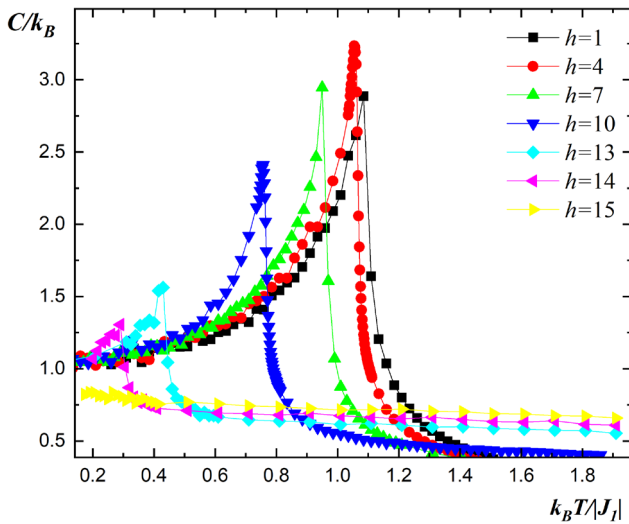


Рис. 16. Зависимость теплоемкости от температуры для разных значений h .

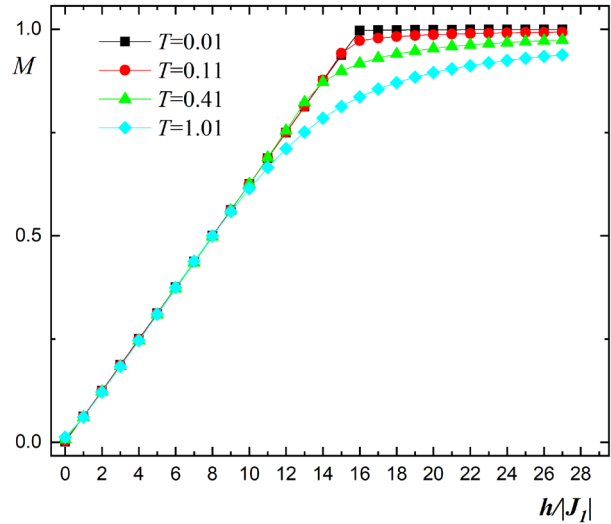


Рис. 17. Зависимость намагниченности от магнитного поля для разных значений температур.

Температурные зависимости для теплоемкости приведены на рисунке 16. Рост значения h сопровождается сдвигом максимумов в сторону более низких температур, одновременно с этим наблюдается спад абсолютных значений максимумов теплоемкости. Это связано с подавлением флуктуаций системы с увеличением МП. Рост значения внешнего магнитного поля делает систему восприимчивой при более низких температурах. На рисунке 16 на зависимостях теплоемкостей видно, что с увеличением МП температура ФП стремится к нулю и в конце концов магнитное поле подавляет фазовый переход.

На рисунке 17 представлена зависимость намагниченности M от величины МП для разных значений температур. В отличие от модели Изинга на ОЦК решетке в модели Гейзенберга не наблюдаются плато намагниченности. Это означает, что в модели Гейзенберга не возникают устойчивые промежуточные (ферромагнитные) структуры по мере роста МП, а система плавно из антиферромагнитного состояния переходит в ферромагнитное состояние. Для основного состояния при $T = 0.01$ с ростом значения внешнего МП намагниченность растет прямолинейно и доходит до значения $M = 1$. Можно заметить, что для температур $T = 0.4$ и 1.0 полное насыщение намагниченности достигается при больших значениях МП, т.е. спиновые флуктуации частично нарушают ферромагнитное состояние.

Для определения рода ФП для всех рассмотренных значений МП для данной модели был использован метод кумулянтов Биндера четвертого порядка и обнаружено, что в системе реализуется ФП второго рода при всех значениях МП h .

