

На правах рукописи

КУДРЯВЦЕВ РОМАН ВЛАДИМИРОВИЧ

ДИНАМИКА СОЛИТОНОВ УРАВНЕНИЯ СИНУС-ГОРДОНА В МОДЕЛИ
С ПРИТЯГИВАЮЩИМИ ПРИМЕСЯМИ, ВНЕШНЕЙ СИЛОЙ И ЗАТУХАНИЕМ

Специальность 01.04.02 — теоретическая физика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

УФА – 2018

Работа выполнена на кафедре теоретической физики физико-технического института Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Башкирский государственный университет».

Научный руководитель: Екомасов Евгений Григорьевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической физики Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Башкирский государственный университет».

Официальные оппоненты:

Алфимов Георгий Леонидович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Высшая математика-1» Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский университет «Московский институт электронной техники».

Кузьмин Дмитрий Александрович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры радиофизики и электроники Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Челябинский государственный университет».

Ведущая организация: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина».

Защита состоится 25 декабря 2018 г. в 16-00 на заседании диссертационного совета Д 212.296.03 в Челябинском государственном университете по адресу: 454001, г. Челябинск, ул. Братьев Кашириных, д. 129, конференц-зал.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Челябинского государственного университета.

Автореферат разослан «__» _____ 2018 г.

Учёный секретарь диссертационного совета,
доктор физико-математических наук,
профессор

Е.А. Беленков

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В теоретической физике описание физических процессов линейными уравнениями, для которых выполняется принцип суперпозиции, зачастую является приближённым, верным лишь для малых параметров. Для более общего и точного описания физических процессов методами теоретической физики нужны уравнения нелинейные [1], интенсивные исследования которых начались в 1960-х годах. С тех пор в теоретической физике при исследовании нелинейных волновых процессов сделан ряд фундаментальных открытий. Методы интегрирования нелинейных эволюционных уравнений [2–4], например, метод обратной задачи рассеяния, метод Хироты и метод преобразований Бэклунда, позволили проинтегрировать некоторые нелинейные дифференциальные уравнения, используемые в теоретической физике, к числу которых относятся уравнение Кортевега-де Фриза, нелинейное уравнение Шредингера и уравнение синус-Гордона (УСГ). При этом были найдены решения, описывающие уединённые волны, которые сохраняют свою форму и скорость во времени, в том числе при взаимодействии друг с другом — солитоны. Изучение солитонов [4–9] — открытие новых солитонных решений, описание их свойств и поведения — интересно как с фундаментальной точки зрения, так и с прикладной. Изучаемые теоретической физикой нелинейные уравнения и солитонная теория применяются в различных разделах физики и других областях естествознания для описания многочисленных явлений [7–12] и могут найти применение в технике. УСГ является континуальным приближением модели Френкеля-Конторовой (МФК) и точно интегрируемым дифференциальным уравнением в частных производных, с чем связано его широкое использование, например, в описании динамики вихрей в джозефсоновских контактах, доменных границ в магнетиках, макромолекулы ДНК и т.д. Для более адекватного описания реальных физических систем в УСГ вводятся дополнительные коэффициенты и различного вида функции, моделирующие такие параметры, как внешняя сила, диссипация, пространственная неоднородность параметров и другие. Модифицированное уравнение синус-Гордона (МУСГ) в общем случае уже не имеет точного решения, и для его исследования разрабатываются и применяются приближённые аналитические методы, например, теория возмущений и метод коллективных переменных [8–9]. Использование солитонной модели при этом остаётся актуальным. Область применения подобных методов во многих случаях ограничена малыми параметрами. Их применение позволяет получить лишь качественную картину динамики системы. Более точное описание при произвольных по величине параметрах возможно с помощью численного моделирования [7].

Один из часто используемых при проведении теоретических исследований способов получения модификаций УСГ заключается в добавлении пространственной неоднородности периодического потенциала в виде примеси. Эта модель часто применяется, например, в теории магнетизма при изучении динамики магнитных неоднородностей в магнетиках с дефектами и мультислойных магнитных наноструктурах. Во многих публикациях изучается взаимодействие топологического

солитона (кинка) с примесью [6–9, 11]. Хотя численный расчёт позволяет получить более точное описание в более широкой области изменений параметров, для качественного понимания изучаемого процесса и для контроля правильности численных расчётов сохраняют актуальность аналитические исследования. Одной из простейших для аналитического расчёта форм примеси является точечная примесь. Ранее рассмотрено движение кинка через одиночную точечную примесь с учётом возбуждения на ней нелинейной локализованной волны — примесной моды [7–9, 11]. Были найдены три варианта взаимодействия кинка с областью примеси: прохождение, захват и отражение, характерные и для притягивающих примесей других видов. При этом рассмотренная ранее аналитическая модель не учитывала наличия имеющихся в реальных физических системах дополнительных параметров. Например, задача об исследовании одномерной динамики доменных границ в мультислойных магнетиках приводит к необходимости вводить в УСГ слагаемые, отвечающие за неоднородность магнитных параметров и затухание системы. Также не проводилось аналитического расчёта для случая двух и более примесей. Рассмотрение таких задач могло бы существенно помочь при проведении экспериментов в реальных физических системах по наблюдению теоретически открытых эффектов.

Цели и задачи. Целью данной работы является теоретическое исследование динамики солитонов УСГ в одномерной модели с внешней силой, неоднородной диссипацией и произвольным числом различных точечных примесей, находящихся на произвольном расстоянии друг от друга, с учётом генерации локализованных нелинейных волн, которая может описывать, например, нелинейную динамику доменных границ (ДГ) и локализованных волн намагниченности (ЛВН) в ферромагнетиках с присутствием внешнего магнитного поля и плоских тонких слоёв с отличными от основного объёма параметрами магнитной анизотропии, обменного взаимодействия и затухания. Основные задачи, решаемые в рамках исследования:

1. Аналитический вывод системы интегро-дифференциальных одномерных уравнений, приближённо описывающих совместное движение центра кинка и колебания примесных мод для случая произвольного числа разных точечных примесей, расположенных на различном расстоянии друг от друга, в присутствии внешней силы и неоднородной диссипации, аппроксимация входящих в систему уравнений интегралов аналитическими функциями.

2. Исследование с помощью полученной системы уравнений динамики доменных границ и локализованных волн намагниченности в трех- и пятислойной ферромагнитной структуре. Построение и качественный анализ зависимостей координаты центра ДГ и амплитуд ЛВН от времени.

Научная новизна.

1. Впервые получена система интегро-дифференциальных уравнений, качественно описывающая одномерную динамику кинка УСГ с учётом возбуждения примесных мод в модели с произвольным числом разных точечных примесей, расположенных на произвольном расстоянии друг от друга, в присутствии внешней силы и неоднородной диссипации, применимая к описанию динамики ДГ и ЛВН в ферромагнетиках с присутствием внешнего магнитного поля и плоских тонких

слоёв с отличными от основного объёма величиной магнитной анизотропии, параметра обменного взаимодействия и коэффициентом диссипации. В уравнениях были учтены слагаемые, которыми пренебрегали в предыдущих исследованиях. Входящие в уравнения интегралы аппроксимированы аналитическими функциями.

2. С помощью полученных динамических уравнений изучены частные случаи: колебания ЛВН при наличии одного или двух тонких слоёв в отсутствие ДГ, динамика ДГ в отсутствие ЛВН, совместная динамика ДГ и ЛВН при наличии одного или двух тонких слоёв, в том числе в присутствии внешнего магнитного поля и неоднородной диссипации.

3. Найден вид функций, определяющих действующие на ДГ и ЛВН силы для случая наличия одного тонкого слоя. Установлено, что входящие в уравнения движения интегральные члены оказывают не меньшее влияние на динамику, чем неинтегральные. При наличии одного тонкого слоя изучается влияние на динамику ДГ и ЛВН внешнего магнитного поля, неоднородной диссипации и неоднородности параметра обменного взаимодействия.

4. Впервые с помощью аналитических методов изучается колебание ЛВН и динамика ДГ при наличии двух разных тонких слоёв, в том числе с учётом влияния внешнего магнитного поля и неоднородной диссипации. Показано, что колебания ЛВН на двух разных тонких слоях в отсутствие ДГ и диссипации представляют собой сумму двух гармонических колебаний.

Теоретическая и практическая значимость. Построенная аналитическая модель уточняет и обобщает уже имеющуюся модель взаимодействия кинка с точечной примесью. Проведённое исследование расширяет знания о динамике кинков МУСГ при их взаимодействии с точечными примесями и знания о колебаниях примесных мод. Полученные результаты имеют важные приложения в тех областях теоретической физики, в которых используется данная модель, например, для описания динамики ДГ в мультислойных ферромагнитных материалах.

Методы исследования. При решении поставленных в данной работе задач использовались аналитические и численные методы. Для получения интегро-дифференциальных уравнений, описывающих динамику нелинейных волн, был использован один из приближённых методов аналитического решения МУСГ — метод коллективных переменных, который активно применялся и ранее при изучении динамики солитонов. Для аппроксимации полученных интегралов аналитическими функциями, для анализа и решения полученных обыкновенных дифференциальных уравнений и построения графиков использовался численный расчёт. В сравнительно простых случаях система сводилась к обыкновенным дифференциальным уравнениям, решаемым аналитически.

Основные положения, выносимые на защиту.

1. Одномерная модель синус-Гордона с произвольным количеством точечных примесей при наличии внешней силы и неоднородной диссипации, описывающая динамику магнитных неоднородностей в мультислойных ферромагнетиках. Интегро-дифференциальные уравнения, описывающие связанную динамику координаты центра кинка и амплитуды локализованных на примесях волн.

2. Диаграммы возможных сценариев динамики 180-градусных доменных границ в трехслойной ферромагнитной структуре с неоднородными параметрами магнитной анизотропии, обменного взаимодействия и диссипации. Показано, что учёт неоднородности диссипации, обмена и возбуждения локализованных волн намагниченности может существенно изменить не только скорость, но и сценарий динамики доменной границы, в частности может приводить к значительному ослаблению (или полному исчезновению) эффектов резонансного рассеяния доменной границы.

3. Возможные сценарии динамики 180-градусных доменных границ в пятислойной ферромагнитной структуре с неоднородными параметрами магнитной анизотропии, обменного взаимодействия и диссипации в зависимости от расстояния между двумя тонкими слоями. Уравнения, описывающие связанные колебания локализованных волн намагниченности на двух тонких слоях. Зависимость частот и амплитуд локализованных волн намагниченности от расстояния между тонкими слоями и величины неоднородности параметров системы.