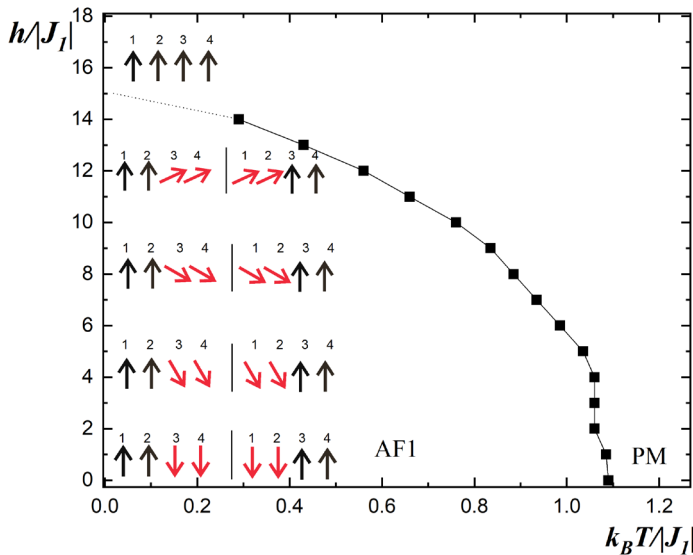


Рис. 18. Фазовая диаграмма зависимости критической температуры от магнитного поля.

магнитного поля $h \geq 15$ система переходит в ферромагнитное состояние. ФП 2 рода сохраняется до достижения МП $h=14$. Дальнейшее увеличение магнитного поля $h \geq 15$ подавляет фазовый переход.

Анализ результатов показывает, что во всем интервале значений магнитных полей $0.0 \leq h \leq 14.0$ в системе реализуется ФП 2 рода из AF1 в парамагнитную фазу. Основное состояние системы с увеличением значения МП плавно переходит из антиферромагнитной фазы в ферромагнитную фазу.

В заключении приведены основные выводы диссертационной работы.

Основные оригинальные результаты диссертационной работы:

1. изучены особенности влияния магнитного поля на термодинамические и магнитные свойства антиферромагнитной модели Изинга на ОЦК решетке с учетом первых J_1 и вторых J_2 ближайших соседей в случае $k=J_2/J_1=1$. Проведена оценка влияния магнитного поля на фазовые переходы в данной модели. Показано, что в интервале магнитного поля $0.0 \leq h \leq 10.0$ происходит фазовый переход второго рода, а в интервале $11.0 \leq h \leq 13.7$ фазовый переход первого рода. Для этой же модели обнаружены значения магнитного поля $h=6$ и $h=14$, где происходит частичное разупорядочение основного состояния. Построена фазовая диаграмма зависимости критической температуры от величины магнитного поля для данной модели. Определены магнитные структуры основного состояния;
2. проведены исследования антиферромагнитной модели Изинга на ОЦК решетке с конкурирующими обменными взаимодействиями при наличии внешнего магнитного поля для случая $k=2/3$. Получены температурные и полевые зависимости основных термодинамических параметров. Определен род фазового перехода для значений магнитных полей в интервале $0.0 \leq h \leq 11.0$. Показано, что в интервале МП $0.0 \leq h \leq 2.7$ происходит ФП 2 рода из антиферромагнитной фазы

в парамагнитную. Обнаружено, что в интервале МП $2.8 \leq h \leq 4.0$ в системе происходят два ФП: сначала ФП 1 рода из антиферромагнитной фазы в ферримагнитную далее ФП 2 рода из ферримагнитной фазы в парамагнитную. А в интервале МП $5.0 \leq h \leq 11.0$ происходит ФП 1 рода. Обнаружены значения магнитного поля $h=4$ и $h=12$, где происходит частичное разупорядочение основного состояния. Построена фазовая диаграмма зависимости критической температуры от величины МП для этой модели;

3. получены температурные и полевые зависимости основных термодинамических параметров для антиферромагнитной модели Изинга на ОЦК решетке с учетом взаимодействия первых и вторых ближайших соседей для случая $k=0.5$. Для данной модели определен род фазового перехода в широком интервале значений магнитного поля. В интервале МП $0.0 \leq h \leq 5.0$ в системе происходит ФП 2 рода, а в интервале МП $5.0 < h \leq 7.0$ происходят два ФП 2 рода: из ферримагнитной фазы в AF1 и далее из AF1 в парамагнитную фазу. В области МП $8 \leq h \leq 10.0$ происходит ФП 1 рода. Найдены значения МП $h=5$ и $h=10$ при которых происходит частичное разупорядочение основного состояния. Для этой модели также построена фазовая диаграмма зависимости T_N от величины МП и выявлены структуры основного состояния;
4. проведены исследования антиферромагнитных моделей Гейзенберга на ОЦК решетке с учетом взаимодействия первых и вторых ближайших соседей в случае $k=1$ и $k=0.5$ при наличии внешнего магнитного поля. Получены зависимости теплоемкости C , восприимчивости χ , намагниченности M от температуры для разных значений МП. Также построены зависимости намагниченности M и минимальной энергии E_{min} от величины магнитного поля. Определен род фазового перехода в большом интервале магнитных полей и показано, что реализуется ФП 2 рода. Получены магнитные структуры основного состояния. Построены фазовые диаграммы зависимости критической температуры от величины магнитного поля антиферромагнитных моделей Гейзенберга на ОЦК решетке с конкурирующими обменными взаимодействиями при $k=1$ и $k=0.5$;

Полученные результаты при выполнении данной работы, использованные алгоритмы, методы расчета создают надежную базу для исследования спиновых моделей методами вычислительной физики с конкурирующими взаимодействиями.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ И РАБОТ АВТОРА

Статьи, индексируемые в Web of Science и Scopus:

1. Murtazaev A. K., Ramazanov M. K., Kurbanova D. R., Magomedov M. A., Murtazaev K. Sh. Phase diagrams and ground-state structures of the antiferromagnetic materials on a body-centered cubic lattice // Materials Letters (2019) 236 P.669–671.
2. Муртазаев А.К., Рамазанов М.К., Муртазаев К.Ш., Магомедов М.А., Бадиёв М.К. Влияние магнитного поля на термодинамические и магнитные свойства антиферромагнитной модели изинга на объемно-центрированной кубической решетке // Физика твердого тела 62 (2020) С. 229-233

3. Муртазаев А.К., Кассан-Оглы Ф.А., Рамазанов М.К., Муртазаев К. Ш. Исследование фазовых переходов в антиферромагнитной модели Гейзенберга на объемно-центрированной кубической решетке методом Монте-Карло // Физика металлов и металловедение. (2020) 121 4 С.346–351.
4. Murtazaev K. Sh., Murtazaev A. K., Ramazanov M. K., Magomedov M. A., Murtazaeva A. A. Ising model on a body-centered cubic lattice with competing exchange interactions in strong magnetic fields // Low Temperature Physics (2021) Vol 47 P. 515-519.
5. Муртазаев К.Ш., Муртазаев А.К., Рамазанов М.К., Магомедов М.А. Фазовые переходы в антиферромагнитной модели Изинга с конкурирующими обменными взаимодействиями в магнитном поле // Известия РАН. Серия физическая. (2022) том 86, № 2, С. 182–186.
6. Murtazaev K. Sh, Magomedov M.A., Murtazaev A.K., Ramazanov M.K. Phase diagram of the antiferromagnetic Ising model on a body-centered cubic lattice with competing exchange interactions under a magnetic field // Physica E. (2023) 148 P. 115646.

Статьи, индексируемые в РИНЦ:

7. Муртазаев А.К., Рамазанов М.К., Бадиев М.К., Абуев Я.К., Курбанова Д.Р. Муртазаев К.Ш. Фазовые переходы в антиферромагнитной модели Изинга на слоистой треугольной решетке // Инженерная физика. 2017. Т.8 С. 078-083.
8. Муртазаев А.К., Рамазанов М.К., Бадиев М.К., Муртазаев К.Ш. Исследование фазовых переходов в трехмерной модели Изинга на треугольной решетке // Вестник Дагестанского государственного университета УДК 239.2 2018.