Степень достоверности и апробация результатов. Достоверность результатов обеспечивается корректностью математической постановки задачи, а также сравнением с результатами, полученными другими авторами. Результаты численного решения аналитических уравнений сравнивались с предельными случаями, рассчитанными аналитически. Основные результаты работы докладывались на конференциях: II Всероссийская конференция «Нелинейные и резонансные явления в конденсированных средах», Уфа, 2014; The International Conference «Mathematical and Computational Modelling in Science and Technology», Izmir, Turkey, 2015; Международная конференция, посвящённая 80-летию члена-корреспондента РАН И.К. Камилова «Фазовые переходы, критические и нелинейные явления в конденсированных средах», Челябинск, 2015; Школа-семинар с международным участием «Дискретные бризеры в кристаллах», Уфа, 2015; Уфимская международная математическая конференция, Уфа, 2016; VII, VIII и IX Международная школа-конференция для студентов, аспирантов и молодых ученых «Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании», Уфа, 2014, 2015, 2016; 23 Всероссийская научная конференция студентов-физиков и молодых учёных (ВНКСФ-23), Екатеринбург, 2017; Третья межрегиональная школа-конференция студентов, аспирантов и молодых учёных-физиков «Теоретические и экспериментальные исследования нелинейных процессов в конденсированных средах», Уфа, 2017; Moscow International Symposium on Magnetism (MISM), Moscow, 2017; Международная математическая конференция по теории функций, посвящённая 100-летию А.Ф. Леонтьева, Уфа, 2017; Международная научная конференция «Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения», Банное, 2018; II, III и V (с международным участием) Всероссийская научная молодёжная конференция «Актуальные проблемы нано- и микроэлектроники», Уфа, 2014, 2015 и 2018.

Личный вклад. Автор принимал участие в постановке задач, выполнил аналитические расчёты, провёл численный анализ полученных уравнений. Часть аналитических результатов получена совместно с А.М. Гумеровым.

Публикации. По результатам работы опубликованы 21 тезис в сборниках

материалов российских и международных конференций и 5 статей в журналах, рекомендованных ВАК для публикации результатов диссертаций на соискание учёной степени кандидата наук и приравненных к ним.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, трёх глав и заключения. Полный объём диссертации составляет 160 страниц, включая 21 рисунок, 4 таблицы и 139 источников в списке цитируемой литературы.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** показана актуальность темы исследования, степень её разработанности, поставлены цели и задачи исследования, описана научная новизна, теоретическая и практическая значимость исследования, выбраны методы исследования, перечислены положения, выносимые на защиту, определена степень достоверности и перечислены конференции, на которых докладывались результаты.

В **первой главе** приведён обзор литературы по теме диссертации. Кратко рассмотрена история открытия солитонов, приведён пример простейшей физической системы, при описании динамики которой в континуальном пределе возникает УСГ, упомянуты методы интегрирования УСГ, приведены его основные солитонные решения в виде кинка и бризера. Упомянуты методы исследования влияния возмущений на движение солитонов в МУСГ, изложены основы применения метода коллективных координат, приведён обзор работ, исследующих поведение кинка под влиянием внешней силы и неоднородностей параметра системы, и работ, исследующих динамику других солитонов. Рассмотрено применение МУСГ в различных областях физики, подробно показано, как уравнение Ландау-Лившица-Гильберта в частном случае сводится к МУСГ. Приведён вывод из МУСГ с помощью метода коллективных переменных приближённой системы уравнений движения кинка в присутствии точечной примеси с учётом возбуждения на ней примесной моды и качественное сравнение с результатами численного расчёта МУСГ.

Во **второй главе** приведён вывод с помощью метода коллективных переменных приближённой системы одномерных интегро-дифференциальных уравнений для координаты центра кинка УСГ и амплитуд примесных мод для модели с произвольным числом разных точечных примесей, находящихся на произвольном расстоянии друг от друга, в присутствии внешней силы, неоднородной диссипации и неоднородности параметра при слагаемом u_x . Берётся N точечных примесей вида $\varepsilon_k \delta(x - x_k)$, где ε_k — величина k -й примеси, x_k — её координата на оси x , $\delta(x - x_k)$ — дельта-функция Дирака, внешняя сила h , диссипация в виде $\alpha(1 + \sum_{k=1}^N \beta_k \delta(x - x_k))$, где α — постоянный коэффициент диссипации, а β_k учитывает изменение диссипации на k -й примеси, т.е. её неоднородность, а также неоднородность параметра при u_x в виде $\sum_{k=1}^N \gamma_k \delta(x - x_k)$, где γ_k характеризует его неоднородность на k -й примеси. $u = u(x, t)$. Функция Лагранжа и диссипативная функция Рэлея рассматриваемой модели, связанные с МУСГ уравнением Лагранжа-Эйлера с диссипативной функцией, имеют вид:

$$L = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2} u_t^2 - \frac{1}{2} u_x^2 + \cos u - 1 + \sum_{k=1}^N \delta(x - x_k) \left(\varepsilon_k - \varepsilon_k \cos u - \frac{1}{2} \gamma_k u_x^2 \right) + 4h \cos \frac{u}{2} \right] dx, \quad (1)$$

$$R = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} \alpha \left[1 + \sum_{k=1}^N \beta_k \delta(x - x_k) \right] u_t^2 dx. \quad (2)$$

В случае применения (1) и (2) к описанию ферромагнитных структур параметры ε_k , γ_k и β_k характеризуют величину пространственной модуляции (неоднородности) констант магнитной анизотропии, обмена и затухания, а h — внешнее магнитное поле, направленное вдоль направления намагниченности в домене [11, 13]. Анзац берётся в виде суммы кинка и N примесных мод:

$$u_a = u_0 + \sum_{n=1}^N u_n = 4 \operatorname{arctg} e^{x-X(t)} + \sum_{n=1}^N a_n(t) e^{\frac{-\varepsilon_n |x-x_n|}{2}}, \quad (3)$$

где $X(t)$ — координата центра кинка, $a_n(t)$ — амплитуда примесной моды в момент времени t на n -й примеси. Используются приближения малости скорости кинка и других параметров: $0 \leq |\dot{X}(t)|, |a_n(t)|, |u_n|, |h|, \alpha \ll 1$. Величина примесной моды к соседней примеси должна сильно уменьшаться, так что $e^{-\varepsilon_n |x_{n+1}-x_n|/2} \ll 1$. Анзац (3) после промежуточных расчётов, включающих взятие производных выражений для кинка и примесных мод по времени и координате, возведение их в квадрат, преобразование с помощью тригонометрических соотношений косинусов и синусов от u_0 и $u_0/2$ и разложение косинуса в ряд Тейлора до членов второго порядка, подставляется в лагранжиан (1) и функцию Рэлея (2). После взятия интегралов получаются эффективные функции Лагранжа и Рэлея, являющиеся функциями от коллективных переменных $X(t)$ и $a_n(t)$. Подстановкой эффективных функций Лагранжа и Рэлея в уравнения Лагранжа-Эйлера с добавленным диссипативным членом получаются $N + 1$ уравнений вида:

$$4 \left[\ddot{X}(t) + \alpha \dot{X}(t) \left[1 + \sum_{k=1}^N \frac{\beta_k}{2 \operatorname{ch}^2(X(t) - x_k)} \right] + \sum_{k=1}^N \frac{\varepsilon_k - \gamma_k}{2} \frac{\operatorname{th}(X(t) - x_k)}{\operatorname{ch}^2(X(t) - x_k)} - h \right] + \sum_{n=1}^N \left\{ -[\ddot{a}_n(t) + \alpha \dot{a}_n(t)] \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\frac{-\varepsilon_n |x-x_n|}{2}}}{\operatorname{ch}(X(t) - x)} dx - \alpha \dot{a}_n(t) \sum_{k=1}^N \frac{\beta_k e^{\frac{-\varepsilon_n |x_k-x_n|}{2}}}{\operatorname{ch}(X(t) - x_k)} + a_n(t) \left[\sum_{k=1}^N \left[\varepsilon_k \frac{\operatorname{sh}^2(X(t) - x_k) - 1}{\operatorname{ch}(X(t) - x_k)} + \frac{\gamma_k \varepsilon_n}{2} \operatorname{sgn}(x_k - x_n) \operatorname{sh}(X(t) - x_k) \right] * \frac{e^{\frac{-\varepsilon_n |x_k-x_n|}{2}}}{\operatorname{ch}^2(X(t) - x_k)} - h \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{th}(X(t) - x)}{\operatorname{ch}(X(t) - x)} e^{\frac{-\varepsilon_n |x-x_n|}{2}} dx \right] \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N a_n(t) a_m(t) \left\{ - \sum_{k=1}^N \varepsilon_k \frac{\operatorname{th}(X(t) - x_k)}{\operatorname{ch}^2(X(t) - x_k)} e^{\frac{-\varepsilon_n |x_k - x_n|}{2}} e^{\frac{-\varepsilon_m |x_k - x_m|}{2}} \right. \\
& \quad \left. + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{th}(X(t) - x)}{\operatorname{ch}^2(X(t) - x)} e^{\frac{-\varepsilon_n |x - x_n|}{2}} e^{\frac{-\varepsilon_m |x - x_m|}{2}} dx + \frac{h}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\frac{-\varepsilon_n |x - x_n|}{2}} e^{\frac{-\varepsilon_m |x - x_m|}{2}}}{\operatorname{ch}^2(X(t) - x)} dx \right\} \\
& = 0, \tag{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^N \left\{ [\ddot{a}_n(t) + \alpha \dot{a}_n(t) + a_n(t)] \left[\frac{e^{\frac{-\varepsilon_n |x_l - x_n|}{2}} + e^{\frac{-\varepsilon_l |x_l - x_n|}{2}}}{\varepsilon_l + \varepsilon_n} + \frac{e^{\frac{-\varepsilon_n |x_l - x_n|}{2}} - e^{\frac{-\varepsilon_l |x_l - x_n|}{2}}}{\varepsilon_l - \varepsilon_n} \right] \right. \\
& \quad + \alpha \dot{a}_n(t) \sum_{k=1}^N \frac{\beta_k}{2} e^{\frac{-\varepsilon_n |x_k - x_n|}{2}} e^{\frac{-\varepsilon_l |x_k - x_l|}{2}} \\
& \quad + a_n(t) \left[\frac{\varepsilon_n \varepsilon_l}{2 \cdot 2} \left[\frac{e^{\frac{-\varepsilon_n |x_l - x_n|}{2}} + e^{\frac{-\varepsilon_l |x_l - x_n|}{2}}}{\varepsilon_l + \varepsilon_n} - \frac{e^{\frac{-\varepsilon_n |x_l - x_n|}{2}} - e^{\frac{-\varepsilon_l |x_l - x_n|}{2}}}{\varepsilon_l - \varepsilon_n} \right] \right. \\
& \quad + \sum_{k=1}^N \left[\frac{\varepsilon_k}{\operatorname{ch}^2(X(t) - x_k)} - \frac{\varepsilon_k}{2} \right. \\
& \quad + \frac{\gamma_k \varepsilon_n \varepsilon_l}{2 \cdot 2 \cdot 2} \operatorname{sgn}[(x_k - x_n)(x_k - x_l)] \left. \right] e^{\frac{-\varepsilon_n |x_k - x_n|}{2}} e^{\frac{-\varepsilon_l |x_k - x_l|}{2}} \\
& \quad - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\frac{-\varepsilon_n |x - x_n|}{2}} e^{\frac{-\varepsilon_l |x - x_l|}{2}}}{\operatorname{ch}^2(X(t) - x)} dx + \frac{h}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{th}(X(t) - x) e^{\frac{-\varepsilon_n |x - x_n|}{2}} e^{\frac{-\varepsilon_l |x - x_l|}{2}} dx \left. \right\} \\
& - [\ddot{X}(t) + \alpha \dot{X}(t)] \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\frac{-\varepsilon_l |x - x_l|}{2}}}{\operatorname{ch}(X(t) - x)} dx + \dot{X}^2(t) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{th}(X(t) - x)}{\operatorname{ch}(X(t) - x)} e^{\frac{-\varepsilon_l |x - x_l|}{2}} dx \\
& - \alpha \dot{X}(t) \sum_{k=1}^N \frac{\beta_k e^{\frac{-\varepsilon_l |x_k - x_l|}{2}}}{\operatorname{ch}(X(t) - x_k)} + h \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\frac{-\varepsilon_l |x - x_l|}{2}}}{\operatorname{ch}(X(t) - x)} dx \\
& - \sum_{k=1}^N \left[\varepsilon_k \operatorname{th}(X(t) - x_k) + \frac{\gamma_k \varepsilon_l}{2} \operatorname{sgn}(x_k - x_l) \right] \frac{e^{\frac{-\varepsilon_l |x_k - x_l|}{2}}}{\operatorname{ch}(X(t) - x_k)} = 0, \tag{5}
\end{aligned}$$

где l — номер $l + 1$ уравнения. С помощью численного счёта получены графики зависимости не вычисляемых аналитически интегралов от $X(t)$ при различных значениях x_m, x_n при $0 \leq \varepsilon_n, \varepsilon_m \leq 1$. С достаточной степенью точности их удалось аппроксимировать аналитическими функциями. Из полученной системы уравнений выведены уравнения для частных случаев: наличия в системе произвольного количества одинаковых примесей на одинаковом расстоянии друг от друга, для двух разных или одинаковых примесей, одной примеси и отсутствия примесей и для аналогичных случаев в отсутствии кинка. Также получены уравнения для пре-

дельных случаев нулевых примесей и слияния примесей в одну, при котором принятая в модели форма примесных мод неприменима. Проведено сравнение полученных для частных случаев уравнений с уже известными ранее.

В **третьей главе** исследуются выведенные в предыдущей главе системы уравнений — численно и, в сравнительно простых случаях, аналитически. Полученные результаты применяются к описанию динамики магнитных неоднородностей в многослойных ферромагнетиках. Точечная примесь соответствует тонкому плоскому слою с отличными от основного объёма параметрами магнитной анизотропии, обменного взаимодействия и диссипации. Кинк моделирует блоховскую 180-градусную доменную границу, при прохождении которой через слой с другой константой магнитной анизотропии в его области возбуждается локализованная волна намагниченности, моделируемая примесной модой. Рассмотрена трёхслойная ферромагнитная структура, состоящая из двух широких одинаковых слоёв, разделённых тонким слоем, и пятислойная ферромагнитная структура, состоящая из трёх широких одинаковых слоёв, разделённых двумя тонкими слоями с изменёнными магнитными параметрами. Доменная граница в рассматриваемой модели параллельна этим слоям и движется в перпендикулярном им направлении. Построены графики зависимости от времени координаты центра ДГ и амплитуд ЛВН. Рассмотрены колебания ЛВН на одном и двух тонких слоях в отсутствие ДГ, движение ДГ без учёта ЛВН, совместное движение ДГ и колебания ЛВН в случае одного и двух тонких слоёв — как одинаковых, так и разных. Кроме того, показано, что входящие в уравнения интегральные члены по своему влиянию на динамику часто не менее важны, чем неинтегральные.

Показано, что при наличии одного тонкого слоя уравнение для ЛВН в отсутствие ДГ представляет собой уравнение свободных колебаний гармонического осциллятора с затуханием. При наличии двух разных тонких слоёв, расположенных на расстоянии d друг от друга, уравнения для ЛВН в отсутствие ДГ и затухания являются уравнениями колебательной системы с двумя степенями свободы. Если при отсутствии затухания $\alpha = 0$ и постоянной внешней силе обозначить

$$\begin{aligned}
\omega_1^2 = & \left\{ \left[\varepsilon_1 e^{-\frac{\varepsilon_2 d}{2}} + \varepsilon_2 e^{-\frac{\varepsilon_1 d}{2}} - \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{2} \left[\frac{e^{-\frac{\varepsilon_2 d}{2}} + e^{-\frac{\varepsilon_1 d}{2}}}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} - \frac{e^{-\frac{\varepsilon_2 d}{2}} - e^{-\frac{\varepsilon_1 d}{2}}}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} \right] \right] \varepsilon_2 E \right. \\
& \left. + \left[\frac{\gamma_2 \varepsilon_1^2}{4} - \varepsilon_2 \right] e^{-\varepsilon_1 d} - \frac{\varepsilon_1}{2} \left\{ \frac{\varepsilon_1}{2[1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 E^2]} + 1 \pm h, \right. \right. \\
\omega_2^2 = & \left. \left[\varepsilon_1 e^{-\frac{\varepsilon_2 d}{2}} + \varepsilon_2 e^{-\frac{\varepsilon_1 d}{2}} - \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{2} \left[\frac{e^{-\frac{\varepsilon_2 d}{2}} + e^{-\frac{\varepsilon_1 d}{2}}}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} - \frac{e^{-\frac{\varepsilon_2 d}{2}} - e^{-\frac{\varepsilon_1 d}{2}}}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} \right] \right] \varepsilon_1 E \right. \\
& \left. + \left[\frac{\gamma_1 \varepsilon_2^2}{4} - \varepsilon_1 \right] e^{-\varepsilon_2 d} - \frac{\varepsilon_2}{2} \left\{ \frac{\varepsilon_2}{2[1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 E^2]} + 1 \pm h, \right. \right. \\
& \left. \left. \right\} \right. \tag{6}
\end{aligned}$$

$$k_1 = \left[\left[\varepsilon_1 - \frac{\gamma_1 \varepsilon_2^2}{4} \right] \varepsilon_2 E e^{-\varepsilon_2 d} - \varepsilon_1 e^{-\frac{\varepsilon_2 d}{2}} \right] \frac{\varepsilon_1}{2[1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 E^2]},$$

$$k_2 = \left[\left[\varepsilon_2 - \frac{\gamma_2 \varepsilon_1^2}{4} \right] \varepsilon_1 E e^{-\varepsilon_1 d} - \varepsilon_2 e^{-\frac{\varepsilon_1 d}{2}} \right] \frac{\varepsilon_2}{2[1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 E^2]},$$

где

$$E = \frac{e^{-\frac{\varepsilon_2 d}{2}} + e^{-\frac{\varepsilon_1 d}{2}}}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} + \frac{e^{-\frac{\varepsilon_2 d}{2}} - e^{-\frac{\varepsilon_1 d}{2}}}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2},$$

то они примут вид:

$$\begin{aligned} \ddot{a}_1(t) + a_1(t)\omega_1^2 + a_2(t)k_1 &= 0, \\ \ddot{a}_2(t) + a_2(t)\omega_2^2 + a_1(t)k_2 &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Решение этой системы имеет вид:

$$\begin{aligned} a_1(t) &= a_{01} \cos(\Omega_1 t + \theta_1) + \eta_2 a_{02} \cos(\Omega_2 t + \theta_2), \\ a_2(t) &= \eta_1 a_{01} \cos(\Omega_1 t + \theta_1) + a_{02} \cos(\Omega_2 t + \theta_2). \end{aligned} \quad (8)$$

Таким образом, колебания ЛВН на двух тонких слоях в отсутствии затухания представляют собой сумму двух гармонических колебаний с частотами

$$\Omega_{1,2}^2 = \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2 \mp \sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4k_1 k_2}}{2}, \quad (9)$$

начальными фазами θ_1 и θ_2 , амплитудами $|a_{01}|$ и $|\eta_2 a_{02}|$ на первой примеси и $|\eta_1 a_{01}|$ и $|a_{02}|$ на второй, где коэффициенты

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \frac{\Omega_1^2 - \omega_1^2}{k_1} = \frac{k_2}{\Omega_1^2 - \omega_2^2} = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2 - \sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4k_1 k_2}}{2k_1}, \\ \eta_2 &= \frac{\Omega_2^2 - \omega_2^2}{k_2} = \frac{k_1}{\Omega_2^2 - \omega_1^2} = \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2 + \sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4k_1 k_2}}{2k_2}. \end{aligned} \quad (10)$$

Колебания имеют вид биений с частотой биений, равной разности частот главных колебаний, и с амплитудой, изменяющейся от $|a_{01} + \eta_2 a_{02}|$ до $|a_{01} - \eta_2 a_{02}|$ и от $|a_{02} + \eta_1 a_{01}|$ до $|a_{02} - \eta_1 a_{01}|$. Найдена зависимость частот колебаний и биений и коэффициентов, определяющих, наряду с начальными условиями, разность амплитуд при биениях, от величин неоднородности констант магнитной анизотропии и обменного взаимодействия, расстояния между тонкими слоями и величины внешнего магнитного поля. Вычислены пределы квадратов частот и коэффициентов при отсутствии второго тонкого слоя, при бесконечном расстоянии между слоями и при одинаковых слоях. В случае разных слоёв при уменьшении расстояния между ними частота биений и величина коэффициентов, которые равны нулю при бесконечном расстоянии, увеличиваются до некоторого значения, а потом опять уменьшаются, причём значение одного из коэффициентов проходит через ноль и меняет знак. В случае одинаковых слоёв при уменьшении расстояния между ними частота биений увеличивается от нуля до бесконечности, а коэффициенты постоянны и равны по модулю единице. В качестве примера исследовано увеличение разности амплитуд при биениях при изменении начальных условий в случае разных слоёв (Рисунок 1а) и увеличение периода биений при увеличении расстояния между одинаковыми слоями (Рисунок 1б). Также показано влияние на динамику диссипации (Рисунок 1в),

в том числе неоднородной (Рисунок 1г).