Свидетельства о государственной регистрации программы для ЭВМ:

9. Программа для исследования модели Изинга на гранецентрированной кубической решетке репличным методом Монте-Карло / Муртазаев К.Ш. Рамазанов М.К. Мазагаева М.К. // №2021666920, дата регистрации 21.10.2021.
10. Программа для исследования фазовых переходов в антиферромагнитной модели Изинга с конкурирующими взаимодействиями в магнитном поле / Муртазаев К. Ш., Магомедов М. А., Рамазанов М. К. // № 2022682039. Дата регистрации: 18.11.2022.
11. Муртазаев К. Ш., Рамазанов М. К., Магомедов М. А. Программа для расчета термодинамических параметров антиферромагнитной модели Изинга на ОЦК решетке в магнитном поле. / Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2023681666 Дата регистрации: 17.10.2023.

Цитируемая литература

1. Паташинский, А.З. Флуктуационная теория фазовых переходов / А.З. Паташинский, В.А. Покровский // М.: Наука. – 1982. – 380 с.
2. Kassar-Ogly, F.A. Influence of field on frustrations in low-dimensional magnets / F.A. Kassar-Ogly, B.N. Filippov, A.K. Murtazaev, M.K. et. al. // J. Magn. Magn. Mater. – 2012. -V. 324 -P. 3418–3421.
3. Landau, D.P. A guide to Monte Carlo simulations in statistical physics / D.P. Landau, K. Binder // Cambridge University Press. – 2000. – V. 384.
4. Malakis, A. Monte Carlo studies of the square Ising model with next-nearest-neighbor interactions / A. Malakis, P. Kalozoumis, N. Tyraskis // Eur. Phys. J. – 2006. -V.50 - P.63–67.
5. Murtazaev, K. Sh. Phase diagram of the antiferromagnetic Ising model on a body-centered cubic lattice with competing exchange interactions under a magnetic field / K. Sh. Murtazaev, M.A. Magomedov, A.K. Murtazaev, et.al. // Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures. -2023. -V. 148. -P. 115646.
6. Binder, K. Monte Carlo tests of renormalization-group predictions for critical phenomena in Ising models / K. Binder, E. Luijten // Phys. Reports. – 2001. – V. 344. – P. 179-253.
7. Mitsutake, A. Generalized-Ensemble Algorithms for Molecular Simulations of Biopolymers / A. Mitsutake, Y. Sugita, Y. Okamoto // Peptide Science. – 2001. – V. 60. – P. 96. - preprint cond-mat/0012021.
8. Binder, K., Monte Carlo Simulation in Statistical Physics / K. Binder, D. W. Heermann // - Springer_Verlag. 1988; - М.: Nauka. 1995.
9. Wang, F. Determining the density of states for classical statistical models: A random walk algorithm to produce a flat histogram / F. Wang, D.P. Landau // Physical Review E. – 2001. – V. 64. – P. 056101.
10. Velgakis M.J. Fluctuation-induced, first-order transition in a bcc Ising model with competing interactions / M.J. Velgakis, M. Ferer // Physical Review B. – 1983. – V. 27. №. 1. – P.401-412.
11. Stryjewski, E. Metamagnetism / E. Stryjewski, N. Giordano // Advances in Physics. - 1977. –V. 26. №. 5 -P. 487–650.
12. Murtazaev, A.K. Phase diagrams and ground-state structures of the antiferromagnetic materials on a body-centered cubic lattice / A.K. Murtazaev, M.K. Ramazanov, D.R. Kurbanova, et. al. // Mater. Lett.-2019. -V. 236. -P. 669.
13. Муртазаев, А. К. Фазовые переходы и критические свойства антиферромагнитной модели Гейзенберга на объемно-центрированной кубической решетке с взаимодействиями вторых ближайших соседей // А. К. Муртазаев, Д. Р. Курбанова, М. К. Рамазанов // ЖЭТФ. – 2019. – Т. 156. №. 5. – С. 980-988.