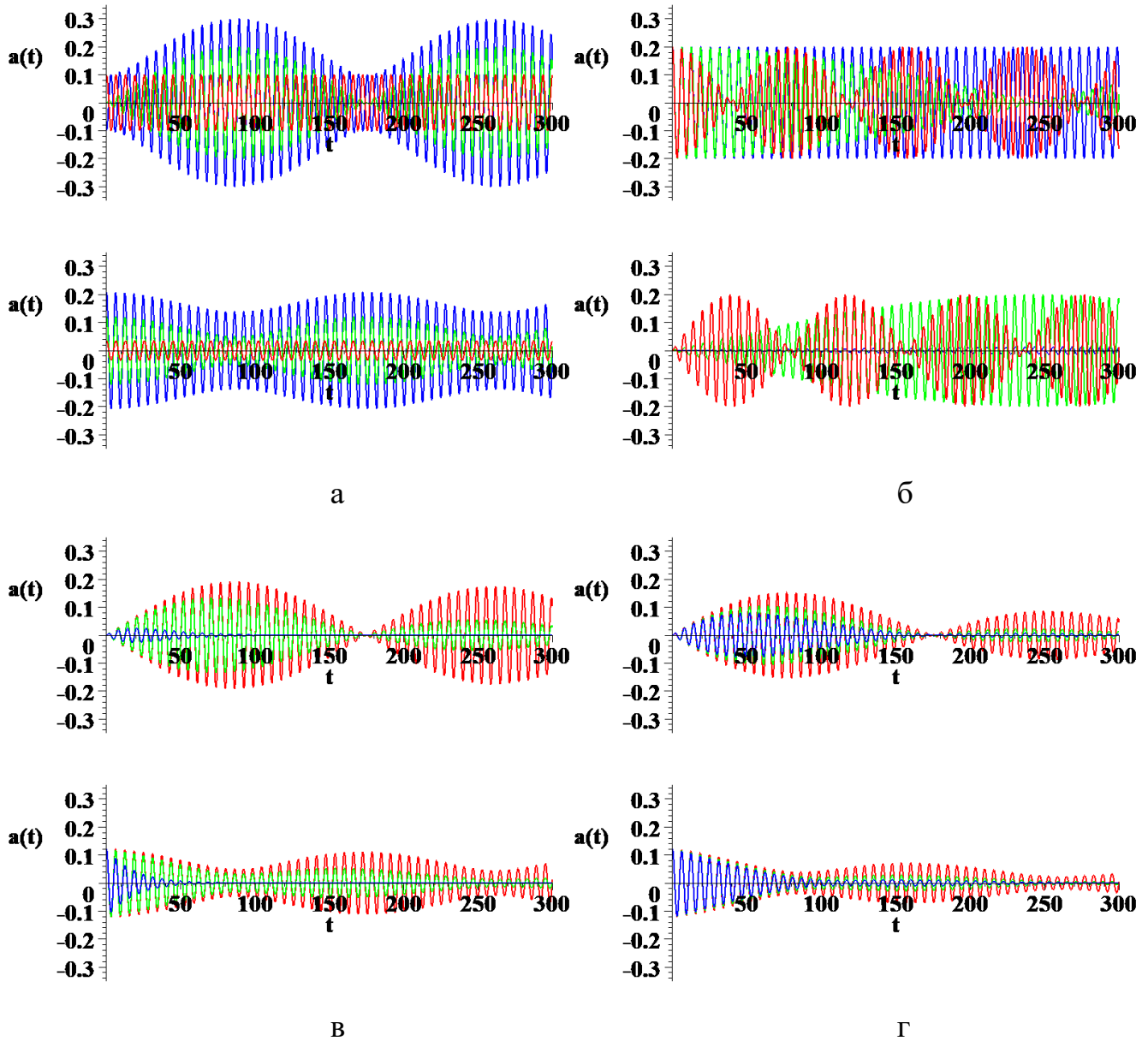


Рисунок 1. Зависимость амплитуд ЛВН $a_1(t)$ (вверху) и $a_2(t)$ (внизу) от времени при отсутствии ДГ $X(t) \rightarrow \infty$ и параметрах: $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, $h = 0$, $\dot{a}_1(0) = \dot{a}_2(0) = 0$, $\varepsilon_1 = 0,3$, $\beta_1 = \beta_2 = \beta$: $\alpha = 0$: а) $\varepsilon_2 = 0,2$, $d = 5$: красный — $a_1(0) = 0,1$ и $a_2(0) = 0,0349$, зелёный — $a_1(0) = 0$ и $a_2(0) = 0,122$, синий — $a_1(0) = -0,1$ и $a_2(0) = 0,209$; б) $\varepsilon_2 = 0,3$, $a_1(0) = 0,2$, $a_2(0) = 0$: красный — $d = 3$, зелёный — $d = 10$, синий — $d = 30$; в) $\beta = 0$: красный — $\alpha = 0,001$, зелёный — $\alpha = 0,01$, синий — $\alpha = 0,1$; г) $\alpha = 0,01$: красный — $\beta = -2$, зелёный — $\beta = 4$, синий — $\beta = 10$.

В отсутствии тонких слоёв уравнение движения ДГ — уравнение движения частицы под действием внешней силы и затухания. Рассмотрено замедление ДГ под действием затухания, разгон под действием внешнего магнитного поля и установление стационарной скорости движения $\dot{X}(t) = h/\alpha$ под действием внешнего магнитного поля и затухания.

Для случая одного тонкого слоя исследовано влияние неоднородной диссипации, приводящее к небольшому ускорению или сильному замедлению вблизи

этого слоя равномерно двигавшейся до этого под действием внешнего магнитного поля и диссипации ДГ (Рисунок 2а). Изучено движение ДГ (без учёта возбуждения ЛВН) в области тонкого слоя, обладающего притягивающим или отталкивающим потенциалом. В случае притягивающего потенциала ДГ может совершать в области этого слоя нелинейные колебания с частотой, увеличивающейся с уменьшением амплитуды и увеличением величины неоднородности анизотропии и обмена (Рисунок 3а), либо проходить через область слоя, ускоряясь до пересечения и замедляясь до прежней скорости после пересечения слоя (Рисунок 2б). В случае отталкивающего потенциала ДГ может отражаться от слоя либо проходить через область слоя, замедляясь до пересечения и ускоряясь до прежней скорости после пересечения слоя. В присутствии внешнего магнитного поля положение устойчивого равновесия смещается от нуля для притягивающего или от бесконечности для отталкивающего слоя, а положение неустойчивого равновесия — от бесконечности для притягивающего или от нуля для отталкивающего слоя, к точке, определяемой равенством $\text{ch}^2(X(t)) = 3/2$ при внешнем магнитном поле $h = \pm (\varepsilon - \gamma)/3\sqrt{3}$ (Рисунок 3б). Диссипация в области притягивающего слоя с ростом притягивающего потенциала усиливается из-за увеличения скорости ДГ, так что после преодоления области слоя её скорость оказывается меньше. ДГ может быть захвачена слоем и совершать вокруг него затухающие колебания (Рисунок 2в).

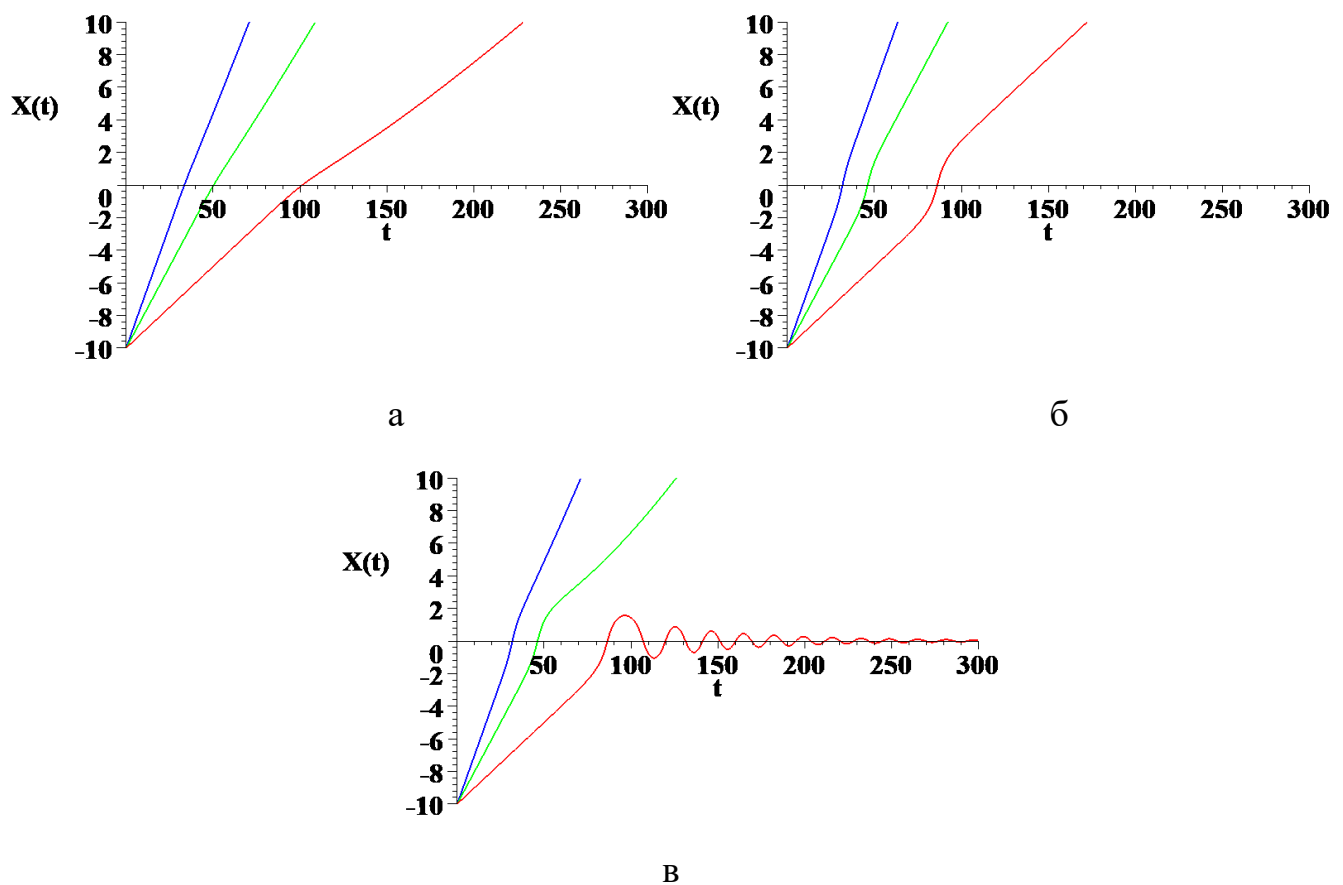


Рисунок 2. Зависимость координаты центра ДГ $X(t)$ от времени при наличии одного тонкого слоя, но отсутствии ЛВН $a(t) = \dot{a}(t) = 0$, и параметрах: $X(0) = -10$, $h = \alpha \dot{X}(0)$, $\beta = 4$:

а) $\varepsilon - \gamma = 0$, $\alpha = 0,01$, б) $\varepsilon - \gamma = 0,3$, $\alpha = 0$, в) $\varepsilon - \gamma = 0,3$, $\alpha = 0,01$:
 красный — $\dot{X}(0) = 0,1$, зелёный — $\dot{X}(0) = 0,2$, синий — $\dot{X}(0) = 0,3$.

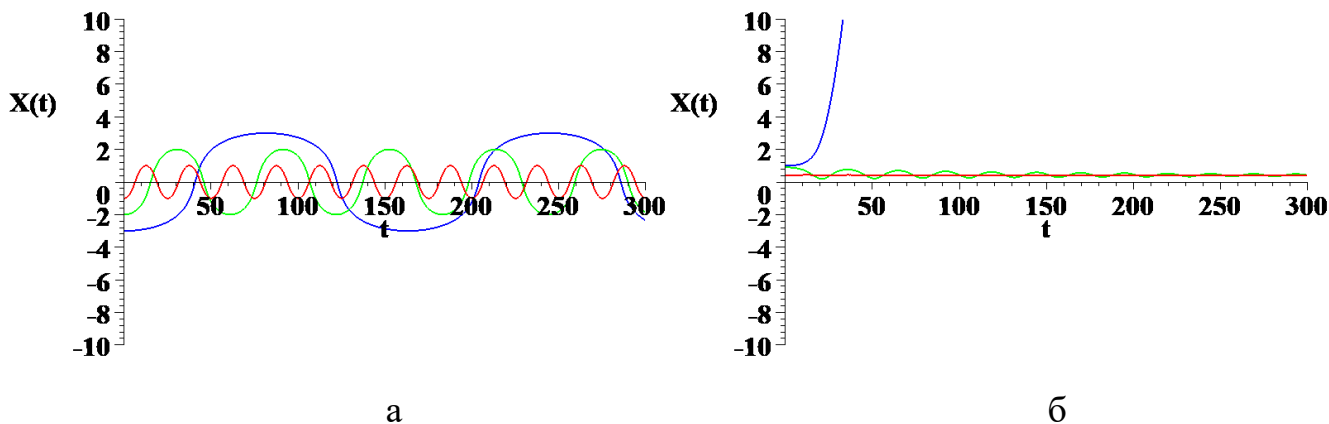


Рисунок 3. Зависимость координаты центра ДГ $X(t)$ от времени при наличии одного тонкого слоя, но отсутствии ЛВН $a(t) = \dot{a}(t) = 0$, и параметрах $\dot{X}(0) = 0$, $\varepsilon - \gamma = 0,3$:
 а) $h = 0$, $\alpha = 0$: красный — $X(0) = -1$, зелёный — $X(0) = -2$, синий — $X(0) = -3$;
 б) $h = 0,05$, $\alpha = 0,01$: красный — $X(0) = 0,4$, зелёный — $X(0) = 0,9$, синий — $X(0) = 1$.

Для случая одного тонкого слоя построены графики функций, определяющих действующие на ДГ и ЛВН силы. Из них следует, что входящие в уравнения движения интегральные члены не менее важны по своему влиянию, чем неинтегральные. Изучен процесс возбуждения ЛВН проходящей через тонкий слой ДГ. Графически показано, что амплитуда возбуждённой ЛВН растёт от нуля при малой скорости ДГ вблизи слоя $\dot{X}^2(0) + \varepsilon/2 \lesssim 0,01$ до величины $\approx 0,8\varepsilon^2$ при большой скорости $\dot{X}^2(0) + \varepsilon/2 \gtrsim 0,1$, где $\dot{X}(0)$ — начальная скорость ДГ вдали от слоя (Рисунок 4). Скорость ДГ после пересечения слоя уменьшается тем заметнее, чем больше величина неоднородности анизотропии, а минимальная скорость, необходимая для прохождения области слоя, увеличивается. Показаны возможные сценарии взаимодействия ДГ с областью слоя: захват, уход после нескольких колебаний вперёд или назад из-за резонансного взаимодействия с ЛВН, прохождение (Рисунок 5). В присутствии внешнего магнитного поля показано влияние неоднородной диссипации, уменьшающей скорость ДГ после пересечения слоя, увеличивающей величину минимальной скорости прохождения, приводящей к затуханию колебаний захваченной ДГ и препятствующей её уходу из области слоя (Рисунок 6). Исследовано также влияние неоднородности параметра обменного взаимодействия, приводящей к изменению амплитуды ЛВН и скорости ДГ после пересечения слоя (Рисунок 7). Найдена минимальная скорость, при которой ДГ преодолевает область слоя после однократного пересечения, при различных величинах неоднородности анизотропии и диссипации и при внешнем магнитном поле $h = \alpha\dot{X}(0)$, обеспечивающим равномерное движение с данной скоростью при данной диссипации, а также при различных величинах неоднородности магнитной анизотропии и обмена в случае отсутствия внешнего магнитного поля и диссипации.

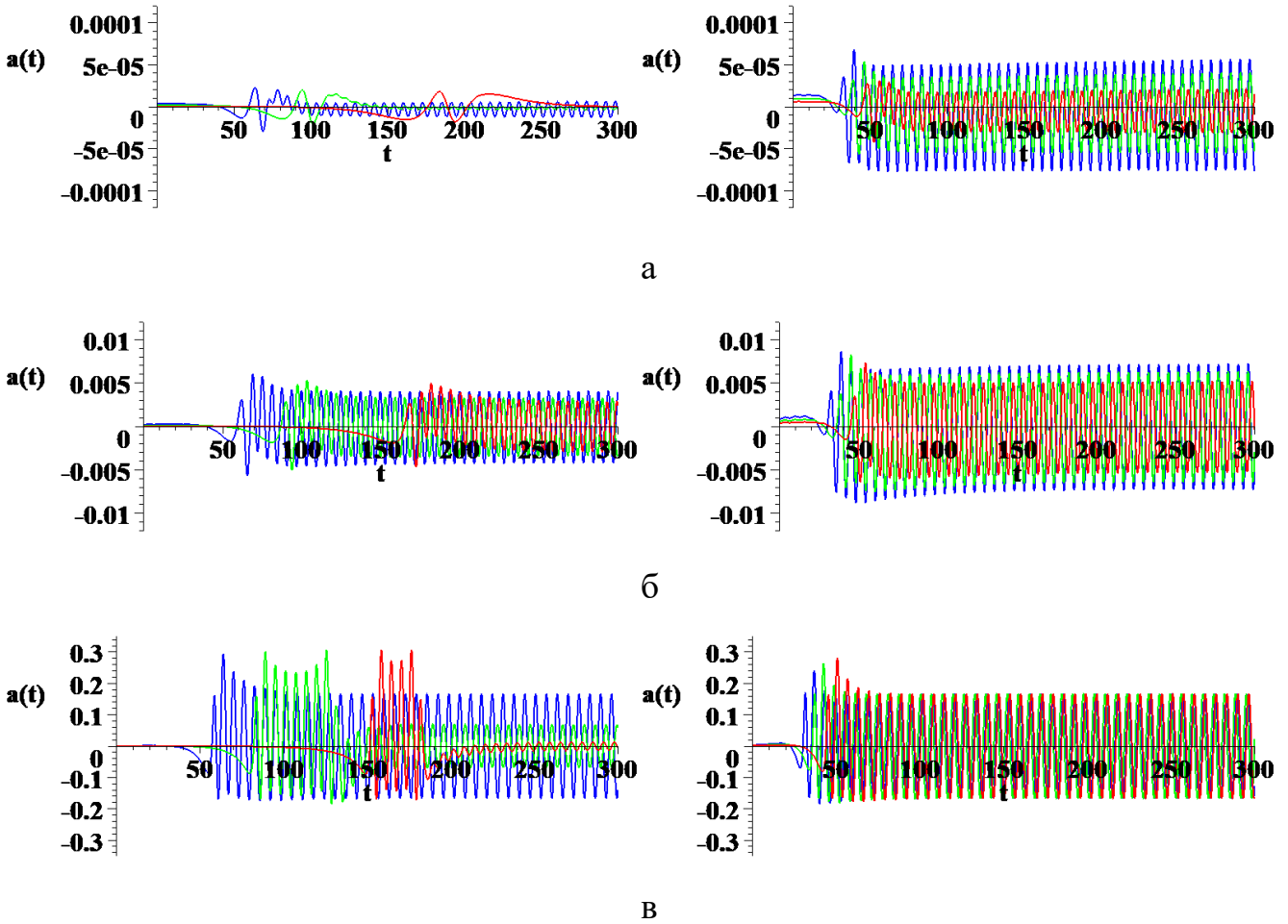


Рисунок 4. Зависимость амплитуды ЛВН $a(t)$ от времени при наличии одного тонкого слоя и параметрах: $X(0) = -10$, $a(0) = -\varepsilon \dot{X}^2(0) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{th}(X(0)-x)}{\text{ch}(X(0)-x)} e^{-\varepsilon|x|/2} dx$, $\dot{a}(0) = 0$,
 $h = 0$, $\alpha = 0$, $\gamma = 0$: а) $\varepsilon = 0,01$, б) $\varepsilon = 0,1$, в) $\varepsilon = 0,5$:
красный — $\dot{X}(0) = 0,05$, зелёный — $\dot{X}(0) = 0,1$, синий — $\dot{X}(0) = 0,15$ слева,
красный — $\dot{X}(0) = 0,2$, зелёный — $\dot{X}(0) = 0,25$, синий — $\dot{X}(0) = 0,3$ справа.

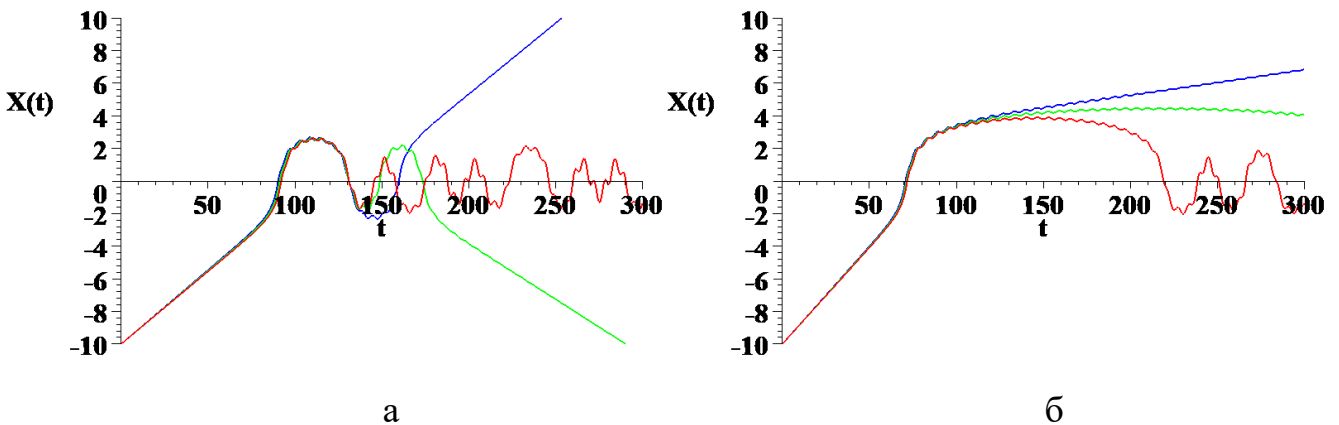


Рисунок 5. Зависимость координаты центра ДГ $X(t)$ от времени при наличии одного тонкого слоя и параметрах: $X(0) = -10$, $a(0) = 0$, $\dot{a}(0) = 0$, $h = 0$, $\alpha = 0$, $\gamma = 0$, $\varepsilon = 0,5$:
а) красный — $\dot{X}(0) = 0,089$, зелёный — $\dot{X}(0) = 0,090$, синий — $\dot{X}(0) = 0,091$;
б) красный — $\dot{X}(0) = 0,118$, зелёный — $\dot{X}(0) = 0,119$, синий — $\dot{X}(0) = 0,120$.

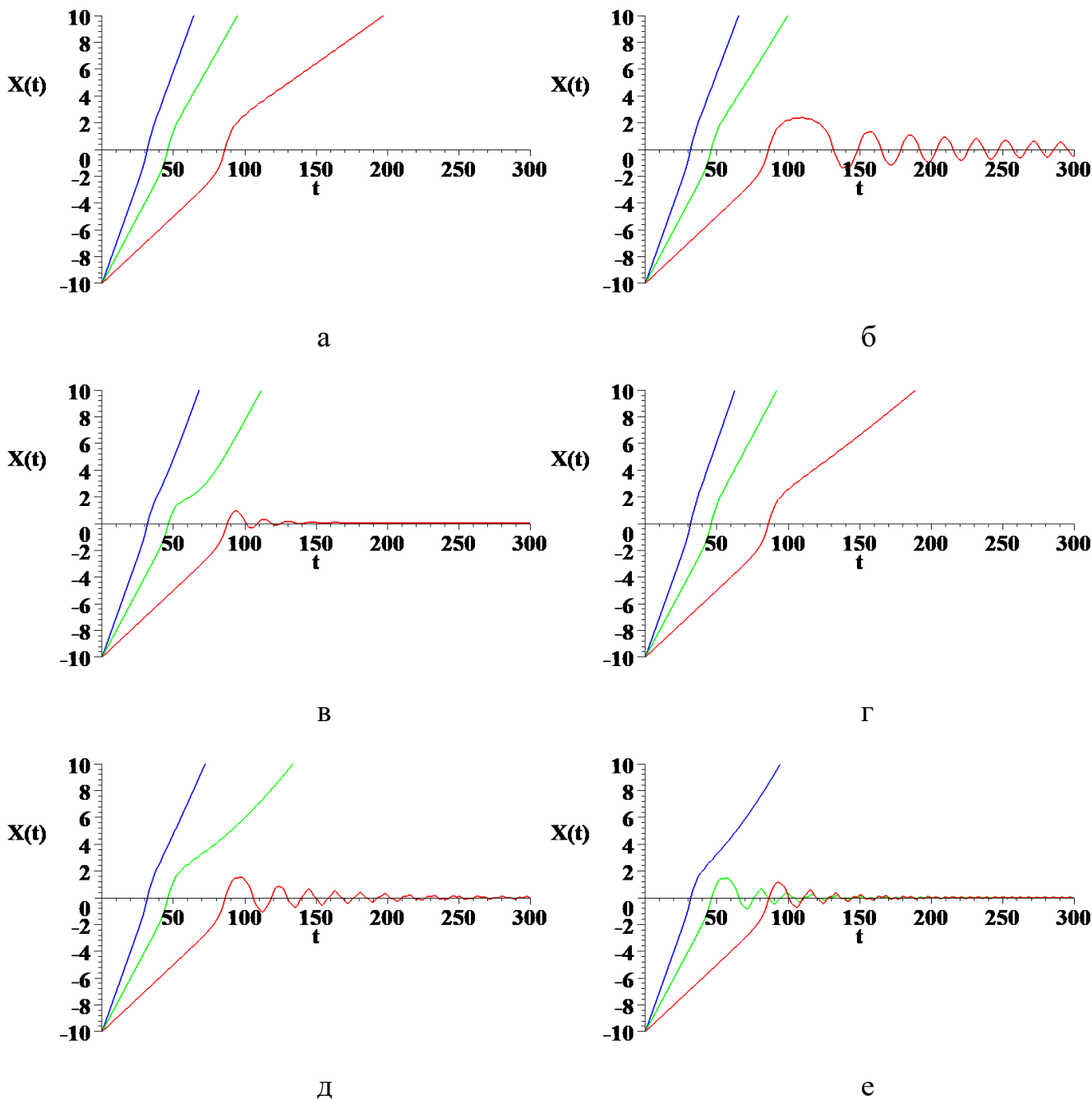


Рисунок 6. Зависимость координаты центра ДГ $X(t)$ от времени при наличии одного тонкого слоя и параметрах: $X(0) = -10$, $a(0) = -\varepsilon \dot{X}^2(0) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{th}(X(0)-x)}{\text{ch}(X(0)-x)} e^{-\frac{\varepsilon|x|}{2}} dx$, $\dot{a}(0) = 0$, $h = \alpha \dot{X}(0)$, $\gamma = 0$, $\varepsilon = 0,3$; $\beta = 0$: а) $\alpha = 0,001$, б) $\alpha = 0,01$, в) $\alpha = 0,1$; $\alpha = 0,01$: г) $\beta = -2$, д) $\beta = 4$, е) $\beta = 10$:
красный — $\dot{X}(0) = 0,1$, зелёный — $\dot{X}(0) = 0,2$, синий — $\dot{X}(0) = 0,3$.

Исследована динамика ДГ в модели с двумя тонкими слоями с учётом возбуждения ЛВН. Приведены примеры возможных сценариев поведения ДГ: захват на обоих слоях (в случае малого расстояния между ними), на первом или на втором слое, уход после захвата назад или вперёд, прохождение через оба слоя. Продемонстрировано, что при достаточно большом расстоянии между слоями скорость прошедшей примеси ДГ из-за взаимодействия со второй ЛВН с ростом начальной ско-

рости может не только увеличиться, но и уменьшиться, и область начальных скоростей прохождения может разбиваться на интервалы (Рисунок 8). Также при наличии внешнего магнитного поля продемонстрировано влияние на динамику ДГ неоднородной диссипации.

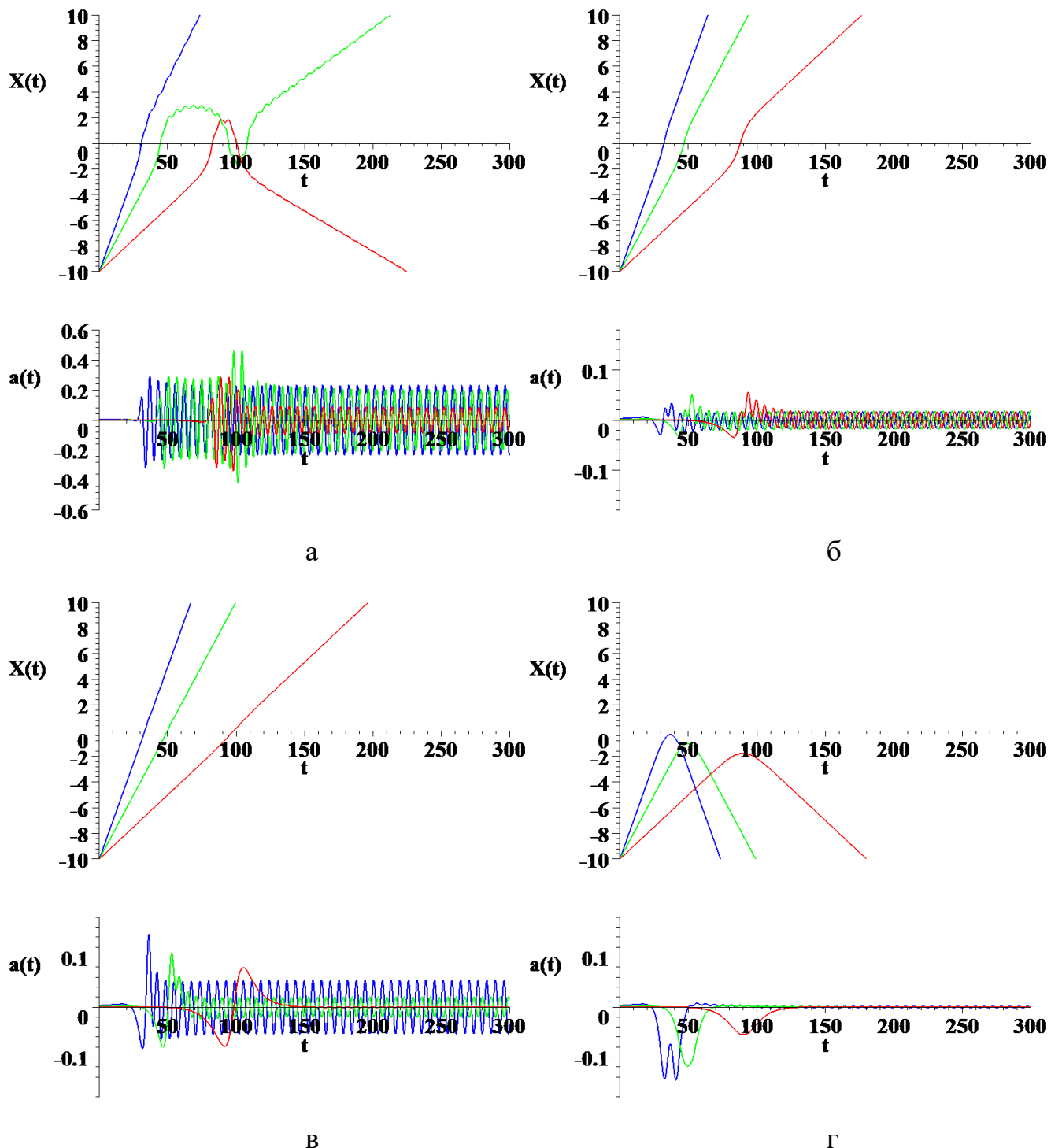


Рисунок 7. Зависимость координаты центра ДГ $X(t)$ и амплитуды ЛВН $a(t)$ от времени при наличии одного тонкого слоя и параметрах:

$$X(0) = -10, a(0) = -\varepsilon \dot{X}^2(0) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{th}(X(0)-x)}{\text{ch}(X(0)-x)} e^{-\frac{\varepsilon|x|}{2}} dx, \dot{a}(0) = 0, h = 0, \alpha = 0, \varepsilon = 0,3:$$

а) $\gamma = -0,3$, б) $\gamma = 0,1$, в) $\gamma = 0,3$, г) $\gamma = 0,5$:

красный — $\dot{X}(0) = 0,1$, зелёный — $\dot{X}(0) = 0,2$, синий — $\dot{X}(0) = 0,3$.

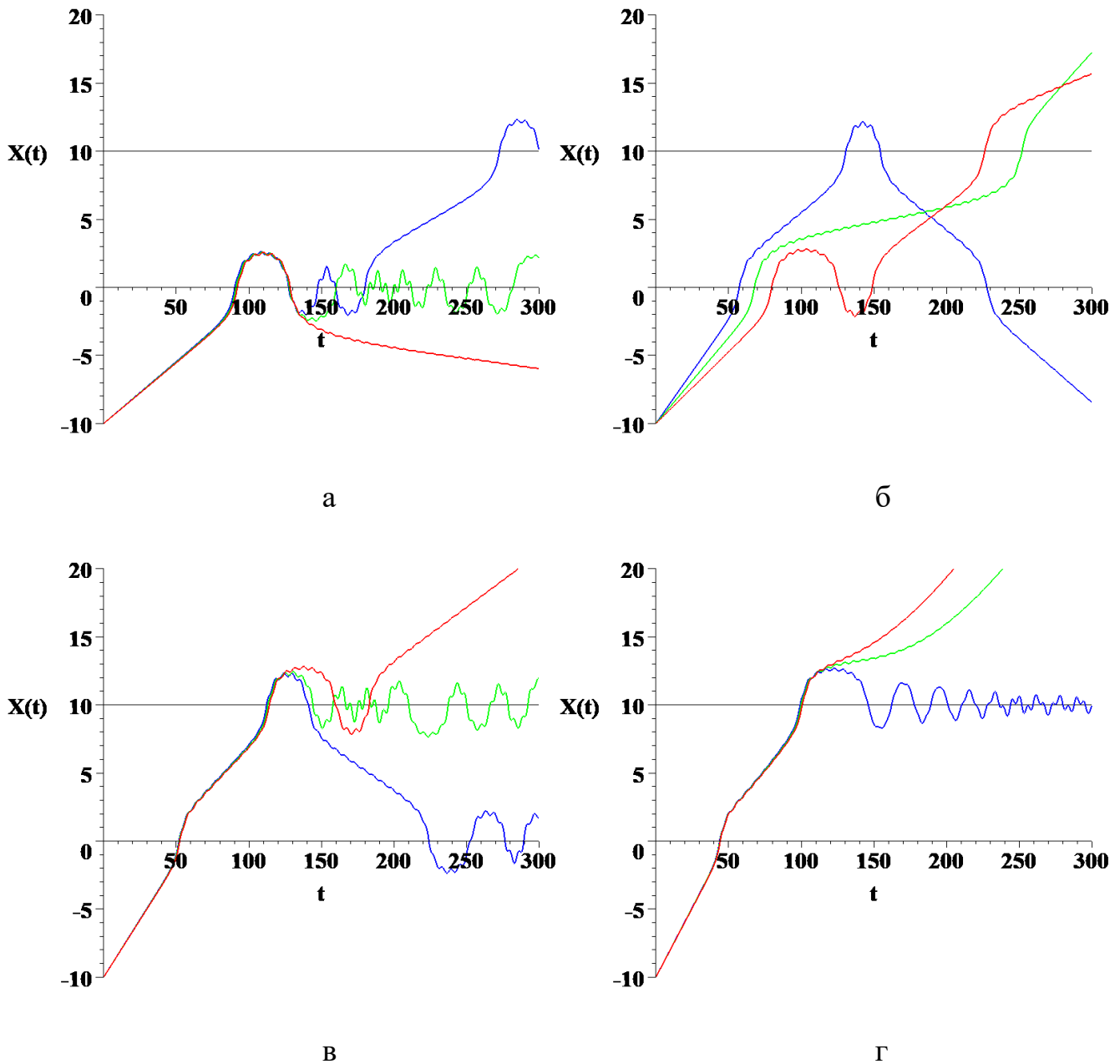


Рисунок 8. Зависимость координаты центра ДГ $X(t)$ от времени при наличии двух тонких слоёв и параметрах: $X(0) = -10$, $a_1(0) = a_2(0) = 0$, $\dot{a}_1(0) = \dot{a}_2(0) = 0$, $h = \alpha \dot{X}(0)$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0,5$, $d = 10$:

- $\alpha = 0$: а) красный — $\dot{X}(0) = 0,089$, зелёный — $\dot{X}(0) = 0,090$, синий — $\dot{X}(0) = 0,091$;
 б) красный — $\dot{X}(0) = 0,105$, зелёный — $\dot{X}(0) = 0,126$, синий — $\dot{X}(0) = 0,152$;
 в) красный — $\dot{X}(0) = 0,168$, зелёный — $\dot{X}(0) = 0,169$, синий — $\dot{X}(0) = 0,170$; $\alpha = 0,01$,
 $\beta_1 = \beta_2 = 0$: г) красный — $\dot{X}(0) = 0,203$, зелёный — $\dot{X}(0) = 0,204$, синий — $\dot{X}(0) = 0,205$.

В заключении подводятся итоги работы, перечисляются полученные результаты — полученная система динамических уравнений, её сведение к частным случаям, применение к описанию динамики магнитных неоднородностей в мультислойных ферромагнетиках для возможных разных случаев: колебание ЛВН на одной и двух тонких слоях в отсутствии ДГ, движение ДГ в отсутствии ЛВН, совместное движение ДГ и колебания ЛВН на одном и двух тонких слоях.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Проведено теоретическое исследование динамики солитонов модифицированного уравнения синус-Гордона в модели с произвольным числом примесей и неоднородными параметрами, часто используемого для описания нелинейных физических процессов в различных областях теоретической физики. С помощью метода коллективных переменных выведена система одномерных интегро-дифференциальных уравнений, приближённо описывающая динамику кинка и колебания примесных мод для случая произвольного количества разных точечных примесей, находящихся на произвольном расстоянии друг от друга, в присутствии внешней силы, которая может зависеть от времени, неоднородности параметра при u_x и неоднородной диссипации. Из полученной системы уравнений выведены уравнения для некоторых частных случаев: для произвольного числа одинаковых примесей на одинаковом расстоянии друг от друга, для двух разных или одинаковых примесей, одной примеси и отсутствия примесей. Содержащиеся в уравнениях интегралы в нашей модели аппроксимированы аналитическими функциями, полученными с помощью численных расчётов.

2. Полученные уравнения применены для описания нелинейной динамики доменных границ и локализованных волн намагниченности в ферромагнетиках с присутствием внешнего магнитного поля и плоских тонких слоёв с отличными от основного объёма параметрами магнитной анизотропии, обменного взаимодействия и диссипации. Проведён численный анализ систем уравнений в частных случаях, построены графики зависимости положения центра ДГ и амплитуд ЛВН от времени. В сравнительно простых случаях получены аналитические решения, описывающие динамику центра ДГ и колебания ЛВН. Получены уравнения, описывающие колебания ЛВН на одном или двух одинаковых или разных тонких слоях, которые представляют собой уравнения одного или двух связанных гармонических осцилляторов. Найдены зависимости частот и коэффициентов этих колебаний от величин неоднородности магнитной анизотропии и обменного взаимодействия, расстояния между ними и внешнего магнитного поля, показано влияние на колебания неоднородного затухания.

3. В случае наличия одного тонкого слоя без учёта возбуждения ЛВН показано замедление ДГ в области тонкого слоя при наличии неоднородного затухания, увеличение скорости в области тонкого слоя, обладающего притягивающим потенциалом, и уменьшение скорости в области тонкого слоя, обладающего отталкивающим потенциалом, смещение положения равновесия под действием внешнего магнитного поля, захват ДГ притягивающим тонким слоем при наличии затухания, в том числе неоднородного.

4. Построены графики функций, определяющие действующие на ДГ и ЛВН силы для случая одного тонкого слоя. Показано, что входящие в уравнения движения интегральные члены оказывают не меньшее влияние на динамику, чем неинтегральные. С учётом влияния интегральных членов графически показано увеличение амплитуды колебаний ЛВН, возбуждённой прошедшей область тонкого слоя

ДГ, с увеличением скорости ДГ в области тонкого слоя и величины неоднородности магнитной анизотропии. Показано влияние ЛВН на динамику ДГ, приводящее к уменьшению скорости ДГ после пересечения тонкого слоя и к увеличению минимальной начальной скорости пересечения области тонкого слоя, а также к возможности ухода ДГ из области тонкого слоя после её захвата из-за резонансного взаимодействия с ЛВН. В присутствии внешнего магнитного поля продемонстрировано влияние неоднородной диссипации, приводящей к уменьшению скорости прошедшей область тонкого слоя ДГ, увеличению минимальной скорости прохождения, затуханию колебаний и уменьшению вероятности ухода ДГ из области тонкого слоя в случае её захвата. Также исследовано влияние неоднородности параметра обменного взаимодействия, приводящее к изменению амплитуды колебаний ЛВН, скорости ДГ после пересечения области тонкого слоя и минимальной скорости, необходимой ДГ для пересечения области тонкого слоя. Найдена минимальная скорость, при которой ДГ преодолевает область тонкого слоя после однократного пересечения, при различных величинах неоднородности магнитной анизотропии и коэффициентов диссипации и при внешнем магнитном поле, обеспечивающим вдали от тонкого слоя равномерное движение с данной скоростью при данной диссипации, а также при различных величинах неоднородности параметров магнитной анизотропии и обменного взаимодействия в случае отсутствия внешнего магнитного поля и диссипации.

5. Приведены примеры возможных сценариев поведения ДГ в структурах с двумя тонкими слоями с учётом возможности возбуждения ЛВН. Продemonстрировано, что при достаточно большом расстоянии между тонкими слоями скорость прошедшей область тонких слоёв ДГ из-за взаимодействия со второй ЛВН с ростом начальной скорости может не только увеличиться, но и уменьшиться, и область начальных скоростей прохождения может разбиваться на интервалы. Также в присутствии внешнего магнитного поля продемонстрировано влияние на динамику ДГ неоднородной диссипации, аналогичное таковому в случае одного тонкого слоя.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в журналах, рекомендованных ВАК для публикации результатов диссертаций на соискание учёной степени кандидата наук и приравненных к ним:

- A1. Екомасов, Е.Г. О возможности наблюдения резонансного взаимодействия кинков уравнения синус-Гордона с локализованными волнами в реальных физических системах / Е.Г. Екомасов, А.М. Гумеров, Р.В. Кудрявцев // Письма в ЖЭТФ. — 2015. — Т. 101, в. 12. — с. 935–939.
- A2. Екомасов, Е.Г. Динамика локализованных магнитных неоднородностей в пятислойной ферромагнитной структуре / Е.Г. Екомасов, А.М. Гумеров, Р.В. Кудрявцев // Письма о материалах. — 2016. — Т. 6, N. 2. — с. 138–140.
- A3. Ekomasov, E.G. Resonance dynamics of kinks in the sine-Gordon model with impurity, external force and damping / E.G. Ekomasov, A.M. Gumerov, R.V. Kudryavtsev // Journal of Computational and Applied Mathematics. — 2017. — V. 312. — p. 198–208.

- A4. Екомасов, Е.Г. Одномерная динамика магнитных неоднородностей в трёх-слойной ферромагнитной структуре с различными значениями магнитных параметров / Е.Г. Екомасов, Р.В. Кудрявцев, А.М. Гумеров // Письма о материалах. — 2017. — Т. 7, N. 2. — с. 160–164.
- A5. Gumerov, A.M. Localized magnetic inhomogeneities generation on defects as a new channel of damping for a moving domain wall / A.M. Gumerov, E.G. Ekomasov, R.V. Kudryavtsev, M.I. Fakhretdinov // Letters on materials. — 2018. — V. 8, N. 3. — p. 299–304.
- Тезисы в сборниках материалов российских и международных конференций:
- A6. Ekomasov, E.G. Resonant dynamics of the domain walls in multilayer ferromagnetic structure / E.G. Ekomasov, A.M. Gumerov, R.R. Murtazin, R.V. Kudryavtsev, A.E. Ekomasov, N.N. Abakumova // Moscow International Symposium on Magnetism (MISM). Book of Abstracts. — Faculty of Physics M.V. Lomonosov MSU, Moscow, 2014. — p. 164.
- A7. Абакумова, Н.Н. Резонансная динамика доменных стенок в многослойных ферромагнитных структурах / Н.Н. Абакумова, А.М. Гумеров, Р.Р. Муртазин, Р.В. Кудрявцев, С.В. Дмитриев, Е.Г. Екомасов // Тезисы докладов VI Байкальской Международной конференции «Магнитные материалы. Новые технологии». — Иркутск, издательство ИГУ, 2014. — с. 120.
- A8. Абакумова, Н.Н. Резонансная динамика доменных стенок в многослойных ферромагнитных структурах / Н.Н. Абакумова, А.М. Гумеров, Р.Р. Муртазин, Р.В. Кудрявцев, С.В. Дмитриев, Е.Г. Екомасов // Сборник тезисов докладов открытой школы-конференции стран СНГ «Ультрамелкозернистые и наноструктурные материалы». — Уфа, РИЦ БашГУ, 2014. — с. 78.
- A9. Гумеров, А.М. Резонансные кинк-примесные взаимодействия в модели синус-Гордона / А.М. Гумеров, Р.В. Кудрявцев, Н.Н. Абакумова // Тезисы докладов VII Международной школы-конференции для студентов, аспирантов и молодых учёных «Фундаментальная математика и её приложения в естествознании». — Уфа, РИЦ БашГУ, 2014. — с. 9.
- A10. Гумеров, А.М. Кинк-примесные взаимодействия в модели синус-Гордона / А.М. Гумеров, Р.В. Кудрявцев, Н.Н. Абакумова // Сборник тезисов докладов и сообщений на II Всероссийской конференции «Нелинейные и резонансные явления в конденсированных средах». — Уфа, ИФМК УНЦ РАН, 2014. — с.9.
- A11. Абакумова, Н.Н. Исследование резонансных кинк-примесных взаимодействий в модели синус-Гордона / Н.Н. Абакумова, А.М. Гумеров, Р.В. Кудрявцев // Тезисы докладов II Всероссийской научной молодёжной конференции «Актуальные проблемы нано- и микроэлектроники». — Уфа, РИЦ БашГУ, 2014. — с. 183.
- A12. Ekomasov, E.G. One-dimensional resonant dynamics of the domain walls in a multilayer ferromagnetic structure / E.G. Ekomasov, A.M. Gumerov, R.V. Kudryavtsev, R.R. Murtazin, N.N. Abakumova // International Symposium «Spin Waves 2015». Program Abstracts. — Ioffe Physical-Technical Institute, Saint Petersburg, Russia, 2015. — p. 121.

- A13. Ekomasov, E.G. Interaction of sine-Gordon solitons in the model with attracting impurities and damping / E.G. Ekomasov, A.M. Gumerov, R.V. Kudryavtsev // The International Conference «Mathematical and Computational Modelling in Science and Technology». Abstract Book. — Izmir University, Turkey, 2015. — p. 14–15.
- A14. Екомасов, Е.Г. Резонансная динамика доменных границ в мультислойных ферромагнитных структурах / Е.Г. Екомасов, А.М. Гумеров, Р.В. Кудрявцев, Н.Н. Абакумова, Р.Р. Муртазин // Тезисы докладов Международной конференции, посвящённой 80-летию члена-корреспондента РАН И.К. Камилова «Фазовые переходы, критические и нелинейные явления в конденсированных средах». — Челябинск, Издательство Челябинского государственного университета, 2015. — с. 117.
- A15. Екомасов, Е.Г. Теоретическое исследование кинк-примесных взаимодействий в модели синус-Гордона / Е.Г. Екомасов, А.М. Гумеров, Р.Р. Муртазин, Р.В. Кудрявцев, Н.Н. Абакумова // Сборник тезисов школы-семинара с международным участием «Дискретные бризеры в кристаллах». — Уфа, Институт проблем сверхпластичности металлов РАН, 2015. — с. 39.
- A16. Гумеров, А.М. Резонансные кинк-примесные взаимодействия в модели синус-Гордона с учётом внешней силы и затухания / А.М. Гумеров, Р.В. Кудрявцев, Н.Н. Абакумова // Тезисы докладов VIII Международной школы-конференции для студентов, аспирантов и молодых учёных «Фундаментальная математика и её приложения в естествознании». — Уфа, РИЦ БашГУ, 2015. — с. 7.
- A17. Абакумова, Н.Н. Теоретическое исследование резонансной динамики магнитных неоднородностей в многослойных ферромагнетиках / Н.Н. Абакумова, Ю.С. Васильева, А.М. Гумеров, Р.В. Кудрявцев // Сборник тезисов докладов III Всероссийской научной молодёжной конференции «Актуальные проблемы нано- и микроэлектроники». — Уфа, РИЦ БашГУ, 2015. — с. 168.
- A18. Ekomasov, E.G. Research resonance dynamics of the domain walls in multilayer ferromagnetic structure / E.G. Ekomasov, A.M. Gumerov, R.V. Kudryavtsev, N.N. Abakumova, J.S. Vasilieva // VI Euro-Asian Symposium “Trends in MAGnetism” (EASTMAG–2016): Abstracts. — Krasnoyarsk, Kirensky Institute of Physics, Russian Academy of Sciences, Siberian Branch, 2016. — p. 280.
- A19. Екомасов, Е.Г. Кинк-примесные взаимодействия в модели синус-Гордона с учётом внешней силы и затухания / Е.Г. Екомасов, Р.В. Кудрявцев, А.М. Гумеров, Н.Н. Абакумова // Сборник тезисов Уфимской международной математической конференции. — Уфа, РИЦ БашГУ, 2016. — с. 53–54.
- A20. Кудрявцев, Р.В. Исследование резонансных кинк-примесных взаимодействий в модели синус-Гордона / Р.В. Кудрявцев, А.М. Гумеров, Н.Н. Абакумова, Ю.С. Васильева // Тезисы докладов IX Международной школы-конференции для студентов, аспирантов и молодых учёных «Фундаментальная математика и её приложения в естествознании». — Уфа, РИЦ БашГУ, 2016. — с. 13.

- A21. Васильева, Ю.С. Теоретическое исследование динамики солитонов уравнения синус-Гордона с учётом внешней силы и затухания / Ю.С. Васильева, Р.В. Кудрявцев, Н.Н. Абакумова, А.М. Гумеров, Р.Р. Муртазин // Материалы конференции «Двадцать третья Всероссийская научная конференция студентов-физиков и молодых учёных» (ВНКСФ-23). — Екатеринбург, Уральское издательство, 2017. — с. 56.
- A22. Кудрявцев, Р.В. Теоретическое исследование кинк-примесных взаимодействий в модели синус-Гордона с учётом внешней силы и затухания / Р.В. Кудрявцев, А.М. Гумеров, Н.Н. Абакумова, Ю.С. Васильева // Материалы III Межрегиональной школы-конференции студентов, аспирантов и молодых учёных-физиков «Теоретические и экспериментальные исследования нелинейных процессов в конденсированных средах». — Уфа, РИЦ БашГУ, 2017. — с. 3.
- A23. Ekomasov, E.G. Resonant interaction of magnetic breathers and domain walls in multilayer ferromagnetic structures / E.G. Ekomasov, A.M. Gumerov, R.V. Kudryavtsev, N.N. Abakumova // Book of Abstract Moscow International Symposium on Magnetism (MISM). — Moscow, Faculty of Physics M.V. Lomonosov MSU, 2017. — p. 799.
- A24. Капитонов, И.В. Моделирование динамики солитонов одномерного уравнения синус-Гордона в модели с примесями и затуханием / И.В. Капитонов, Р.В. Кудрявцев // Материалы VII Международной молодежной научно-практической конференции «Математическое моделирование процессов и систем», Часть II. — Уфа, 2017. — с. 31–32.
- A25. Екомасов, Е.Г. Структура и динамика солитонов модифицированного уравнения синус-Гордона с учётом примесей, внешней силы и затухания / Е.Г. Екомасов, А.М. Гумеров, Р.К. Салимов, Р.В. Кудрявцев, И.В. Капитонов // Сборник тезисов Международной научной конференции «Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения». — Уфа: Изд-во БГПУ, 2018. — с. 36–37.
- A26. Кудрявцев, Р.В. Структура и динамика солитонов модифицированного уравнения синус-Гордона с учётом примесей, внешней силы и затухания / Р.В. Кудрявцев, И.В. Капитонов, А.М. Гумеров // Сборник тезисов докладов V Всероссийской научной молодёжной конференции с международным участием «Актуальные проблемы нано- и микроэлектроники». — Уфа, РИЦ БашГУ, 2018. — с. 23.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Косевич, А.М. Введение в нелинейную физическую механику / А.М. Косевич, А.С. Ковалев. — Киев: Наук. думка, 1989. — 304 с.
2. Захаров, В.Е. Теория солитонов: метод обратной задачи / В.Е. Захаров, С.В. Манаков, С.П. Новиков, Л.П. Питаевский. — М.: Наука, 1980. — 321 с.
3. Hirota, R. The Direct Method in Soliton Theory / R. Hirota. — New York: Cambridge University Press, 2004. — 212 p.

4. Лонгрен, К. Солитоны в действии / Под редакцией К. Лонгрена и Э. Скотта. Перевод на русский язык — М.: Мир, 1981. — 312 с.
5. Молотков, И.А. Аналитические методы в теории нелинейных волн / И.А. Молотков. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 208 с.
6. Додд, Р. Солитоны и нелинейные волновые уравнения / Р. Додд, Дж. Эйлбек, Дж. Гиббон, Х. Моррис. Пер. с англ. — М.: Мир, 1988. — 694 с.
7. Cuevas-Maraver, J. The Sine-Gordon Model and Its Applications: From Pendula and Josephson Junctions to Gravity and High-energy Physics / J. Cuevas-Maraver, P. G. Kevrekidis, F. Williams (Eds.) // Springer. — 2014. — V. 10. — P. 263.
8. Браун, О.М. Модель Френкеля-Конторовой: Концепции, методы, приложения / О.М. Браун, Ю.С. Кившарь. Пер. с англ. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. — 536 с.
9. Dauxois, T. Physics of solitons / T. Dauxois, M. Peyrard. — New York: Cambridge University Press, 2010. — 436 p.
10. Ivancevic, V.G. Sine-Gordon Solitons, Kinks and Breathers as Physical Models of Nonlinear Excitations in Living Cellular Structures / Vladimir G. Ivancevic, Tijana T. Ivancevic // Journal of Geometry and Symmetry in Physics. — 2013. — V. 31. — P. 1–56.
11. Шамсутдинов, М.А. Ферро- и антиферромагнитодинамика. Нелинейные колебания, волны и солитоны / М.А. Шамсутдинов, И.Ю. Ломакина, В.Н. Назаров, А.Т. Харисов, Д.М. Шамсутдинов. — М.: Наука, 2009. — 456 с.
12. Борисов, А.Б. Квазиодномерные магнитные солитоны / А.Б. Борисов, В.В. Киселёв. — Москва, ФИЗМАТЛИТ, 2014. — 520 с.
13. Ekomasov, E.G. One-dimensional dynamics of domain walls in two-layer ferromagnet structure with different parameters of magnetic anisotropy and exchange / E.G. Ekomasov, R.R. Murtazin, O.B. Bogomazova, A.M. Gumerov // Journal of Magnetism and Magnetic Materials. — 2013. — V. 339. — P. 133–137.